Einleitung.

Unter analytischen Funktionen reeller Veränderlichen versteht man bekanntlich solche Funktionen, die sich durch Potenzreihen der Veränderlichen darstellen lassen. Es ist nun eine merkwürdige Tatsache, dass es partielle Differentialgleichungen gibt, die nur analytischer Lösungen fähig sind, selbst wenn man den Integralen nicht-analytische Randwerte aufzwingt. Die Lösungen der Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = O$$

sind z. B. sämtlich analytische Funktionen, während die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = O$$

auch nicht-analytische Integrale besitzt.

Picard[1]) hat als Erster den analytischen Charakter der linearen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u$$

untersucht und gefunden, dass auch diese Gleichung nur analytische Lösungen zulässt. Dasselbe gilt von den Integralen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u \text{ [2]}).$$

Diese Gleichung wird auf die lineare Gleichung zurückgeführt; doch ist die Methode der Verallgemeinerung, etwa auf $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u + e^{-u}$, nicht fähig.

Durch Verallgemeinerung der Picardschen Methoden habe ich gezeigt, dass die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(u,x,y),$$

wo F in u, x und y analytisch ist, nur analytischer Lösungen fähig ist[3]). Die Eindeutigkeit der Randwertaufgabe für diese Gleichung wurde mit Hilfe der Methoden nachgewiesen, die

1) E. Picard, Sur la détermination des intégrales de certaines équations par leurs valeurs le long d'un contour fermé. Journal de l'Ecole Polytechnique 1890.

2) Hedrik, Inaugural-Dissertation; Göttingen 1901.

3) Inaugural-Dissertation; Göttingen 1902.

Hilbert[1]) in die Variationsrechnung eingeführt hat. Die Untersuchungen für die Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right),$$

wo F in allen 5 Argumenten analytisch ist, verliefen ähnlich, so dass ich das Resultat aussprechen konnte:

„Sämtliche Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, die aus einem regulären Variationsproblem entspringen, sind nur analytischer Lösungen fähig."

Den elliptischen Differentialgleichungen stehen die hyperbolischen als grundverschieden im Charakter ihrer Integrale gegenüber. In meiner Dissertation habe ich gezeigt, dass sämtliche Gleichungen vom hyperbolischen Typus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right)$$

auch nicht-analytische Lösungen besitzen. Ich habe dort solche Integrale aufgestellt.

Anwendungen auf die Flächentheorie liegen sehr nahe. Die Bestimmung aller Flächen mit positiver konstanter Gaussscher Krümmung hängt ab von der Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{e^{-u} - e^{u}}{2}.$$

Folglich sind alle Flächen von positiver konstanter Totalkrümmung analytische Flächen. Die Bestimmung aller Flächen von negativer konstanter Totalkrümmung erfordert die Integration der hyperbolischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin u.$$

Demnach gibt es nicht-analytische pseudosphärische Flächen.

Im folgenden soll ein Problem der Flächentheorie behandelt werden, das mit den genannten Untersuchungen in einem gewissen Zusammenhange steht. Ich behaupte:

„Bei der Verbiegung analytischer Flächen von positiver Totalkrümmung können nur analytische Flächen entstehen"[2]).

---

1) D. Hilbert, Mathematische Probleme, Vortrag gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris 1900; Seite 33 ff.

2) Die Anregung zur Behandlung dieses Problems verdanke ich Herrn Prof. D. Hilbert.