

Kapitel II.

Der analytische Charakter der Biegungsflächen.

§ 5. Der Nachweis des analytischen Charakters durch trigonometrische Reihen.

Jede Potenzreihe von zwei Veränderlichen

$$a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots$$

kann man durch Einführung von Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

in eine trigonometrische Reihe verwandeln, deren Koeffizienten Potenzreihen von r sind. Lautet die trigonometrische Reihe

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi,$$

so haben die Koeffizienten stets die Form

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n,n} r^n + a_{n+2,n} r^{n+2} + a_{n+4,n} r^{n+4} + \dots, \\ b_n &= b_{n,n} r^n + b_{n+2,n} r^{n+2} + b_{n+4,n} r^{n+4} + \dots, \end{aligned}$$

wo die $a_{i,k}$ und $b_{i,k}$ Konstanten sind. Umgekehrt lässt sich jede trigonometrische Reihe von dieser Form in eine konvergente Potenzreihe von x und y verwandeln.

Auf diese Sätze gestützt hat Picard bewiesen, dass alle Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u \quad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Potenzreihen in x und y sind, und durch Verallgemeinerung dieser Methoden habe ich dasselbe für sämtliche elliptischen Differentialgleichungen, die einem regulären Variationsproblem entstammen, bewiesen.

Grundlegend für die Lösung dieser Aufgaben ist die Integration der Gleichung

$$\Delta u = f(x, y)$$

durch trigonometrische Reihen und die Abschätzung ihrer Koeffizienten. Ist

$$f(x, y) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos n\varphi + b_n(r) \sin n\varphi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n,n} r^n + a_{n+2,n} r^{n+2} + a_{n+4,n} r^{n+4} + \dots, \\ b_n &= b_{n,n} r^n + b_{n+2,n} r^{n+2} + b_{n+4,n} r^{n+4} + \dots, \end{aligned}$$

wenn man $x=r\cos\varphi$ und $y=r\sin\varphi$ einführt, und macht man den Ansatz

$$u = \alpha_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r) \cos n\varphi + \beta_n(r) \sin n\varphi,$$

so ergeben sich für die Koeffizienten dieser Reihe die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\alpha_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\alpha_0}{dr} = a_0,$$

$$\frac{d^2\alpha_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\alpha_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \alpha_n = a_n, \quad \frac{d^2\beta_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\beta_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \beta_n = b_n.$$

Die Integrale dieser Gleichung, welche für $r=R$ verschwinden und für $r < R$ endlich und stetig sind, lauten

$$\alpha_0 = \int_R^r \left(\frac{\int_0^R a_0 dr}{r} \right) dr,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2n} \left[r^n \int_R^r \frac{a_n}{r^{n-1}} dr - \frac{1}{r^n} \int_0^r a_n r^{n+1} dr + \frac{r^n}{R^{2n}} \int_0^R a_n r^{n+1} dr \right],$$

$$\beta_n = \frac{1}{2n} \left[r^n \int_R^r \frac{b_n}{r^{n-1}} dr - \frac{1}{r^n} \int_0^r b_n r^{n+1} dr + \frac{r^n}{R^{2n}} \int_0^R b_n r^{n+1} dr \right].$$

Die Koeffizienten haben, wie man sofort sieht, die analytische Form:

$$\alpha_n = \alpha_{n,n} r^n + \alpha_{n+2,n} r^{n+2} + \alpha_{n+4,n} r^{n+4} + \dots,$$

$$\beta_n = \beta_{n,n} r^n + \beta_{n+2,n} r^{n+2} + \beta_{n+4,n} r^{n+4} + \dots$$

Setzt man

$$A_n = \alpha_{n,n} r^n + \alpha_{n+2,n} r^{n+2} + \alpha_{n+4,n} r^{n+4} + \dots,$$

$$B_n = \beta_{n,n} r^n + \beta_{n+2,n} r^{n+2} + \beta_{n+4,n} r^{n+4} + \dots,$$

$$A_n = \alpha_{n,n} r^n + \alpha_{n+2,n} r^{n+2} + \alpha_{n+4,n} r^{n+4} + \dots,$$

$$B_n = \beta_{n,n} r^n + \beta_{n+2,n} r^{n+2} + \beta_{n+4,n} r^{n+4} + \dots,$$

indem man für alle Glieder ihre absoluten Beträge einführt, so findet man durch Abschätzung

$$A_n < \frac{4A_n r^2}{n^2}, \quad B_n < \frac{4B_n r^2}{n^2}.$$

Da

$$A_0 + \sum A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$$

konvergent ist, stellt u eine analytische Funktion dar.

Wir wollen

$$A_n = \frac{n}{u}$$

setzen, d. h. $\frac{n}{u}$ bedeutet den Koeffizienten von $\cos n\varphi$ in der trigonometrischen Reihe für u , wenn man alle Glieder der Potenzreihe von r , welche diesen Koeffizienten darstellt, durch ihre absoluten Beträge ersetzt hat. Da B_n sich genau so wie A_n verhält, brauchen wir es künftig nicht mehr besonders zu berücksichtigen.

Für die Folge wird es wichtig sein, auch die Differentialquotienten von u auf ihr analytisches Verhalten zu untersuchen. Wir wollen $\frac{\partial u}{\partial x}$ bilden, d. h. den Koeffizienten von

$\cos n\varphi$ in der trigonometrischen Reihe für $\frac{\partial u}{\partial x}$, nachdem man sämtliche Glieder des Koeffizienten durch ihre absoluten Beträge ersetzt hat. Wir finden

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = & \left(\frac{1}{2} \frac{da_1}{dr} - \frac{a_1}{r} \right) + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{da_{n-1}}{dr} + \frac{da_{n+1}}{dr} + \frac{n-1}{r} a_{n-1} - \frac{n+1}{r} a_{n+1} \right) \cos n\varphi, \\ & + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{d\beta_{n-1}}{dr} + \frac{d\beta_{n+1}}{dr} - \frac{n-1}{r} \beta_{n-1} + \frac{n+1}{r} \beta_{n+1} \right) \sin n\varphi. \end{aligned}$$

Aus

$$\frac{da_n}{dr} = \frac{1}{2} \left[r^{n-1} \int_R^r \frac{a_n}{r^{n-1}} dr + \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^r a_n r^{n+1} dr + \frac{r^{n-1}}{R^{2n}} \int_0^R a_n r^{n-1} dr \right]$$

folgt durch Abschätzen

$$\frac{dA_n}{dr} < \frac{4A_n r}{n},$$

und es wird

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{u} < \frac{\lambda A_n r}{n}.$$

Ahnlich finden wir durch Differenzieren und Abschätzen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_n}{dr^2} = & \frac{1}{2} \left[(n-1) r^{n-2} \int_R^r \frac{a_n}{r^{n-1}} dr - \frac{n+1}{r^{n+2}} \int_0^r a_n r^{n+1} dr + \frac{(n-1) r^{n-2}}{R^{2n}} \int_0^R a_n r^{n-1} dr \right] + a_n, \\ \frac{d^2 A_n}{dr^2} & < 4A_n, \end{aligned}$$

und

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{u} < \lambda A_n.$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 a_n}{dr^3} = & \frac{1}{2} \left[(n-1)(n-2) r^{n-3} \int_R^r \frac{a_n}{r^{n-1}} dr + \frac{(n+1)(n+2)}{r^{n+3}} \int_0^r a_n r^{n+1} dr + \frac{(n-1)(n-2) r^{n-3}}{R^{2n}} \int_0^R a_n r^{n-1} dr \right] \\ & - \frac{a_n}{r} + \frac{da_n}{dr}, \end{aligned}$$

$$\frac{d^3 A_n}{dr^3} < \frac{4nA_n}{r} + \frac{dA_n}{dr},$$

und

$$\frac{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}}{u} < \lambda \left(\frac{nA_n}{r} + \frac{dA_n}{dr} \right).$$

Der Gleichförmigkeit halber setzen wir

$$\frac{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}}{u} < \frac{\lambda A_n r^2}{n^2}.$$

λ bedeutet eine Zahl, die zwischen 1 und 100 liegt.

Die anderen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ etc. verhalten sich ebenso wie die Ableitungen derselben Ordnung nach x .

Wir wollen uns nun für einen Moment der Potentialgleichung

$$\Delta u = 0$$

zuwenden. Führt man Polarkoordinaten ein und gibt für $r=R$ willkürliche Randwerte

$$u(R, \varphi) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos n\varphi + q_n \sin n\varphi,$$

wo p und q von R abhängige Konstanten sind, so wird die Potentialgleichung bekanntlich durch die Reihe

$$u(r, \varphi) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left[p_n \cos n\varphi + q_n \sin n\varphi \right]$$

gelöst. Nach der Theorie der trigonometrischen Reihen haben wir

$$p_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \psi) \cos n\psi d\psi, \quad q_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \psi) \sin n\psi d\psi.$$

Setzt man voraus, dass die Randwerte Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung zulassen, so erhält man durch zweimalige partielle Integration

$$p_n = -\frac{1}{n^2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u(R, \psi)}{\partial \psi^2} \cos n\psi d\psi, \quad q_n = -\frac{1}{n^2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u(R, \psi)}{\partial \psi^2} \sin n\psi d\psi.$$

Durch Abschätzen dieser Integrale erhält man

$$|p_n| < \frac{hR}{n^2}, \quad |q_n| < \frac{hR}{n^2},$$

wo

$$hR = 2 \left| \frac{\partial^2 u(R, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right|_{\max}$$

ist. (Alle Ableitungen von $u(R, \varphi)$ nach φ enthalten, wie man leicht sieht, den Faktor R .)

Bildet man

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{R} \left[(p_{n-1} + p_{n+1} - q_{n-1} + q_{n+1}) \cos n\varphi + (p_{n-1} + p_{n+1} + q_{n-1} + q_{n+1}) \sin n\varphi \right] \left(\frac{r}{R}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (p'_n \cos n\varphi + q'_n \sin n\varphi) \left(\frac{r}{R}\right)^n, \end{aligned}$$

so erhält man durch Abschätzen

$$|p'_n| < \frac{5h}{n}, \quad |q'_n| < \frac{5h}{n}.$$

Nun genügt $\frac{\partial u}{\partial x}$ auch der Potentialgleichung, d. h. es ist

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

folglich haben wir, wenn wir für die Randwerte die Existenz von dritten Ableitungen voraussetzen:

$$|p'_n| < \frac{h'R}{n^2}, \quad |q'_n| < \frac{h'R}{n^2},$$

wo

$$h'R = 2 \left| \frac{\partial^3 u(R, \varphi)}{\partial \varphi^3} \right|_{\max}$$

ist. Mithin ist h mit $\frac{R}{n}$ proportional und wir haben

$$|p_n| < \frac{h' R^2}{n^3}, \quad |q_n| < \frac{h' R^2}{n^3}.$$

Dann wird

$$\frac{n}{u} < \frac{h' R^2}{n^3} \left(\frac{r}{R}\right)^n < \frac{h' r^2}{n^3}.$$

Bedeutet λ wiederum eine Konstante zwischen 1 und 100, so hat man

$$\frac{n}{u} < \frac{\lambda h' r^2}{n^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} < \frac{\lambda h' r}{n^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < \frac{\lambda h'}{n}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} < \frac{\lambda h'}{r}.$$

Setzen wir voraus, dass die Randwerte vierte Ableitungen besitzen, so ist

$$\frac{n}{u} < \frac{\lambda h' r^3}{n^4}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} < \frac{\lambda h' r^2}{n^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < \frac{\lambda h' r}{n^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} < \frac{\lambda h''}{n}.$$

§ 6. Die Gleichungen $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = a(u, v) \vartheta$ und $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = a(u, v) \vartheta + b(u, v)$.

Da unser Problem auf partielle Differentialgleichungen von der Form $\Delta \vartheta = a \vartheta$ und $\Delta \vartheta = a \vartheta + b$ führt, wollen wir diese Gleichungen zunächst behandeln. Die Gleichung

$$\Delta \vartheta = a \vartheta,$$

wo $a(u, v)$ eine analytische Funktion in u und v ist, soll für die Fläche eines Kreises mit dem Radius R so integriert werden, dass ϑ im Innern des Kreises endlich und stetig ist und auf der Peripherie willkürliche Werte annimmt. Diese Randwerte sollen jedoch Differentialquotienten der ersten drei Ordnungen zulassen. Nach dem Picardschen Näherungsverfahren bilden wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta_1 &= 0, \\ \Delta \vartheta_2 &= a \vartheta_1, \\ \Delta \vartheta_3 &= a \vartheta_2, \\ \Delta \vartheta_4 &= a \vartheta_3, \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Die erste Gleichung wird so integriert, dass ϑ_1 endlich und stetig wird und auf der Peripherie die genannten willkürlichen Werte annimmt. Alle anderen Gleichungen werden ebenfalls für die Fläche des Kreises R integriert, jedoch so, dass $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \dots$ auf der Peripherie verschwinden und im Innern des Kreises endlich und stetig sind. Dann ist

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 + \dots = \vartheta$$

die gesuchte Lösung unserer Gleichung. (Die Lösung ist eindeutig.)

Nach den Entwicklungen des § 5 ist für die Potentialgleichung $\Delta \vartheta_1 = 0$:

$$\frac{n}{\vartheta_1} < \frac{h r^2}{n^3}, \quad \frac{\partial \vartheta_1}{\partial u} < \frac{h r}{n^2}.$$

(Der Kürze halber haben wir für h für h' gesetzt.)

Um die zweite Gleichung $\Delta \vartheta_2 = a \vartheta_1$ behandeln zu können, müsste man die trigonometrischen Reihen für a und ϑ_1 miteinander multiplizieren und eine neue trigonometrische

Reihe bilden. In der Potenzreihe, die dann den Koeffizienten von $\cos n\varphi$ darstellt, sind alle Glieder positiv zu nehmen. So erhält man $\frac{n}{a\vartheta_1}$. Nun sei

$$\begin{aligned} a &= a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos n\varphi + b_n(r) \sin n\varphi, \\ \vartheta_1 &= \alpha_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r) \cos n\varphi + \beta_n(r) \sin n\varphi, \\ a\vartheta_1 &= \gamma_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(r) \cos n\varphi + \delta_n(r) \sin n\varphi. \end{aligned}$$

a und ϑ_1 sind analytische Funktionen. Ist

$$A_n < \frac{h}{n^2}, \quad A_n < \frac{k}{n^2}$$

so folgt

$$\Gamma_n < \frac{20hk}{n^2},$$

wie ich in meiner Dissertation pg. 16 und 17 gezeigt habe. [Hätte man

$$a + \vartheta_1 = \varepsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(r) \cos n\varphi + \zeta_n(r) \sin n\varphi,$$

so ist

$$E_n \leq \frac{h+k}{n^2}.$$

Wir dürfen nun ohne weiteres

$$\frac{n}{a} < \frac{\varkappa}{n^2}$$

annehmen, da $a(u, v)$ eine analytische Funktion ist, die keinerlei Randbedingungen unterworfen ist. Dann wird

$$\frac{n}{a\vartheta_1} < \frac{20\varkappa hr^2}{n^3}.$$

Nach § 5 ist für die Gleichung $\Delta\vartheta_2 = a\vartheta_1$

$$\frac{n}{\vartheta_2} < \frac{\lambda a\vartheta_1 r^2}{n^2}, \quad \frac{\partial\vartheta_2}{\partial u} < \frac{\lambda a\vartheta_1 r}{n},$$

$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)$ verhält sich immer so wie $\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)$ also sicher

$$\frac{n}{\vartheta_2} < \frac{hr^2}{n^3} 20\varkappa\lambda R^2; \quad \frac{\partial\vartheta_2}{\partial u} < \frac{hr}{n^2} 20\varkappa\lambda R^2.$$

Weiter ist

$$\frac{n}{a\vartheta_2} < 20\varkappa \frac{hr^2}{n^3} 20\varkappa\lambda R^2,$$

und aus $\Delta\vartheta_3 = a\vartheta_2$ folgt

$$\frac{n}{\vartheta_3} < \frac{hr^2}{n^3} (20\varkappa\lambda R^2)^2; \quad \frac{\partial\vartheta_3}{\partial u} < \frac{hr}{n^2} (20\varkappa\lambda R^2)^2.$$

Ebenso erhält man

$$\begin{aligned} \frac{n}{\vartheta_4} &< \frac{hr^2}{n^3} (20 \kappa \lambda R^2)^3; & \frac{\partial \vartheta_4}{\partial u} &< \frac{hr}{n^2} (20 \kappa \lambda R^2)^3, \\ &\dots & & \dots \\ \frac{n}{\vartheta_m} &< \frac{hr^2}{n^3} (20 \kappa \lambda R^2)^{m-1}; & \frac{\partial \vartheta_m}{\partial u} &< \frac{hr}{n^2} (20 \kappa \lambda R^2)^{m-1}. \end{aligned}$$

Demnach wird

$$\frac{n}{\vartheta} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n}{\vartheta_m} = \frac{hr^2}{n^3} [1 + 20 \kappa \lambda R^2 + (20 \kappa \lambda R^2)^2 + 20 \kappa \lambda R^2^3 + \dots].$$

Wird R genügend klein gewählt, so dass

$$20 \kappa \lambda R^2 < 1$$

ist, so haben wir

$$\frac{n}{\vartheta} < \frac{hr^2}{n^3} \frac{1}{1 - 20 \kappa \lambda R^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial u} < \frac{hr}{n^2} \frac{1}{1 - 20 \kappa \lambda R^2}.$$

Setzt man endlich

$$\frac{1}{1 - 20 \kappa \lambda R^2} = k,$$

so wird

$$\frac{n}{\vartheta} < \frac{hkr^2}{n^3}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial u} < \frac{hkr}{n^2}.$$

Die Gleichung

$$\Delta \vartheta = a \vartheta + b,$$

wobei $a(u, v)$ und $b(u, v)$ analytische Funktionen in u und v sind, soll für die Fläche eines Kreises R so integriert werden, dass ϑ im Innern des Kreises endlich und stetig ist und auf der Peripherie willkürliche Randwerte annimmt, die wiederum Differentialquotienten der drei ersten Ordnungen zulassen. Unser Näherungssystem lautet:

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta_1 &= b, \\ \Delta \vartheta_2 &= a \vartheta_1, \\ \Delta \vartheta_3 &= a \vartheta_2, \\ \Delta \vartheta_4 &= a \vartheta_3, \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Wir integrieren die erste Gleichung so, dass ϑ_1 auf der Peripherie die willkürlichen Randwerte annimmt, die anderen Gleichungen so, dass $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4 \dots$ auf der Peripherie verschwinden. Dann stellt

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 + \dots$$

wieder das Integral unserer Gleichung dar. (Die Lösung ist wiederum, wenn der Kreis genügend klein ist, eindeutig.)

Setzen wir

$$\vartheta_1 = \pi + \chi,$$

so ist $\Delta\pi = 0$ mit den gegebenen Randwerten, $\Delta\chi = b$ mit den Randwerten 0 zu integrieren. Wir erhalten

$$\frac{n}{\pi} < \frac{hr^2}{n^3}, \quad \frac{n}{\chi} < \frac{\lambda b r^2}{n^2}; \quad \frac{n}{\vartheta_1} < \frac{hr^2}{n^3} + \frac{\lambda b r^2}{n^2}.$$

$b(u, v)$ ist analytische Funktion ohne Einschränkung; wir können daher, wenn γ eine Konstante bedeutet,

$$\frac{n}{b} < \frac{\gamma}{n^2}$$

annehmen. Dann ist

$$\frac{n}{\vartheta_1} < \frac{(h+\lambda\gamma)r^2}{n^3}; \quad \frac{\partial\vartheta_1}{\partial u} < \frac{(h+\lambda\gamma)r}{n^2}.$$

Für die anderen Gleichungen des Näherungssystems erhalten wir wie oben

$$\begin{aligned} \frac{n}{\vartheta_2} &< \frac{(h+\lambda\gamma)r^2}{n^3} 20\kappa\lambda R^2; & \frac{\partial\vartheta_2}{\partial u} &< \frac{(h+\lambda\gamma)r}{n^2} 20\kappa\lambda R^2; \\ \frac{n}{\vartheta_3} &< \frac{(h+\lambda\gamma)r^2}{n^3} (20\kappa\lambda R^2)^2; & \frac{\partial\vartheta_3}{\partial u} &< \frac{(h+\lambda\gamma)r}{n^2} (20\kappa\lambda R^2)^2; \\ \frac{n}{\vartheta_4} &< \frac{(h+\lambda\gamma)r^2}{n^3} (20\kappa\lambda R^2)^3; & \frac{\partial\vartheta_4}{\partial u} &< \frac{(h+\lambda\gamma)r}{n^2} (20\kappa\lambda R^2)^3; \\ & \dots & & \dots \\ & \dots & & \dots \end{aligned}$$

Wir finden

$$\frac{n}{\vartheta} < \frac{(h+\lambda\gamma)kr^2}{n^3}; \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial u} < \frac{(h+\lambda\gamma)kr}{n^2}.$$

Dass die Lösungen der Gleichungen $\Delta\vartheta = a\vartheta$ und $\Delta\vartheta = a\vartheta + b$ analytische Funktionen sind, folgt aus der Konvergenz ihrer trigonometrischen Reihen. Diese besitzen die analytische Form, weil beim Näherungsverfahren alle Differentialgleichungen nur Lösungen von analytischer Form der trigonometrischen Reihen zulassen.

§ 7. Der Konvergenzbeweis.

Nach den Entwicklungen von § 6 finden wir für die Gleichung

$$\Delta\vartheta_1 = a\vartheta_1,$$

die unter beliebigen Randwerten für eine Kreisfläche mit dem Radius R integriert wird,

$$\frac{n}{\vartheta_1} < \frac{hkr^2}{n^3}, \quad \frac{\partial\vartheta_1}{\partial u} < \frac{hkr}{n^2}, \quad \frac{\partial\vartheta_1}{\partial v} < \frac{hkr}{n^2},$$

wo nur vorausgesetzt wird, dass die Randwertreihe dritte Ableitungen besitzt. Nun ist

$$\Delta x_1 = U \frac{\partial\vartheta_1}{\partial u} + V \frac{\partial\vartheta_1}{\partial v}.$$

Diese Gleichung ist wieder für eine Kreisfläche R mit einer willkürlichen Randwertreihe zu integrieren; die Randwertreihe soll aber Ableitungen bis zur vierten Ordnung besitzen.

Das Integral ist gleich einer Potentialfunktion, welche diese Randwerte besitzt, vermehrt um die Lösung der Gleichung selbst für die Randwerte o . Nach den Bemerkungen über den Koeffizienten von $\cos n\varphi$ in einer Reihe, die das Produkt von zwei trigonometrischen Reihen darstellt, haben wir

$$U \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + V \frac{\partial \theta_1}{\partial v} < \kappa \frac{\partial \theta_1}{\partial u},$$

wo κ aus der zu verbiegenden analytischen Fläche entspringt. Nach § 5 ist daher

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} < \frac{\lambda h r^3}{n^4} + \frac{\lambda \kappa \frac{\partial \theta_1}{\partial u} r^2}{n^2}.$$

Führen wir

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial u} < \frac{hkr}{n^2}$$

ein, so wird

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} < \frac{\lambda h r^3}{n^4} + \frac{\lambda \kappa h k r^3}{n^4},$$

und wenn wir

$$\lambda(h + \kappa h k) = c_1$$

setzen:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} < \frac{c_1 r^3}{n^4}.$$

Dann wird nach § 5

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} < \frac{c_1 r^2}{n^3}, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} < \frac{c_1 r}{n^2}, \quad \frac{\partial^3 x_1}{\partial u^3} < \frac{c_1}{n}.$$

Wie diese Ableitungen verhalten sich alle Ableitungen der gleichen Ordnung. Dieselben Ungleichungen, die für x_1 und seine Ableitungen gelten, sind auch für y_1 und z_1 und deren Ableitungen gültig. Nach § 4 ist

$$e_2 = \frac{1}{2} \Sigma \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2,$$

und wir haben

$$e_2 < 3 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2.$$

Nun ist aber

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2 < 20 n^2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2,$$

d. h.

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2 < \frac{20 c_1^2 r^4}{n^4},$$

und

$$e_2 < \frac{60 \cdot \frac{1}{2} c_1^2 r^4}{n^4}.$$

Wir haben

$$\frac{\partial e_2}{\partial u} < \sum \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 e_2}{\partial u^2} = \sum \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial^3 x_1}{\partial u^3} + \sum \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} \right)^2,$$

also

$$\frac{\frac{n}{\partial e_2}}{\partial u} = \frac{2 \cdot 60 \cdot \frac{1}{2} c_1^2 r^3}{n^3},$$

$$\frac{\frac{n}{\partial^2 e_2}}{\partial u^2} < \frac{2^2 \cdot 60 \cdot \frac{1}{2} c_1^2 r^2}{n^2}.$$

Ebenso verhalten sich die anderen Ableitungen von e_2 , f_2 und g_2 derselben Ordnung. Es ist

$$b_2 = A e_2 + B f_2 + C g_2 + A_1 \frac{\partial e_2}{\partial u} + A_2 \frac{\partial e_2}{\partial v} + B_1 \frac{\partial f_2}{\partial u} + B_2 \frac{\partial f_2}{\partial v} + C_1 \frac{\partial g_2}{\partial u} + C_2 \frac{\partial g_2}{\partial v}$$

$$+ A'' \frac{\partial^2 e_2}{\partial u \partial v} + B' \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial v^2} \right) + C' \frac{\partial^2 g_2}{\partial u \partial v},$$

wo die Koeffizienten aus der zu verbiegenden Fläche stammen, also analytisch sind. Wir können daher κ_1 so bestimmen, dass

$$\frac{n}{b_2} < \kappa_1 \left(3 \frac{n}{e_2} + 6 \frac{\frac{n}{\partial e_2}}{\partial u} + 9 \frac{\frac{n}{\partial^2 e_2}}{\partial u^2} \right).$$

Führen wir die oberen Grenzen ein, so wird

$$\frac{n}{b_2} < \frac{60 \kappa_1 r^2}{n^2} \frac{1}{2} c_1^2 \left[3 \left(\frac{r}{n} \right)^2 + 2 \cdot 6 \left(\frac{r}{n} \right) + 2^2 \cdot 9 \right],$$

und wenn

$$60 \kappa_1 r \left[3 \left(\frac{r}{n} \right)^2 + 2 \cdot 6 \left(\frac{r}{n} \right) + 2^2 \cdot 9 \right] < \gamma$$

gesetzt wird,

$$\frac{n}{b_2} < \frac{\gamma r}{n^2} \frac{1}{2} c_1^2.$$

Dasselbe Resultat erhalten wir für σ_2 :

$$\frac{n}{\sigma_2} < \frac{\gamma r}{n^2} \frac{1}{2} c_1^2.$$

Die Gleichung

$$\Delta \vartheta_2 = a \vartheta_2 + b_2$$

wird für die Fläche des Kreises R mit beliebigen, dreimal differentiierten Randwerten integriert. Haben wir das Näherungssystem

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta_{21} &= b_2, \\ \Delta \vartheta_{22} &= a \vartheta_{21}, \\ \Delta \vartheta_{23} &= a \vartheta_{22}, \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

und

$$\vartheta_2 = \vartheta_{21} + \vartheta_{22} + \vartheta_{23} + \dots,$$

so ist nach § 6

$$\frac{n}{\vartheta_{21}} < \frac{hr^2}{n^3} + \frac{\lambda b_2 r^2}{n^2},$$

und wenn wir

$$\frac{n}{b_2} < \frac{\gamma r}{n^2} \frac{1}{2} c_1^2$$

einführen:

$$\frac{n}{\vartheta_{21}} < \frac{(h + \lambda \gamma r \frac{1}{2} c_1^2) r^2}{n^3},$$

und

$$\frac{n}{\vartheta_2} < \frac{(h + \lambda \gamma r \frac{1}{2} c_1^2) k r^2}{n^3}.$$

Setzen wir

$$h + \lambda \gamma r \frac{1}{2} c_1^2 = h_2,$$

so wird

$$\frac{n}{\vartheta_2} < \frac{h_2 k r^2}{n^3}, \quad \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} < \frac{h_2 k r}{n^2}, \quad \frac{\partial \vartheta_2}{\partial v} < \frac{h_2 k r}{n^2}.$$

Jetzt ist die Gleichung

$$\Delta x_2 = U \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} + V \frac{\partial \vartheta_2}{\partial v} + \sigma_2$$

unter beliebigen Randwerten, die vierte Differentialquotienten besitzen sollen, zu integrieren. Wie oben haben wir

$$U \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} + V \frac{\partial \vartheta_2}{\partial v} < \varkappa \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} < \varkappa \frac{h_2 k r}{n^2}.$$

Da

$$\frac{n}{\sigma_2} < \frac{\gamma r}{n^2} \frac{1}{2} c_1^2$$

ist, finden wir

$$\frac{n}{x_2} < \frac{\lambda (h + \varkappa h_2 k + \gamma \frac{1}{2} c_1^2) r^3}{n^4}$$

und wenn wir

$$\lambda (h + \varkappa h_2 k + \gamma \frac{1}{2} c_1^2) = c_2$$

setzen:

$$\frac{n}{x_2} < \frac{c_2 r^3}{n^4}.$$

Nach § 5 haben wir dann wieder

$$\frac{\partial x_2}{\partial u} < \frac{c_2 r^2}{n^3}, \quad \frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2} < \frac{c_2 r}{n^2}, \quad \frac{\partial^3 x_2}{\partial u^3} < \frac{c_2}{n}.$$

Nach § 4 ist

$$e_3 = \sum \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial u}.$$

Da

$$\frac{\frac{n}{\partial x_1} \frac{\partial x_2}{\partial u}}{\partial u} < 20 n^2 \frac{\frac{n}{\partial x_1}}{\partial u} \frac{\frac{n}{\partial x_2}}{\partial u} < \frac{20 c_1 c_2 r^4}{n^4}$$

ist, erhalten wir, entsprechend wie oben

$$\frac{n}{e_3} < \frac{60 c_1 c_2 r^4}{n^4}.$$

Ferner wird

$$\frac{\frac{n}{\partial e_3}}{\partial u} < \frac{2 \cdot 60 c_1 c_2 r^3}{n^3}, \quad \frac{\frac{n}{\partial^2 e_3}}{\partial u^2} < \frac{2^2 \cdot 60 c_1 c_2 r^2}{n^2},$$

und da

$$\frac{n}{b_3} < \kappa_1 \left(3 \frac{n}{e_3} + 6 \frac{\frac{n}{\partial e_3}}{\partial u} + 9 \frac{\frac{n}{\partial^2 e_3}}{\partial u^2} \right)$$

ist,

$$\frac{n}{b_3} < \frac{60 \kappa_1 r^2}{n^2} c_1 c_2 \left[3 \left(\frac{r}{n} \right)^2 + 2 \cdot 6 \left(\frac{r}{n} \right) + 2^2 \cdot 9 \right],$$

$$\frac{n}{b_3} < \frac{\gamma r}{n^2} c_1 c_2.$$

Ebenso ist

$$\frac{n}{\sigma_3} < \frac{\gamma r}{n^2} c_1 c_2.$$

In derselben Weise behandeln wir die Differentialgleichung

$$\Delta \vartheta_3 = a \vartheta_3 + b_3.$$

Wir finden

$$\frac{n}{\vartheta_3} < \frac{(h + \lambda \gamma r c_1 c_2) k r}{n^3}$$

und wenn wir

$$h + \lambda \gamma r c_1 c_2 = h_3$$

setzen

$$\frac{n}{\vartheta_3} < \frac{h_3 k r^2}{n^3}, \quad \frac{\frac{n}{\partial \vartheta_3}}{\partial u} < \frac{h_3 k r}{n^2}, \quad \frac{\frac{n}{\partial^2 \vartheta_3}}{\partial v} < \frac{h_3 k r}{n^2}.$$

Für

$$\Delta x_3 = U \frac{\partial \vartheta_3}{\partial u} + V \frac{\partial \vartheta_3}{\partial v} + \sigma_3$$

finden wir

$$\frac{n}{x_3} < \frac{\lambda (h + \lambda h_3 k + \gamma c_1 c_2) r^3}{n^4},$$

$$\lambda (h + \lambda h_3 k + \gamma c_1 c_2) = c_3,$$

$$\frac{n}{x_3} < \frac{c_3 r^3}{n^4},$$

$$\frac{\frac{n}{\partial x_3}}{\partial u} < \frac{c_3 r^2}{n^3}, \quad \frac{\frac{n}{\partial^2 x_3}}{\partial u^2} < \frac{c_3 r}{n^2}, \quad \frac{\frac{n}{\partial^3 x_3}}{\partial u^3} < \frac{c_3}{n}.$$

Nach § 4 haben wir

$$e_4 = \sum \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial u} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \right)^2.$$

Es wird

$$\frac{n}{e_4} < \frac{60 r^4}{n^4} (c_1 c_3 + \frac{1}{2} c_2^2),$$

$$\frac{\frac{n}{\partial e_4}}{\partial u} < \frac{2 \cdot 60 r^3}{n^3} (c_1 c_3 + \frac{1}{2} c_2^2), \quad \frac{\frac{n}{\partial^2 e_4}}{\partial u^2} < \frac{2^2 \cdot 60 r^2}{n^2} (c_1 c_3 + \frac{1}{2} c_2^2),$$

und

$$\frac{n}{b_4} < \frac{\gamma r}{n^2} (c_1 c_3 + \frac{1}{2} c_2^2),$$

$$\frac{n}{\sigma_4} < \frac{\gamma r}{n^2} (c_1 c_3 + \frac{1}{2} c_2^2).$$

Ganz entsprechend finden wir aus den Gleichungen

$$\Delta \vartheta_4 = a \vartheta_4 + b_4,$$

$$\Delta x_4 = U \frac{\partial \vartheta_4}{\partial u} + V \frac{\partial \vartheta_4}{\partial v} + \sigma_4$$

die Ungleichungen

$$\frac{n}{\vartheta_4} < \frac{h_4 k r^2}{n^3}, \quad \frac{\frac{n}{\partial \vartheta_4}}{\partial u} < \frac{h_4 k r}{n^2},$$

wo

$$h_4 = h + \lambda \gamma r (c_1 c_3 + \frac{1}{2} c_2^2)$$

ist, und

$$\frac{n}{x_4} < \frac{c_4 r^3}{n^4},$$

wenn

$$\lambda [h + \lambda h_4 k + \gamma (c_1 c_3 + \frac{1}{2} c_2^2)] = c_4$$

ist.

Für x_5 finden wir

$$\frac{n}{x_5} < \frac{c_5 r^3}{n^4},$$

wo

$$c_5 = \lambda [h + \lambda h_5 k + \gamma (c_1 c_4 + c_2 c_3)],$$

$$h_5 = h + \lambda \gamma r (c_1 c_4 + c_2 c_3)$$

ist, u. s. w.

Für die Reihe

$$X(u, v, t) = x(u, v) + x_1(u, v) t + x_2(u, v) t^2 + x_3(u, v) t^3 + \dots$$

haben wir demnach

$$\frac{n}{X} < \frac{n}{x} + \frac{n}{x_1} t + \frac{n}{x_2} t^2 + \frac{n}{x_3} t^3 + \dots,$$

$$\frac{n}{X} < \frac{r^3}{n^4} [c + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots],$$

wenn wir

$$\frac{n}{x} < \frac{c r^3}{n^4}$$

setzen, was immer angeht, da $x(u, v)$ eine analytische Funktion von u und v ohne Randbedingung ist. Wenn nun die Reihe

$$c + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots$$

konvergiert, ist nach den Entwicklungen des § 5 $X(u, v, t)$ eine analytische Funktion in u und v . Dasselbe gilt ohne weiteres für $Y(u, v, t)$ und $Z(u, v, t)$.

Wir haben

$$\begin{aligned} c_1 &= \lambda h + \lambda x h k, \\ c_2 &= \lambda h + \lambda x h_2 k + \lambda \gamma \frac{1}{2} c_1^2, \\ c_3 &= \lambda h + \lambda x h_3 k + \lambda \gamma c_1 c_2, \\ c_4 &= \lambda h + \lambda x h_4 k + \lambda \gamma (c_1 c_3 + \frac{1}{2} c_2^2), \\ c_5 &= \lambda h + \lambda x h_5 k + \lambda \gamma (c_1 c_4 + c_2 c_3), \\ &\dots \\ &\dots \\ c_i &= \lambda h + \lambda x h_i k + \lambda \gamma (c_1 c_{i-1} + c_2 c_{i-2} + c_3 c_{i-3} + \dots + c_{i-1} c_1) \frac{1}{2}, \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Führen wir

$$\begin{aligned} h_2 &= h + \lambda \gamma r \frac{1}{2} c_1^2, \\ h_3 &= h + \lambda \gamma r c_1 c_2, \\ h_4 &= h + \lambda \gamma r (c_1 c_3 + \frac{1}{2} c_2^2), \\ h_5 &= h + \lambda \gamma r (c_1 c_4 + c_2 c_3), \\ &\dots \\ &\dots \\ h_i &= h + \lambda \gamma r (c_1 c_{i-1} + c_2 c_{i-2} + c_3 c_{i-3} + \dots + c_{i-1} c_1) \frac{1}{2}, \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

ein und setzt

$$\lambda h(1 + xk) = p, \quad \lambda \gamma (1 + \lambda x k r) = q,$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} c_1 &= p, \\ c_2 &= p + q \frac{1}{2} c_1^2, \\ c_3 &= p + q c_1 c_2, \\ c_4 &= p + q (c_1 c_3 + \frac{1}{2} c_2^2), \\ c_5 &= p + q (c_1 c_4 + c_2 c_3), \\ &\dots \\ &\dots \\ c_i &= p + q (c_1 c_{i-1} + c_2 c_{i-2} + c_3 c_{i-3} + \dots + c_{i-1} c_1) \frac{1}{2}, \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Wenn wir $p > 2$ und $q > 1$ annehmen, so wird die Aussicht auf Konvergenz offenbar ungünstiger, wenn wir setzen

$$\begin{aligned} c_1 &= p, \\ c_2 &= (p + q) \frac{1}{2} c_1^2, \\ c_3 &= (p + q) c_1 c_2, \\ c_4 &= (p + q) (c_1 c_3 + \frac{1}{2} c_2^2), \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Wir wollen
setzen. Wir können eine Grösse s_1 derart wählen, dass

$$p + q = s$$

$$c_1 < \frac{ss_1}{2^2 s},$$

$$c_2 < \frac{(ss_1)^2}{2^2 s},$$

$$c_3 < \frac{(ss_1)^3}{3^2 s},$$

$$c_4 < \frac{(ss_1)^4}{4^2 s}$$

ist. Es sei bis $n-1$

$$c_{n-1} < \frac{(ss_1)^{n-1}}{(n-1)^2 s}.$$

Nun ist

$$c_n < s(c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + c_3 c_{n-3} + \dots + c_{n-1} c_1)^{\frac{1}{2}}.$$

Führt man die Ungleichungen für $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}$ ein, so erhält man

$$c_n < \frac{(ss_1)^n}{s} \left[\frac{1}{2^2(n-1)^2} + \frac{1}{2^2(n-2)^2} + \frac{1}{3^2(n-3)^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2 2^2} \right] \frac{1}{2},$$

oder

$$c_n < \frac{(ss_1)^n}{n^2 s} \left[\frac{n^2}{2^2(n-1)^2} + \frac{n^2}{2^2(n-2)^2} + \frac{n^2}{3^2(n-3)^2} + \dots + \frac{n^2}{(n-1)^2 2^2} \right] \frac{1}{2}.$$

Da aber

$$\sum_{x=2}^{n-1} \frac{n^2}{x^2(n-x)^2} < \int_1^{n-1} \frac{n^2}{x^2(n-x)^2} dx,$$

oder

$$\sum_{x=2}^{n-1} \frac{n^2}{x^2(n-x)^2} < \frac{4 \log(n-1)}{n}$$

ist, wird

$$c_n < \frac{(ss_1)^n}{n^2 s} \left[\frac{n^2}{2^2(n-1)^2} + \frac{4 \log(n-1)}{n} \right] \frac{1}{2}.$$

Für $n > 1$ ist stets

$$\frac{1}{2} \left[\frac{n^2}{2^2(n-1)^2} + \frac{4 \log(n-1)}{n} \right] < 1,$$

also haben wir

$$c_n < \frac{(ss_1)^n}{n^2 s}.$$

Demnach ist das Gesetz für die Koeffizienten allgemein gültig. Wir haben also

$$\bar{X} < \frac{r^3}{n^4 s} \left[cs + \frac{ss_1 t}{2^2} + \frac{(ss_1 t)^2}{2^2} + \frac{(ss_1 t)^3}{3^2} + \frac{(ss_1 t)^4}{4^2} + \dots \right].$$

Wählt man t genügend klein, so dass

$$ss_1 t \leq 1$$

ist, so konvergiert unsere Reihe. X ist eine analytische Funktion in u und v . Ebenso Y und Z .

Man kann auch Konvergenz für beliebige Werte von t erzielen, wenn man die Randwertreihen der Differentialgleichungen für die ϑ_n und x_n unterhalb bestimmter Grenzen hält und diese Grenzen konvergente Reihen bilden lässt.

Schlussbemerkung.

Ist die zu verbiegende Fläche $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ von positiver Krümmung nicht-analytisch, so lässt sich doch die Konvergenz der obigen Entwicklungen zeigen, d. h. man kann die Biegungsflächen bestimmen.

Sollen die Biegungsflächen einer Fläche von negativer Gaußscher Krümmung untersucht werden, so bleibt der Gedankengang derselbe und die Gleichungen behalten ähnliche Formen wie oben. Doch ist ein durchgreifender Unterschied vorhanden. Die Bestimmung der Grössen ϑ führt nämlich auf Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial u \partial v} &= a \vartheta_1, \\ \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial u \partial v} &= a \vartheta_2 + b_2, \\ \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial u \partial v} &= a \vartheta_3 + b_3, \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial u \partial v} &= a \vartheta_n + b_n, \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen vom hyperbolischen Typus sind, lassen sie, auch wenn die zu verbiegende Fläche analytisch ist, nicht analytische Integrale zu. Es lässt sich zeigen, dass eine analytische Fläche von negativer Gaußscher Krümmung auch nicht-analytische Biegungsflächen besitzt.

Die Konvergenz des Verfahrens lässt sich für die Verbiegung von Flächen mit negativer Totalkrümmung immer zeigen, auch wenn diese Flächen nicht-analytisch sind, d. h. man kann die Biegungsflächen stets bestimmen.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist eine Zusammenfassung der Ergebnisse der Untersuchungen über die Wirkung von ...

Die Untersuchungen wurden in drei Phasen durchgeführt. In der ersten Phase wurde ...

Die Ergebnisse der Untersuchungen zeigen, dass ...

Die vorliegende Arbeit ist eine Zusammenfassung der Ergebnisse der Untersuchungen über die Wirkung von ...