Kapitel I.

Die flächentheoretischen Grundlagen.

§ 1. Die analytische Formulierung des Problems.

Durch Verbiegung der Fläche

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v),\quad z = z(u,v)$$

möge die Flächenschar

$$X = X(u,v,t),\quad Y = Y(u,v,t),\quad Z = Z(u,v,t)$$

entstehen. Für $t = O$ sollen X, Y, Z in x, y, z übergehen. Entwickelt man X, Y, Z nach Potenzen des Parameters t, so soll

$$X(u,v,t) = x(u,v) + x_1(u,v)\,t + x_2(u,v)\,t^2 + x_3(u,v)\,t^3 + \ldots\ldots,$$
$$Y(u,v,t) = y(u,v) + y_1(u,v)\,t + y_2(u,v)\,t^2 + y_3(u,v)\,t^3 + \ldots\ldots,$$
$$Z(u,v,t) = z(u,v) + z_1(u,v)\,t + z_2(u,v)\,t^2 + z_3(u,v)\,t^3 + \ldots\ldots$$

sein. Da alle Biegungsflächen dasselbe Linienelement besitzen, hat man

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Nun ist

$$dX \equiv \frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv$$
$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x_1}{\partial u}t + \frac{\partial x_2}{\partial u}t^2 + \frac{\partial x_3}{\partial u}t^3 + \cdots\cdots\right)du + \left(\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial v}t + \frac{\partial x_2}{\partial v}t^2 + \frac{\partial x_3}{\partial v}t^3 + \cdots\right)dv,$$

und

$$\begin{aligned} dX^2 = &\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u}t + \left(2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u} + \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2\right)t^2 + \left(2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial u} + 2\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)t^3 + \cdots\right]du^2 \\ &+2\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)t + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)t^2\right. \\ &\left.+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} + \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)t^3 + \cdots\right]du\,dv \\ &+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v}t + \left(2\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial v} + \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2\right)t^2 + \left(2\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial v} + 2\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)t^3 + \cdots\right]dv^2. \end{aligned}$$

Führen wir die in der Flächentheorie übliche Bezeichnungsweise

$$\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2$$

ein, so wird

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\,\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\,du\,dv + \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 dv^2$$

$$= \left[\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\,\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u}t + \left(2\,\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u} + \Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2\right)t^2 + \cdots\right]du^2$$

$$+2\left[\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \left(\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)t + \left(\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)t^2 + \cdots\right]du\,dv$$

$$+\left[\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2\,\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v}t + \left(2\,\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial v} + \Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2\right)t^2 + \cdots\right]dv^2.$$

Daraus folgt durch Nullsetzen der Koeffizienten der einzelnen Potenzen von t:

$$\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\quad \Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},\quad \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

da die Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F, G bei der ursprünglichen Fläche und den Biegungsflächen übereinstimmen; ferner

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0,$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0.$$

Diese drei Gleichungen bestimmen x_1, y_1 und z_1. Weiter folgen

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u} = -\frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2,$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v},$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial v} = -\frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2$$

als Differentialgleichungen für x_2, y_2, z_2. Allgemein sind

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_n}{\partial u} = -\tfrac{1}{2}\left(\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial u} + \Sigma\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_{n-2}}{\partial u} + \Sigma\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_{n-3}}{\partial u} + \cdots + \Sigma\frac{\partial x_{n-1}}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u}\right),$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_n}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_n}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\left(\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_{n-2}}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_{n-3}}{\partial v} + \cdots + \Sigma\frac{\partial x_{n-1}}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right),$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_n}{\partial v} = -\tfrac{1}{2}\left(\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_2}{\partial v}\frac{\partial x_{n-2}}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_3}{\partial v}\frac{\partial x_{n-3}}{\partial v} + \cdots + \Sigma\frac{\partial x_{n-1}}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)$$

die Bestimmungs-Differentialgleichungen für x_n, y_n, z_n. Kann man diese Systeme von Differentialgleichungen integrieren und ergeben sich für X, Y, Z konvergente Potenzreihen in t, so ist damit das allgemeine Verbiegungsproblem, alle Flächen mit gegebenem Linienelement zu finden, gelöst. Wir werden x, y, z als analytische Funktionen annehmen und dann zeigen, dass X, Y, Z nicht nur in t, sondern auch in u und v konvergente Potenzreihen sind. Nimmt man x, y, z nicht als analytische Funktionen an, so lässt sich aus dem Folgenden doch zeigen, dass X, Y, Z konvergente Potenzreihen in t sind.

Wenn man in den Entwickelungen für X, Y, Z die Glieder mit t^2 und den höheren Potenzen von t fortlässt, so spricht man von einer unendlich kleinen Verbiegung. Diese ist zuerst von Weingarten im 100. Bande von Crelles Journal behandelt worden. Wir entwickeln zunächst die Formeln, welche uns die Koeffizienten der unendlich kleinen Verbiegung, x_1, y_1, z_1, liefern und werden dann für die Verbiegungskoeffizienten zweiter und höherer Ordnung ähnliche Differentialgleichungen aufstellen.

§ 2. Die unendlich kleine Verbiegung.

x_1, y_1, z_1 werden durch die Gleichungen

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} = O, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = O, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} = O$$

bestimmt. Wir setzen (Weingarten)

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = \varphi \sqrt{EG-F^2}, \quad \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\varphi \sqrt{EG-F^2}.$$

Durch Differentiieren erhält man

$$\frac{\partial \varphi \sqrt{EG-F^2}}{\partial u} = \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v};$$

oder

$$\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \sqrt{EG-F^2}}{\partial u}\,\varphi = \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u};$$

ebenso

$$\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \sqrt{EG-F^2}}{\partial v}\,\varphi = \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial x_1}{\partial u}.$$

Daraus folgt, wenn man für φ seinen Wert einführt

$$\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\partial \log \sqrt{EG-F^2}}{\partial u}\,\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v},$$

$$\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{EG-F^2}}{\partial v}\,\Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}.$$

Wir machen jetzt die Annahme, dass die Totalkrümmung (Gausssche Krümmung) der Fläche $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$ positiv ist. Dann können die Parameter u, v so gewählt werden, dass von den Fundamentalgrössen D, D', D'' zweiter Art D' verschwindet und $D''=D$ wird. Nach den bekannten Formeln der Flächentheorie ist

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial x}{\partial v} + DX,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \beta_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \gamma_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \gamma_2 \frac{\partial x}{\partial v} + DX.$$

(X, Y, Z sind hier die Cosinus der positiven Richtung der Flächennormale. Die Koeffizienten haben die Werte

$$a_1=\frac{G\frac{\partial E}{\partial u}+F\frac{\partial E}{\partial v}-2F\frac{\partial F}{\partial u}}{2(EG-F^2)};\ \beta_1=\frac{G\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)};\ \gamma_1=\frac{-F\frac{\partial G}{\partial v}+2G\frac{\partial F}{\partial v}-G\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)};$$

$$a_2=\frac{-F\frac{\partial E}{\partial u}+2E\frac{\partial F}{\partial u}-E\frac{\partial F}{\partial v}}{2(EG-F^2)};\ \beta_2=\frac{E\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)};\ \gamma_2=\frac{E\frac{\partial G}{\partial v}+F\frac{\partial G}{\partial u}-2F\frac{\partial F}{\partial v}}{2(EG-F^2)}.)$$

Wenn man für die zweiten Differentialquotienten von x diese Werte einführt, so ergibt sich

$$\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}=D\Sigma X\frac{\partial x_1}{\partial v},\quad \sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-D\Sigma X\frac{\partial x_1}{\partial u},$$

oder

$$\Sigma X\frac{\partial x_1}{\partial u}=-\frac{1}{\sqrt{K}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v},\quad \Sigma X\frac{\partial x_1}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{K}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

wenn K das Gausssche Krümmungsmass bezeichnet.
Für x_1, y_1, z_1 haben wir mithin folgendes Gleichungssystem:

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x_1}{\partial u}=0,\qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x_1}{\partial v}=\varphi\sqrt{EG-F^2},$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial x_1}{\partial u}=-\varphi\sqrt{EG-F^2},\qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial x_1}{\partial v}=0,$$

$$\Sigma X\,\frac{\partial x_1}{\partial u}=-\varrho\,\frac{\partial\varphi}{\partial v},\qquad \Sigma X\,\frac{\partial x_1}{\partial v}=\varrho\,\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

wenn man

$$\frac{1}{\sqrt{K}}=\varrho$$

setzt. Durch Auflösen dieser Gleichungen erhält man

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}=-\varrho\,X\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{F\frac{\partial x}{\partial u}-E\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\,\varphi,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v}=\ \varrho\,X\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\,\varphi.$$

Wir haben jetzt noch die Funktion φ zu bestimmen. Wir haben

$$\varrho\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\Sigma X\,\frac{\partial x_1}{\partial v},\quad \varrho\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\Sigma X\,\frac{\partial x_1}{\partial u}.$$

Differentiiert man die erste Gleichung nach u, die zweite nach v und addiert, so wird

$$\varrho\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial\varrho}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\varrho}{\partial v}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}-\Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}.$$

Da nach den Sätzen der Flächentheorie

$$\frac{\partial X}{\partial u}=-\frac{GD}{EG-F^2}\,\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{FD}{EG-F^2}\,\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v}=\ \frac{FD}{EG-F^2}\,\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{ED}{EG-F^2}\,\frac{\partial x}{\partial v}$$

ist, hat man

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} - \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} = -\frac{E+G}{\varrho} \varphi,$$

und

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial \log \varrho}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \log \varrho}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{E+G}{\varrho^2} \varphi = O$$

ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ. Führt man

$$\varphi \sqrt{\varrho} = \vartheta$$

ein, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = a\,(u, v)\,\vartheta \text{ oder } \Delta\,\vartheta = a\,\vartheta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

wo

$$a = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \Delta\,\varrho - \frac{E+G}{\varrho^2}$$

ist.

Wenn man in den Gleichungen für $\frac{\partial x_1}{\partial u}$ und $\frac{\partial x_1}{\partial v}$ ebenfalls ϑ statt φ einführt, so wird

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial\, \sqrt{\varrho}\, X}{\partial v}\, \vartheta - \sqrt{\varrho}\, X \frac{\partial \vartheta}{\partial v},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = -\frac{\partial \sqrt{\varrho}\, X}{\partial u}\, \vartheta + \sqrt{\varrho}\, X\, \frac{\partial \vartheta}{\partial u}.$$

Differentiiert man die erste Gleichung nach u und die zweite nach v und addiert, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_1 &= 2\, \frac{\partial \sqrt{\varrho} X}{\partial v} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} - 2\, \frac{\partial \sqrt{\varrho}\, X}{\partial u} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}. \\ \Delta y_1 &= 2\, \frac{\partial \sqrt{\varrho}\, Y}{\partial v} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} - 2\, \frac{\partial \sqrt{\varrho}\, Y}{\partial u} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}, \\ \Delta z_1 &= 2\, \frac{\partial \sqrt{\varrho} Z}{\partial v} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} - 2\, \frac{\partial \sqrt{\varrho}\, Z}{\partial u} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ebenso wird

Integriert man (1) und dann (2), so erhält man die ersten Biegungskoeffizienten $x_1\ y_1,\ z_1$ und das Problem der unendlich kleinen Verbiegung ist gelöst.

§ 3. Die zweiten und die höheren Biegungskoeffizienten.

Die zweiten Biegungskoeffizienten $x_2,\ y_2,\ z_2$ werden durch die Gleichungen

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial u} = -e, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = -2f, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial v} = -g$$

bestimmt, wenn man

$$\tfrac{1}{2}\, \Sigma \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 = e, \quad \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} = 2f, \quad \tfrac{1}{2}\, \Sigma \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 = g$$

bezeichnet. Wir setzen

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} = \varphi \sqrt{EG - F^2} - f, \qquad \Sigma \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = -\varphi \sqrt{EG - F^2} - f.$$

Dann erhält man durch Differentiation

$$\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\sqrt{EG-F^2}}{\partial u}\,\varphi=\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\frac{\partial x_2}{\partial v}-\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\,\frac{\partial x_2}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial e}{\partial v},$$

$$\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\sqrt{EG-F^2}}{\partial v}\,\varphi=\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\,\frac{\partial x_2}{\partial v}-\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,\frac{\partial x_2}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Setzt man für φ seinen Wert ein und berücksichtigt dann die Formeln Seite 5 für die zweiten Ableitungen von x, so wird

$$\Sigma X\frac{\partial x_2}{\partial u}=-\frac{1}{\sqrt{K}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\gamma_1 e+(\gamma_2-\beta_1)f-\beta_2 g-\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial u}\right),$$

$$\Sigma X\frac{\partial x_2}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{K}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(-\beta_1 e+(\alpha_1+\alpha_2-2\beta_2)f+\alpha_2 g-\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial e}{\partial v}\right).$$

Für x_2, y_2, z_2 haben wir demnach das Gleichungssystem

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x_2}{\partial u}=-e,\qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x_2}{\partial v}=\varphi\sqrt{EG-F^2}-f,$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial x_2}{\partial u}=-\varphi\sqrt{EG-F^2}-f,\qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial x_2}{\partial v}=-g,$$

$$\Sigma X\,\frac{\partial x_2}{\partial u}=-\varrho\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}+m,\qquad \Sigma X\,\frac{\partial x_2}{\partial v}=\varrho\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}+n,$$

wo

$$m=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\gamma_1 e+(\gamma_2-\beta_1)f-\beta_2 g-\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial u}\right),$$

$$n=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(-\beta_1 e+(\alpha_1+\alpha_2-2\beta_2)f+\alpha_2 g-\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial e}{\partial v}\right)$$

ist. Durch Auflösen dieser Gleichungen findet man

$$\frac{\partial x_2}{\partial u}=-\varrho X\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{F\frac{\partial x}{\partial u}-E\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\,\varphi+mX-\frac{\left(F\frac{\partial x}{\partial u}-E\frac{\partial x}{\partial v}\right)f+\left(G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}\right)e}{EG-F^2},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial v}=\varrho X\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\,\varphi+nX-\frac{\left(F\frac{\partial x}{\partial u}-E\frac{\partial x}{\partial v}\right)g+\left(G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}\right)f}{EG-F^2}.$$

Setzt man

$$mX-\frac{\left(F\frac{\partial x}{\partial u}-E\frac{\partial x}{\partial v}\right)f+\left(G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}\right)e}{EG-F^2}=\mu,$$

$$nX-\frac{\left(F\frac{\partial x}{\partial u}-E\frac{\partial x}{\partial v}\right)g+\left(G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}\right)f}{EG-F^2}=\nu,$$

so wird

$$\frac{\partial x_2}{\partial u}=-\varrho X\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{F\frac{\partial x}{\partial u}-E\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\,\varphi+\mu,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial v}=\varrho X\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\,\varphi+\nu.$$

Wir haben jetzt wieder die Differentialgleichung für φ aufzustellen. Es ist

$$\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \boldsymbol{\Sigma} X \frac{\partial x_2}{\partial v} - n, \qquad \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial v} = - \boldsymbol{\Sigma} X \frac{\partial x_2}{\partial u} + m.$$

Durch Differentiieren und Addieren findet man

$$\varrho \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial \varrho}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varrho}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \boldsymbol{\Sigma} \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} - \boldsymbol{\Sigma} \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial n}{\partial u}.$$

Führt man wie im § 2 für $\frac{\partial X}{\partial u}$ und $\frac{\partial X}{\partial v}$ andere Werte ein, so wird

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial \log \varrho}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \log \varrho}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{E+G}{\varrho^2} \varphi = \frac{1}{\varrho^3 D} [Fe - (E-G) f - G g] + \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial n}{\partial u} \right) = O.$$

Setzt man

$$\varphi \sqrt{\varrho} = \vartheta_2,$$

so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial v^2} = a\; u, v) \vartheta_2 + b(u, v),$$

oder

$$\Delta \vartheta_2 = a \vartheta_2 + b,$$

wo wieder

$$a = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \Delta \varrho - \frac{E+G}{\varrho^2}$$

ist und b den Wert

$$b = \frac{1}{\varrho^3 D} [Fe - (E-G) f - G g] + \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial n}{\partial u} \right]$$

hat. Führt man auch in die Gleichungen für $\frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial v}$ $\varphi = \frac{\vartheta_2}{\sqrt{\varrho}}$ ein, so wird

$$\frac{\partial x_2}{\partial u} = \frac{\partial \sqrt{\varrho} X}{\partial v} \vartheta_2 - \sqrt{\varrho} X \frac{\partial \vartheta_2}{\partial v} + \mu,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial v} = - \frac{\partial \sqrt{\varrho} X}{\partial u} \vartheta_2 + \sqrt{\varrho} X \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} + \nu,$$

und wenn man differentiiert und addiert

$$\Delta x_2 = 2 \frac{\partial \sqrt{\varrho} X}{\partial v} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} - 2 \frac{\partial \sqrt{\varrho} X}{\partial u} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial v} + \frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \nu}{\partial v}.$$

Analoge Gleichungen findet man für y_2 und z_2.

Setzt man in der Gleichung für b für m und n die Werte ein, so findet man

$$b = A e + B f + C g + A_1 \frac{\partial e}{\partial u} + B_1 \frac{\partial f}{\partial u} + C_1 \frac{\partial g}{\partial u} + A_2 \frac{\partial e}{\partial v} + B_2 \frac{\partial f}{\partial v} + C_2 \frac{\partial g}{\partial v}$$
$$+ A'' \frac{\partial^2 e}{\partial u \partial v} + B'' \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) + C'' \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v},$$

d. h. b ist eine lineare Funktion von e, f, g und deren ersten und zweiten Ableitungen. Die Koeffizienten sind Funktionen von u und v, die der zu verbiegenden analytischen Fläche x, y, z entstammen; sie sind analytisch in u und v.

Ebenso ist $\frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \nu}{\partial v} = \sigma$ eine lineare Funktion von e, f, g und deren ersten und zweiten Ableitungen, ebenfalls mit Koeffizienten, die analytische Funktionen in u und v sind.

Wir wenden uns nun den dritten Verbiegungskoeffizienten x_3, y_3, z_3 zu. Diese sind zu bestimmen aus den Gleichungen

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial u} = -\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u},$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} - \Sigma\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v},$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial v} = -\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial v},$$

oder

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial u} = -e_3, \quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -2f_3, \quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial v} = -g_3.$$

Wir sehen, dass die Rechnung für die dritten Verbiegungskoeffizienten genau so verläuft, wie für die zweiten. Wir haben nur an Stelle von e, f, g, e_3, f_3, g_3 einzuführen. (Bei den zweiten Verbiegungskoeffizienten müssen wir jetzt e_2, f_2, g_2 statt e, f, g schreiben.) Demnach lauten unsere Gleichungen

$$\Delta x_3 = 2\,\frac{\partial\sqrt{\varrho}\,X}{\partial v}\frac{\partial\vartheta_3}{\partial u} - 2\,\frac{\partial\sqrt{\varrho}\,X}{\partial u}\frac{\partial\vartheta_3}{\partial v} + \sigma_3,$$

$$\Delta\vartheta_3 = a\vartheta_3 + b_3,$$

wo σ_3 und b_3 lineare Funktionen von e_3, f_3, g_3 und deren ersten und zweiten Ableitungen sind, welche dieselben Koeffizienten wie σ und b (bez. σ_2 und b_2) haben.

Analoge Entwicklungen gelten für alle weiteren Biegungskoeffizienten.

§ 4. Zusammenstellung der Formeln.

Die Gleichungen der Biegungsflächen lauten

$$X = x + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 + \ldots\ldots,$$
$$Y = y + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 + \ldots\ldots,$$
$$Z = z + z_1 t + z_2 t^2 + z_3 t^3 + \ldots\ldots$$

Es soll die Konvergenz dieser Reihen nachgewiesen werden, und zwar nicht nur die Konvergenz als Potenzreihen von t, sondern es soll gezeigt werden, dass die Reihen konvergente Potenzreihen in u und v, also analytische Funktionen in u und v sind. Voraussetzung ist natürlich, dass x, y, z analytisch in u und v sind.

Für die Koeffizienten haben wir folgende Gleichungen:

$$\Delta x_1 = U\frac{\partial\vartheta_1}{\partial u} + V\frac{\partial\vartheta_1}{\partial v},$$

$$\Delta x_2 = U\frac{\partial\vartheta_2}{\partial u} + V\frac{\partial\vartheta_2}{\partial v} + \sigma_2,$$

$$\Delta x_3 = U\frac{\partial\vartheta_3}{\partial u} + V\frac{\partial\vartheta_3}{\partial v} + \sigma_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta x_i = U\frac{\partial\vartheta_i}{\partial u} + V\frac{\partial\vartheta_i}{\partial v} + \sigma_i,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$U = 2\,\frac{\partial \sqrt{\varrho}\,X}{\partial v} \text{ und } V = -2\,\frac{\partial \sqrt{\varrho}\,X}{\partial u}$$

sind ebenfalls analytische Funktionen in u und v. Gleichungen derselben Form erhält man für y_i und z_i. Wir brauchen nur die Koeffizienten der X-Reihe behandeln; für die Koeffizienten der Y- und Z-Reihe gelten dieselben oberen Grenzen, die wir für die Koeffizienten der X-Reihe aufstellen werden.

ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, . . . werden bestimmt durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\Delta\,\vartheta_1 &= a\,\vartheta_1, \\
\Delta\,\vartheta_2 &= a\,\vartheta_2 + b_2, \\
\Delta\,\vartheta_3 &= a\,\vartheta_3 + b_3, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\Delta\,\vartheta_i &= a\,\vartheta_i + b_i \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen, sowie die Gleichungen für x_1, x_2, x_3, ... sind mit beliebigen nicht-analytischen Randwerten zu integrieren; wir werden später nur voraussetzen, dass die Randwerte einige Differentialquotienten zulassen.

Die Grössen b sind gegeben durch

$$b_i = A\,e_i + B\,f_i + C\,g_i + A_1\frac{\partial e_i}{\partial u} + A_2\frac{\partial e_i}{\partial v} + B_1\frac{\partial f_i}{\partial u} + B_2\frac{\partial f_i}{\partial v} + C_1\frac{\partial g_i}{\partial u} + C_2\frac{\partial g_i}{\partial v}$$
$$+ A''\frac{\partial^2 e_i}{\partial u\,\partial v} + B''\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial v^2}\right) + C''\frac{\partial^2 g_i}{\partial u\,\partial v}.$$

Für σ_i gilt eine Gleichung derselben Art. Endlich haben wir für die Grössen e_i, f_i, g_i die Gleichungen

$$\begin{aligned}
e_i &= \tfrac{1}{2}\left[\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\,\frac{\partial x_{i-1}}{\partial u} + \Sigma\frac{\partial x_2}{\partial u}\,\frac{\partial x_{i-2}}{\partial u} + \Sigma\frac{\partial x_3}{\partial u}\,\frac{\partial x_{i-3}}{\partial u} + \ldots + \Sigma\frac{\partial x_{i-1}}{\partial u}\,\frac{\partial x_1}{\partial u}\right], \\
f_i &= \tfrac{1}{2}\left[\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\,\frac{\partial x_{i-1}}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_2}{\partial u}\,\frac{\partial x_{i-2}}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_3}{\partial u}\,\frac{\partial x_{i-3}}{\partial v} + \ldots + \Sigma\frac{\partial x_{i-1}}{\partial u}\,\frac{\partial x_1}{\partial v}\right], \\
g_i &= \tfrac{1}{2}\left[\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial v}\,\frac{\partial x_{i-1}}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_2}{\partial v}\,\frac{\partial x_{i-2}}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial x_3}{\partial v}\,\frac{\partial x_{i-3}}{\partial v} + \ldots + \Sigma\frac{\partial x_{i-1}}{\partial v}\,\frac{\partial x_1}{\partial v}\right].
\end{aligned}$$
