Einleitung.

Unter analytischen Funktionen reeller Veränderlichen versteht man bekanntlich solche Funktionen, die sich durch Potenzreihen der Veränderlichen darstellen lassen. Es ist nun eine merkwürdige Tatsache, dass es partielle Differentialgleichungen gibt, die nur analytischer Lösungen fähig sind, selbst wenn man den Integralen nicht-analytische Randwerte aufzwingt. Die Lösungen der Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

sind z. B. sämtlich analytische Funktionen, während die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

auch nicht-analytische Integrale besitzt.

Picard[1]) hat als Erster den analytischen Charakter der linearen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u$$

untersucht und gefunden, dass auch diese Gleichung nur analytische Lösungen zulässt. Dasselbe gilt von den Integralen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{u}\,{}^{2}).$$

Diese Gleichung wird auf die lineare Gleichung zurückgeführt; doch ist die Methode der Verallgemeinerung, etwa auf $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u + e^{-u}$, nicht fähig.

Durch Verallgemeinerung der Picardschen Methoden habe ich gezeigt, dass die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(u,x,y),$$

wo F in u, x und y analytisch ist, nur analytischer Lösungen fähig ist[3]). Die Eindeutigkeit der Randwertaufgabe für diese Gleichung wurde mit Hilfe der Methoden nachgewiesen, die

---

1) E. Picard, Sur la détermination des intégrales de certaines équations par leurs valeurs le long d'un contour fermé. Journal de l'Ecole Polytechnique 1890.

2) Hedrik, Inaugural-Dissertation; Göttingen 1901.

3) Inaugural-Dissertation; Göttingen 1902.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hilbert[1]) in die Variationsrechnung eingeführt hat. Die Untersuchungen für die Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right),$$

wo F in allen 5 Argumenten analytisch ist, verliefen ähnlich, so dass ich das Resultat aussprechen konnte:

„Sämtliche Differentialgleichungen vom elliptischen Typus, die aus einem regulären Variationsproblem entspringen, sind nur analytischer Lösungen fähig."

Den elliptischen Differentialgleichungen stehen die hyperbolischen als grundverschieden im Charakter ihrer Integrale gegenüber. In meiner Dissertation habe ich gezeigt, dass sämtliche Gleichungen vom hyperbolischen Typus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right)$$

auch nicht-analytische Lösungen besitzen. Ich habe dort solche Integrale aufgestellt.

Anwendungen auf die Flächentheorie liegen sehr nahe. Die Bestimmung aller Flächen mit positiver konstanter Gaussscher Krümmung hängt ab von der Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{e^{-u} - e^{u}}{2}.$$

Folglich sind alle Flächen von positiver konstanter Totalkrümmung analytische Flächen. Die Bestimmung aller Flächen von negativer konstanter Totalkrümmung erfordert die Integration der hyperbolischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin u.$$

Demnach gibt es nicht-analytische pseudosphärische Flächen.

Im folgenden soll ein Problem der Flächentheorie behandelt werden, das mit den genannten Untersuchungen in einem gewissen Zusammenhange steht. Ich behaupte:

„Bei der Verbiegung analytischer Flächen von positiver Totalkrümmung können nur analytische Flächen entstehen"[2]).

---

1) D. Hilbert, Mathematische Probleme, Vortrag gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris 1900; Seite 33 ff.

2) Die Anregung zur Behandlung dieses Problems verdanke ich Herrn Prof. D. Hilbert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kapitel I.

Die flächentheoretischen Grundlagen.

§ 1. Die analytische Formulierung des Problems.

Durch Verbiegung der Fläche

$$x = x(u,v),$$
$$y = y(u,v),$$
$$z = z(u,v)$$

möge die Flächenschar

$$X = X(u,v,t),$$
$$Y = Y(u,v,t),$$
$$Z = Z(u,v,t)$$

entstehen. Für $t = O$ sollen X, Y, Z in x, y, z übergehen. Entwickelt man X, Y, Z nach Potenzen des Parameters t, so soll

$$X(u,v,t) = x(u,v) + x_1(u,v)\,t + x_2(u,v)\,t^2 + x_3(u,v)\,t^3 + \ldots\ldots,$$
$$Y(u,v,t) = y(u,v) + y_1(u,v)\,t + y_2(u,v)\,t^2 + y_3(u,v)\,t^3 + \ldots\ldots,$$
$$Z(u,v,t) = z(u,v) + z_1(u,v)\,t + z_2(u,v)\,t^2 + z_3(u,v)\,t^3 + \ldots\ldots$$

sein. Da alle Biegungsflächen dasselbe Linienelement besitzen, hat man

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Nun ist

$$dX \equiv \frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x_1}{\partial u} t + \frac{\partial x_2}{\partial u} t^2 + \frac{\partial x_3}{\partial u} t^3 + \cdots\cdots\right) du + \left(\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial v} t + \frac{\partial x_2}{\partial v} t^2 + \frac{\partial x_3}{\partial v} t^3 + \cdots\right) dv,$$

und

$$dX^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} t + \left(2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u} + \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2\right) t^2 + \left(2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial u} + 2\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u}\right) t^3 + \cdots\right] du^2$$
$$+ 2\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) t + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right) t^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} + \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right) t^3 + \cdots\right] du\,dv$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} t + \left(2\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial v} + \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2\right) t^2 + \left(2\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial v} + 2\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial v}\right) t^3 + \cdots\right] dv^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Führen wir die in der Flächentheorie übliche Bezeichnungsweise

$$\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2=\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2$$

ein, so wird

$$dX^2+dY^2+dZ^2=\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2du^2+2\,\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}du\,dv+\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2dv^2$$

$$=\left[\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\,\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u}t+\left(2\,\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u}+\Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2\right)t^2+\cdots\right]du^2$$

$$+2\left[\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\left(\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}+\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)t+\left(\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}+\Sigma\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)t^2+\cdots\right]du\,dv$$

$$+\left[\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+2\,\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v}t+\left(2\,\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial v}+\Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2\right)t^2+\cdots\right]dv^2.$$

Daraus folgt durch Nullsetzen der Koeffizienten der einzelnen Potenzen von t:

$$\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2=\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\quad \Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}=\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},\quad \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2=\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

da die Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F, G bei der ursprünglichen Fläche und den Biegungsflächen übereinstimmen; ferner

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u}=0,$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}+\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=0,$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v}=0.$$

Diese drei Gleichungen bestimmen x_1, y_1 und z_1. Weiter folgen

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u}=-\frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2,$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}+\Sigma\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=-\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v},$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial v}=-\frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2$$

als Differentialgleichungen für x_2, y_2, z_2. Allgemein sind

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_n}{\partial u}=-\tfrac{1}{2}\left(\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial u}+\Sigma\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_{n-2}}{\partial u}+\Sigma\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_{n-3}}{\partial u}+\cdots+\Sigma\frac{\partial x_{n-1}}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u}\right),$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_n}{\partial v}+\Sigma\frac{\partial x_n}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=-\left(\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial v}+\Sigma\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_{n-2}}{\partial v}+\Sigma\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_{n-3}}{\partial v}+\cdots+\Sigma\frac{\partial x_{n-1}}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right),$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_n}{\partial v}=-\tfrac{1}{2}\left(\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial v}+\Sigma\frac{\partial x_2}{\partial v}\frac{\partial x_{n-2}}{\partial v}+\Sigma\frac{\partial x_3}{\partial v}\frac{\partial x_{n-3}}{\partial v}+\cdots+\Sigma\frac{\partial x_{n-1}}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)$$

die Bestimmungs-Differentialgleichungen für x_n, y_n, z_n. Kann man diese Systeme von Differentialgleichungen integrieren und ergeben sich für X, Y, Z konvergente Potenzreihen in t, so ist damit das allgemeine Verbiegungsproblem, alle Flächen mit gegebenem Linienelement zu finden, gelöst. Wir werden x, y, z als analytische Funktionen annehmen und dann zeigen,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dass X, Y, Z nicht nur in t, sondern auch in u und v konvergente Potenzreihen sind. Nimmt man x, y, z nicht als analytische Funktionen an, so lässt sich aus dem Folgenden doch zeigen, dass X, Y, Z konvergente Potenzreihen in t sind.

Wenn man in den Entwickelungen für X, Y, Z die Glieder mit t^2 und den höheren Potenzen von t fortlässt, so spricht man von einer unendlich kleinen Verbiegung. Diese ist zuerst von Weingarten im 100. Bande von Crelles Journal behandelt worden. Wir entwickeln zunächst die Formeln, welche uns die Koeffizienten der unendlich kleinen Verbiegung, x_1, y_1, z_1, liefern und werden dann für die Verbiegungskoeffizienten zweiter und höherer Ordnung ähnliche Differentialgleichungen aufstellen.

§ 2. Die unendlich kleine Verbiegung.

x_1, y_1, z_1 werden durch die Gleichungen

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} = O, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = O, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} = O$$

bestimmt. Wir setzen (Weingarten)

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = \varphi \sqrt{EG-F^2}, \quad \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\varphi \sqrt{EG-F^2}.$$

Durch Differentiieren erhält man

$$\frac{\partial \varphi \sqrt{EG-F^2}}{\partial u} = \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v};$$

oder

$$\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \sqrt{EG-F^2}}{\partial u}\,\varphi = \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u};$$

ebenso

$$\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \sqrt{EG-F^2}}{\partial v}\,\varphi = \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial x_1}{\partial u}.$$

Daraus folgt, wenn man für φ seinen Wert einführt

$$\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\partial \log \sqrt{EG-F^2}}{\partial u}\,\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v},$$

$$\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{EG-F^2}}{\partial v}\,\Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}.$$

Wir machen jetzt die Annahme, dass die Totalkrümmung (Gausssche Krümmung) der Fläche $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ positiv ist. Dann können die Parameter u, v so gewählt werden, dass von den Fundamentalgrössen D, D', D'' zweiter Art D' verschwindet und $D'' = D$ wird. Nach den bekannten Formeln der Flächentheorie ist

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial x}{\partial v} + DX,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \beta_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \gamma_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \gamma_2 \frac{\partial x}{\partial v} + DX.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(X, Y, Z sind hier die Cosinus der positiven Richtung der Flächennormale. Die Koeffizienten haben die Werte

$$a_1 = \frac{G\frac{\partial E}{\partial u} + F\frac{\partial E}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial u}}{2(EG-F^2)};\ \beta_1 = \frac{G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)};\ \gamma_1 = \frac{-F\frac{\partial G}{\partial v} + 2G\frac{\partial F}{\partial v} - G\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)};$$

$$a_2 = \frac{-F\frac{\partial E}{\partial u} + 2E\frac{\partial F}{\partial u} - E\frac{\partial F}{\partial v}}{2(EG-F^2)};\ \beta_2 = \frac{E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)};\ \gamma_2 = \frac{E\frac{\partial G}{\partial v} + F\frac{\partial G}{\partial u} - 2F\frac{\partial F}{\partial v}}{2(EG-F^2)}.)$$

Wenn man für die zweiten Differentialquotienten von x diese Werte einführt, so ergibt sich

$$\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} = D\Sigma X\frac{\partial x_1}{\partial v},\quad \sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -D\Sigma X\frac{\partial x_1}{\partial u},$$

oder

$$\Sigma X\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{K}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v},\quad \Sigma X\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{K}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

wenn K das Gausssche Krümmungsmass bezeichnet.

Für x_1, y_1, z_1 haben wir mithin folgendes Gleichungssystem:

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0,\qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x_1}{\partial v} = \varphi\sqrt{EG-F^2},$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\varphi\sqrt{EG-F^2},\qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0,$$

$$\Sigma X\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\varrho\,\frac{\partial\varphi}{\partial v},\qquad \Sigma X\frac{\partial x_1}{\partial v} = \varrho\,\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

wenn man

$$\frac{1}{\sqrt{K}} = \varrho$$

setzt. Durch Auflösen dieser Gleichungen erhält man

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\varrho\,X\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{F\frac{\partial x}{\partial u} - E\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\,\varphi,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \varrho\,X\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{G\frac{\partial x}{\partial u} - F\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\,\varphi.$$

Wir haben jetzt noch die Funktion φ zu bestimmen. Wir haben

$$\varrho\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \Sigma X\,\frac{\partial x_1}{\partial v},\quad \varrho\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\Sigma X\,\frac{\partial x_1}{\partial u}.$$

Differentiiert man die erste Gleichung nach u, die zweite nach v und addiert, so wird

$$\varrho\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial\varrho}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varrho}{\partial v}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}.$$

Da nach den Sätzen der Flächentheorie

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{GD}{EG-F^2}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{FD}{EG-F^2}\,\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{FD}{EG-F^2}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{ED}{EG-F^2}\,\frac{\partial x}{\partial v}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist, hat man

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} - \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} = - \frac{E+G}{\varrho} \varphi,$$

und

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial \log \varrho}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \log \varrho}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{E+G}{\varrho^2} \varphi = O$$

ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ. Führt man

$$\varphi \sqrt{\varrho} = \vartheta$$

ein, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = a\,(u, v)\,\vartheta \text{ oder } \Delta\,\vartheta = a\,\vartheta, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

wo

$$a = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \Delta\,\varrho - \frac{E+G}{\varrho^2}$$

ist.

Wenn man in den Gleichungen für $\frac{\partial x_1}{\partial u}$ und $\frac{\partial x_1}{\partial v}$ ebenfalls ϑ statt φ einführt, so wird

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial \sqrt{\varrho}\, X}{\partial v} \vartheta - \sqrt{\varrho}\, X \frac{\partial \vartheta}{\partial v},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = - \frac{\partial \sqrt{\varrho}\, X}{\partial u} \vartheta + \sqrt{\varrho}\, X \frac{\partial \vartheta}{\partial u}.$$

Differentiiert man die erste Gleichung nach u und die zweite nach v und addiert, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_1 &= 2\, \frac{\partial \sqrt{\varrho}\, X}{\partial v} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} - 2\, \frac{\partial \sqrt{\varrho}\, X}{\partial u} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}. \\ \text{Ebenso wird} \qquad & \\ \Delta y_1 &= 2\, \frac{\partial \sqrt{\varrho}\, Y}{\partial v} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} - 2\, \frac{\partial \sqrt{\varrho}\, Y}{\partial u} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}, \\ \Delta z_1 &= 2\, \frac{\partial \sqrt{\varrho}\, Z}{\partial v} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} - 2\, \frac{\partial \sqrt{\varrho}\, Z}{\partial u} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Integriert man (1) und dann (2), so erhält man die ersten Biegungskoeffizienten $x_1\, y_1,\, z_1$ und das Problem der unendlich kleinen Verbiegung ist gelöst.

§ 3. Die zweiten und die höheren Biegungskoeffizienten.

Die zweiten Biegungskoeffizienten $x_2,\, y_2,\, z_2$ werden durch die Gleichungen

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial u} = - e, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = -2f, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial v} = - g$$

bestimmt, wenn man

$$\tfrac{1}{2}\, \Sigma \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 = e, \quad \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} = 2f, \quad \tfrac{1}{2}\, \Sigma \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 = g$$

bezeichnet. Wir setzen

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} = \varphi \sqrt{EG - F^2} - f, \qquad \Sigma \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = - \varphi \sqrt{EG - F^2} - f.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dann erhält man durch Differentiation

$$\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\sqrt{EG-F^2}}{\partial u}\,\varphi=\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\frac{\partial x_2}{\partial v}-\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\,\frac{\partial x_2}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial e}{\partial v},$$

$$\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\sqrt{EG-F^2}}{\partial v}\,\varphi=\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\,\frac{\partial x_2}{\partial v}-\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,\frac{\partial x_2}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Setzt man für φ seinen Wert ein und berücksichtigt dann die Formeln Seite 5 für die zweiten Ableitungen von x, so wird

$$\Sigma X\frac{\partial x_2}{\partial u}=-\frac{1}{\sqrt{K}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\gamma_1 e+(\gamma_2-\beta_1)f-\beta_2 g-\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial u}\right),$$

$$\Sigma X\frac{\partial x_2}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{K}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(-\beta_1 e+(\alpha_1+\alpha_2-2\beta_2)f+\alpha_2 g-\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial e}{\partial v}\right).$$

Für x_2, y_2, z_2 haben wir demnach das Gleichungssystem

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x_2}{\partial u}=-e, \qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x_2}{\partial v}=\varphi\sqrt{EG-F^2}-f,$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial x_2}{\partial u}=-\varphi\sqrt{EG-F^2}-f, \qquad \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial x_2}{\partial v}=-g,$$

$$\Sigma X\,\frac{\partial x_2}{\partial u}=-\varrho\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}+m, \qquad \Sigma X\,\frac{\partial x_2}{\partial v}=\varrho\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}+n,$$

wo

$$m=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\gamma_1 e+(\gamma_2-\beta_1)f-\beta_2 g-\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial u}\right),$$

$$n=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(-\beta_1 e+(\alpha_1+\alpha_2-2\beta_2)f+\alpha_2 g-\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial e}{\partial v}\right)$$

ist. Durch Auflösen dieser Gleichungen findet man

$$\frac{\partial x_2}{\partial u}=-\varrho X\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{F\frac{\partial x}{\partial u}-E\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\,\varphi+mX-\frac{\left(F\frac{\partial x}{\partial u}-E\frac{\partial x}{\partial v}\right)f+\left(G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}\right)e}{EG-F^2},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial v}=\varrho X\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\,\varphi+nX-\frac{\left(F\frac{\partial x}{\partial u}-E\frac{\partial x}{\partial v}\right)g+\left(G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}\right)f}{EG-F^2}.$$

Setzt man

$$mX-\frac{\left(F\frac{\partial x}{\partial u}-E\frac{\partial x}{\partial v}\right)f+\left(G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}\right)e}{EG-F^2}=\mu,$$

$$nX-\frac{\left(F\frac{\partial x}{\partial u}-E\frac{\partial x}{\partial v}\right)g+\left(G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}\right)f}{EG-F^2}=\nu,$$

so wird

$$\frac{\partial x_2}{\partial u}=-\varrho X\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{F\frac{\partial x}{\partial u}-E\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\,\varphi+\mu,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial v}=\varrho X\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{G\frac{\partial x}{\partial u}-F\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\,\varphi+\nu.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir haben jetzt wieder die Differentialgleichung für φ aufzustellen. Es ist

$$\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \boldsymbol{\Sigma} X \frac{\partial x_2}{\partial v} - n, \qquad \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial v} = - \boldsymbol{\Sigma} X \frac{\partial x_2}{\partial u} + m.$$

Durch Differentiieren und Addieren findet man

$$\varrho \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial \varrho}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varrho}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \boldsymbol{\Sigma} \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} - \boldsymbol{\Sigma} \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial n}{\partial u}.$$

Führt man wie im § 2 für $\frac{\partial X}{\partial u}$ und $\frac{\partial X}{\partial v}$ andere Werte ein, so wird

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial \log \varrho}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \log \varrho}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{E+G}{\varrho^2} \varphi = \frac{1}{\varrho^3 D} [Fe - (E-G) f - G g] + \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial n}{\partial u} \right) = O.$$

Setzt man

$$\varphi \sqrt{\varrho} = \vartheta_2,$$

so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial v^2} = a\; u, v)\, \vartheta_2 + b(u, v),$$

oder

$$\Delta \vartheta_2 = a \vartheta_2 + b,$$

wo wieder

$$a = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \Delta \varrho - \frac{E+G}{\varrho^2}$$

ist und b den Wert

$$b = \frac{1}{\varrho^3 D} [Fe - (E-G) f - G g] + \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial n}{\partial u} \right]$$

hat. Führt man auch in die Gleichungen für $\frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial v}$ $\varphi = \frac{\vartheta_2}{\sqrt{\varrho}}$ ein, so wird

$$\frac{\partial x_2}{\partial u} = \frac{\partial \sqrt{\varrho} X}{\partial v} \vartheta_2 - \sqrt{\varrho} X \frac{\partial \vartheta_2}{\partial v} + \mu,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial v} = - \frac{\partial \sqrt{\varrho} X}{\partial u} \vartheta_2 + \sqrt{\varrho} X \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} + \nu,$$

und wenn man differentiiert und addiert

$$\Delta x_2 = 2 \frac{\partial \sqrt{\varrho} X}{\partial v} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} - 2 \frac{\partial \sqrt{\varrho} X}{\partial u} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial v} + \frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \nu}{\partial v}.$$

Analoge Gleichungen findet man für y_2 und z_2.

Setzt man in der Gleichung für b für m und n die Werte ein, so findet man

$$b = A e + B f + C g + A_1 \frac{\partial e}{\partial u} + B_1 \frac{\partial f}{\partial u} + C_1 \frac{\partial g}{\partial u} + A_2 \frac{\partial e}{\partial v} + B_2 \frac{\partial f}{\partial v} + C_2 \frac{\partial g}{\partial v}$$
$$+ A'' \frac{\partial^2 e}{\partial u \partial v} + B'' \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) + C'' \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v},$$

d. h. b ist eine lineare Funktion von e, f, g und deren ersten und zweiten Ableitungen. Die Koeffizienten sind Funktionen von u und v, die der zu verbiegenden analytischen Fläche x, y, z entstammen; sie sind analytisch in u und v.

Ebenso ist $\frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \nu}{\partial v} = \sigma$ eine lineare Funktion von e, f, g und deren ersten und zweiten Ableitungen, ebenfalls mit Koeffizienten, die analytische Funktionen in u und v sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir wenden uns nun den dritten Verbiegungskoeffizienten x_3, y_3, z_3 zu. Diese sind zu bestimmen aus den Gleichungen

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial u} = -\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u},$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} - \Sigma \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v},$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial v} = -\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial v},$$

oder

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial u} = -e_3, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -2f_3, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial v} = -g_3.$$

Wir sehen, dass die Rechnung für die dritten Verbiegungskoeffizienten genau so verläuft, wie für die zweiten. Wir haben nur an Stelle von e, f, g, e_3, f_3, g_3 einzuführen. (Bei den zweiten Verbiegungskoeffizienten müssen wir jetzt e_2, f_2, g_2 statt e, f, g schreiben.) Demnach lauten unsere Gleichungen

$$\Delta x_3 = 2\,\frac{\partial \sqrt{\varrho}\,X}{\partial v}\,\frac{\partial \vartheta_3}{\partial u} - 2\,\frac{\partial \sqrt{\varrho}\,X}{\partial u}\,\frac{\partial \vartheta_3}{\partial v} + \sigma_3,$$

$$\Delta \vartheta_3 = a\vartheta_3 + b_3,$$

wo σ_3 und b_3 lineare Funktionen von e_3, f_3, g_3 und deren ersten und zweiten Ableitungen sind, welche dieselben Koeffizienten wie σ und b (bez. σ_2 und b_2) haben.

Analoge Entwicklungen gelten für alle weiteren Biegungskoeffizienten.

§ 4. Zusammenstellung der Formeln.

Die Gleichungen der Biegungsflächen lauten

$$X = x + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 + \ldots\ldots,$$
$$Y = y + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 + \ldots\ldots,$$
$$Z = z + z_1 t + z_2 t^2 + z_3 t^3 + \ldots\ldots$$

Es soll die Konvergenz dieser Reihen nachgewiesen werden, und zwar nicht nur die Konvergenz als Potenzreihen von t, sondern es soll gezeigt werden, dass die Reihen konvergente Potenzreihen in u und v, also analytische Funktionen in u und v sind. Voraussetzung ist natürlich, dass x, y, z analytisch in u und v sind.

Für die Koeffizienten haben wir folgende Gleichungen:

$$\Delta x_1 = U\frac{\partial \vartheta_1}{\partial u} + V\frac{\partial \vartheta_1}{\partial v},$$

$$\Delta x_2 = U\frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} + V\frac{\partial \vartheta_2}{\partial v} + \sigma_2,$$

$$\Delta x_3 = U\frac{\partial \vartheta_3}{\partial u} + V\frac{\partial \vartheta_3}{\partial v} + \sigma_3,$$

. . . .

. . . .

$$\Delta x_i = U\frac{\partial \vartheta_i}{\partial u} + V\frac{\partial \vartheta_i}{\partial v} + \sigma_i,$$

. . . .

. . . .

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$U = 2\,\frac{\partial \sqrt{\varrho}\, X}{\partial v} \quad \text{und} \quad V = -2\,\frac{\partial \sqrt{\varrho}\, X}{\partial u}$$

sind ebenfalls analytische Funktionen in u und v. Gleichungen derselben Form erhält man für y_i und z_i. Wir brauchen nur die Koeffizienten der X-Reihe behandeln; für die Koeffizienten der Y- und Z-Reihe gelten dieselben oberen Grenzen, die wir für die Koeffizienten der X-Reihe aufstellen werden.

$\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots$ werden bestimmt durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\Delta\, \vartheta_1 &= a\, \vartheta_1, \\
\Delta\, \vartheta_2 &= a\, \vartheta_2 + b_2, \\
\Delta\, \vartheta_3 &= a\, \vartheta_3 + b_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta\, \vartheta_i &= a\, \vartheta_i + b_i \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen, sowie die Gleichungen für $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ sind mit beliebigen nicht-analytischen Randwerten zu integrieren; wir werden später nur voraussetzen, dass die Randwerte einige Differentialquotienten zulassen.

Die Grössen b sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
b_i = A\, e_i + B\, f_i + C\, g_i + A_1 \frac{\partial e_i}{\partial u} + A_2 \frac{\partial e_i}{\partial v} + B_1 \frac{\partial f_i}{\partial u} + B_2 \frac{\partial f_i}{\partial v} + C_1 \frac{\partial g_i}{\partial u} + C_2 \frac{\partial g_i}{\partial v} \\
+ A'' \frac{\partial^2 e_i}{\partial u\, \partial v} + B'' \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial v^2} \right) + C'' \frac{\partial^2 g_i}{\partial u\, \partial v}.
\end{aligned}$$

Für σ_i gilt eine Gleichung derselben Art. Endlich haben wir für die Grössen e_i, f_i, g_i die Gleichungen

$$\begin{aligned}
e_i &= \tfrac{1}{2} \left[\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_{i-1}}{\partial u} + \Sigma \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_{i-2}}{\partial u} + \Sigma \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_{i-3}}{\partial u} + \ldots + \Sigma \frac{\partial x_{i-1}}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial u} \right], \\
f_i &= \tfrac{1}{2} \left[\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_{i-1}}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_{i-2}}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_{i-3}}{\partial v} + \ldots + \Sigma \frac{\partial x_{i-1}}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right], \\
g_i &= \tfrac{1}{2} \left[\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x_{i-1}}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial x_2}{\partial v} \frac{\partial x_{i-2}}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial x_3}{\partial v} \frac{\partial x_{i-3}}{\partial v} + \ldots + \Sigma \frac{\partial x_{i-1}}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right].
\end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kapitel II.

Der analytische Charakter der Biegungsflächen.

§ 5. Der Nachweis des analytischen Charakters durch trigonometrische Reihen.

Jede Potenzreihe von zwei Veränderlichen

$$\mathfrak{a}_{00} + \mathfrak{a}_{10}\, x + \mathfrak{a}_{01}\, y + \mathfrak{a}_{20}\, x^2 + \mathfrak{a}_{11}\, xy + \mathfrak{a}_{02}\, y^2 + \ldots\ldots$$

kann man durch Einführung von Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

in eine trigonometrische Reihe verwandeln, deren Koeffizienten Potenzreihen von r sind. Lautet die trigonometrische Reihe

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi,$$

so haben die Koeffizienten stets die Form

$$a_n = a_{n,\,n}\, r^n + a_{n+2,\,n}\, r^{n+2} + a_{n+4,\,n}\, r^{n+4} + \ldots\ldots,$$
$$b_n = b_{n,\,n}\, r^n + b_{n+2,\,n}\, r^{n+2} + b_{n+4,\,n}\, r^{n+4} + \ldots\ldots,$$

wo die $a_{i,k}$ und $b_{i,k}$ Konstanten sind. Umgekehrt lässt sich jede trigonometrische Reihe von dieser Form in eine konvergente Potenzreihe von x und y verwandeln.

Auf diese Sätze gestützt hat Picard bewiesen, dass alle Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\, u \qquad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\right)$$

Potenzreihen in x und y sind, und durch Verallgemeinerung dieser Methoden habe ich dasselbe für sämtliche elliptischen Differentialgleichungen, die einem regulären Variationsproblem entstammen, bewiesen.

Grundlegend für die Lösung dieser Aufgaben ist die Integration der Gleichung

$$\Delta u = f(x,y)$$

durch trigonometrische Reihen und die Abschätzung ihrer Koeffizienten. Ist

$$f(x,y) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)\cos n\varphi + b_n(r)\sin n\varphi,$$
$$a_n = a_{n,\,n}\, r^n + a_{n+2,\,n}\, r^{n+2} + a_{n+4,\,n}\, r^{n+4} + \ldots,$$
$$b_n = b_{n,\,n}\, r^n + b_{n+2,\,n}\, r^{n+2} + b_{n+4,\,n}\, r^{n+4} + \ldots,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn man $x=r\cos\varphi$ und $y=r\sin\varphi$ einführt, und macht man den Ansatz

$$u=\mathfrak{a}_o(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{a}_n(r)\cos n\varphi+\beta_n(r)\sin n\varphi,$$

so ergeben sich für die Koeffizienten dieser Reihe die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\mathfrak{a}_o}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\mathfrak{a}_o}{dr}=a_o,$$

$$\frac{d^2\mathfrak{a}_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\mathfrak{a}_n}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\mathfrak{a}_n=a_n, \qquad \frac{d^2\beta_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\beta_n}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\beta_n=b_n.$$

Die Integrale dieser Gleichung, welche für $r=R$ verschwinden und für $r<R$ endlich und stetig sind, lauten

$$\mathfrak{a}_o=\int_R^r\left(\frac{\int_o^R a_o dr}{r}\right)dr,$$

$$\mathfrak{a}_n=\frac{1}{2n}\left[r^n\int_R^r\frac{a_n}{r^{n-1}}dr-\frac{1}{r_n}\int_o^r a_n r^{n+1}dr+\frac{r^n}{R^{2n}}\int_o^R a_n r^{n+1}dr\right],$$

$$\beta_n=\frac{1}{2n}\left[r^n\int_R^r\frac{b_n}{r^{n-1}}dr-\frac{1}{r_n}\int_o^r b_n r^{n+1}dr+\frac{r^n}{R^{2n}}\int_o^R b_n r^{n+1}dr\right].$$

Die Koeffizienten haben, wie man sofort sieht, die analytische Form:

$$\mathfrak{a}_n=\mathfrak{a}_{n,n}r^n+\mathfrak{a}_{n+2,n}r^{n+2}+\mathfrak{a}_{n+4,n}r^{n+4}+\cdots,$$
$$\beta_n=\beta_{n,n}r^n+\beta_{n+2,n}r^{n+2}+\beta_{n+4,n}r^{n+4}+\cdots.$$

Setzt man

$$A_n=|a_{n,n}|r^n+|a_{n+2,n}|r^{n+2}+|a_{n+4,n}|r^{n+4}+\cdots,$$
$$B_n=|b_{n,n}|r^n+|b_{n+2,n}|r^{n+2}+|b_{n+4,n}|r^{n+4}+\cdots,$$
$$\mathsf{A}_n=|\mathfrak{a}_{n,n}|r^n+|\mathfrak{a}_{n+2,n}|r^{n+2}+|\mathfrak{a}_{n+4,n}|r^{n+4}+\cdots,$$
$$\mathsf{B}_n=|\beta_{n,n}|r^n+|\beta_{n+2,n}|r^{n+2}+|\beta_{n+4,n}|r^{n+4}+\cdots,$$

indem man für alle Glieder ihre absoluten Beträge einführt, so findet man durch Abschätzung

$$\mathsf{A}_n<\frac{4A_n r^2}{n^2}, \qquad \mathsf{B}_n<\frac{4B_n r^2}{n^2}.$$

Da

$$\mathsf{A}_o+\sum\mathsf{A}_n\cos n\varphi+\mathsf{B}_n\sin n\varphi$$

konvergent ist, stellt u eine analytische Funktion dar.

Wir wollen

$$\mathsf{A}_n=\overset{n}{\overline{u}}$$

setzen, d. h. $\overset{n}{\overline{u}}$ bedeutet den Koeffizienten von $\cos n\varphi$ in der trigonometrischen Reihe für u, wenn man alle Glieder der Potenzreihe von r, welche diesen Koeffizienten darstellt, durch ihre absoluten Beträge ersetzt hat. Da B_n sich genau so wie A_n verhält, brauchen wir es künftig nicht mehr besonders zu berücksichtigen.

Für die Folge wird es wichtig sein, auch die Differentialquotienten von u auf ihr analytisches Verhalten zu untersuchen. Wir wollen $\overset{n}{\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}}$ bilden, d. h. den Koeffizienten von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\cos n\varphi$ in der trigonometrischen Reihe für $\frac{\partial u}{\partial x}$, nachdem man sämtliche Glieder des Koeffizienten durch ihre absoluten Beträge ersetzt hat. Wir finden

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{1}{2}\,\frac{d\alpha_1}{dr} - \frac{\alpha_1}{r}\right) + \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{d\alpha_{n-1}}{dr} + \frac{d\alpha_{n+1}}{dr} + \frac{n-1}{r}\,\alpha_{n-1} - \frac{n+1}{r}\,\alpha_{n+1}\right)\cos n\varphi,$$
$$+\frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{d\beta_{n-1}}{dr} + \frac{d\beta_{n+1}}{dr} - \frac{n-1}{r}\,\beta_{n-1} + \frac{n+1}{r}\,\beta_{n+1}\right)\sin n\varphi.$$

Aus

$$\frac{d\alpha_n}{dr} = \frac{1}{2}\left[r^{n-1}\int_R^r \frac{a_n}{r^{n-1}}\,dr + \frac{1}{r^{n+1}}\int_o^r a_n\, r^{n+1}\,dr + \frac{r^{n-1}}{R^{2n}}\int_o^R a_n\, r^{n-1}\,dr\right]$$

folgt durch Abschätzen

$$\frac{d\mathsf{A}_n}{dr} < \frac{4A_n\, r}{n},$$

und es wird

$$\overset{n}{\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}} < \frac{\lambda A_n\, r}{n}.$$

Ähnlich finden wir durch Differentiieren und Abschätzen

$$\frac{d^2\alpha_n}{dr^2} = \frac{1}{2}\left[(n-1)\,r^{n-2}\int_R^r \frac{a_n}{r^{n-1}}\,dr - \frac{n+1}{r^{n+2}}\int_o^r a_n r^{n+1} dr + \frac{(n-1)\,r^{n-2}}{R^{2n}}\int_o^R a_n\, r^{n+1}\,dr\right] + a_n,$$

$$\frac{d^2\mathsf{A}_n}{dr^2} < 4A_n,$$

und

$$\overset{n}{\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}} < \lambda A_n.$$

$$\frac{d^3\alpha_n}{dr^3} = \frac{1}{2}\left[(n-1)\,(n-2)\,r^{n-3}\int_R^r \frac{a_n}{r^{n-1}}\,dr + \frac{(n+1)(n+2)}{r^{n+3}}\int_o^r a_n r^{n+1} dr + \frac{(n-1)(n-2)\,r^{n-3}}{R^{2n}}\int_o^R a_n r^{n-1} dr\right]$$
$$-\frac{a_n}{r} + \frac{da_n}{dr},$$

$$\frac{d^3\mathsf{A}_n}{dr^3} < \frac{4nA_n}{r} + \frac{dA_n}{dr},$$

und

$$\overset{n}{\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}}} < \lambda\left(\frac{nA_n}{r} + \frac{dA_n}{dr}\right).$$

Der Gleichförmigkeit halber setzen wir

$$\overset{n}{\overline{u}} < \frac{\lambda A_n\, r^2}{n^2}.$$

λ bedeutet eine Zahl, die zwischen 1 und 100 liegt.

Die anderen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ etc. verhalten sich ebenso wie die Ableitungen derselben Ordnung nach x.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir wollen uns nun für einen Moment der Potentialgleichung

$$\Delta u = O$$

zuwenden. Führt man Polarkoordinaten ein und gibt für $r=R$ willkürliche Randwerte

$$u(R,\varphi) = p_o + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos n\varphi + q_n \sin n\varphi,$$

wo p und q von R abhängige Konstanten sind, so wird die Potentialgleichung bekanntlich durch die Reihe

$$u(r,\varphi) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left[p_n \cos n\varphi + q_n \sin n\varphi\right]$$

gelöst. Nach der Theorie der trigonometrischen Reihen haben wir

$$p_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R,\psi) \cos n\psi \, d\psi, \quad q_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R,\psi) \sin n\psi \, d\psi.$$

Setzt man voraus, dass die Randwerte Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung zulassen, so erhält man durch zweimalige partielle Integration

$$p_n = -\frac{1}{n^2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u(R,\psi)}{\partial \psi^2} \cos n\psi \, d\psi, \quad q_n = -\frac{1}{n^2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u(R,\psi)}{\partial \psi^2} \sin n\psi \, d\psi.$$

Durch Abschätzen dieser Integrale erhält man

$$|p_n| < \frac{hR}{n^2}, \quad |q_n| < \frac{hR}{n^2},$$

wo

$$h\,R = 2 \left| \frac{\partial^2 u(R,\varphi)}{\partial \varphi^2} \right|_{\max}$$

ist. (Alle Ableitungen von $u(R,\varphi)$ nach φ enthalten, wie man leicht sieht, den Faktor R.) Bildet man

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{R} \left[(p_{n-1} + p_{n+1} - q_{n-1} + q_{n+1}) \cos n\varphi + (p_{n-1} + p_{n+1} + q_{n-1} + q_{n+1}) \sin n\varphi\right] \left(\frac{r}{R}\right)^n \\ &= \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (p'_n \cos n\varphi + q'_n \sin n\varphi) \left(\frac{r}{R}\right)^n,\end{aligned}$$

so erhält man durch Abschätzen

$$|p'_n| < \frac{5h}{n}, \quad |q'_n| < \frac{5h}{n}.$$

Nun genügt $\frac{\partial u}{\partial x}$ auch der Potentialgleichung, d. h. es ist

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial x} = O;$$

folglich haben wir, wenn wir für die Randwerte die Existenz von dritten Ableitungen voraussetzen:

$$|p'_n| < \frac{h' R}{n^2}, \quad |q'_n| < \frac{h' R}{n^2},$$

wo

$$h' R = 2 \left| \frac{\partial^3 u(R,\varphi)}{\partial \varphi^3} \right|_{\max}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist. Mithin ist h mit $\frac{R}{n}$ proportional und wir haben

$$|p_n| < \frac{h' R^2}{n^3}, \quad |q_n| < \frac{h' R^2}{n^3}.$$

Dann wird

$$\overset{n}{u} < \frac{h' R^2}{n^3} \left(\frac{r}{R}\right)^n < \frac{h' r^2}{n^3}.$$

Bedeutet λ wiederum eine Konstante zwischen 1 und 100, so hat man

$$\overset{n}{u} < \frac{\lambda h' r^2}{n^3}, \quad \frac{\overset{n}{\overline{\partial u}}}{\partial x} < \frac{\lambda h' r}{n^2}, \quad \frac{\overset{n}{\overline{\partial^2 u}}}{\partial x^2} < \frac{\lambda h'}{n}, \quad \frac{\overset{n}{\overline{\partial^3 u}}}{\partial x^3} < \frac{\lambda h'}{r}.$$

Setzen wir voraus, dass die Randwerte vierte Ableitungen besitzen, so ist

$$\overset{n}{u} < \frac{\lambda h'' r^3}{n^4}, \quad \frac{\overset{n}{\overline{\partial u}}}{\partial x} < \frac{\lambda h'' r^2}{n^3}, \quad \frac{\overset{u}{\overline{\partial^2 u}}}{\partial x^2} < \frac{\lambda h'' r}{n^2}, \quad \frac{\overset{n}{\overline{\partial^3 u}}}{\partial x^3} < \frac{\lambda h''}{n}.$$

§ 6. Die Gleichungen $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = a(u, v)\, \vartheta$ und $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = a(u, v)\vartheta + b(u, v)$.

Da unser Problem auf partielle Differentialgleichungen von der Form $\Delta\vartheta = a\vartheta$ und $\Delta\vartheta = a\vartheta + b$ führt, wollen wir diese Gleichungen zunächst behandeln. Die Gleichung

$$\Delta\vartheta = a\vartheta,$$

wo $a\,(u, v)$ eine analytische Funktion in u und v ist, soll für die Fläche eines Kreises mit dem Radius R so integriert werden, dass ϑ im Innern des Kreises endlich und stetig ist und auf der Peripherie willkürliche Werte annimmt. Diese Randwerte sollen jedoch Differentialquotienten der ersten drei Ordnungen zulassen. Nach dem **Picard**schen Näherungsverfahren bilden wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta_1 &= o, \\ \Delta\vartheta_2 &= a\vartheta_1, \\ \Delta\vartheta_3 &= a\vartheta_2, \\ \Delta\vartheta_4 &= a\vartheta_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die erste Gleichung wird so integriert, dass ϑ_1 endlich und stetig wird und auf der Peripherie die genannten willkürlichen Werte annimmt. Alle anderen Gleichungen werden ebenfalls für die Fläche des Kreises R integriert, jedoch so, dass $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \ldots\ldots$ auf der Peripherie verschwinden und im Innern des Kreises endlich und stetig sind. Dann ist

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 + \cdots\cdots = \vartheta$$

die gesuchte Lösung unserer Gleichung. (Die Lösung ist eindeutig.)

Nach den Entwickelungen des § 5 ist für die Potentialgleichung $\Delta\vartheta_1 = o$:

$$\overset{n}{\vartheta_1} < \frac{h r^2}{n^3}, \quad \frac{\overset{n}{\overline{\partial\vartheta_1}}}{\partial u} < \frac{h r}{n^2}.$$

(Der Kürze halber haben wir für h für h' gesetzt.)

Um die zweite Gleichung $\Delta\vartheta_2 = a\vartheta_1$ behandeln zu können, müsste man die trigonometrischen Reihen für a und ϑ_1 miteinander multiplizieren und eine neue trigonometrische

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Reihe bilden. In der Potenzreihe, die dann den Koeffizienten von $\cos n\varphi$ darstellt, sind alle Glieder positiv zu nehmen. So erhält man $\overset{n}{\overline{a\vartheta_1}}$. Nun sei

$$a = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos n\varphi + b_n(r) \sin n\varphi,$$

$$\vartheta_1 = \alpha_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r) \cos n\varphi + \beta_n(r) \sin n\varphi,$$

$$a\vartheta_1 = \gamma_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(r) \cos n\varphi + \delta_n(r) \sin n\varphi.$$

a und ϑ_1 sind analytische Funktionen. Ist

$$A_n < \frac{h}{n^2}, \quad \mathsf{A}_n < \frac{k}{n^2}$$

so folgt

$$\Gamma_n < \frac{20hk}{n^2},$$

wie ich in meiner Dissertation pg. 16 und 17 gezeigt habe. [Hätte man

$$a + \vartheta_1 = \varepsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(r) \cos n\varphi + \zeta_n(r) \sin n\varphi,$$

so ist

$$E_n \leqq \frac{h+k}{n^2}.]$$

Wir dürfen nun ohne weiteres

$$\overset{n}{\overline{a}} < \frac{\varkappa}{n^2}$$

annehmen, da $a\,(u,\,v)$ eine analytische Funktion ist, die keinerlei Randbedingungen unterworfen ist. Dann wird

$$\overset{n}{\overline{a\,\vartheta_1}} < \frac{20\varkappa h r^2}{n^3}.$$

Nach § 5 ist für die Gleichung $\varDelta\vartheta_2 = a\vartheta_1$

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_2}} < \frac{\lambda\,\overset{n}{\overline{a\vartheta_1}}\,r^2}{n^2}, \quad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_2}{\partial u}}} < \frac{\lambda\,\overset{n}{\overline{a\vartheta_1}}\,r}{n},$$

$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right.$ verhält sich immer so wie $\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)$ also sicher

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_2}} < \frac{hr^2}{n^3}\; 20\,\varkappa\lambda R^2; \quad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_2}{\partial u}}} < \frac{hr}{n^2}\; 20\,\varkappa\lambda R^2.$$

Weiter ist

$$\overset{n}{\overline{a\vartheta_2}} < 20\,\varkappa\; \frac{hr^2}{n^3}\; 20\,\varkappa\lambda R^2,$$

und aus $\varDelta\vartheta_3 = a\vartheta_2$ folgt

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_3}} < \frac{hr^2}{n^3}\,(20\,\varkappa\lambda R^2)^2; \quad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_3}{\partial u}}} < \frac{hr}{n^2}\,(20\,\varkappa\lambda R^2)^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ebenso erhält man

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_4}} < \frac{hr^2}{n^3}(20\varkappa\lambda R^2)^3; \quad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_4}{\partial u}}} < \frac{hr}{n^2}(20\varkappa\lambda R^2)^3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_m}} < \frac{hr^2}{n^3}(20\varkappa\lambda R^2)^{m-1}; \quad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_m}{\partial u}}} < \frac{hr}{n^2}(20\varkappa\lambda R^2)^{m-1}.$$

Demnach wird

$$\overset{n}{\overline{\vartheta}} \leqq \sum_{m=1}^{\infty} \overset{n}{\overline{\vartheta_m}} = \frac{hr^2}{n^3}\left[1+20\varkappa\lambda R^2+(20\varkappa\lambda R^2)^2+(20\varkappa\lambda R^2)^3+\dots\right].$$

Wird R genügend klein gewählt, so dass

$$20\varkappa\lambda R^2 < 1$$

ist, so haben wir

$$\overset{n}{\overline{\vartheta}} < \frac{hr^2}{n^3}\,\frac{1}{1-20\varkappa\lambda R^2} \quad \text{und} \quad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta}{\partial u}}} < \frac{hr}{n^2}\,\frac{1}{1-20\varkappa\lambda R^2}.$$

Setzt man endlich

$$\frac{1}{1-20\varkappa\lambda R^2} = k,$$

so wird

$$\overset{n}{\overline{\vartheta}} < \frac{hkr^2}{n^3}, \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta}{\partial u}}} < \frac{hkr}{n^2}.$$

Die Gleichung

$$\Delta\vartheta = a\vartheta + b,$$

wo $a(u,v)$ und $b(u,v)$ analytische Funktionen in u und v sind, soll für die Fläche eines Kreises R so integriert werden, dass ϑ im Innern des Kreises endlich und stetig ist und auf der Peripherie willkürliche Randwerte annimmt, die wiederum Differentialquotienten der drei ersten Ordnungen zulassen. Unser Näherungssystem lautet:

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta_1 &= b\,, \\ \Delta\vartheta_2 &= a\vartheta_1, \\ \Delta\vartheta_3 &= a\vartheta_2, \\ \Delta\vartheta_4 &= a\vartheta_3, \\ &\dots\dots \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Wir integrieren die erste Gleichung so, dass ϑ_1 auf der Peripherie die willkürlichen Randwerte annimmt, die anderen Gleichungen so, dass $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4 \dots$ auf der Peripherie verschwinden. Dann stellt

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 + \dots$$

wieder das Integral unserer Gleichung dar. (Die Lösung ist wiederum, wenn der Kreis genügend klein ist, eindeutig.)

Setzen wir

$$\vartheta_1 = \pi + \chi,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so ist $\Delta\pi = o$ mit den gegebenen Randwerten, $\Delta\chi = b$ mit den Randwerten o zu integrieren. Wir erhalten

$$\overset{n}{\overline{\pi}} < \frac{hr^2}{n^3}, \quad \overset{n}{\overline{\chi}} < \frac{\lambda\, \overset{n}{\overline{b}}\, r^2}{n^2}; \qquad \overset{n}{\overline{\vartheta_1}} < \frac{hr^2}{n^3} + \frac{\lambda\, \overset{n}{\overline{b}}\, r^2}{n^2}.$$

$b(u,v)$ ist analytische Funktion ohne Einschränkung; wir können daher, wenn γ eine Konstante bedeutet,

$$\overset{n}{\overline{b}} < \frac{\gamma}{n^2}$$

annehmen. Dann ist

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_1}} < \frac{(h+\lambda\gamma)\, r^2}{n^3}; \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_1}{\partial u}}} < \frac{(h+\lambda\gamma)\, r}{n^2}.$$

Für die anderen Gleichungen des Näherungssystems erhalten wir wie oben

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_2}} < \frac{(h+\lambda\gamma)\, r^2}{n^3}\, 20\varkappa\lambda R^2; \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_2}{\partial u}}} < \frac{(h+\lambda\gamma)\, r}{n^2}\, 20\varkappa\lambda R^2;$$

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_3}} < \frac{(h+\lambda\gamma)\, r^2}{n^3}\, (20\varkappa\lambda R^2)^2; \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_3}{\partial u}}} < \frac{(h+\lambda\gamma)\, r}{n^2}\, (20\varkappa\lambda R^2)^2;$$

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_4}} < \frac{(h+\lambda\gamma)\, r^2}{n^3}\, (20\varkappa\lambda R^2)^3; \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_4}{\partial u}}} < \frac{(h+\lambda\gamma)\, r}{n^2}\, (20\varkappa\lambda R^2)^3;$$

. . . .

. . . .

Wir finden

$$\overset{n}{\overline{\vartheta}} < \frac{(h+\lambda\gamma)\, kr^2}{n^3}; \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta}{\partial u}}} < \frac{(h+\lambda\gamma)\, kr}{n^2}.$$

Dass die Lösungen der Gleichungen $\Delta\vartheta = a\vartheta$ und $\Delta\vartheta = a\vartheta + b$ analytische Funktionen sind, folgt aus der Konvergenz ihrer trigonometrischen Reihen. Diese besitzen die analytische Form, weil beim Näherungsverfahren alle Differentialgleichungen nur Lösungen von analytischer Form der trigonometrischen Reihen zulassen.

§ 7. Der Konvergenzbeweis.

Nach den Entwickelungen von § 6 finden wir für die Gleichung

$$\Delta\vartheta_1 = a\vartheta_1,$$

die unter beliebigen Randwerten für eine Kreisfläche mit dem Radius R integriert wird,

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_1}} < \frac{hkr^2}{n^3}, \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_1}{\partial u}}} < \frac{hkr}{n^2}, \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_1}{\partial v}}} < \frac{hkr}{n^2},$$

wo nur vorausgesetzt wird, dass die Randwertreihe dritte Ableitungen besitzt. Nun ist

$$\Delta x_1 = U\, \frac{\partial\vartheta_1}{\partial u} + V\, \frac{\partial\vartheta_1}{\partial v}.$$

Diese Gleichung ist wieder für eine Kreisfläche R mit einer willkürlichen Randwertreihe zu integrieren; die Randwertreihe soll aber Ableitungen bis zur vierten Ordnung besitzen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Integral ist gleich einer Potentialfunktion, welche diese Randwerte besitzt, vermehrt um die Lösung der Gleichung selbst für die Randwerte o. Nach den Bemerkungen über den Koeffizienten von $\cos n\varphi$ in einer Reihe, die das Produkt von zwei trigonometrischen Reihen darstellt, haben wir

$$\overset{n}{\overline{U\frac{\partial\vartheta_1}{\partial u}+V\frac{\partial\vartheta_1}{\partial v}}} < \varkappa\, \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_1}{\partial u}}},$$

wo $\varkappa$ aus der zu verbiegenden analytischen Fläche entspringt. Nach § 5 ist daher

$$\overset{n}{\overline{x_1}} < \frac{\lambda h r^3}{n^4} + \frac{\lambda\varkappa\, \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_1}{\partial u}}}\, r^2}{n^2}.$$

Führen wir

$$\overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_1}{\partial u}}} < \frac{hkr}{n^2}$$

ein, so wird

$$\overset{n}{\overline{x_1}} < \frac{\lambda h r^3}{n^4} + \frac{\lambda\varkappa h k r^3}{n^4},$$

und wenn wir

$$\lambda(h+\varkappa hk) = c_1$$

setzen:

$$\overset{n}{\overline{x_1}} < \frac{c_1 r^3}{n^4}.$$

Dann wird nach § 5

$$\overset{n}{\overline{\frac{\partial x_1}{\partial u}}} < \frac{c_1 r^2}{n^3}, \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}}} < \frac{c_1 r}{n^2}, \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial^3 x_1}{\partial u^3}}} < \frac{c_1}{n}.$$

Wie diese Ableitungen verhalten sich alle Ableitungen der gleichen Ordnung. Dieselben Ungleichungen, die für x_1 und seine Ableitungen gelten, sind auch für y_1 und z_1 und deren Ableitungen gültig. Nach § 4 ist

$$e_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2,$$

und wir haben

$$\overset{n}{\overline{e_2}} < 3\cdot\frac{1}{2}\,\overset{n}{\overline{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2}}.$$

Nun ist aber

$$\overset{n}{\overline{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2}} < 20\,n^2\left(\overset{n}{\overline{\frac{\partial x_1}{\partial u}}}\right)^2,$$

d. h.

$$\overset{n}{\overline{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2}} < \frac{20 c_1^{\,2} r^4}{n^4},$$

und

$$\overset{n}{\overline{e_2}} < \frac{60\cdot\frac{1}{2}\,c_1^{\,2} r^4}{n^4}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir haben

$$\frac{\partial e_2}{\partial u} < \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2},$$
$$\frac{\partial^2 e_2}{\partial u^2} = \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial^3 x_1}{\partial u^3} + \Sigma \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2}\right)^2,$$

also

$$\overset{n}{\overline{\frac{\partial e_2}{\partial u}}} = \frac{2 . 60 . \frac{1}{2} c_1{}^2 r^3}{n^3},$$
$$\overset{n}{\overline{\frac{\partial^2 e_2}{\partial u^2}}} < \frac{2^2 . 60 . \frac{1}{2} c_1{}^2 r^2}{n^2}.$$

Ebenso verhalten sich die anderen Ableitungen von e_2, f_2 und g_2 derselben Ordnung. Es ist

$$b_2 = A e_2 + B f_2 + C g_2 + A_1 \frac{\partial e_2}{\partial u} + A_2 \frac{\partial e_2}{\partial v} + B_1 \frac{\partial f_2}{\partial u} + B_2 \frac{\partial f_2}{\partial v} + C_1 \frac{\partial g_2}{\partial u} + C_2 \frac{\partial g_2}{\partial v}$$
$$+ A'' \frac{\partial^2 e_2}{\partial u \partial v} + B'' \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial v^2}\right) + C'' \frac{\partial^2 g_2}{\partial u \partial v},$$

wo die Koeffizienten aus der zu verbiegenden Fläche stammen, also analytisch sind. Wir können daher $\varkappa_1$ so bestimmen, dass

$$\overset{n}{\overline{b_2}} < \varkappa_1 \left(\overset{n}{\overline{3 e_2}} + 6 \overset{n}{\overline{\frac{\partial e_2}{\partial u}}} + 9 \overset{n}{\overline{\frac{\partial^2 e_2}{\partial u^2}}} \right).$$

Führen wir die oberen Grenzen ein, so wird

$$\overset{n}{\overline{b_2}} < \frac{60 \varkappa_1 r^2}{n^2} \tfrac{1}{2} c_1{}^2 \left[3 \left(\frac{r}{n}\right)^2 + 2 . 6 \left(\frac{r}{n}\right) + 2^2 . 9 \right],$$

und wenn

$$60 \varkappa_1 r \left[3 \left(\frac{r}{n}\right)^2 + 2 . 6 \left(\frac{r}{n}\right) + 2^2 . 9 \right] < \gamma$$

gesetzt wird,

$$\overset{n}{\overline{b_2}} < \frac{\gamma r}{n^2} \tfrac{1}{2} c_1{}^2.$$

Dasselbe Resultat erhalten wir für σ_2:

$$\overset{n}{\overline{\sigma_2}} < \frac{\gamma r}{n^2} \tfrac{1}{2} c_1{}^2.$$

Die Gleichung

$$\Delta \vartheta_2 = a \vartheta_2 + b_2$$

wird für die Fläche des Kreises R mit beliebigen, dreimal differentiierbaren Randwerten integriert. Haben wir das Näherungssystem

$$\Delta \vartheta_{21} = b_2,$$
$$\Delta \vartheta_{22} = a \vartheta_{21},$$
$$\Delta \vartheta_{23} = a \vartheta_{22},$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots$$

und

$$\vartheta_2 = \vartheta_{21} + \vartheta_{22} + \vartheta_{23} + \dots,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so ist nach § 6

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_{21}}} < \frac{hr^2}{n^3} + \frac{\lambda \overset{n}{\overline{b_2}}\, r^2}{n^2},$$

und wenn wir

$$\overset{n}{\overline{b_2}} < \frac{\gamma r}{n^2}\, \tfrac{1}{2} c_1^{\,2}$$

einführen:

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_{21}}} < \frac{(h + \lambda\gamma r \tfrac{1}{2} c_1^{\,2})\, r^2}{n^3},$$

und

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_{2}}} < \frac{(h + \lambda\gamma r \tfrac{1}{2} c_1^{\,2})\, k r^2}{n^3}.$$

Setzen wir

$$h + \lambda\gamma r \tfrac{1}{2} c_1^{\,2} = h_2,$$

so wird

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_2}} < \frac{h_2 k r^2}{n^3}, \quad \overset{n}{\overline{\frac{\partial \vartheta_2}{\partial u}}} < \frac{h_2 k r}{n^2}, \quad \overset{n}{\overline{\frac{\partial \vartheta_2}{\partial v}}} < \frac{h_2 k r}{n^2}.$$

Jetzt ist die Gleichung

$$\Delta x_2 = U \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} + V \frac{\partial \vartheta_2}{\partial v} + \sigma_2$$

unter beliebigen Randwerten, die vierte Differentialquotienten besitzen sollen, zu integrieren. Wie oben haben wir

$$\overset{n}{\overline{U \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} + V \frac{\partial \vartheta_2}{\partial v}}} < \varkappa\, \overset{n}{\overline{\frac{\partial \vartheta_2}{\partial u}}} < \frac{\varkappa h_2 k r}{n^2}.$$

Da

$$\overset{n}{\overline{\sigma_2}} < \frac{\gamma r}{n^2}\, \tfrac{1}{2} c_1^{\,2}$$

ist, finden wir

$$\overset{n}{\overline{x_2}} < \frac{\lambda (h + \varkappa h_2 k + \gamma \tfrac{1}{2} c_1^{\,2})\, r^3}{n^4}$$

und wenn wir

$$\lambda (h + \varkappa h_2 k + \gamma \tfrac{1}{2} c_1^{\,2}) = c_2$$

setzen:

$$\overset{n}{\overline{x_2}} < \frac{c_2 r^3}{n^4}.$$

Nach § 5 haben wir dann wieder

$$\overset{n}{\overline{\frac{\partial x_2}{\partial u}}} < \frac{c_2 r^2}{n^3}, \quad \overset{n}{\overline{\frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2}}} < \frac{c_2 r}{n^2}, \quad \overset{n}{\overline{\frac{\partial^3 x_2}{\partial u^3}}} < \frac{c_2}{n}.$$

Nach § 4 ist

$$e_3 = \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial u}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da

$$\overset{n}{\overline{\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u}}} < 20\,n^2\;\overset{n}{\overline{\frac{\partial x_1}{\partial u}}}\;\overset{n}{\overline{\frac{\partial x_2}{\partial u}}} < \frac{20\,c_1\,c_2\,r^4}{n^4}$$

ist, erhalten wir, entsprechend wie oben

$$\overset{n}{\overline{e_3}} < \frac{60\,c_1\,c_2\,r^4}{n^4}.$$

Ferner wird

$$\overset{n}{\overline{\frac{\partial e_3}{\partial u}}} < \frac{2.60\,c_1\,c_2\,r^3}{n^3}, \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial^2 e_3}{\partial u^2}}} < \frac{2^2.60\,c_1\,c_2\,r^2}{n^2},$$

und da

$$\overset{n}{\overline{b_3}} < \varkappa_1\left(3\,\overset{n}{\overline{e_3}} + 6\;\overset{n}{\overline{\frac{\partial e_3}{\partial u}}} + 9\;\overset{n}{\overline{\frac{\partial^2 e_3}{\partial u^2}}}\right)$$

ist,

$$\overset{n}{\overline{b_3}} < \frac{60\,\varkappa_1\,r^2}{n^2}\,c_1\,c_2\left[3\left(\frac{r}{n}\right)^2 + 2.6\left(\frac{r}{n}\right) + 2^2.9\right],$$

$$\overset{n}{\overline{b_3}} < \frac{\gamma r}{n^2}\,c_1\,c^2.$$

Ebenso ist

$$\overset{n}{\overline{\sigma_3}} < \frac{\gamma r}{n^2}\,c_1\,c_2.$$

In derselben Weise behandeln wir die Differentialgleichung

$$\varDelta\,\vartheta_3 = a\vartheta_3 + b_3.$$

Wir finden

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_3}} < \frac{(h + \lambda\gamma r\,c_1\,c_2)\,kr}{n^3}$$

und wenn wir

$$h + \lambda\gamma r\,c_1\,c_2 = h_3$$

setzen

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_3}} < \frac{h_3 k r^2}{n^3}, \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_3}{\partial u}}} < \frac{h_3 k r}{n^2}, \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial\vartheta_3}{\partial v}}} < \frac{h_3 k r}{n^2}.$$

Für

$$\varDelta x_3 = U\frac{\partial\vartheta_3}{\partial u} + V\frac{\partial\vartheta_3}{\partial v} + \sigma_3$$

finden wir

$$\overset{n}{\overline{x_3}} < \frac{\lambda(h + \varkappa h_3 k + \gamma c_1 c_2)\,r^3}{n^4},$$

$$\lambda(h + \varkappa h_3 k + \gamma\,c_1 c_2) = c_3,$$

$$\overset{n}{\overline{x_3}} < \frac{c_3 r^3}{n^4},$$

$$\overset{n}{\overline{\frac{\partial x_3}{\partial u}}} < \frac{c_3\,r^2}{n^3}, \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial^2 x_3}{\partial u^2}}} < \frac{c_3 r}{n^2}, \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial^3 x_3}{\partial u^3}}} < \frac{c_3}{n}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach § 4 haben wir

$$e_4 = \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial u} + \tfrac{1}{2} \Sigma \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2.$$

Es wird

$$\overset{n}{\overline{e_4}} < \frac{60\, r^4}{n^4} \,(c_1 c_3 + \tfrac{1}{2} c_2^{\,2}),$$

$$\overset{n}{\overline{\frac{\partial e_4}{\partial u}}} < \frac{2.60\, r^3}{n^3} \,(c_1 c_3 + \tfrac{1}{2} c_2^{\,2}), \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial^2 e_4}{\partial u^2}}} < \frac{2^2.60\, r^2}{n^2} \,(c_1 c_3 + \tfrac{1}{2} c_2^{\,2}),$$

und

$$\overset{n}{\overline{b_4}} < \frac{\gamma r}{n^2} \,(c_1 c_3 + \tfrac{1}{2} c_2^{\,2}),$$

$$\overset{n}{\overline{\sigma_4}} < \frac{\gamma r}{n^2} \,(c_1 c_3 + \tfrac{1}{2} c_2^{\,2}).$$

Ganz entsprechend finden wir aus den Gleichungen

$$\varDelta \vartheta_4 = a \vartheta_4 + b_4,$$

$$\varDelta x_4 = U \frac{\partial \vartheta_4}{\partial u} + V \frac{\partial \vartheta_4}{\partial v} + \sigma_4$$

die Ungleichungen

$$\overset{n}{\overline{\vartheta_4}} < \frac{h_4 k r^2}{n^3}, \qquad \overset{n}{\overline{\frac{\partial \vartheta_4}{\partial u}}} < \frac{h_4 k r}{n^2},$$

wo

$$h_4 = h + \lambda \gamma r (c_1 c_3 + \tfrac{1}{2} c_2^{\,2})$$

ist, und

$$\overset{n}{\overline{x_4}} < \frac{c_4 r^3}{n^4},$$

wenn

$$\lambda [h + \varkappa h_4 k + \gamma (c_1 c_3 + \tfrac{1}{2} c_2^{\,2})] = c_4$$

ist.

Für x_5 finden wir

$$\overset{n}{\overline{x_5}} < \frac{c_5 r^3}{n^4},$$

wo

$$c_5 = \lambda [h + \varkappa h_5 k + \gamma (c_1 c_4 + c_2 c_3)],$$

$$h_5 = h + \lambda \gamma r . (c_1 c_4 + c_2 c_3)$$

ist, u. s. w.

Für die Reihe

$$X(u, v, t) = x(u, v) + x_1(u, v)\, t + x_2(u, v)\, t^2 + x_3(u, v)\, t^3 + \ldots\ldots$$

haben wir demnach

$$\overset{n}{\overline{X}} < \overset{n}{\overline{x}} + \overset{n}{\overline{x_1}}\, t + \overset{n}{\overline{x_2}}\, t^2 + \overset{n}{\overline{x_3}}\, t^3 + \ldots\ldots,$$

$$\overset{n}{\overline{X}} < \frac{r^3}{n^4} \left[c + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \ \ldots\ldots \right],$$

wenn wir

$$\overset{n}{\overline{x}} < \frac{c r^3}{n^4}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

setzen, was immer angeht, da $x(u, v)$ eine analytische Funktion von u und v ohne Randbedingung ist. Wenn nun die Reihe

$$c + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \ldots\ldots$$

konvergiert, ist nach den Entwickelungen des § 5 $X(u, v, t)$ eine analytische Funktion in u und v. Dasselbe gilt ohne weiteres für $Y(u, v, t)$ und $Z(u, v, t)$.

Wir haben

$$\begin{aligned}
c_1 &= \lambda h + \lambda \varkappa h k,\\
c_2 &= \lambda h + \lambda \varkappa h_2 k + \lambda \gamma \tfrac{1}{2} c_1^2,\\
c_3 &= \lambda h + \lambda \varkappa h_3 k + \lambda \gamma\, c_1 c_2,\\
c_4 &= \lambda h + \lambda \varkappa h_4 k + \lambda \gamma\,(c_1 c_3 + \tfrac{1}{2} c_2^2),\\
c_5 &= \lambda h + \lambda \varkappa h_5 k + \lambda \gamma\,(c_1 c_4 + c_2 c_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_i &= \lambda h + \lambda \varkappa h_i k + \lambda \gamma\,(c_1 c_{i-1} + c_2 c_{i-2} + c_3 c_{i-3} + \ldots + c_{i-1} c_1)\tfrac{1}{2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Führen wir

$$\begin{aligned}
h_2 &= h + \lambda \gamma r\, \tfrac{1}{2} c_1^2,\\
h_3 &= h + \lambda \gamma r\, c_1 c_2,\\
h_4 &= h + \lambda \gamma r\,(c_1 c_3 + \tfrac{1}{2} c_2^2),\\
h_5 &= h + \lambda \gamma r\,(c_1 c_4 + c_2 c_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
h_i &= h + \lambda \gamma r\,(c_1 c_{i-1} + c_2 c_{i-2} + c_3 c_{i-3} + \ldots + c_{i-1} c_1)\tfrac{1}{2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ein und setzt

$$\lambda h (1 + \varkappa k) = p, \quad \lambda \gamma (1 + \lambda \varkappa k r) = q,$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
c_1 &= p,\\
c_2 &= p + q \tfrac{1}{2} c_1^2,\\
c_3 &= p + q\, c_1 c_2,\\
c_4 &= p + q\,(c_1 c_3 + \tfrac{1}{2} c_2^2),\\
c_5 &= p + q\,(c_1 c_4 + c_2 c_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_i &= p + q\,(c_1 c_{i-1} + c_2 c_{i-2} + c_3 c_{i-3} + \ldots + c_{i-1} c_1)\tfrac{1}{2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Wenn wir $p > 2$ und $q > 1$ annehmen, so wird die Aussicht auf Konvergenz offenbar ungünstiger, wenn wir setzen

$$\begin{aligned}
c_1 &= p,\\
c_2 &= (p + q) \tfrac{1}{2} c_1^2,\\
c_3 &= (p + q)\, c_1 c_2,\\
c_4 &= (p + q)\,(c_1 c_3 + \tfrac{1}{2} c_2^2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir wollen
$$p+q=s$$
setzen. Wir können eine Grösse s_1 derart wählen, dass
$$c_1<\frac{ss_1}{2^2 s},$$
$$c_2<\frac{(ss_1)^2}{2^2 s},$$
$$c_3<\frac{(ss_1)^3}{3^2 s},$$
$$c_4<\frac{(ss_1)^4}{4^2 s}$$
ist. Es sei bis $n-1$
$$c_{n-1}<\frac{(ss_1)^{n-1}}{(n-1)^2 s}.$$
Nun ist
$$c_n<s(c_1c_{n-1}+c_2c_{n-2}+c_3c_{n-3}+\ldots+c_{n-1}c_1)\tfrac{1}{2}.$$
Führt man die Ungleichungen für $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-1}$ ein, so erhält man
$$c_n<\frac{(ss_1)^n}{s}\left[\frac{1}{2^2(n-1)^2}+\frac{1}{2^2(n-2)^2}+\frac{1}{3^2(n-3)^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2\,2^2}\right]\frac{1}{2},$$
oder
$$c_n<\frac{(ss_1)^n}{n^2 s}\left[\frac{n^2}{2^2(n-1)^2}+\frac{n^2}{2^2(n-2)^2}+\frac{n^2}{3^2(n-3)^2}+\ldots+\frac{n^2}{(n-1)^2\,2^2}\right]\frac{1}{2}.$$
Da aber
$$\sum_{x=2}^{n-1}\frac{n^2}{x^2(n-x)^2}<\int_1^{n-1}\frac{n^2}{x^2(n-x)^2}\,dx,$$
oder
$$\sum_{x=2}^{n-1}\frac{n^2}{x^2(n-x)^2}<\frac{4\log(n-1)}{n}$$
ist, wird
$$c_n<\frac{(ss_1)^n}{n^2 s}\left[\frac{n^2}{2^2(n-1)^2}+\frac{4\log(n-1)}{n}\right]\frac{1}{2}.$$
Für $n>1$ ist stets
$$\frac{1}{2}\left[\frac{n^2}{2^2(n-1)^2}+\frac{4\log(n-1)}{n}\right]<1,$$
also haben wir
$$c_n<\frac{(ss_1)^n}{n^2 s}.$$
Demnach ist das Gesetz für die Koeffizienten allgemein gültig. Wir haben also
$$\overset{n}{X}<\frac{r^3}{n^4 s}\left[cs+\frac{ss_1t}{2^2}+\frac{(ss_1t)^2}{2^2}+\frac{(ss_1t)^3}{3^2}+\frac{(ss_1t)^4}{4^2}+\ldots\right].$$
Wählt man t genügend klein, so dass
$$ss_1t\leqq 1$$
ist, so konvergiert unsere Reihe. X ist eine analytische Funktion in u und v. Ebenso Y und Z.

Man kann auch Konvergenz für beliebige Werte von t erzielen, wenn man die Randwertreihen der Differentialgleichungen für die ϑ_n und x_n unterhalb bestimmter Grenzen hält und diese Grenzen konvergente Reihen bilden lässt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Schlussbemerkung.

Ist die zu verbiegende Fläche $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ von positiver Krümmung nicht-analytisch, so lässt sich doch die Konvergenz der obigen Entwicklungen zeigen, d. h. man kann die Biegungsflächen bestimmen.

Sollen die Biegungsflächen einer Fläche von negativer Gaussscher Krümmung untersucht werden, so bleibt der Gedankengang derselbe und die Gleichungen behalten ähnliche Formen wie oben. Doch ist ein durchgreifender Unterschied vorhanden. Die Bestimmung der Grössen ϑ führt nämlich auf Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial u\partial v} &= a\vartheta_1, \\
\frac{\partial^2\vartheta_2}{\partial u\partial v} &= a\vartheta_2+b_2, \\
\frac{\partial^2\vartheta_3}{\partial u\partial v} &= a\vartheta_3+b_3, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial^2\vartheta_n}{\partial u\partial v} &= a\vartheta_n+b_n, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Da diese Gleichungen vom hyperbolischen Typus sind, lassen sie, auch wenn die zu verbiegende Fläche analytisch ist, nicht analytische Integrale zu. Es lässt sich zeigen, dass eine analytische Fläche von negativer Gaussscher Krümmung auch nicht-analytische Biegungsflächen besitzt.

Die Konvergenz des Verfahrens lässt sich für die Verbiegung von Flächen mit negativer Totalkrümmung immer zeigen, auch wenn diese Flächen nicht-analytisch sind, d. h. man kann die Biegungsflächen stets bestimmen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf