Ueber die fortschreitende Verallgemeinerung der arithmetischen Operationsbegriffe und die Natur der damit zusammenhangenden verschiedenen Zahlformen.

Es ist nichts Seltenes, daß bei der liquiden Natur der Vorstellungen, Begriffe und dem mehr oder weniger starren Wesen des Zeichens, Buchstabens, Wortes der Begriff oft ein ganz anderer geworden ist, während das bezeichnende Wort ꝛc. in seinem ursprünglichen materiellen Gehalte sich ganz unverändert erhalten hat. Mannigmal erleidet auch das Wort eine dem Wechsel seines Begriffes entsprechende Veränderung, erscheint dann gleichsam als eine von dem Begriff abhängige Funktion. In dem letzteren Falle, der besonders da auftritt, wo die Sprache noch in jugendlicher Frische und Unmittelbarkeit, voller Leben, Biegsamkeit und Schmiegsamkeit dasteht, wo noch der ganze, frische, gestaltende und umbildende Volksgeist in ihr lebendig und thätig ist, und noch keine Gebilde dem mächtigen Strome des organisirenden Geistes der Volkssprache entzogen sind, da spiegelt sich die Veränderung eines Begriffes in der Veränderung eines Wortes ab, und die Geschichte eines Begriffes kann an den Veränderungen des Wortes erkannt und studirt werden. Wo aber ein Wort diesem frischen, unmittelbaren, organisirenden Strome des Sprachlebens entzogen, in das Reich der Reflexion, der Wissenschaft und Kunst verpflanzt worden ist, da geschieht es gar nicht selten, daß der ursprüngliche Begriff eines Wortes längst ein anderer geworden, ja oft in sein volles Gegentheil übergegangen ist, während das Wort in seinen starren Elementen wie ein Ueberbleibsel aus einer alten, längst vergangenen Zeit noch immer auf dieselbe Weise Ohr und Auge trifft. In solchem Falle haben etymologische, Wort-Erklärungen nur dann ein fruchtbringendes Ziel, wenn man auf den Sinn, der diesen Worten ursprünglich zu Grunde gelegen hat, wenn man auf den Ausgangspunkt einer Wissenschaft und Kunst zurückgehen, wenn man ermitteln will, welche Veränderung im Laufe der Zeit mit einem Begriffe vorgegangen ist, während der Träger des Begriffes gar keine Veränderung erlitten hat. Sehr verkehrt würde es sein, wenn man mit dieser etymologischen, Wort-Erklärung das Wesen des in gegenwärtigem Augenblick durch das Wort bezeichneten Begriffs meinte erfaßt zu haben. So erinnert wohl das Wort „Erdbeschreibung" an die dem Wort bei der Entstehung der entsprechenden Wissenschaft zugekommene Bedeutung, aber wer würde bei verändertem Begriff der Wissenschaft die Geographie noch durch: Beschreibung der Erde oder auch der Erdoberfläche erklären wollen? So erinnert der Name „Salz" in der Chemie wohl an den in dem natürlichen System der Oryktognosie oder im gewöhnlichen Leben geltenden Begriff von Salz, aber der Begriff hat im Laufe der Zeit eine so große Aenderung erfahren, daß selbst unser Kochsalz, von dem doch der Name herrührt, einmal von der Liste der Salze gestrichen werden mußte, und jetzt unter den Salzen der Chemie manche Körper vorkommen, bei denen an die früher das Salz charakterisirenden Eigenschaften so wenig zu denken ist, als man bei dem in Brauneisenstein umgewandelten Schwefelkies wegen der stehen gebliebenen alten Form noch an einen unveränderten Fortbestand in dem chem. Gehalte denkt.

So sind auch in der Mathematik, speziell in der Arithmetik, eine Menge von Namen und Zeichen unverändert stehen geblieben, während die Begriffe im Laufe der Zeit mit der Ausbildung der Wissenschaft wesentlich andere geworden sind. So gebraucht man noch immer den Ausdruck „Größenlehre", um einen der Arithmetik übergeordneten Begriff zu bezeichnen, obschon es eine Menge Sätze in der Arithmetik giebt, die durchaus nichts über Größen aussagen. Man spricht noch immer von einer Zahl, wo gar nicht von einer Zahl in der ursprünglichen Bedeutung des Wortes die Rede sein kann. Der Quotient $\frac{a}{b}$ stellt für den Fall, daß b nicht in a aufgeht, gerade so wenig eine Zahl vor, als die Differenz $\frac{6}{2} - \frac{8}{2}$ irgend einer Zahl oder einem absoluten Quotienten, als $\sqrt{7}$ irgend einem frühern Ausdruck gleichwerthig gedacht werden kann, als sich $\sqrt{-1}$ mit irgend einem von allen vorangegangenen Ausdrücken vertauschen läßt. Der ursprüngliche Begriff von Zahl kennt nur Zahlen als Glieder der natürlichen Zahlenreihe, alles andere ist ihm fremd. Der ursprüngliche Begriff von „addiren", „subtrahiren", „multipliciren", „dividiren", „potenziren", „radiciren", „logarithmiren" setzt immer voraus, daß man nur mit Zahlen, d. h. Gliedern der natürlichen Zahlenreihe operire, und daß das Resultat jeder einzelnen Operation wieder eine Zahl sei. Man dachte sich die Zahlen nur in anderer und anderer Weise, durch andere und andere Zahlen entstanden, aber Zahlen blieben sie immer. „Gleich" wurde nur in Beziehung auf ein und dieselbe Zahl, auf ein und dasselbe Glied der natürlichen Zahlenreihe gebraucht, wenn man sich diese Zahl bald auf die eine, bald auf die andere Weise aus Zahlen entstanden vorstellte. „Größer" hieß eine Zahl als eine andere, wenn man zu letzterer noch eine Zahl (Zahl immer in dem ursprünglichen Sinne genommen) addiren mußte, um eine der ersten gleiche Zahl (Summe) zu erhalten. Jetzt spricht man oft von Vermehren, Addiren, Multipliciren, Potenziren, wo in der That eine Verminderung vorkommt, und von Vermindern, wo in der That eine Vermehrung vorkommt. Man spricht von Enthaltensein einer größern Zahl in einer kleinern, von Quotienten zweier Zahlen, die nicht ineinander aufgehen, ja von Größenarten und Zahlarten, von positiven, negativen, gebrochnen, reellen und imaginären Größen und Zahlen, wo weder an Größen noch Zahlen im ursprünglichen Sinne gedacht werden darf noch kann. Man spricht von „gleich", wo weder von Zahlen noch von Größen, geschweige denn von einer und derselben Zahl oder Größe die Rede ist. (Größe denke ich mir von der Zahl so geschieden, daß erstere in jede beliebige Anzahl aliquoter Theile zerlegbar gedacht werden kann, was bei der Zahl nicht der Fall ist.) So lange man noch blos mit bestimmten Zahlen, d. h. blos mit bestimmten Gliedern der natürlichen Zahlenreihe operirte, und jedes Resultat der einzelnen Operationen wieder einem Gliede dieser Reihe gleich kam, wie es im gewöhnlichen Rechnen mit unbenannten und mit benannten ganzen Zahlen der Fall ist, blieb man bei dem ursprünglichen, durch den gewöhnlichen Sprachgebrauch festgestellten Sinne von Zahl, addiren, multipliciren xc., von Summe, Product, Differenz (Rest), Quotient xc., von gleich, größer, kleiner stehen. Selbst das Rechnen mit sogenannten gebrochnen, benannten Zahlen konnte noch ohne Aenderung der ursprünglichen Begriffe ausgeführt werden, wenn man, wie das bei einem gründlichen Kopfrechnen der Fall ist, alle Operationen an den gemessenen Gegenständen selbst ausführte, und das Resultat jeder einzelnen Operation wieder als ein Vielfaches, möglicher Weise auch Einfaches eines aliquoten Theils der der Rechnung zu Grunde gelegten Maaßgröße, oder als ein Vielfaches, in besondern Fällen auch als ein Einfaches dieser Maaßgröße selbst darstellte. Aber schon in dem Augenblicke, als man anfing von Maßzahlen zu reden, und mit denselben, getrennt von der ihnen zugehörigen Maaßgröße, zu operiren, war man genöthigt den alten Namen neue Begriffe unterzulegen. Anstatt zu schreiben: 3 $\frac{\text{Thlr.}}{4}$ und zu sagen: 3 mal $\frac{\text{Thaler}}{4}$ oder 3 Viertelthaler, schrieb man $^3/_4$ Thaler und sagte $^3/_4$ mal einen Thaler, weil man bei fünf Thalern geschrieben hatte: 5 Thaler, und gesagt: 5 mal einen Thaler. Wollte man, weil man in der Multiplication oder der Regeldetri in ganzen Zahlen gesagt hatte: „Wenn 1 Pfd. 8 Sgr. kostet, so kosten 5 Pfd. (5 mal 8) Sgr.", in der Multiplication oder Regeldetri in Brüchen noch gerade so sprechen, so mußte man sagen: „Wenn 1 Pfd. 8 Sgr. kostet, so kosten $^3/_4$ Pfd. ($^3/_4$ mal 8) Sgr.", und somit hier den Begriff des Multiplicirens gerade so gut ändern, wie man so eben schon genöthigt war den Begriff der Zahl zu erweitern. So lange man auf dieser untersten Stufe der Arithmetik, des gewöhnlichen Rechnens stehen blieb, war es sehr leicht, die Begriffe der Zahl, der Addition, Multiplication, Subtraction, Division, der Gleichheit und Ungleichheit den gedachten Erweiterungen entsprechend zu ändern und demgemäß zu definiren. Nur wurde man hierdurch in den Operationen mit Zahlen (ganzen Zahlen) auf keine höhere Stufe der Verallgemeinerung gestellt, denn die berührte Verallgemeinerung bewirkt blos, daß man bei Maaßzahlen von Größen, also bei Voraussetzung theilbarer Gegenstände, nicht mehr zu unterscheiden hat, ob ein Ganzes oder ein aliquoter Theil eines Ganzen der Rechnung (einerlei ob gleich im Anfang oder erst im Verlauf) zu Grunde liegt. Kamen aber blos zählbare, ihrer Natur nach untheilbare Gegenstände (etwa Punkte, Amben rc.) zur Betrachtung, so konnte von Zahlen in dem Sinne der gedachten Verallgemeinerung keine Rede mehr sein, da diese Verallgemeinerung ja gerade von der Voraussetzung ausging, daß die zu Grunde gelegten Größen in jegliche beliebige Anzahl aliquoter Theile zerlegbar gedacht werden könnten. Die gedachte Verallgemeinerung hielt sich, wie gesagt, ganz und gar innerhalb der Gränzen der Rechnung mit unbeschränkt theilbaren Gegenständen (Größen), schloß alle andere, nur der Anzahl nach zur Betrachtung kommende Gegenstände aus, und man war daher in allen andern Fällen genöthigt, immerhin sorgfältig darauf zu achten, daß bei jeder Division der Divisor in den Dividend aufgehe, bei jeder Subtraction der Subtrahend größer sei als der Minuend. So lange man, wie im gewöhnlichen Rechnen, mit bestimmten Zahlen operirte, konnte dieser Forderung, wenn auch mit einigen Schwierigkeiten, doch immer Genüge geleistet werden. Aber sobald man, ohne die gedachte Voraussetzung über die Art der zu Grunde gelegten Gegenstände zu machen oder machen zu können, allgemeine Zahlzeichen in die Arithmetik einführte, und nun noch so fortoperiren wollte, als wenn das Resultat jeder Operation wieder eine Zahl, eine Zahl im ursprünglichen Sinne gewesen wäre, da mußte man bald einsehen, daß dieser Voraussetzung in den seltensten Fällen genügt war, und mußte, wollte man nicht sofort auf jedes klare und sichere Fortschreiten verzichten, sich fragen, was man in dem Falle, wenn das Resultat der Operation nicht wieder eine Zahl darstelle, zu thun, wie man sich dann die Operation und das Resultat zu denken, wie vor Widerspruch mit dem Frühern zu sichern habe.

Wenn auch schon früher beim gewöhnlichen Rechnen in den Fällen, wo von keinen gebrochenen Zahlen, weil von keinen unbeschränkt theilbaren Gegenständen, die Rede sein konnte, doch oft so operirt wurde, als wenn der Voraussetzung genügt gewesen wäre, so war das allerdings ein Fehler, indem man Sätze, deren Aussage sich auf eine gewisse Sphäre beschränkte, ohne besondern Beweis über diese Sphäre hinaus anwandte, aber man erlaubte sich diese Ueberschreitung des logischen Gesetzes, indem man in jedem besondern Falle leicht im Stande war, die Richtigkeit des so gewonnenen Resultates auf dem gesetzlich zulässigen, als richtig erwiesenen Wege zu bestätigen. Man kam zu richtigen Resultaten, nicht weil man richtig abgeleitet hatte, sondern vielmehr trotz dessen, daß man ungehörig abgeleitet hatte. Aber selbst lange Zeit nachher, nachdem man schon angefangen hatte, mit allgemeinen Zahlzeichen zu operiren, begnügte man sich noch immer mit diesen Schlüssen nach der Analogie und mit unvollständigen Inductionen, und arbeitete an der Erweiterung der Wissenschaft bedeutend fort, während für die Begründung, den sichern Aufbau und die consequente Durchführung nur sehr spärlich Sorge getragen wurde. Erst später, als sich die Fehler dieses Verfahrens in den Ableitungen, Folgen zu erkennen gaben, als man auf Widersprüche gerieth, fieng man an, sich mit Entschiedenheit dieser Seite der Wissenschaft zuzuwenden. Anfangs blieb es mehr bei einem bloßen Erkennen und Aufweisen erhaltener falscher Resultate und Widersprüche; dann empfahl man Vorsicht bei Anwendung gewisser Sätze, aber nur aus dem Grunde, weil man blos bei diesen das Auftreten falscher Resultate beobachtet hatte, nicht deßwegen, weil man diese Sätze an sich für weniger begründet gehalten hätte, als jene andere, bei deren Anwendung man auf keine falsche Resultate gestoßen war. Sätze, deren Beweise an denselben Mängeln litten wie diejenigen, bei denen man auf falsche Resultate gekommen war, ließ man für wohlbegründet passiren, weil sich bei ihrer Anwendung nichts Verdächtiges ergeben hatte. Nur auf die Sätze, welche auf Widersprüche führten, hatte man ein wachsames Auge. So lange man sich mehr mit einem Erkennen und Aufweisen als mit einem Erklären dieser Erscheinungen befaßte, mußte es häufig vorkommen, daß man Sätze, deren Anwendung man lange Zeit für ungefährlich gehalten hatte, bald in die Reihe derjenigen zu stellen genöthigt war, bei denen diese oder jene Vorsicht in diesem oder jenem Falle anzuwenden sei, wolle man nicht in Widersprüche mit allgemein als richtig anerkannten Wahrheiten gerathen. Mit jedem Tage wuchs die Menge der entdeckten falschen Ableitungen, Widersprüche ꝛc., wuchs die Zahl der Vorsichtsmaßregeln bei Anwendung bald dieses, bald jenes Satzes, aber der eigentlichen Ursache dieser Erscheinung kam man dadurch fast um keinen Schritt näher. So hatte schon Carnot bei den sogenannten negativen Größen aufmerksam gemacht auf den Widerspruch des Satzes: „daß Kleineres durch Größeres dividirt Kleineres gebe" mit der Wahrheit: daß $+1:-1=-1:+1$ sei", auf den Widerspruch des Satzes: „daß Kleineres mit Kleinerem multiplicirt Kleineres gebe" mit der Wahrheit, daß $(-4).(-4) > (+3)(+3)$ sei. Gerade so wurde von den verschiedensten Seiten her zur Vorsicht ermahnt bei Anwendung des Satzes: „Gleiches durch Gleiches giebt Gleiches", denn, wenn man in einer Buchstabengleichung irgend einmal durch eine Differenz, in welcher, ohne daß man es im Augenblicke der Ausführung wußte, der Minuend und Subtrahend einander gleich waren, dividirt hatte, so war man der Gefahr ausgesetzt, auf die größten Widersprüche zu gerathen. Vor allen, die über diesen Punkt gesprochen haben, wollen wir Lecroix hören, da er zugleich für verschiedene Fälle die Mittel angiebt, sich vor solchen Widersprüchen zu bewahren. Schon die Art, wie er diese Fälle einführt, so wie auch die Verschiedenheit des ertheilten Rathes, der sich blos nach der Verschiedenheit der Folgen, des Resultates richtet, zeigen, daß hier von unvermuthet aufgetretenen Widersprüchen, falschen Resultaten, und nur von Palliativmitteln, Symptomenheilung, nicht von einem Angreifen des Uebels bei der Wurzel die Rede ist. Unter den Gleichungen des zweiten Grades mit einer Unbekannten führt er beispielsweise eine Aufgabe an, die zu sonderbaren Werthen führt, wenn man sie nach der allgemeinen Regel auflös't. Eben so spricht er von „verschiedenen Sonderbarkeiten" bei der Auflösung der Gleichungen mit zwei Unbekannten ꝛc. Clairaut hatte die Aufgabe gelöst: „Wenn der Abstand zwischen 2 Lichtern von verschiedener Hellung gegeben ist, den Punkt in der geraden Verbindungslinie dieser Lichter zu finden, in welchen beide Lichter gleiche Hellung hervorbringen" und für x erhalten: $\frac{ma}{m+1}$ und $\frac{ma}{m-1}$, a für die Maaßzahl der Entfernung beider Lichter, x für die der Entfernung des gesuchten Punktes von einem der Lichter, $1:m^2$ für das Verhältniß der Lichtstärken genommen. An dem Ausdruck $\frac{ma}{m-1}$ für den Fall, daß $m=1$, nimmt Lacroix gar keinen Anstoß, indem er ihm ohne Weiteres den Werth $=\infty$ beilegt (ob $+\infty$ oder $-\infty$ sagt er nicht), da $(m-1)$ nach seiner Meinung mit unendlich klein vertauscht werden könne. Auf den Widerspruch dieser

Behauptung mit dem Satze, daß $a \cdot o = o$ sei, a mag so klein oder so groß gedacht werden, als man will, kommt er nicht zu sprechen. Aber das findet er sonderbar, daß, während die quadratische Gleichung dieser Aufgabe: $\frac{x^2}{(a-x)^2} = m^2$ durch Radicirung gleich auf die: $\frac{x}{a-x} = \pm m$ gebracht, für x giebt $\frac{ma}{m+1}$ oder $\frac{ma}{m-1}$, man auf ganz andere Werth kommt, wenn die Gleichung nach der Methode der Auflösung unrein quadratischer Gleichungen behandelt wird. Aus der Gleichung $\frac{x^2}{(a-x)^2} = m^2$ folgert er: $x^2 = (a-x)^2 \; m^2$, daraus $x^2 (m^2-1) - 2am^2 . x = -a^2m^2$, ferner $x^2 - 2\frac{am^2}{m^2-1}\,x + \left(\frac{am^2}{m^2-1}\right)^2 = \left(\frac{am^2}{m^2-1}\right)^2 - \frac{a^2m^2}{m^2-1}$, was giebt: $x = \frac{am\,(m\pm1)}{(m+1)(m-1)}$.

Auf die vorige Weise hatte er erhalten: $x = \frac{am}{m\pm1}$. Nun geht er zu dem Fall über, wo $m = 1$. Der letzte Ausdruck $\frac{am}{m\pm1}$ gebe dann $\frac{a}{2}$ und $\frac{a}{0}$, der andere $\frac{am\,(m\pm1)}{(m+1)(m-1)}$ gebe: $\frac{2a}{0}$ und $\frac{0}{0}$. $\frac{0}{0}$ stellt jede Zahl vor, aber nicht jede Zahl kann der Aufgabe $\frac{x^2}{(a-x)^2} = 1$ Genüge leisten, auch ist $\frac{0}{0}$ weder mit $\frac{a}{2}$ noch mit $\frac{a}{0}$ vertauschbar. Um diesen Widerspruch (diese Sonderbarkeit) zu lösen, sagt Lacroix, daß man den Divisor und den Dividend des Quotienten $x = \frac{am\,(m\pm1)}{(m+1)(m-1)}$ erst durch den gemeinschaftlichen Factor hätte dividiren sollen, wodurch $x = \frac{am}{m+1}$ und $\frac{am}{m-1}$, und für $m = 1$ gesetzt, $\frac{a}{2}$ und $\frac{a}{0}$ geworden wäre, wie bei der ersten Auflösung. Abgesehen davon, daß Lacroix damit gar nicht die wahre Ursache dieser Erscheinung nennt, diese vielmehr in der bei der Annahme $m = 1$ nicht mehr gültigen Division der beiden Seiten der Gleichung: $x^2(m^2-1) - 2am^2x = -a^2m^2$ durch $m^2 - 1 = 0$ zu finden ist, so würde uns diese Regel auch nichts geholfen haben, wenn man in dem vorigen Ausdruck: $x = \frac{am\,(m\pm1)}{(m+1)(m-1)}$ die Maaßzahl a zu 2 und m zu 1 angenommen hätte, denn dann wäre durch Auslassen der gleichen Factoren im Divisor und Dividend x zu $\frac{m\pm1}{m-1}$ oder zu $\frac{0}{0}$ oder $\frac{2}{0}$ geworden, was nicht stimmen würde mit $\frac{2}{2}$ und $\frac{2}{0}$. Wollte man sagen, in dem Ausdruck $\frac{am\,(m\pm1)}{(m+1)(m-1)}$ hätte man bei der Annahme $a = 2$ und $m = 1$ für $am = 2$ und $m + 1 = 2$ erhalten, und bei solchen von 0 abweichenden Factoren könne das bloße Auslassen nicht zugelassen werden, da müsse man vielmehr auf die gewöhnliche Weise dividiren, und erhalte dann wieder in Uebereinstimmung mit den zuerst erhaltenen Resultaten $\frac{2}{2}$ und $\frac{2}{0}$, so würde das nur in diesem Augenblicke aus der Verlegenheit befreien, uns aber in neue Widersprüche mit der Behandlung des ganz gleichen Falles bei der Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade mit 2 Unbekannten führen. Hier sagt Lacroix, und ganz mit Recht, daß wenn in $ax + bny = c$ und $a'x + b'ny = c'$, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, oder, was dasselbe sagt, $ab' - ba' = 0$ $cb' - bc' = 0$ ist, dann wird der Ausdruck $x = \frac{(cb' - bc')\,n}{(ab' - ba')\,n}$ nicht zu $\frac{n}{n}$ oder 1, sondern zu $\frac{0}{0}$, was anzeigt, daß x unendlich werthig ist. Wendet man dasselbe Raisonnement auf den Ausdruck $\frac{am(m \pm 1)}{(m+1)(m-1)}$, für den Fall, daß $a=2$, $m=1$ ist, also auf $\frac{2(1 \pm 1)}{2(1-1)}$ an, so wird er $\frac{0}{0}$ oder $\frac{2}{0}$, und nicht $\frac{2}{2}$ oder $\frac{2}{0}$. So hat Lacroix wohl Widersprüche, falsche Resultate (Sonderbarkeiten) entdeckt, aber die Ursache der Erscheinung hat er nicht genannt, wie auch keine für alle Fälle ausreichende Regel zur Vermeidung solcher Widersprüche gegeben. Gerieth man in einer Bestimmungsgleichung (algebraischen) einmal auf eine Ableitung $ax + b = ax + c$, wo c nicht gleich b war, so setzte man, wie oben, für $x = \frac{c-b}{0}$ unbedenklich einen unendlichen Werth (positiv oder negativ mußte man wohl unentschieden lassen, da x in der That auch $= \frac{b-c}{0}$ gesetzt werden konnte), indem man 0 für unendlich klein ansah, und sich mit der Annahme beruhigte, daß für ein unendlich großes x wirklich $ax + b = ax + c$ gesetzt werden dürfe. Hielt man aber diese Annahme fest, und leitete z. B. aus $x - y = a$ und $cx - by = 0$ für x ab $\frac{ab}{b-c}$, für $y = \frac{ac}{b-c}$, und gieng dann zu der Annahme $b = c$ über, so kam man wieder zu andern Widersprüchen, z. B. zu $x - y = a$ und zugleich $x - y = 0$, wodurch $a = 0$, oder zu: $c(x-y) = 0 = ca$. Obschon man die Ursache der Erscheinung noch nicht erkannt hatte, so wußte man sich doch durch äußere Kennzeichen, Einschlagen ungefährlicher Wege, nachherige Proben so ziemlich sicher zu stellen, und fing an sich über die Sache zu beruhigen. Lauter aber wurde wieder die Klage über das Erscheinen von falschen Resultaten und Widersprüchen bei Anwendung der Lehre von den unendlichen Reihen, den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Der gründliche Mathematiker Abel ist es, der besonders über die Widersprüche bei Anwendung der Lehre von den divergenten unendlichen Reihen klagt. Er sagt: „Läßt man sie (er meint die divergenten unendlichen Reihen) zu, so kann man beweisen, was man will, und diese Reihen sind es, welche so viel paradoxe Behauptungen hervorgerufen haben. Man wendet auf die unendlichen Reihen alle Operationen so an, als hätte man es mit endlichen Reihen zu thun. Ist das wohl erlaubt?" Wenn nun auch diese Klage nicht ganz so, wie sie hier steht, gerechtfertigt erscheint, und man mit unendlichen, nach ganzen (selbst negativen) Potenzen von x fortlaufenden Reihen gerade so wie mit endlichen Funktionen von x desselben Fortschreitungsgesetzes operiren darf, ja in sehr viel Fällen operiren muß, da man sich nicht immer vorher über ihre Convergenz oder Divergenz Kenntniß verschaffen kann, gerade so wie man bei der Subtraction und Division von endlichen Buchstabenformen sich selten darüber Gewißheit verschaffen kann, ob das Resultat der Operation noch einer Zahl im ursprünglichen Sinne gleichkommt oder nicht, so ist es doch ganz richtig, daß, sobald diese Reihen nicht mehr den allgemeinen Charakter an sich tragen, vielmehr durch Specialisirung des allgemeinen x ihre Form, also ihr eigentliches Wesen als Reihe eingebüßt haben, sie nur noch dann gebraucht werden dürfen, wenn sie einen endlichen Werth haben, wenn sie convergent sind. Kramp klagt über die Widersprüche, die sich ihm bei der Anwendung der Lehre von den Potenzen mit gebrochnem Exponenten und den Logarithmen von negativen Zahlen ergeben haben, fragt dann nach der Definition von $(-1)^{\sqrt{2}}$ und weiter von $(-1)^x$, wenn x sowohl eine irrationale, imaginäre, als auch jede andere Art von Zahlverbindung in sich schließen könne. Kramp vermuthet, daß die ganze damalige Theorie von den allgemeinen Potenzen, Wurzeln und Logarithmen in einem Schlusse vom Besondern auf das Allgemeine ruhe, und daß er darin wenigstens dem größten Theile nach Recht hat, sieht man, wenn man selbst die besten arithmetischen Schriften der frühern Zeit in dieser Beziehung etwas näher betrachtet. Obschon man den Satz: „Eine Summe ist multiplicirt, wenn man die Producte aus jedem

Summanden in den Multiplicator addirt" nur unter Voraussetzung einwerthiger Ausdrücke erwiesen hatte, so wendete man ihn ohne Weiteres auf mehrdeutige Potenzen, auf Potenzen mit gebrochnen Exponenten, an, setzte ohne alle Einschränkung z. B. $4 . a^{1/2} - 3 . a^{1/2} = a^{1/2}$, und verfiel in Widersprüche, sobald man versäumte, unter den vielen Werthen nur die gleichen zusammenzustellen, wie das z. B. Euler und Lagrange versäumt haben, als sie aus $(\mathrm{Cos}\, x + \mathrm{Sin}\, x . \sqrt{-1})^m = \mathrm{Cos}\, mx + \mathrm{Sin}\, mx . \sqrt{-1}$ u. $(\mathrm{Cos}\, x - \mathrm{Sin}\, x . \sqrt{-1})^m = \mathrm{Cos}\, mx - \mathrm{Sin}\, mx . \sqrt{-1}$ schlossen: $\mathrm{Cos}\; mx = \dfrac{(\mathrm{Cos}\, x + \mathrm{Sin}\, x . \sqrt{-1})^m + (\mathrm{Cos}\, x - \mathrm{Sin}\, x . \sqrt{-1})^m}{2}$ und

$$\mathrm{Sin}\; mx = \frac{(\mathrm{Cos}\, x + \mathrm{Sin}\, x . \sqrt{-1})^m - (\mathrm{Cos}\, x - \mathrm{Sin}\, x . \sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}},$$ und

nun bei der Anwendung auf einen gebrochenen Exponenten nicht die gleichen Werthe dieser mehrdeutigen Potenzen zusammenstellten. In dem bekannten, an Kürze und Feinheit ausgezeichneten Beweise für die Richtigkeit des Binominaltheorems bei gebrochenen Exponenten kommt Euler, indem er schließt: „Wenn $[f(m)]^n = f(mn)$, so ist $f(m) = [f(mn)]^{\frac{1}{n}}$", und nun für $f(m)$ einen einwerthigen Ausdruck einführt, auf die unrichtige Ableitung $(1+z)^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} z + \dfrac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.2} z^2 + \text{rc.}$, wo die linke Seite der Gleichung im Allgemeinen n verschiedene Werthe darstellt, während die rechte Seite einwerthig ist. Die Gleichung $(a+b)^{1/n} = a^{1/n} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} b + \dfrac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.2} a^{\frac{1-2n}{n}} b^2 + \text{rc.}$ ist nur richtig, wenn man bei den vielwerthigen Ausdrücken jedesmal die gleichwerthigen zusammenstellt, oder wenn man $(a+b)^{1/n} = a^{1/n}\left(1 + \frac{1}{n} . \frac{b}{a} + \dfrac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \text{rc.}\right)$ setzt. Daß man selbst in Beziehung auf Potenzen mit ganzen Exponenten, bei der allgemein ausgesprochenen Behauptung, es sei: „$(p-q)^{(m+n)-n} = (p-q)^{m}$" auf Widersprüche gerathen mußte, versteht sich von selbst; denn wurde irgend einmal $p=q$, so erhielt der erste Ausdruck alle mögliche Werthe, während der letzte sich auf 0 reducirte. Anfänglich glaubte man für die Lehre von den Potenzen mit negativen und gebrochnen Exponenten genug gethan zu haben, wenn man zeigte, daß jedem Multipliciren der Potenzen mit gleichen Grundzahlen ein Addiren der Exponenten, dem Dividiren der erstern ein Subtrahiren der letztern entsprach, ferner daß jede Potenzirung einer Potenz mit einer Zahl auf eine Multiplication des Exponenten, jede Zerlegung einer Potenz in gleiche Factoren auf eine Division des Exponenten führte. Daß dabei der ursprüngliche Begriff der Potenz, der als Exponent stets eine (ganze, positive) Zahl voraussetzt, in den meisten Fällen, nehmlich immer, wenn in a^{m-n} die Zahl n größer war als m, und in $a^{\frac{m}{n}}$ die Zahl n nicht in m aufgieng, verloren gehen mußte, konnte nicht verborgen bleiben, und so erklärten diejenigen, welche nicht nach unvollständigen Inductionen verfahren, und die Lehrsätze, welche für Potenzen mit ganzen Exponenten erwiesen waren, nicht ohne Weiteres auf diese Scheinpotenzen ausdehnen wollten, a^{m-n} für $a^m : a^n$, so wie $a^{\frac{n}{m}}$ für $\sqrt[n]{a^m}$, und suchten nun zu zeigen, daß man mit diesen so disinirten Ausdrücken gerade so fortoperiren dürfe, als wenn man es noch immer mit eigentlichen Potenzen zu thun gehabt hätte. Ob aber diesen Begriffen auch logische Realität zukomme, ob die Ausdrücke bestimmte, einwerthige oder vielwerthige seien, darüber war nirgends die Rede, und so darf man sich nicht wundern, daß man bei den Wurzeln oder Potenzen mit gebrochnen Exponenten zu den widersprechendsten Resultaten gelangte. So sagt Pasquich ganz allgemein: Wenn 2 Zahlen a und b gleich sind, so müssen auch alle gleichnamigen Potenzen und Wurzeln von ihnen gleich sein; ist aber $a > b$, so muß auch jede Wurzel und Potenz von a größer sein als die gleichnamige Wurzel und Potenz von b". Ihm ist: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdots \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^m}$. Für $a^{\frac{m}{n}}$ setzt er $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$; für $\sqrt[2]{a} \,.\, \sqrt[2]{a} = (\sqrt{a})^2$; für $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m.r}{n.r}}$. Da $a^m = b^m$, wenn $a = b$, so setzt er auch $a^{\frac{4}{2}} = a^2$ oder $a^{\frac{np}{n}} = a^p$. Pasquich giebt als Grund dafür, daß $\sqrt[mp]{a^{np}} = a^{\frac{n}{m}}$ sein soll, an, es sei ja $\left(\sqrt[mp]{a^{np}}\right)^{mp}$ gerade so gut a^{np}, als auch $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^{mp} = a^{np}$ sei. Francoeur sagt für diesen Fall: Die Wurzelausziehung und die Potenzirung sind gerade so einander entgegengesetzt als die Division und die Multiplication. Selbst Lacroix, der über die Realität und Vielwerthigkeit der Wurzeln sehr klar und wahr spricht, und unter den vielen Werthen eines Wurzelausdrucks den positiven von allen übrigen unterscheidet, den erstern Werth den arithmetischen, die übrigen die algebraischen nennt, giebt nicht an, wie man mit allgemeinen Wurzeln, die doch in der Arithmetik gerade so gut wie in der Algebra vorkommen, sicher operiren könne. Nachdem Tobias Mayer in seiner höhern Analysis für reelle x bewiesen hat, daß $d \log \frac{1+x}{1-x} = \frac{2\,dx}{1-x^2}$ setzt er für x ohne Weiteres $\operatorname{tang} \varphi \sqrt{-1}$, um auf die Gleichung $\operatorname{Sin} x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ zu kommen. Die Funktion $e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} +$ ꝛc. wird unmittelbar aus der $e^x = 1 + x + \frac{x^3}{1.2.3} +$ ꝛc. hergeleitet, obschon letztere nur für reelle x erwiesen ist. So hat also Kramp wohl recht, wenn er sagt, daß er sich vergeblich umgesehen habe nach festen, bestimmten Definitionen für so manche arithm. Ausdrücke, und daß es ihm scheine, ein großer Theil der arithm. Lehrsätze ruhe auf einem Schlusse vom Besondern aufs Allgemeine.

Wenn man den Zustand der Arithmetik in dieser Zeit des bloßen Erkennens und Aufsuchens von Widersprüchen, des Klagens und Fragens vergleicht mit dem Zustande der Geometrie, in welche nach Euklidischer Strenge und Sicherheit kein Begriff eher eingeführt wurde, bevor seine logische Realität durch eine genetische Definition nachgewiesen war, in der keine Division eines Begriffes eher gegeben wurde, bevor man ihre Richtigkeit aus der Definition abgeleitet hatte, in der man niemals die Converse eines Lehrsatzes ohne vorhergegangenen Beweis als richtig hinstellte, in der endlich ein Lehrsatz nie weiter ausgedehnt wurde, als die Gränzen seines Beweises reichten, und nun bedenkt, daß es dem Lehrer nicht sowohl obliegt die Wissenschaft zu erweitern, als den vorhandenen Schatz der Wissenschaft zur formellen Bildung seiner Schüler zu verwenden, dann darf man sich nicht so sehr wundern, wenn mancher Schulmann anfieng der Arithmetik (mit Ausschluß des gewöhnlichen Rechnens nach der Methode eines gründlichen Kopfrechnens) jegliche bildende Kraft abzusprechen, und sie als ein Erzeugniß der neuern Zeit und als eine Abweichung von der strengen Methode und geistigen Zucht der Alten aus der Schule herauszuwünschen. Doch glücklicher Weise sind wir nicht bei dem bloßen Erkennen und Aufsuchen von Widersprüchen und falschen Resultaten, auch nicht beim bloßen Klagen und Fragen stehen geblieben. Die Arithmetik ist vielmehr in neuerer Zeit auf eine solche Stufe wissenschaftlicher Ausbildung erhoben worden, daß sie in Rücksicht auf Grundlage, Aufbau und systematischen Zusammenhang ihrer Lehren der Geometrie der Alten vorzusetzen, in Rücksicht auf Bündigkeit ihrer Beweise derselben vollkommen gleich zu stellen sein möchte. Doch nicht auf einmal ist man zu diesem Ziele gelangt. Schon die Art der Klagen und die Natur der Mittel, dem Uebel abzuhelfen, zeigen ganz deutlich, daß man den Fehler oft ganz anderswo suchte, als wo er wirklich lag, und daß man glaubte, nur an dieser oder jener Stelle wäre nachzuhelfen, alles übrige habe gute Wege, ruhe auf dem besten Fundamente. So suchten die Einen das Uebel bei den sogenannten negativen Zahlen, die Andern in der verkehrten Auffassung und Behandlung der Null, Etliche bei den Potenzen mit gebrochnem Exponenten, Andere in der Feststellung und Anwendung des Begriffs der sogenannten irrationalen, besonders der imaginären Größen. Alle aber giengen von der mehr oder weniger klar ausgesprochnen Ansicht aus, daß die in der Arithmetik auftretenden verschiedenen Zahlformen, je nachdem sie Zahlen im gewöhnlichen Sinne darstellten, oder nicht, von einer Verschiedenheit der Beziehungen unter den der Rechnung zu Grunde gelegten Größen herrührten, und daß den Operationen mit den Zahlen stets eine Operation mit den durch die Zahlen repräsentirten Größen entspräche. Darnach drückten die Zahlen (ganze, positive) die Mengen gezählter Dinge aus, oder zeigten an, wie oft eine Maaßgröße in einer dieser gleichartigen enthalten sei; die gebrochnen Zahlen (Brüche und Quotienten) gaben an, wie oft ein aliquoter Theil einer Maaßgröße genommen werden müsse, um eine der zu messenden Größe gleiche zu erhalten; die entgegengesetzten Zahlengrößen dachte man sich als Maaßzahlen zweier in einem entsprechenden Gegensatz stehender, gezählter oder gemessener Dinge, die Irrationalen als Maaßzahlen von Größen, die gegen eine bestimmte Maaßeinheit sich als incommensurabel verhielten. Die Aussage über deren Gleichheit und Ungleichheit richtete sich nach der Gleichheit oder Ungleichheit der durch sie dargestellten Größen (Mengen oder continuirlichen Größen). Die Art der Operation mit diesen sogenannten Zahlen (ganzen, gebrochnen, entgegengesetzten, irrationalen, der 0) richtete sich nach der Natur der Eigenschaften und Beziehungen, die man sich an und unter den gezählten und gemessenen Dingen gedacht hatte. Nur die imaginären Zahlen, die man gar nicht unter den Begriff der Größe stellen, oder an keine Eigenschaft einer zu messenden Größe anlegen konnte, und die man deßwegen sogar unmögliche Größen nannte, glaubte man nicht auf diese Weise unterbringen zu können. Lacroix meint daher, es wäre richtiger zu sagen: „imaginäre Ausdrücke oder Symbole", weil diese Ausdrücke keine Größen, also auch keine imaginäre seien. Aber seitdem Gauß auf eine schöne Anwendung der imaginären Ausdrücke in der analytischen Geometrie aufmerksam gemacht, und besonders Herm. Scheffler in dem Werke: „Ueber das Verhältniß der Arithmetik zur Geometrie, insbesondere über die geometrische Bedeutung der imaginären Zahlen" und in seinem: „Situationskalcül" diesen Gedanken am weitesten und fruchtbarsten verfolgt hat, haben Viele geglaubt, daß sie damit auch das Wesen der imaginären Größen genau erkannt, und denselben ihre Stelle unter den übrigen Größen oder allgemeinen Eigenschaften der Größen hinreichend gesichert hätten. Doch würde man bei dieser Ansicht sich gerade so irren, wie man sich irren würde, wollte man glauben, daß damit das Wesen der allgemeinen Quotienten zweier Zahlen erfaßt sei, weil dieselben zu Maaßzahlen von Größen verwendet werden können, und man z. B. die Maaßzahl eines Ganzen (einer Summe) erhält, wenn man die Maaßzahlen aller Theile dieses Ganzen (der einzelnen Summanden) bei Voraussetzung desselben Gemäßes gerade so addirt, wie es die Arithmetik bei der Addition der formlosen Zahlen oder der allgemeinen Quotienten vorschreibt. Es handelt sich nehmlich bei dieser Gaußischen Anwendung der imaginären Zahlen auf geometrische, und mit diesen in Rücksicht auf Stetigkeit, Theilbarkeit und Richtungsverschiedenheit gleichartige Gegenstände nicht um eine genauere Auffassung und Erklärung des Wesens der imaginären Zahlen, sondern um eine fruchtbare Aenderung des Uebertragungsgesetzes der Sprache der Arithmetik in die der Geometrie und umgekehrt. Sonst wurden blos die reellen Zahlen als Maßzahlen für die geometrischen Gegenstände eingeführt, und die geometrischen Definitionen und Gesetze durch Gleichungen zwischen den Maaßzahlen der die geometrischen Gebilde bedingenden Elemente ausgesprochen, und die arithm. Ableitungen wieder in die Sprache der Geometrie übertragen. Nur in Mitte der arithm. Ableitung konnten und durften, wenn nichts

Unsinniges vorausgesetzt oder gefordert war, imaginäre Zahlen auftreten. Nach dem veränderten Uebertragungsgesetz können sowohl gleich im Anfang, als auch beim Schluß der arithmetischen Arbeit imaginäre Zahlen vorkommen, indem man z. B. die Maaßzahl jedes Perpendikels auf eine als Abscissenachse gedachte Gerade, deren Stücke man blos mit ihren reellen Maaßzahlen einführt, mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt, und dieses Product als arithmetischen Werth des Perpendikels in die Rechnung bringt. Es ist hier nicht der Ort, weiter auszuführen, wie man durch weitere Benutzung der imaginären Zahlen, durch Einführung des Richtungscoefficienten, durch entsprechende Aenderungen in den Begriffen und Definitionen des Addirens, Subtrahirens ꝛc. von geraden Linien verschiedener Richtung ꝛc. glaubt dahin zu gelangen, daß man für jede einzelne Operation und jedes einzelne Resultat in der Rechnung auch eine entsprechende Operation und ein entsprechendes Resultat in der Geometrie werde aufweisen können, und umgekehrt. Es ist für uns genug gezeigt zu haben, daß mit dieser schönen Anwendung der imaginären Zahlen auf die Geometrie für die Aufklärung über das Wesen derselben gerade so wenig gethan ist, wie wir durch die Verwendung der allgemeinen Quotienten zweier Zahlen zu Maaßzahlen über dir Natur dieser Quotienten nichts Genaueres erfahren haben, noch erfahren können. Wenn wir aber auch zugeben wollten, daß sich durch eine begriffliche, arithm. Auffassung der Abhängigkeit räumlicher Gegenstände nach Größe, Ort, Richtung das Wesen der verschiedenen Zahlausdrücke erfassen ließe, was würden denn alle diese Ausdrücke bedeuten, wenn sie sich irgendwo zeigten, wo der Natur des Gegenstandes nach gar nicht von einer unbedingten Theilbarkeit, noch von irgend einer Richtung die Rede sein kann? Es handle sich z. B. in der Gleichung $x^3+9=12x$ um die Bestimmung einer Anzahl von Punkten, Amben, überhaupt von Dingen, bei denen weder von einer unbedingten Theilbarkeit noch von irgend einer Richtung gesprochen werden kann. Mag man nun die Ableitung des x bis zu dem Ausdruck $\sqrt[3]{\frac{-9+\sqrt{-175}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-9-\sqrt{-175}}{2}}$ oder diesen Ausdruck selbst, oder seine Umwandlung in $\sqrt[3]{\left(\frac{3+\sqrt{-7}}{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{3-\sqrt{-7}}{2}\right)^3}$, ferner in $\frac{3+\sqrt{-7}}{2}+\frac{3-\sqrt{-7}}{2}$, dann in $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$, oder zuletzt in 3 ansehen, überall würde man auf etwas Unausführbares, Unmögliches stoßen, wollte man nach der ältern, so eben angegebenen Ansicht glauben, daß die Division eine Theilung der gezählten oder gemessenen Dinge voraussetze, das Imaginäre auf eine Richtungsverschiedenheit in den gemessenen Dingen hinweise. Hätte man blos die Richtigkeit des Endresultats einer Auflösung im Auge, so könnte man öfters vermittelst Austausch einer der Rechnung ursprünglich zu Grunde liegenden Größe gegen eine andere geeignete die Operationen an dieser Größe ausführen, die an der anfänglichen gar nicht auszuführen waren. Bezöge sich eine Gleichung zwischen x, m, n ꝛc. z. B. auf untheilbare Gegenstände, so ließe sich fragen, ob wir nicht zu demselben Werthe für x gelangen würden, wenn wir die Gleichung so auffaßten, daß sie sich auf unbegränzt theilbare Gegenstände beziehe. Und da es nicht bezweifelt werden kann, daß wenn eine Gleichung in Beziehung auf Punkte, Amben ꝛc. richtig ist, sie auch in Beziehung auf eine Linieneinheit, einen Thaler ꝛc. richtig sein muß, und wenn bei Zugrundelegung einer Linieneinheit man für x eine bestimmte Zahl erhält, wodurch der algebraischen Gleichung Gränze geleistet wird, diese Zahl dann auch gilt, wenn man die Gleichung wieder auf Punkte, Amben ꝛc. bezieht, so ist durch diese Annahme die Richtigkeit des Endresultates vollkommen gesichert, aber in Beziehung auf die Zwischenresultate ist man um keinen Schritt weiter gekommen, man hat vielmehr von vornherein auf eine Operation an der ursprünglich zu Grunde gelegten Größe verzichtet.

Sollte man also auch dann und wann durch Berücksichtigung der Theilbarkeit, der Einstimmigkeit und des Gegensatzes bei der Vereinigung, der Richtungsverschiedenheit bei der Entstehung im Stande sein, die arithm. Operationen als Operationen mit den der Zahl zu Grunde liegenden gezählten oder gemessenen Gegenständen einführen und regeln zu können, so müßte das doch immer fehlschlagen in allen denjenigen Gleichungen, wo von solchen Größen, oder von solchen Größeneigenschaften gar nicht die Rede sein kann, und da es nach dem Vorigen doch genug Gleichungen giebt, in denen solche Größeneigenschaften und Größenbeziehungen gar nicht vorkommen, und sich doch alle die arithmetischen Formen zeigen, die man mit dem Namen: Brüche, positive und negative, irrationale und imaginäre Größen belegt hat, so muß man auf die Erklärung dieser Formen durch Zuhülfenahme solcher Unterschiede in den Größen ganz und gar verzichten, und sich allein nach Hülfe bei der Erweiterung der Operationen mit Zahlen (pos., ganzen, Gliedern der natürl. Zahlenreihe) umsehen, erwartend, daß die so gewonnenen und festgestellten Formen sich in allen andern Gleichungen als Ausdrücke arithmetischer Größenbeziehungen werden verwenden lassen. Es stellen sich darnach alle diese verschiedene, in der Arithmetik vorkommende, sogenannte Größen ganz einfach blos als verschiedene Operationsformen, blos als Träger der verschiedenen Operationsthätigkeiten dar, und die imaginären Größen sind dann nicht mehr und nicht weniger imaginär als die Irrationalzahlen, diese als die positiven und negativen Größen, diese als die gebrochenen Zahlen; sie stehen alle in gleicher Reihe. Was das Auftreten und Wesen der einen Art erklärt, erklärt in ganz gleicher Weise das Auftreten und Wesen der andern. War einmal der gemeinschaftliche Ursprung der in der Arithmetik auftretenden verschiednen Zahlverknüpfungen und damit der innere Zusammenhang unter denselben erkannt, so bedurfte es nicht großer Anstrengungen mehr einzusehen, daß die fruchtbarste Quelle der entdeckten Widersprüche in der dem menschlichen Geiste inwohnenden Neigung vom Besondern auf das Allgemeine zu schließen, liege, und daß in der Arithmetik dieser Neigung besonders viel Nahrung zufließe, weil in ihr die genannte Schlußweise meistens auf richtige Resultate führt. Es ist bekanntlich Ohm, der diese Ansicht zuerst in größter Klarheit ausgesprochen, und in strengster Consequenz für die ganze Arithmetik durchgeführt hat. Seitdem sind viel Lehrbücher der Arithmetik, Algebra, allgemeinen Größenlehre und andere mathematische Schriften erschienen, die sich ganz und gar, manigmal mit für das ganze System, für die Grundansicht unwesentlichen Abweichungen, dieser Auffassung Ohm's angeschlossen haben. Auffallend aber ist es, daß manche Mathematiker und Mathematiklehrer geglaubt haben, in diesen oder jenen Parthien die alte Ansicht beibehalten zu können, während sie in andern ganz und gar den neuen Weg betreten. So hat sich der durch wissenschaftliche Strenge ausgezeichnete Lehrer und Gelehrte Stein in seinem vortrefflichen Werke: „die Elemente der Algebra, Trier 1828" in Bezug auf die sogenannten negativen Größen, auf die Null, auf die imaginären Ausdrücke ganz und gar den Ohm'schen Ansichten angeschlossen, während er die allgemeinen Quotienten in herkömmlicher Weise als gebrochene Zahlen, Maaßzahlen meint einführen und behandeln zu müssen. Daß man in der Lehre von den gebrochenen Zahlen, als Maaßzahlen unbegränzt theilbarer Gegenstände gedacht, recht gründlich verfahren kann, ist schon im Vorigen angegeben, und theilweise ausgeführt, aber daß man von einer andern als einer Operations-Bedeutung des Bruches selbst in dem Falle sprach, wo nichts gebrochen, in aliquote Theile getheilt werden kann, das führte zu Ungereimtheiten und Widersprüchen. So weiß man wohl zu sagen, was $^3/_4$ Thaler bedeutet, aber was soll $^3/_4$ eines Punktes, einer Ambe ꝛc. bedeuten, oder was soll es heißen, wenn man sagt. $^3/_4$ bedeute 3 mal der 4te Theil von 1, da es gar keine Zahl giebt, die mit 4 multiplicirt ein Product liefert, das gleich 1 gesetzt werden kann. Behandelte man aber auch die Lehre von den Brüchen in ihrer Eigenschaft als Maaßzahlen in der vorhin angegebnen, zuläßigen Weise, so würde man dadurch, wie Professor Radike in seiner trefflichen Analysis ganz richtig bemerkt, doch nicht der Pflicht entbunden sein, die allgemeinen Quotienten ganz unabhängig von den gebrochnen Zahlen in einer ihrem Ursprunge und Wesen entsprechenden Weise zu behandeln, und somit in der eigentlichen Arithmetik nicht weiter gekommen sein. So hat sich auch Grunert in der Lehre von den Potenzen mit negativen und gebrochnen Exponenten mehr oder weniger den Ansichten Ohm's angeschlossen, dadurch aber das Uebel nur aus einer Position in eine andere gedrängt, ohne es in der letzten zu heben. Nun sind aber solche einzelne Punkte übereinstimmender Meinung bei sonstiger Verschiedenheit der Ansichten besonders geeignet, eine vollständige, durchgreifende Uebereinstimmung, eine Einigkeit in allen Punkten herbeizuführen. In diesem Betracht sagt Herbart an einer Stelle seines Lehrbuchs zur Einleitung in die Philosophie: „Wenn in einer Wissenschaft von einander Abweichende wünschen, sich zu vereinigen, so suchen sie zuerst die Punkte auf, bis zu welchen sie einstimmig denken; indem sie voraussetzen, es gebe einen nothwendigen Fortschritt im Denken, welcher, sobald er gefunden wäre, die gewünschte Einstimmung hervorbringen würde. Genauigkeit im Bestimmen und Erwägen derjenigen Begriffe, von welchen man ausgeht, ist dabei eine nothwendige Bedingung." Wir wollen deßwegen von Zugestandenem, Uebereinstimmendem ausgehen, und dann zusehen, wie sich die nicht in Uebereinstimmung befindlichen Meinungen und Ansichten dazu stellen, logisch verhalten.

Erhielt man in einer algebraischen Gleichung, die sich blos auf zählbare, gar keiner Theilung in aliquote Theile fähige Gegenstände bezog, für x keine Zahl, sondern etwa einen keiner Zahl gleich kommenden Quotienten, so verwarf man die Gleichung, oder, was hier auf dasselbe hinauskommt, die der Gleichung zu Grunde liegende Aufgabe als eine etwas Ungereimtes in sich schließende, Widersprechendes fordernde, indem man, und gewiß mit vollem Rechte sagte, daß ein Bruch und ein seinem Begriff nach untheilbarer Gegenstand zwei einander widersprechende Vorstellungen seien. Wäre man nun nur einen Schritt weiter gegangen, und hätte genau dasselbe Raisonnement auf die Ableitung des x angewendet, was man bei dem Resultate x so klar einsah, und so überzeugend geltend machte, so würde man in den meisten Fällen denselben Widersprüchen begegnet sein, und nicht an eine Verallgemeinerung des Größenbegriffs gedacht haben, wo es sich ganz deutlich um eine Verallgemeinerung des Operationsbegriffs und der damit zusammenhangenden Zahlverknüpfungen handelte. Erhielt man z. B. aus der Gleichung $mx + a = b$ bei zu Grunde gelegten bloß zählbaren Gegenständen für x eine Zahl (positive, ganze), oder ging m in $(b-a)$ auf, so hatte man nichts mehr zu erinnern, obgleich, wenn man beispielsweise so abgeleitet hatte: $x + \frac{a}{m} = \frac{b}{m}$, folglich $x = \frac{b}{m} - \frac{a}{m}$, mithin $x = \frac{b-a}{m}$, man sowohl bei $\frac{a}{m}$ als auch bei $\frac{b}{m}$ sich hätte sagen sollen, daß nach dem vorigen Raisonnement diese Ableitung jedesmal hätte verworfen werden müssen, wenn m nicht zugleich in a und in b aufgegangen wäre. So sagt Grunert bei Gelegenheit der Lehre von den Potenzen mit dem Exponenten 0: „Es ist $a^0 = 1$, wobei nur zu bemerken, daß a^0 ein bloßes Symbol ist, welches erhalten wird, wenn man, eigentlich auf unerlaubte Weise, den Satz $a^m : a^n = a^{m-n}$ über seine Gränzen ausdehnt," ferner bei den Potenzen mit negativen Exponenten: „Die Formel $a^m : a^n = a^{m-n}$ unterliegt der Bedingung $m \geqq n$ (es ist erst von den eigentlichen Potenzen und a^0 die Rede gewesen). Wenden wir aber diese Formel auf einen Fall, wo $m < n$ ist, z. B. auf den Fall $a^3 : a^7$, wenn auch allerdings eigentlich auf unerlaubte Weise, an, so erhalten wir $a^3 : a^7 = a^{3-7} = a^{-4}$." In Beziehung auf $a^{\frac{m}{n}}$ für den Fall, daß n nicht in m aufgeht, geht er in ähnlicher Weise zu Werke. Francoeur spricht sich über a^0, a^{-p}, $a^{\frac{n}{m}}$ gerade so aus. Beide führen diese Symbole auf gleichwerthige Vierspeziesformen zurück, indem sie a^0, a^{-p}, $a^{\frac{n}{m}}$ beziehlich für 1, $\frac{1}{a^p}$ und $\sqrt[n]{a^m}$ erklären (bei $\sqrt[n]{a^m}$ freilich voraussetzend, daß es immer einen Vierspeziesausdruck gebe, der, zur n^{ten} Potenz erhoben, gleich a^m sei), und dann die bekannten Lehrsätze über die Operationen mit diesen Symbolen folgen lassen. Wendet man nun consequenter Weise ganz dasselbe Raisonnement auf die Division bei Gleichungen an, in denen nur von untheilbaren Gegenständen, etwa von Punkten, Amben rc. die Rede ist, so muß man in allen den Fällen, wo die Division nicht aufgeht, gerade so sagen, daß man auch hier in unerlaubter Weise von einer Division spreche, da weder die Größe (der Punkt, die Ambe rc.) noch die Zahl eine eigentliche Division zulasse. Nun aber konnte man für die Symbole a^0, a^{-p}, $a^{\frac{m}{n}}$ gleichwerthige Vierspeziesformen setzen, und diesen Definitionen gemäß im Sinne der Operationen mit Vierspeziesformen weiter operiren, aber wem darf man für den Fall, daß b nicht in a aufgeht, also $\frac{a}{b}$ keine Zahl ausdrückt, das Symbol $\frac{a}{b}$ gleich stellen, und was will es heißen, wenn verlangt wird, man solle die Symbole dieser Art addiren, subtrahiren rc.

Laßt uns festhalten, daß wir für den Augenblick den Ausdruck: „Zahlen" im gewöhnlichen Sinne nehmen, und darunter nichts weiter als die Glieder der natürlichen Zahlenreihe verstehen, ferner mit den Ausdrücken: Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren noch keine andere Begriffe als die des gewöhnlichen Lebens verbinden wollen, so daß jeder Subtrahend kleiner als der damit zusammengestellte Minuend sei, jeder Divisor in seinen zugehörigen Dividenden aufgehe, also $(a-b)$, $\frac{a}{b}$ so gut, als $(a+b)$, ab wieder Zahlen vorstellen, nur nach den verschiedenen Operationsarten verschieden entstanden gedacht. Wiederholen wir nun die Frage: Was darf man in dem Falle, daß b nicht in a aufgeht, dem Symbol $\frac{a}{b}$ gleichstellen, und was muß man unter dem Addiren, Subtrahiren rc. solcher Symbole verstehen? so ergiebt sich sogleich, daß, da solche Symbole und solche Operationen früher noch nicht da waren, diese Begriffe ganz neu zu bilden sind, und wir sie definiren dürfen, wie wir wollen, wenn wir nur dafür sorgen, daß die Definitionen keine logische Widersprüche in sich aufnehmen. Sollen aber die Definitionen auch für den Fall gelten, wo b in a aufgeht, so muß man die Definitionen so einrichten, daß sie die frühern von Gleichheit, Addiren, Subtrahiren rc. als untergeordnete Begriffe in sich aufnehmen. Wir denken uns zu dem Ende alle Zahlen (immer die Glieder der natürlichen Zahlenreihe gemeint) in Quotienform gebracht. Solche Quotienten hießen gleich, wenn sie dieselbe Zahl vorstellten. Es fragt sich nun, ob wir das Merkmal: „gleiche Zahl" nicht mit einem andern Merkmale vertauschen können, das bei den Quotienten, welche Zahlen vorstellen, von gleichem Umfange sei, aber auch an den Symbolen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, die keine Zahlen, also auch keine „gleiche Zahlen" mehr vorzustellen brauchen, vorkommen könne. Wir wollen uns eines gewöhnlichen Beispiels aus der Planimetrie erinnern. Es ist ganz einerlei, ob wir an die Spitze der Lehre von den Parallelogrammen die Definition stellen: Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem je 2 und 2 Seiten parallel sind, oder: in welchem 2 Seiten gleich und parallel sind, oder: in welchem die gegenüberstehenden Winkel gleich sind, oder: in welchem die Diagonallinien einander halbiren rc.; denn jeder dieser Sätze schließt alle die andern als Folgerungen in sich. So ist es auch einerlei, ob man sage: Zwei Quotienten (Zahlen darstellende) sind gleich, wenn sie dieselbe Zahl darstellen, oder: sie sind gleich, wenn die Producte aus dem Divisor des einen in den Dividend des andern gleich sind. Gebraucht man aber letzteres Merkmal, so kann man die Definition der Gleichheit der Quotienten auch auf die Symbole $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, bei denen man von der Forderung, daß sie immer Zahlen darstellen sollten, absehen mußte, ausdehnen. Mit den Begriffen: ungleich, größer, kleiner hat es eine gleiche

Bewandtniß. In Rückſicht auf die Begriffe: Addiren, Subtrahiren ꝛc. brauchen wir nur gerade ſo zu verfahren. Wir denken uns wieder alle Zahlen in Quotienform, und erklären das Addiren der Symbole $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ für das Bilden eines Symbols aus $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ auf dieſelbe Weiſe, wie man bei den Quotienten, welche Zahlen vorſtellen, einen Quotienten bildete, der dieſelbe Zahl vorſtellte, als die Summanden zuſammen genommen. Es iſt unnöthig über die andern Operationen mit dieſen Symbolen zu ſprechen. Nur iſt bei der Anwendung der indirecten Operationen auf dieſe Ausdrücke zu fragen, ob es immer, und wenn dieſes, ob es (dem Werthe nach) nur einen Quotienten gebe, der für die Differenz oder den Quotienten zweier Quotienten geſetzt werden könne. Wenn aber $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, ſo giebts einen Quotienten, der, zu $\frac{c}{d}$ addirt, gleich $\frac{a}{b}$ wird, gerade ſo, als wenn $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ noch blos in dem frühern Sinne genommen worden wären. Da es ferner immer einen, und (an den Werth gedacht) nur einen Quotienten giebt, der, mit $\frac{a}{b}$ multiplicirt, gleich $\frac{c}{d}$ wird, ſo entſtehen bei der Anwendung aller bisherigen Operationen auf die Quotienten keine neue, ſelbſtſtändige Symbole. Nur war es ſtets nöthig, bei der Subtraction den Minuenden größer anzunehmen als den Subtrahenden. Wendet man conſequenter Weiſe daſſelbe Raiſonnement auf die Subtraction in allen den Fällen an, wo der Subtrahend nicht kleiner als der Minuend iſt, dehnt alſo, um wieder mit Grunert ꝛc. zu ſprechen, die Subtraction auf eine unerlaubte Weiſe aus, d. h. ſpricht noch von einer Subtraction, wo von keiner Subtraction im frühern Sinne des Wortes mehr die Rede ſein kann, ſo fragt ſich wieder, da in dieſem Falle $a - b$ (a und b als allgemeine Quotienten gedacht) keinem der frühern Quotienten gleich geſetzt werden kann, wem das Symbol $a - b$ dann gleich geſetzt werden dürfe, und was es heißen müſſe, ſolche Symbole addiren ꝛc., wenn man die Definition ſo einrichten wolle, daß ſie auch die Fälle umſchließen, in denen a größer als b gegeben iſt. Denken wir uns zu dieſem Ende wieder alle frühere Quotienten in Differenzform, ſo ergeben ſich die Definition von Gleichheit, Addiren, Subtrahiren ꝛc. ſolcher Symbole ganz in derſelben Weiſe, wie wir das früher bei den allgemeinen Quotienten geſehen haben. Bei denjenigen Differenzen nehmlich, in welchen der Minuend größer war als der Subtrahend, ſagte man, ſie ſeien gleich, wenn ſie demſelben allgemeinen Quotienten gleich geſetzt werden konnten. Für dieſe Definition muß nun eine in ihren Ableitungen gleichgeltende geſetzt werden, in welcher aber nichts mehr von der Vorausſetzung vorkommen darf, daß die Differenzen noch irgend einem allgemeinen Quotienten gleich ſein müſſen. Da nun bei Differenzen, in denen der Minuend größer als der Subtrahend iſt, die Ausſagen: „$(a-b)$ und $(c-d)$ ſind demſelben Quotienten gleich" oder „$a+d$ und $c+b$ ſind einander gleich" ganz von demſelben Umfange ſind, aber die letztere Ausſage ganz und gar davon abſieht, daß die einzelnen Differenzen noch einem Quotienten gleich ſein müſſen, ſo kann man die letztere Ausſage als Definition für die Gleichheit zweier ganz allgemeinen Differenzen aufſtellen, ohne noch an die Einſchränkung gebunden zu ſein, daß der Minuend größer ſein müſſe als der Subtrahend. Ganz ſo wie früher bei den Quotienten ergeben ſich hier die Difinitionen der Addition, Multiplication ꝛc. Die Null, ſo wie die poſitiven und negativen Ausdrücke ſtellen ſich blos als beſondere Fälle des allgemeinen Symbols $(a-b)$ dar. Nur bei der Anwendung der Diviſion auf dieſe allgemeinen Differenzen zeigt es ſich, daß es öfters gar keine Differenz giebt, die mit einer gegebenen multiplicirt, einer andern gegebenen gleich werde, öfters unendlich viele verſchiedenwerthige. Die Vierſpecies haben uns alſo, wenn wir von dem unbeſtimmten $\frac{0}{0}$ und dem nicht weiter zu gebrauchenden $\frac{a}{0}$ abſehen, folgende Symbole geliefert: $+a$, $-a$, o, wo a

selbst ein allgemeiner Quotient ist, speziell eine Zahl vorstellen kann. Legt man diese Symbole wieder als Grundzahlen für Potenzen mit ganzen Exponenten zu Grunde, so gelangen wir erst bei den indirecten Operationen der Wurzelausziehung und Logarithmation zu neuen Symbolen, zu den irrationalen Wurzeln und den imaginären Ausdrücken, wie $\sqrt{7}$, $\sqrt{-a}$, die sich, da es weder einen positiven noch einen negativen Quotienten giebt, der zur 2ten Potenz erhoben, gleich 7 oder — a werde, auch keiner dieser Ausdrücke gleich 0 gesetzt werden kann, sich gerade so wenig auf allgemeine Quotienten und Differenzen zurückführen lassen, als die allgemeinen Differenzen auf Quotienten und diese auf Zahlen im gewöhnlichen Sinne zurückführbar waren, welche sich vielmehr gerade so gut wie die Quotienten und Differenzen als selbstständige Symbole verhalten, bei deren Vergleichung und Behandlung ganz dieselben Ueberlegungen anzustellen sind, welche bei den Quotienten und Differenzen angestellt werden mußten, bei denen die rationalen Wurzeln, unter welcher Form alle frühere Symbole aufgefaßt werden können, dieselbe vermittelnde Rolle zu übernehmen haben, wie bei den allgemeinen Differenzen diejenigen Differenzen, die einem Quotienten gleich gesetzt werden konnten, wie bei den allgemeinen Quotienten diejenigen Quotienten, welche einer Zahl gleich waren. Es wiederholen sich hier die Fragen: Giebt es immer einen Ausdruck, der zur nten Potenz erhoben gleich a wird, und wie viele und welche, und: Giebt es immer einen Ausdruck, mit dem a potenzirt eine Potenz giebt gleich b, und wie viele und welche rc. (a und b ganz allgemein gedacht). Man weiß aus dem Vorigen, daß aus der Nichtbeachtung dieses Punktes besonders viele der falschen Resultate geflossen sind, über die so häufig und stark geklagt worden ist. Für unsern Zweck bedarf es blos der einfachen Anführung, daß die Anwendung der verschiedenen Operationen auf die genannten Symbole keine neue, selbstständige Symbole hervorruft, sondern alle sich ergebende Ausdrücke auf die frühern zurückgeführt werden können.

Die Arithmetik hat also kein anderes Object, als die Zahl im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Durch Anwendung der Begriffe der directen Operationen: Addition, Multiplication, Potenzirung und der indirecten: Subtraction, Division, Radication, Logarithmation, in dem ursprünglichen Sinne genommen, wo nehmlich das Resultat jeder Operation wieder eine Zahl ist, denkt man sich eine Zahl blos so oder so entstanden, in dieser oder jener Beziehung zu andern gestellt, bald als Summe, bald als Product, bald als Potenz, bald als Differenz, bald als Quotient, bald als Wurzel, bald als Logarithmus. Diese so und so geformten Zahlen kann man nun nach denselben Operationsbegriffen wieder zu neuen Summen, Differenzen, Producten rc. von Summen, Differenzen verbinden, oder in Summen, Differenzen rc. von Quotienten, oder Differenzen rc. umformen, so jedoch, daß jede neue Verbindung, jedes neue Element wieder eine Zahl im gewöhnlichen Sinne vorstelle. Bei dem Geschäfte dieser Verbindung und Umformung von ungeformten oder schon geformt gedachten Zahlen würde man sich aber in der Anwendung der indirecten Operationen gar bald beschränkt und aufgehalten sehen. Ja bei dem Gebrauch von allgemeinen, unbestimmten Zahlen, über deren gegenseitiges Größenverhältniß vorher keine Voraussetzungen gemacht worden sind, würde die Anwendung dieser Operationsbegriffe gleich von vornherein abgewiesen werden müssen, da man nicht weiß, ob $(a-b)$, $\frac{a}{b}$, $\sqrt[n]{a}$, $\overset{b}{\log}\, a$ noch eine Zahl vorstellen oder nicht. Um also z. B. durch $\frac{a}{b}$ nicht aufgehalten zu werden, geht man, wie das im Vorigen gezeigt worden ist, von dem besondern Falle, wo der Divisor in den Dividend aufgeht, aus, und denkt sich alle Zahlen in Quotienform gebracht, sucht die Definitionen der Gleichheit, Ungleichheit, Addition, Subtraction rc. so geformter Zahlen in der Weise umzuändern, daß dabei gar nicht mehr an die Voraussetzung, alle diese Quotienten stellen Zahlen vor, gedacht zu werden braucht, und man der Einschränkung, daß bei $\frac{a}{b}$ die Zahl b in a aufgehen müsse, überhoben ist, vielmehr mit dem Symbol $\frac{a}{b}$

gerade so fortoperiren kann, als wenn $\frac{a}{b}$ noch wie früher nur eine Zahl, nehmlich ein Glied der natürlichen Zahlenreihe bezeichnete. Anstatt mit Zahlen haben wir es also in der Folge nur mit Symbolen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, die allerdings in manchen Fällen Zahlen darstellen, es nur nicht immer brauchen, zu thun, mit welchen wir aber gerade so operiren dürfen, als stellten sie noch immer wirkliche Zahlen in Quotientenform dar. So wie die Division den durch keine Zahl zu ersetzenden allgemeinen Quotienten hervorrief, so führte die Subtraction die allgemeine Differenz als neues, auf keine frühere Zahlverknüpfung zurückführbares, selbstständiges Symbol in die Arithmetik ein. Indem wir zu den übrigen indirecten Operationen fortgiengen, entstanden, wie früher, die allgemeinen Quotienten, Differenzen (speziell die Null, die positiven und negativen Ausdrücke, das unendlich werthige $\frac{0}{0}$, das nicht weiter zu gebrauchende $\frac{a}{0}$) hier die andern selbstständigen Symbole: die irrationalen Wurzeln, die imaginären Ausdrücke, und es ist somit erwiesen, daß alle diese verschiedene Symbole aus demselben Bedürfniß entsprungen, und nach demselben Verallgemeinerungssystem gebildet und gesetzlich verknüpft sind.