Ueber die Behandlung der analytischen Geometrie an Mittelschulen.

Von Dr. Rudolf Sonndorfer.

Als im Jahre 1637 zu Leyden der berühmte Geometer Descartes seine Anwendung der Algebra auf die Theorie der Kurven veröffentlichte, begann für die Geometrie eine neue Glanzepoche. Dieser Geometer gab dadurch, daß er die Algebra mit der Geometrie in Verbindung brachte, dieser letzteren eine wesentlich neue Gestalt; er räumte die bis dahin der alten Geometrie noch anhängigen Hindernisse aus dem Wege und gab derselben eine Allgemeinheit, welche sie von der Geometrie der Alten gänzlich unterschied. Fermat, Roberval und De Beaune waren die ersten, welche den Geist derselben erfaßten und dieselbe weiter ausbildeten. Es ist hier nicht der Ort, die rapiden Fortschritte derselben weiter zu verfolgen; es genüge zu erwähnen, daß sich dieselbe seit jener Zeit zu einer Höhe in ihrer Theorie als Anwendung sowohl emporgeschwungen hat, welche mit ihrer ursprünglichen kaum mehr zu vergleichen ist.

Diese Geometrie des Descartes oder die sogenannte analytische Geometrie ist entschieden nicht nur eines der interessantesten, sondern auch der wichtigsten Kapitel der ganzen Mathematik. Nicht nur, z. B. die schönen Untersuchungen über die Krümmung der Flächen mittelst Anwendung der Differenzialrechnung sind anziehend, auch die einfachen, elementaren Grundlehren zeigen bereits von dem tiefen, eigenthümlichen Geiste, der derselben inne wohnt. Gerade dieser Theil der analytischen Geometrie, welcher noch in die Mittelschule gehört, ist besonders geeignet dem jugendlichen Geiste Lust und Liebe für diese Wissenschaft einzuprägen, ihn zu wecken und zu schärfen — gerade dieser ist es, welcher durch geschickte Vermittlung des Lehrers es möglich macht, den Schüler auf das Gebiet der Selbsterfindung hinzuführen, ihm eine der schönsten Anwendungen der Algebra kennen lernen zu lassen, und in ihm dadurch die Ueberzeugung wachzurufen, daß er seine wenigen algebraischen Kenntnisse bereits verwerten könne — ein Argument, welches bei dem jugendlichen Geiste nie vernachlässigt werden darf. Soll aber die elementare analytische Geometrie diese Erfolge bei dem Anfänger erzielen, so muß sie auch ihrem Geiste entsprechend von dem Lehrer behandelt werden. Die zweckmäßigste Behandlung dieses Gegenstandes von Seite des Lehrers ist eine absolute Nothwendigkeit und es möge mir daher gestattet sein, in den folgenden Zeilen einige Winke anzudeuten, wie man allenfalls vorgehen sollte, um die bestmöglichsten Erfolge zu erzielen.

Man hört oft hie und da von Schülern der Mittelschule die höchst naive Frage aussprechen: Ja, was nützt es mir denn zu wissen, daß die Gleichung dieser oder jener Kurve so oder so heißt? Diese, vielleicht von manchem Lehrer dem oberflächlichen Wissen des Schülers nur zugeschriebene Frage ist ein bestimmter Fingerzeug, daß der betreffende Schüler den Geist der analytischen Geometrie nicht erfaßt habe, und es läßt sich mit großer Wahrscheinlichkeit behaupten, daß wenigstens in den meisten dieser Fälle nicht das oberflächliche Wissen des Schülers, sondern die nicht genügende Behandlungsweise des Gegenstandes von Seite des Lehrers daran Schuld sei. Nach meiner Meinung hat der Lehrer vorzüglich an zwei Grundsätzen festzuhalten, nämlich:

fleißiges Diskutieren und Konstruieren der betreffenden Gleichungen; hingegen mit aller Strenge zu vermeiden, dieses stereotype Ableiten der Gleichungen der einzelnen Kurven auf synthetischem Wege ohne weitere Erklärung, indem gerade dadurch dem Schüler am ersten der Gedanke eingeprägt wird: die analytische Geometrie habe eben keinen anderen Zweck als für jede Kurve die entsprechende Gleichung abzuleiten.

Der Schüler muß, soll er überhaupt einmal die analytische Geometrie anwenden lernen, eine Gleichung diskutieren können; er muß auf analytischem Wege im Stande sein zu erkennen, welches geometrische Gebilde durch diese oder jene Gleichung dargestellt wird. Der Schüler muß ferner das durch eine Gleichung repräsentirte geometrische Gebilde auch konstruktiv darstellen können; denn was nützt es ihm sonst, wenn er z. B. als Resultat irgend einer analytischen Aufgabe die Gleichung einer Parabel erhält und wenn er dann nicht im Stande ist, diese Parabel mit ihrem bestimmten Parameter und in ihrer bestimmten Lage zu konstruieren? — Ich will deßhalb die synthetische Methode nicht ganz aus dem Wege räumen. Der Lehrer wird vielleicht gut thun, sie seinen Schülern ebenfalls mitzutheilen, aber es darf neben dieser der Hauptzweck der analytischen Geometrie, das Diskutieren der Gleichungen nicht vergessen werden. Ferner soll der Schüler sobald als möglich dahin geführt werden, einfachere Aufgaben selbstständig zu lösen, und zwar Aufgaben, wo er bereits über die Wahl des Axensystems zu entscheiden hat, wo er als Resultat schon Gleichungen erhält, die er diskutieren muß, um die durch dieselbe dargestellte Kurve und deren Eigenschaften zu erkennen u. s. f. Eine weitere Nothwendigkeit ist, den Schüler so viel wie möglich mit speziellen Beispielen vertraut zu machen, denn dadurch wird er insbesondere im Konstruieren der Gleichungen eine gewisse Sicherheit erlangen.

Nach diesen kurzen Hauptbemerkungen möge es mir gestattet sein auf einige Partien der elementaren analytischen Geometrie näher einzugehen.

Gewöhnlich wird, nachdem der Begriff der analytischen Geometrie, der Zusammenhang zwischen der Algebra und Geometrie festgestellt wurde, die Transformazion der Koordinaten vorgenommen. Hier genügt es, sich auf das rechtwinkelige Axensystem zu beschränken. Nach diesem kommt nun die Ableitung der Gleichung der geraden Linie an die Reihe. Es wird nämlich in einem rechtwinkeligen Axensysteme eine gerade Linie gezeichnet und mittelst der Lehren der ebenen Trigonometrie für mehrere beliebige Punkte das Verhältnis ihrer Ordinate zur Abscisse aufgestellt; da nun dieß sonderbarerweise für alle Punkte dasselbe ist, so wird daraus der Schluß gezogen, daß dieses Verhältnis die Gleichung der geraden Linie sein müsse, indem man ja unter der Gleichung einer Kurve überhaupt nichts anderes verstehe, als jene Relazion zwischen den Koordinaten, welche uns für jeden Punkt der Kurve die zugehörigen Koordinaten gibt. Ferner schließt man: Da dieses Verhältnis oder diese Relazion eine Gleichung des ersten Grades mit zwei veränderlichen Größen ist, so muß jede Gleichung des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen uns eine gerade Linie vorstellen.

Ich glaube wohl ohne weiters voraussetzen zu dürfen, daß man mir zugeben wird, daß auf diese Art der Schüler gerade nicht den klarsten Begriff über die geometrische Bedeutung der Gleichung des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen bekömmt; er wird immer jenes Dreieck vor Augen sehen, aus welchem er dieses gewisse Verhältnis ableitete. Die freie Auffassung, die Allgemeinheit der analytischen Geometrie, einer ihrer Hauptcharaktere, wird dadurch gleich beim Beginn zerstört. Warum diskutiert man nicht die allgemeine Gleichung des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen? Ist doch dieses, bloß auf die Transformazionsformeln für das rechtwinkelige Axensystem gestützt, so schön und einfach möglich?

Vielleicht genügt folgender Versuch.

Die allgemeine Gleichung des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen hat die Form

$$Ax + By + C = o \quad . \quad . (1$$

diese läßt sich immer auf folgende Form bringen

$$y = ax + b \quad . \quad . (2.$$

Um nun zu untersuchen, welches geometrische Gebilde diese Gleichung uns darstellt, beziehen wir dieselbe auf ein neues Axensystem, welches wir so wählen, daß diese Gleichung dadurch vereinfacht wird. Gehen wir nämlich auf ein System über, dessen Axen parallel sind den Axen des ursprünglichen Systems, so haben wir, wenn m und n die Koordinaten des neuen Ursprunges bezüglich des ersten Systemes sind, und wir die allgemeinen Koordinaten im neuen Systeme mit x_1 und y_1 bezeichnen, die bekannten Transformazionsformeln

$$x = x_1 + m$$
$$y = y_1 + n.$$

Diese Werte für x und y in Gleichung (2 substituiert, erhalten wir dieselbe bezogen auf das neue System. Die Substituzion *) gibt

$$y_1 = a x_1 + a m + b - n \;.\;.\;(3.$$

Da wir aber m und n beliebig wählen können, so wollen wir dieselben so bestimmen, daß die von den Unbekannten freien Glieder verschwinden. Dieser Bedingung wird genüge geleistet, wenn wir $m = o$ und $n = b$ setzen, und Gleichung (3 geht dann über in

$$y_1 = a x_1 \;.\;.\;(4.$$

Diese Gleichung sagt uns bereits, daß die durch sie dargestellte Kurve durch den Ursprung des Systems geht, indem ihr die Koordinaten des Ursprunges $x_1 = o$ und $y_1 = o$ genüge leisten. Um aber noch weitere Eigenschaften dieser Kurve auffinden zu können, um überhaupt über den ihr eigenthümlichen Charakter etwas zu erfahren, versuchen wir dieselbe durch den Uebergang auf ein drittes Axensystem auf eine noch einfachere Form zu bringen; nur müssen wir dieses dritte System so wählen, daß es denselben Ursprung behält, indem sonst die durch die erste Transformazion erzielte Vereinfachung wieder verloren geht. Wir wollen also denselben Koordinatenanfangspunkt beibehalten, und nur den Axen eine andere Richtung geben. Bezeichnen wir somit die allgemeinen Koordinaten für dieses dritte System mit ξ und η und nennen den Winkel, welchen die Abscissenaxen des zweiten und dritten Systems mitsammen bilden, α, so haben wir die bekannten Transformazionsformeln

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha \\ y_1 &= \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

mit deren Berücksichtigung die Gleichung (4, wenn wir gleich ordnen und reduzieren, in folgende übergeht

$$(\cos\alpha + a \sin\alpha)\,\eta = (a \cos\alpha - \sin\alpha)\,\xi.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch $\cos\alpha$ und suchen η, so erhalten wir

$$\eta = \frac{a - \mathrm{tg}\,\alpha}{1 + a.\mathrm{tg}\,\alpha} . \xi \;.\;.\;(5.$$

Ehe wir nun über den Wert von α entscheiden, berücksichtigen wir, daß, a mag was immer für einen reellen Wert besitzen, wir stets einen Winkel finden können, dessen Tangente gleich a ist. Nennen wir diesen φ, so ist $a = \mathrm{tg}\,\varphi$ und Gleichung (5 geht nach einer bekannten Relazion der Goniometrie über in

$$\eta = \xi . \mathrm{tg}\,(\varphi - \alpha) \;.\;.\;(6.$$

*) Die Rechnung wird hier absichtlich im Detail durchgeführt, indem sie einen ganz elementaren Charakter trägt und eben für Schüler an Mittelschulen bestimmt ist. Die Diskussion der Gleichung des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen soll nämlich hier in jener Form gegeben werden, wie sie den Vorkenntnissen der Schüler an unseren Mittelschulen entspricht.

Setzen wir also jetzt

$$\varphi = \alpha$$

so wird wegen $\operatorname{tg}(\varphi - \alpha) = 0$

$$\eta = 0 \quad . \quad . \quad (7$$

die Gleichung unserer Kurve, bezogen auf das dritte System, und diese können wir nun diskutieren.

Gleichung (7 verlangt nämlich von jedem Punkte der durch sie repräsentirten Kurve nichts als die Eigenschaft, daß seine Ordinate gleich Null sei. Nun kommt aber diese spezielle Eigenschaft ausschließlich nur jenen Punkten zu, welche in der Abscissenaxe liegen; es genügen also nur die einzelnen Punkte der Abscissenaxe der durch die Gleichung (7 dargestellten Kurve, d. h. die Abscissenaxe ist selbst diese Kurve.

Die allgemeine Gleichung des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen ist somit der allgemeine Repräsentant der geraden Linien in der Ebene.

Obige Transformazion gibt uns aber auch zugleich Aufschluß über die Bedeutung der in der allgemeinen Gleichung vorkommenden Konstanten. Die Abscissenaxe des dritten Systemes schließt mit den unter einander parallen Abscissenaxen des ersten und zweiten Systems den Winkel φ ein, welcher uns gegeben ist durch $a = \operatorname{tg}\varphi$; der Ursprung des zweiten und dritten Systems liegt in der Ordinatenaxe des primitiven Systems von dessen Ursprung um die Größe b entfernt. Daraus geht somit hervor:

Ist die allgemeine Gleichung des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen auf die Form gebracht

$$y = ax + b$$

so bedeutet a die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Geraden mit der positiven Abscissenaxe und b den Abschnitt der Geraden auf der Ordinatenaxe.

Es ist wohl nicht nothwendig, die sich ferner aus obiger Diskussion noch ergebenden Schlüsse hier weiter zu verfolgen. Ich glaube nicht zu viel zu sagen, wenn ich behaupte, daß Anfänger auf diesem Wege wohl einen anderen Begriff über die Bedeutung der analytischen Geometrie und den ihr inne wohnenden eigenthümlichen Geiste bekommen. Meine eigene, wenn auch noch kurze Praxis im Lehrfache bestätigte dieß mir hinlänglich.

An die Diskussion der allgemeinen Gleichung des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen werden sich nun selbstverständlich jene Aufgaben anreihen, welche sich auf die gerade Linie und den Punkt beziehen. Bezüglich dieser Aufgaben sei es mir ebenfalls erlaubt, einige Bemerkungen hinzuzufügen. Die Aufgaben der analytischen Geometrie lassen sich im Allgemeinen in zwei Hauptpartien theilen. Die eine Partie enthält jene Aufgaben, wo man den Charakter der Kurve bereits kennt, und wo es sich nur darum handelt, derselben bestimmte Bedingungen anzupassen. Die andere Partie hingegen beschäftigt damit, jene Aufgaben zu lösen, welche als Resultat der Lösung eine oder mehrere Gleichungen geben, deren geometrische Bedeutung erst aufgefunden werden muß.

Die Aufgaben ersterer Art sind nun gewöhnlich das Steckenpferd für die Schule und für die Schulbücher. So werden z. B. alle hieher zählenden Aufgaben in einem bei uns, wie es scheint sehr beliebten mathematischen Lehrbuch für Mittelschulen, so mechanisch abgethan, daß man in Versuchung geräth, wen man bedauern soll: den Verfasser, der so etwas schreiben konnte, oder die Schüler, die nach diesem Buche lernen sollen. Wenn bei Aufgaben solcher Art nur darauf hingearbeitet wird, dem Schüler das Schlußresultat einzuprägen, wenn man vielleicht spezielle Zahlenbeispiele auch noch vernachläßigt, dann mag man es wohl begreiflich finden, wenn ein Schüler z. B. mit großer Zungengeläufigkeit rezitiert:

„Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch zwei Punkte geht, heißt:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1).“$$

und wenn dieser dann nicht im Stande ist zu erklären, warum eben dieß die Gleichung einer Geraden ist, welche diese Eigenschaften besitzt. So lange dem Schüler nicht begreiflich gemacht wird, daß es sich darum handelt, die in der Gleichung der zu suchenden speziellen Kurve vorkommenden Konstanten so zu bestimmen, daß sie den gestellten Bedingungen genüge leisten, und daß dieß geschieht, wenn man diese Bedingungen in die analytische Sprache kleidet, wenn man sogenannte Bedingungsgleichungen aufstellt, aus welchen man dann diese Konstanten so zu bestimmen sucht, daß sie diese Bedingungsgleichungen realisieren — so lange wird bei dem Schüler auch kein Verständnis sein, so lange wird er immer nur diese stereotypen Schlußgleichungen im Auge haben und sich bestreben, diese seinem Gedächtnisse einzuprägen. Daß aber auf diese Art der Schüler alles eher lernt als nur nicht annalytische Geometrie ist entschieden.

Anders verhält es sich mit der zweiten Partie von Aufgaben. Diese werden in unsern gewöhnlichen Lehrbüchern einfach ignorirt und in der Schule gerade auch nicht zu sehr in Anspruch genommen. Man mag mir vielleicht gleich à priori einwenden, daß hierzu nicht die nöthige Zeit vorhanden sei. Ich weiß, daß die diesem Gegenstande an unseren Oberrealschulen gegönnte Stundenzahl es nicht zuläßt, die elementare analytische Geometrie vielleicht per longum et latum durchzuarbeiten; allein dieß ist ja auch nicht nothwendig. Für den Schüler wird es genügen, wenn der Lehrer eines von diesen Beispielen vollständig durchführt; denn gerade die Aufgaben der zweiten Art sind es, mittelst welchen der Lehrer den Schüler auf das Gebiet der Selbsterfindung hinüberführen kann. Hat der Schüler an einem zweckmäßig gewählten Beispiele gesehen, auf welche Weise man solche Aufgaben behandelt, so wird sein strebsamer Geist Anhaltspunkte genug haben, um ähnliche Aufgaben zu lösen, namentlich wenn ihm vielleicht, wenigstens im Anfange, der Lehrer den Weg, welchen er zu betreten hat, leise andeutet.

So würde z. B. die vollständige Lösung der bekannten Aufgabe:

„Es ist der geometrische Ort jener Punkte zu suchen, welche von zwei gegebenen Geraden gleichen Abstand haben“ gewiß vollkommen genügen, um den Schüler in dieses Gebiet von Aufgaben einzuführen. Vielleicht ist es für den Zusammenhang dieser Bemerkungen nicht unpassend, ihre Lösung in dieser Form zu geben, wie ich sie oben auseinandersetzte.

Um diese Aufgabe zweckmäßig zu lösen, wählen wir das Axensystem so, daß die Gleichungen der beiden gegebenen Geraden die möglichst einfachste Form erhalten. Dieß ist der Fall, wenn wir eine Gerade zur Abscissenaxe nehmen, und den Durchschnittspunkt der beiden Geraden als Koordinaten Anfangspunkt. Die Gleichungen derselben sind dann

$$y = o \quad . \quad . \quad (1.$$
$$y = a\,x \quad . \quad . \quad (2.$$

Die zu suchenden Punkte sollen nun die Eigenschaft haben, daß ihre senkrechten Abstände von den beiden Geraden einander gleich sind. Nehmen wir daher einen beliebigen Punkt M mit den Koordinaten x_1 und y_1, suchen auf die bereits bekannte Weise dessen senkrechte Abstände von den zwei Geraden und setzen dann die hiefür erhaltenen Werte einander gleich, so erhalten wir jene Bedingungsgleichung, welche unsere gegebene Bedingung in analytische Worte kleidet.

Der senkrechte Abstand des Punktes M von der einen Geraden, der Abscissenaxe, ist offenbar seine Ordinate y_1. Um den senkrechten Abstand desselben von der zweiten Geraden zu finden, haben wir durch denselben eine Hülfsgerade zu legen, welche auf der Geraden (2 senkrecht steht, dann den Durchschnittspunkt dieser beiden

Geraden zu suchen und endlich die Entfernung dieser beiden Punkte zu berechnen. Die Gleichung der durch den Punkt M gehenden und auf der Geraden (2 senkrecht stehenden Geraden [1]) ist aber

$$y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1)\ .\ .\ (3.$$

Suchen wir nun die Koordinaten des Durchschnittspunktes dieser Geraden (3 mit (2 und nennen dieselben $\bar{x}$ und $\bar{y}$, so werden wir dieselben erhalten, wenn wir die Gleichungen dieser zwei Geraden als zusammengehörig betrachten und daraus die speciellen, beiden Gleichungen gleichzeitig genüge leistenden Werte von x und y bestimmen. Eine einfache Rechnung [2]) gibt

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = \dfrac{x_1 + a y_1}{1 + a^2} \\ \bar{y} = a.\left(\dfrac{x_1 + a y_1}{1 + a^2}\right) \end{array}\right\}$$

Nachdem wir jetzt die Koordinaten des Fußpunktes des von M auf die Gerade (2 gefällten Perpendikels kennen, so finden wir die Länge desselben mit Hülfe der bekannten Formel für die Distanz zweier Punkte.

$$d^2 = (\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{y} - y_1)^2$$

oder wenn wir für $\bar{x}$ und $\bar{y}$ die gefundenen Werte substituieren und gehörig reduzieren

$$d^2 = \frac{(y_1 - a x_1)^2}{1 + a^2}$$

folglich

$$d = \pm \frac{y_1 - a x_1}{\sqrt{1 + a^2}}$$

Da nun die Entfernung d gleich sein muß der Entfernung des Punktes M von der Geraden (1, also gleich seiner Ordinate y, wie wir oben gesehen haben, so erhalten wir als die gesuchte Bedingungsgleichung

$$y_1 = \pm \frac{y_1 - a x_1}{\sqrt{1 + a^2}}$$

oder daraus y_1 bestimmt

$$y_1 = \frac{a}{1 \mp \sqrt{1 + a^2}}\, x_1\ .\ .\ (4.$$

Setzen wir in dieser Gleichung für x_1 einen beliebigen Wert, so erhalten wir das zugehörige y_1. Es existieren also eine ganze Reihe von Punkten, welche unserer Bedingung Genüge leisten und der Repräsentant des geometrischen Ortes dieser Punkte muß somit Gleichung (4 sein, indem sie uns für alle diese Punkte ihre zugehörigen Koordinaten gibt. Wir haben also die geometrische Bedeutung dieser Gleichung zu erforschen.

Diese Gleichung zerfällt in Folge des doppelten Zeichens in zwei Gleichungen, wovon uns jede, wie wir auf den ersten Blick erkennen, eine gerade Linie vorstellt, die durch den Ursprung geht. Um über die Neigung

---

[1]) Die Kenntnis der Aufgaben der ersten Partie wie die Gleichung einer Geraden durch einen Punkt, die Bedingung der senkrechten Lage zweier Geraden, die Bestimmung der Koordinaten des Durchschnittspunktes u. s. f. wird hier selbstverständlich vorausgesetzt.

[2]) Beim Vortrage ist dieselbe im Detail auszuführen.

dieser 2 Geraden etwas Näheres zu erfahren, berücksichtigen wir, daß die trigonometrischen Tangenten ihrer Neigungswinkel bezüglich der x Axe Funkzionen der trigonometrischen Tangente des Neigungswinkel der zwei Geraden selbst sind. Bezeichnen wir diese beiden trigonometrischen Tangenten mit A und A_1, so ist also

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{a}{1-\sqrt{1+a^2}} \\ A_1 &= \frac{a}{1+\sqrt{1+a^2}} \end{aligned}\right\}$$

oder wenn wir für a seine Bedeutung schreiben nämlich $a = tg\,\varphi$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{tg\,\varphi}{1-\sqrt{1+tg\,\varphi^2}} \\ A_1 &= \frac{tg\,\varphi}{1+\sqrt{1+tg\,\varphi^2}} \end{aligned}\right\}$$

Diese beiden Ausdrücke gehen wegen $1 + tg\,\varphi^2 = sec\,\varphi^2 = \frac{1}{cos\,\varphi^2}$ in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{sin\,\varphi}{1-cos\,\varphi} \\ A_1 &= \frac{sin\,\varphi}{1+cos\,\varphi} \end{aligned}\right\}$$

deren Bedeutung jetzt leicht zu finden ist. Nach zwei geometrischen Formeln ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} cotg\,\tfrac{\varphi}{2} &= \frac{sin\,\varphi}{1-cos\,\varphi} \\ tg\,\tfrac{\varphi}{2} &= \frac{sin\,\varphi}{1+cos\,\varphi} \end{aligned}\right\}$$

folglich ist

$$A = -cotg\,\tfrac{\varphi}{2} = tg\left(90 + \tfrac{\varphi}{2}\right)$$

$$A_1 = tg\,\tfrac{\varphi}{2}$$

Wir erhalten somit hiedurch den höchst interessanten Aufschluß, daß diese 2 Geraden, welche uns den geometrischen Ort der gesuchten Punkte repräsentieren, auf einander senkrecht stehen, indem die Differenz ihrer Neigungswinkel mit der X Axe 90° beträgt, und daß sie die beiden sich zu 180° ergänzenden Neigungswinkel der zwei gegebenen Geraden gegenseitig halbieren. Unsere Aufgabe ist also vollständig gelöst.

Wenn ich bei der eben entwickelten Aufgabe vielleicht zu sehr ins Detail gieng, so mag dieß dadurch gerechtfertigt sein, daß ich zeigen wollte, auf welche Weise man an der Mittelschule vorgehen sollte, um so mehr, als es leider noch hie und da vorkömmt, daß man die Mittelschule zur Hochschule emporschrauben will und mit den Schülern so spricht, als wenn man auf dem Lehrstuhl einer Hochschule sitzen würde.

Ich komme nun zur allgemeinen Gleichung des zweiten Grades mit zwei veränderlichen Größen.

Die Linien der zweiten Ordnung oder die sogenannten Kegelschnittslinien werden in der Regel auf folgende Art abgethan. Man zitiert die charakteristische Eigenschaft der betreffenden Kegelschnittslinie und sucht dann, auf diese basiert, die Gleichung für diese Kurve abzuleiten. Daß man zu diesem Zwecke die speziellste Lage wählt, brauche ich wohl kaum zu erwähnen. Die Diskussion der Gleichung des zweiten Grades mit zwei veränderlichen Größen hingegen wird größtentheils übergangen. Namentlich ist dieß in den an unsern Mittelschulen in Verwendung stehenden Lehrbüchern der Fall.

Ich gebe zu, daß es kaum möglich sein dürfte, die Grenzen der analytischen Geometrie in der Mittelschule bis dorthin zu erweitern; allein ich frage dagegen: was nützt es, den Schülern die gerade nicht sehr einfachen synthetischen Ableitungen der Mittelpunkts- und Scheitelgleichungen der Kegelschnittslinien zu zeigen? Wird durch deren Kenntnis der Schüler in den Stand gesetzt, auch nur die einfachsten jener Aufgaben zu lösen, welche ihm als Resultat die Gleichung einer Kegelschnittslinie geben? Gewiß nicht. Man wird mir vielleicht einwenden, daß die Diskussion der allgemeinen Gleichung der Kegelschnittslinien zu schwierig sei. Es sei mir gestattet in Kürze einen Weg anzudeuten, dessen praktische Ausführbarkeit ich bereits theilweise erprobte.

Man leite die speziellen Gleichungen der einzelnen Kegelschnittslinien auf die bekannte synthetische Weise, aber mit möglichster Kürze ab. Ist dieß geschehen, so versuche man die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit zwei veränderlichen Größen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

auf folgende Art zu diskutieren. Ebenso wie bei der Gleichung des ersten Grades gehe man auf ein anderes Axensystem über, dessen Axen dem ursprünglichen parallel sind und bestimme m und n so, daß die Glieder der unbekannten in der ersten Potenz verschwinden. Eine einfache Rechnung gibt uns für m und n die Werte

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{2CD - EB}{B^2 - 4AC} \\ n &= \frac{2EA - DB}{B^2 - 4AC} \end{aligned}\right\}$$

Hieran knüpfe der Lehrer die Betrachtungen, unter welchen Modalitäten diese Transformazion möglich sei. Setzen wir $B^2 - 4AC \gtrless 0$ voraus, so erhalten m und n endliche Werte und die allgemeine Gleichung geht über in

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F_1 = 0.$$

Diese auf ein drittes Axensystem bezogen, dessen Ursprung derselbe, dessen Axenrichtung jedoch eine andere ist, gibt mittelst der bekannten Transformazionsformeln die neue Gleichung

$$\begin{gathered}(A\cos\alpha^2 + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin\alpha^2)\,x^2 + (A\sin\alpha^2 - B\cos\alpha\sin\alpha + E\cos\alpha^2)\,y^2 \\ + \{B(\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2) + 2(C - A)\sin\alpha\cos\alpha\}\,xy + F^1 = 0.\end{gathered}$$

Wählen wir nun α so, daß der Koeffizient von xy verschwindet, so wird

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{A - C}{B}$$

und wir erhalten als Schlußgleichung

$$Mx^2 + Ny^2 + F^1 = 0$$

Es unterliegt nun gewiß keiner Schwierigkeit, den Schülern zu zeigen, wie man aus den Konstanten A, B, C erkennt, wann diese Gleichung einen Kreis, eine Ellipse oder Hyperbel darstellt. Hier wird es auch gleich am Platze sein, das Nothwendige über das sogenannte charakteristische Binom ($B^2 - 4AC$) einzuschalten.

Dieses wird genügen, um den Schüler so weit zu bringen, daß er eine ihm bei irgend einer Aufgabe sich ergebende allgemeine Gleichung des zweiten Grades deuten könne, daß er die nöthigen Transformazionen durchführe, um die betreffende Kegelschnittslinie auch konstruktiv zu bestimmen. Der fleißige und wißbegierige Schüler wird dann mit Leichtigkeit und Sicherheit die weiteren Wege selbst verfolgen können. Bleibt dem Lehrer noch

Zeit, so dürfte es nicht unzweckmäßig sein, eine der Appollonischen Aufgaben vollständig durchzuführen oder ähnliche Aufgaben, welche als Resultat die Gleichung einer Kegelschnittslinie geben.

Durch den hier angedeutenden Weg ist aber keineswegs eine erschöpfende Diskussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades verstanden, gegen welche Anschauung ich in vorhinein Verwahrung einlegen müßte; sondern es sollte damit nur gezeigt werden, auf was man sich in dieser Richtung beschränken könnte, um doch noch genügende Resultate zu erzielen. Auf diese Weise wird es gewiß möglich sein, dem Schüler jene Kenntnisse beizubringen, welche ihn für seine künftigen technischen Studien wenigstens so vorbereiten, daß er auf nicht zu bedeutende Lücken stößt. Nach den bis jetzt bestehenden Gesetzen ist es nämlich unseren absolvierten Real- und Gymnasialschülern gestattet, gleich beim Uebertritt an die polytechnische Schule die Vorlesungen über höhere Mathematik zu hören. Es ist also für sie höchst nothwendig, in der analytischen Geometrie der Ebene sich solche Kenntnisse bereits erworben zu haben, welche sie in den Stand setzen, die höhre Geometrie auch mit Erfolg zu frequentieren. Wenn zufällig an einer unserer polytechnischen Schulen die analytische Geometrie in der Ebene von ihren Elementen an in das Bereich der Vorlesungen über höhere Mathematik gezogen wird, so ist dieß kein Grund gegen meinen Vorschlag über die Erweiterung der Grenzen der analytischen Geometrie in der Mittelschule. Ja, im Gegentheil spricht dieß für mich; denn geht man in der Mittelschule so weit, als ich früher andeutete (und dieß ist nach meiner Erfahrung möglich), so kann wenigstens in jenen Vorlesungen dann nicht gesagt werden, daß man dieß deßhalb noch in das Bereich derselben ziehen müsse, weil die Zuhörer nicht die genügenden Kenntnisse aus der Mittelschule mitbringen.

Schließlich sei noch erwähnt, daß man die Gleichung des ersten Grades zwischen drei veränderlichen Größen auf ähnliche Weise diskutieren kann, wie die zwischen zwei veränderlichen Größen. Die allgemeine Form derselben ist

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad . \; . \; (1.$$

Beziehen wir dieselbe auf ein neues Axensystem, dessen Axen parallel dem ursprünglichen sind, so geht Gleichung (1 mit Rücksicht auf die hierzu nothwendigen Transformazionsformeln

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + m \\ y = y_1 + n \\ z = z_1 + p \end{array}\right\}$$

über in

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Am + Bn + Cp + D = 0$$

Setzen wir nun $m = n = 0$ und $p = -\frac{D}{C}$, so verschwinden die von den Unbekannten freien Glieder und wir erhalten

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0 \quad . \; . \; (2.$$

Das durch diesé Gleichung dargestellte geometrische Gebilde geht also durch den Ursprung. Durch obige Bestimmung von m, n und p erhielt das neue Axensystem eine solche Lage, daß es mit dem primitiven die gemeinschaftliche Z Axe hat, und daß sein Ursprung vom Ursprung des ersten Systems im Abstande $p = -\frac{D}{C}$ liegt.

Um über Gleichung (2 noch einen näheren Aufschluß zu erzielen, gehen wir auf ein drittes Axensystem über, welches mit dem zweiten einen gemeinschaftlichen Ursprung hat, dessen xy Ebene aber mit der xy Ebene des zweiten oder respektive des ersten Systems den Winkel α bildet. Da jedoch durch diese Annahme die Lage des dritten Systems noch nicht vollkommen bestimmt ist, so wollen wir noch hinzufügen, daß die X Axe des dritten Systems mit der X Axe des zweiten Systems den Winkel φ einschließen soll.

Es wird dem Lehrer ein leichtes sein, gestützt auf die Transformazion der Koordinaten in der Ebene die Transformazionsformeln für diesen Fall abzuleiten. Sie sind folgende, wenn x' y' und z' die Koordinaten des dritten Systems bezeichnen.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\cos\alpha - z'\sin\varphi\sin\alpha \\ y_1 = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\cos\alpha + z'\cos\varphi\sin\alpha \\ z_1 = z'\cos\alpha - y'\sin\alpha \end{array}\right\}$$

Diese Werte für x_1, y_1 und z_1 in Gleichung (2 substituiert und geordnet, erhalten wir

$$\begin{aligned}(a\cos\varphi + b\sin\varphi)x' + (b\cos\alpha\cos\varphi - a\sin\varphi\cos\alpha - \sin\alpha)y' \\ + (\cos\alpha + b\sin\alpha\cos\varphi - a\sin\alpha\sin\varphi)z' = 0\ .\ .\ (3\end{aligned}$$

wenn kürze halber $\frac{A}{C} = a$ und $\frac{B}{C} = b$ gesetzt wird. Da wir nun α und φ beliebig wählen können, so bestimmen wir dieselben so, daß sie den Gleichungen genüge leisten

$$\left.\begin{array}{l} a\cos\varphi + b\sin\varphi = 0 \\ b\cos\alpha\cos\varphi - a\sin\varphi\cos\alpha - \sin\alpha = 0. \end{array}\right\}$$

Eine einfache Rechnung gibt uns daraus

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a}{b} = -\frac{A}{B}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{C}\sqrt{A^2 + B^2}$$

oder auch $\cos\alpha = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Die für $\operatorname{tg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\alpha$ erhaltenen Werte sind bestimmt, so lange nicht A und B gleichzeitig verschwinden.

Mit Rücksicht auf diese speziellen Werte von α und φ geht Gleichung (3 nun über in

$$\cos\alpha\,(1 + a^2 + b^2)z' = 0$$

oder da, wenn A, B und C von der Nulle verschieden sind, der Koeffizient von z' nicht verschwinden kann

$$z' = 0\ .\ .\ (4.$$

Diese Gleichung können wir nun diskutieren. Sie drückt die charakteriste Eigenschaft aus, daß die z Koordinate für jeden Punkt des durch sie dargestellten geometrischen Gebildes Null sein muß. Diese Eigenschaft kommt aber ausschließlich nur jenen Punkten zu, welche in der xy Ebene liegen; es genügen also nur die Punkte der xy Ebene der in Gleichung (4 gestellten Forderung. Die xy Ebene muß also selbst das durch diese Gleichung dargestellte geometrische Gebilde sein.

Die Gleichung des ersten Grades zwischen drei veränderlichen Größen repräsentirt uns somit die allgemeine Gleichung der Ebene.

Bezüglich der Bedeutung der Konstanten A, B, C und D gibt uns die Diskussion folgenden Aufschluß:

1. Ist $D = 0$, so wird $p = 0$. Die Ebene geht also durch den Ursprung.
2. Der Neigungswinkel der Ebene mit der xy Ebene ist gegeben durch die Formel

$$\cos\alpha = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3. Wird $C = 0$, so ist $\alpha = 90^{0}$, die Ebene steht also senkrecht auf der Horizontalebene und ihre Gleichung heißt

$$Ax + By + D = 0.$$

4. Wird $A = B = 0$, so ist $\alpha = 0$ und die Ebene wird parallel zur xy Ebene. Ihre Gleichung ist

$$Cz + D = 0.$$

5. Der Neigungswinkel, welchen die Schnittlinie der Ebene und der xy Ebene mit der X Axe bildet, ist gegeben durch die Formel $tg \varphi = -\frac{A}{B}$. Wird nun $A = 0$, so ist $\varphi = 0$, die Schnittlinie also parallel zur X Axe und die Ebene steht senkrecht auf der yz Ebene. Ihre Gleichung ist

$$By + Cz + D = 0 \text{ u. s. f.}$$

Auf diese Weise lassen sich direkt, ohne Zuhilfenahme von Lehrsätzen aus der Stereometrie, alle speziellen Lagen der Ebene ableiten. Es ist uns ferner hier durch diese Diskussion direkt die Formel für den Neigungswinkel der Ebene mit der xy Ebene gegeben, und es unterliegt keiner besonderen Schwierigkeit, auch die Formel für den Neigungswinkel zweier Ebenen auf diesem Wege direkt abzuleiten.

Die Diskussion der Gleichung des ersten Grades zwischen drei veränderlichen Größen zeigt uns also abermals die großen Vortheile des analytischen Weges. Ob Schüler einer Mittelschule, ob Hörer an einer polytechnischen Schule — beide werden durch obige Diskussion einen andern Begriff über die Bedeutung der allgemeinen Gleichung des ersten Grades zwischen drei veränderlichen Größen bekommen. Ich kann noch zugeben, wenn man die Gleichung der Ebene ableitet, indem man ihr Entstehungsgesetz zu Grunde legt, nämlich: Die Ebene entsteht, wenn sich eine Gerade, parallel zu sich selbst bleibend, an einer zweiten Geraden so fortbewegt, daß sie stets einen Punkt mit ihr gemein hat. Wie man aber heut zu Tage bei diesen imensen Fortschritten dieser Wissenschaft die Gleichung der Ebene noch ableiten kann, indem man sagt: „Die Ebene besitzt die Eigenschaft, daß alle ihre Punkte von den Endpunkten einer Geraden, durch deren Mitte sie geht und auf welcher sie perpenticulär steht, gleich weit abstehen“ und nun mittelst der Formel für die Distanz zweier Punkte die Entfernungen bestimmt u. s. f. — dieß heißt denn doch die Fortschritte der Wissenschaft gänzlich ignorieren, namentlich wenn man es nicht mehr mit Schülern einer Mittelschule, sondern mit Schülern einer Hochschule zu thun hat.

Möge diese kurze Skizze über die Behandlung der analytischen Geometrie geeignet sein bei meinen Herren Fachcollegen eine weitere Besprechung dieser so wichtigen Frage „über die Behandlung des mathematischen Unterrichtes an Mittelschulen“ zu veranlassen.
