Über die Namen der Algebra *).

Von Dr. Josef Krist.

Es ist eine in der Geschichte der Wissenschaften nicht selten wiederkehrende Thatsache, daß die Benennungen, welche den einzelnen wissenschaftlichen Disziplinen bei deren Entstehung beigelegt wurden, im Laufe der Zeit Aenderungen erleiden, welche entweder in einer Modifikation des Begriffes, der mit dem Namen ursprünglich verbunden war, oder in der Ersetzung des ersten Namens durch einen ganz neuen bestehen. Diese Thatsache hat ihren Grund nicht nur in der fortschreitenden Entwicklung der Wissenschaften, sondern auch in dem Gesichtspunkte, von welchem aus die einzelnen Bearbeiter eines Wissenszweiges diesen auffassen. In Folge des ersten Umstandes erfährt eine Wissenschaft oft derartige Erweiterungen, daß ihr Lehrinbegriff unter ihre anfängliche Benennung nicht mehr subsumirt werden kann; der zweite Umstand äußert sich hingegen darin, daß der eine Autor dieses, der andere jenes Moment als das charakteristischere Merkmal seiner Wissenschaft ansieht und diese darnach benamset. Wenn irgend einmal, so mußte der letztere Umstand vorzugsweise in jenen Zeiten nach der erwähnten Seite hin maßgebend wirken, wo die Gelehrten ihr Wissen auf wenige, oft noch verstümmelte Manuscripte basiren und des gedruckten Wortes, sowie anderer die Communikation erleichternden Mittel entbehrend nicht in einem so innigen Wechselverkehr treten konnten, wie er bereits zu Newton's und Leibnitz's Zeiten zu Tage tritt, und wie er namentlich in der neuesten Zeit mehr und mehr sich entfaltet hat. Es darf uns daher ebenso wenig befremden, wenn ein und dieselbe Wissenschaft in derselben Epoche verschiedene Namen trägt, als es uns nicht überrascht, wenn sie in ihren einzelnen Entwicklungsstadien die Benennung wechselt.

Um Belege für das Gesagte zu finden, braucht man gar nicht lange zu suchen. Die Griechen erhielten z. B. ihre ersten geometrischen Kenntnisse von den Aegyptern, und weil diese Kenntnisse nur in einigen Regeln bestanden, welche zur Wiederauffindung der durch die Nilüberschwemmungen verwischten Grenzen der Felder, also zur Ausmessung von Erdflächen dienten, so nannten die Griechen nach dem Vorgange ihrer Lehrer den Inbegriff dieser Regeln Geometrie, ein Wort, welches nach seiner griechischen Etymologie Maß der Erde bedeutet **). Diese streng etymologische Bedeutung konnte offenbar nicht mehr genügen, nachdem von den Griechen die ersten Schritte zu einer wissenschaftlichen Ausbildung der Geometrie gemacht worden waren, und nachdem von ihnen nebst dem Maße auch die Gestalt in den Bereich der geometrischen Betrachtung gezogen worden war. Obgleich schon Plato das Wort Geometrie als Benennung der besagten Wissenschaft „lächerlich" fand, so wurde

*) Benützt wurden hierbei die Werke über Geschichte der Mathematik von Nesselmann, Libri, Montucla, Chasles, Kästner, Arneth und die Werke älterer Mathematiker, soweit selbe mir zu Gebote standen.

**) Schon Herodot berichtet, daß die Geometrie ihren Ursprung den Nilüberschwemmungen verdankt. Die gleiche Erklärung über Ursprung und Namen der Geometrie gibt auch Reisch im VI. Buche seiner Margarita philosophica, eines in Dialogform abgefaßten Sammelwerkes, das zuerst 1486 zu Heidelberg, und später in Straßburg, Basel und Freiburg wiederholt gedruckt wurde.

dasselbe trotzdem beibehalten; es wurde jedoch der damit verbundene Begriff allmälig dahin abgeändert, daß man den in dem Worte Geometrie enthaltenen Begriff Erde durch den weiteren Ausdehnung ersetzte, und jenen der Gestalt noch hineinzog. Ungeachtet die Römer in den mathematischen Dingen, wie überhaupt in den wissenschaftlichen Leistungen den Griechen weit nachstehen, so scheinen sie doch die ersten gewesen zu sein, welche die Geometrie in dem eben angedeuteten Sinne definirten. Wenigstens gibt Boëthius folgende Definition: „Geometria est disciplina magnitudinis immobilis, formarumque descriptio contemplativa, per quam uniuscujusque rei termini declarari solent", d. h. die Geometrie ist die Lehre über die unbewegliche Größe (im Gegensatze zu den beweglichen Größen, den Weltkörpern, welche Gegenstand der Astronomie waren) und die veranschaulichende Beschreibung der Formen, durch welche die Grenzen irgend eines Gegenstandes bestimmt zu werden pflegen. Diese Definition findet sich in Reisch's Margarita philosophica wieder, nur mit dem Zusatze: „seu est disciplina magnitudinis et figurae, quae eam magnitudinem contemplatur" (oder ist die Lehre von der Größe und Figur, welche diese Größe veranschaulicht), und sie ist wahrscheinlich im Mittelalter allgemein gebräuchlich gewesen, denn die Geometrie des Boëthius ist eine der Hauptquellen, aus welchen die Mathematiker des Mittelalters ihre Kenntnisse entnommen haben. Diese Definition wurde übrigens wieder fallen gelassen, und erst neuere Geometer kamen abermals darauf zurück, indem sie die Geometrie als die Wissenschaft von den Eigenschaften der figurirten Ausdehnung erklärten.

Ein Beispiel von Namenswechselung liefert die Geschichte des Rechnens. Bei den Griechen, hauptsächlich aber bei den Römern war bekanntlich zur Ausführung von Rechnungen eine mit Schnüren bespannte Tafel im Gebrauche, welche ἄβαξ oder Abacus genannt wurde. Später, so von Boëthius wurde dieser Name auf die bei der Columnenarithmetik anzuwendende Tafel übertragen und nachfolgende Schriftsteller, z. B. Gerbert in seinem Werke „de numerorum divisione" verstanden unter abacus die auf dem Columnensystem beruhende Rechnungsmethode selbst. Im 12. Jahrhunderte tauchte zur Bezeichnung der Arithmetik der Name Algorismus oder auch Algoritmus *) auf; so in der „Ysagoge alchorismi in artem astronomicam a magistro judaeo ispano, qui dicitur Savosarda" (1134) und in einem Werke von Johannes Hispalensis, dessen Abfassung Chasles in das Jahr 1171 versetzt. Beim Beginne des 13. Jahrhunderts wandte Fibonacci das Wort Abacus zur Bezeichnung der von ihm ins christliche Europa eingeführten indischen Positionsarithmetik an und nannte hingegen das Columnensystem Algoritmus des Pythagoras, welche Benennungsweise sich aber bald wieder umkehrte. Die in Versen geschriebene Abhandlung des Sacro Bosco (1232) über das Rechnen nach

---

*) Das Wort ἄβαξ und das davon abgeleitete abacus sind nach den mir zu Gebote stehenden Quellen etymologisch noch nicht erklärt. Lucas Paccioli glaubte fälschlich, daß abacus das verstümmelte arabicus sei, quod ab Arabibus et rem et nomen habuerimus. Weil ἄβαξ bei den Griechen auch ein Brett mit erhabenem Rande hieß, welches mit Staub oder feinem Sande bestreut, zum Aufzeichnen geometrischer Figuren diente, und weil diese Vorrichtung vielleicht aus Asien nach Griechenland gebracht wurde, so könnte man mit Nesselmann vermuthen, daß diesem Worte das semitische abak, Staub, zu Grunde liege. Was den Ursprung des Wortes Algorismus oder wie es am öftesten vorkommt, Algoritmus betrifft, so sei bemerkt, daß derselbe schon in früher Zeit in Vergessenheit gerathen sein mag. In dem von Jodocus Chlichtovaeus 1503 herausgegebenen Manuscripte: „Opusculum de praxi numerorum, quod algorismum vocant" aus dem 13. Jahrhundert und in einigen anderen alten Manuscripten wird das Wort Algoritmus von dem Namen des Philosophen Algus hergeleitet; während Schoner in einer von ihm 1599 besorgten Ausgabe des Algoritmus demonstratus dieses Wort auf den arabischen Artikel al und das griechische ἀριθμός zurückführt, welcher Ansicht auch Nesselmann beipflichtet. Der Orientalist Reinaud hingegen nimmt an, daß es herstamme von dem Namen des arabischen Mathematikers Mohammed ben Musa, der im Anfange des 9. Jahrhunderts lebte und den Beinamen Al-Kharizmij oder der Kharizmier nach seinem Vaterlande Kharizm führte. Neuere Forschungen von Buoncampagni, welche sich auf ein Manuscript der Universitätsbibliothek zu Cambridge stützen, haben die Vermuthung Reinaud's vollkommen bestätigt und zugleich auch die bisher dunkel gebliebene Schreibweise Algorismus vollkommen erklärt.

dem indisch-arabischen Systeme führt z. B. den Titel: „Tractatus algoritmi“ und eine andere Schrift aus demselben Jahrhundert und über denselben Gegenstand ist betitelt: „Opusculum de praxi numerorum, quod algorismum vocant.“ In demselben Sinne wird das Wort Algoritmus gebraucht von dem Wiener Mathematiker Georg Purbach (1423—1461), wogegen in der Margarita philosophica nicht nur das Rechnen mit Brüchen, sondern auch das Rechnen mit Rechenpfennigen auf Linien Algoritmus genannt wird. Stifel nimmt das letztere Wort in einem viel weiteren Sinne; denn er sagt im 5. Capitel von Rudolf's Coß (Königsberg 1553): „der Algoritmus in ganzen cossischen Zahlen in sich schließt drei Algoritmos. Erstlich den gemeinen Algoritmum von gemeinen Zahlen, zum andern den Algoritmum von cossischen Zeichen, zum dritten den Algoritmum dieser zweien Zeichen + und —.“

Von besonderem Interesse ist es, die verschiedenen Namen desjenigen Theiles der Mathematik zu verfolgen, welcher die Methoden darstellt, vermöge derer eine beliebige Anzahl von Unbekannten aus dem zugehörigen Systeme von Bestimmungsgleichungen gefunden wird; denn die dießbezüglichen Benennungen haben sehr stark variirt und sogar in der neuesten Zeit hat man sich darüber nicht vollständig einigen können. Gegenwärtig wird der besagte Theil der Mathematik fast allgemein Algebra genannt, und in diesem Sinne ist auch in dem Folgenden dieses Wort zu nehmen. Weil jedoch in der Algebra allgemeine Zahlzeichen zur Anwendung kommen, um ihren Lösungen die größtmögliche Allgemeinheit zu geben, so wird dieselbe heute noch als ein Theil der Buchstabenrechnung, ja selbst als gleichbedeutend mit dieser angesehen. Diese Annahme steht aber in vollem Widerspruche mit der Entwicklungsgeschichte der Mathematik, aus der man entnehmen kann, daß, ehe noch die Buchstabenrechnung durch F. Vieta (geb. 1540 zu Fontenai in Poitou, gest. 1603) erfunden worden war, schon Jahrhunderte lang Gleichungen aufgelöst, d. i. Algebra geübt worden ist, und daß bei den Arabern, welchen wir sowohl den Namen Algebra, als auch die ersten Kenntnisse in diesem Wissenszweige verdanken, diese Benennung eben nur auf die Auflösung von Gleichungen sich bezogen hat.

Um die richtige Erklärung der Bedeutung des Wortes Algebra geben zu können, müssen einige Notizen vorausgeschickt werden über die Art und Weise wie die Gleichungen von den arabischen Mathematikern eingetheilt wurden. Die Araber unterschieden die Gleichungen nicht nach den Potenzen der Unbekannten, sondern wie dieß auch Diophant thut, nach der Anzahl der Glieder, welche in der auf die einfachste Form gebrachten Gleichung übrig bleiben. Schon der älteste der uns bekannten arabischen Algebraisten, Mohammed ben Musa Alkharezmi aus dem 9. Jahrhundert unterscheidet zwischen einfachen und zusammengesetzten Gleichungen, welchem Vorgange auch die späteren Italiener, z. B. Leonardo Fibonacci (13. Jahrh.) folgen. Zu den einfachen Gleichungen zählt Mohammed ben Musa nach einer lateinischen Uebersetzung seines Werkes *), welche den Titel trägt: „Liber Maumeti filii Moysi alchorismi de algebra et almuchabala incipit“, folgende drei Gleichungsformen: $x^2 = bx$, $x^2 = b$, $ax = b$, wobei ich hier Kürze halber unsere jetzige Schreibweise angewendet habe. Was hier mit x bezeichnet ist, wird dort radix (Wurzel) genannt, während x^2 census (was mit Quadrat übersetzt werden soll) und das von x freie Glied numerus (Zahl) heißt. Zu den zusammengesetzten Gleichungen werden gezählt: $x^2 + ax = b$, $x^2 + b = ax$, $ax + b = x^2$ (unter a und b positive Zahlen verstanden), oder wie diese in dem erwähnten Manuscripte lauten: „das Quadrat und die Wurzeln sind gleich der Zahl; das Quadrat und die Zahl sind gleich den Wurzeln; die Wurzeln und die Zahl sind gleich dem Quadrate.“ Mohammed ben Musa unterscheidet demnach sechs Normalformen der Gleichungen, welche in dem Manuscripte capitula genannt werden. Jedem capitulum läßt er ein Zahlenbeispiel folgen und zeigt daran die Regel zur Auflösung; die Richtigkeit der Regeln wird mit Hilfe geometrischer Betrachtungen erwiesen. Man sieht aus dem Gesagten, daß von den Arabern die Gleichungsform

*) Diese Uebersetzung, welche sich unter den Manuscripten der kaiserl. Bibliothek in Paris befindet, theilt Libri in seiner histoire des sciences mathématiques I. Bd., XII. Note, Seite 235 mit.

$x^2 + ax + b = 0$ ganz außer Acht gelassen worden ist. Diese Thatsache erklärt sich leicht aus dem Umstande, daß den Indern, Griechen und Arabern und auch den nachfolgenden Italienern der allgemeine Begriff Gleichung, wie wir ihn heutzutage auffassen, fremd war, indem sie nur Gleichheiten zweier wesentlich positiven Größen kannten. Es ist nämlich den alten Mathematikern die Bedeutung der negativen Größen und somit auch jene der negativen Wurzeln nicht klar geworden, weshalb von ihnen die negativen Wurzelformen als unzulässig oder als unmöglich angesehen worden sind. Mohammed ben Musa läßt daher die Wurzelformen unberücksichtigt, welche auf ein negatives Resultat führen und nur beim zweiten capitulum ($x^2 + b = ax$) zieht er beide Wurzelausdrücke in Betracht und sagt darüber: „Wenn also eine Frage auf dieses capitulum führt, kann es geschehen, daß du das Resultat derselben durch die Addition (also in unseren Zeichen durch $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$) findest, und wenn dieß nicht der Fall wäre, wird es zweifellos mit der Subtraction (d. i. durch $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$) möglich sein. Dieses eine der drei capitula, in welchen die Halbirung der Wurzeln (dieß will sagen die Halbirung des Koeffizienten von x) nothwendig ist, kann durch Addition und Subtraktion aufgelöst werden" *). Es darf uns diese beschränkte Auffassung nicht wundern, denn erst im 17. Jahrhunderte hat sich die richtige Ansicht über den Sinn der negativen Wurzeln Bahn gebrochen, und noch Harriot (1560—1631), dem wir doch die Reduktion der Gleichungen auf Null verdanken, überging seinen Vorgängern analog die Gleichung mit zwei negativen Wurzeln, welche wahrscheinlich Descartes (1596—1650) zuerst in Untersuchung zog.

Für das Verständniß des Nachfolgenden dürfte es ferner nicht überflüssig sein, an das Gesagte noch einige Mittheilungen zu knüpfen über die Entwicklungsstufen der formellen Darstellung der algebraischen Operationen. Es lassen sich drei solche Stufen unterscheiden, welche Nesselmann durch die Namen rhetorische, synkopirte und symbolische Algebra kennzeichnet. Die rhetorische Algebra ist durch den gänzlichen Mangel aller abkürzenden Zeichen, die Zahlzeichen ausgenommen, charakterisirt; in ihr wird die ganze Rechnung in Worten geführt. Diese Phase wird repräsentirt durch die arabischen und persischen und die älteren italienischen Algebraisten; selbst Regiomontanus gehört noch hieher. Die Araber sind in der Durchführung der Wortrechnung so consequent, daß sie sogar die gegebenen Zahlen wörtlich ausdrücken, worin ihnen aber ihre italienischen Schüler nicht folgen. Die Unbekannte (unser x) heißt bei den Arabern schai (res, Ding, das cosa der Italiener) und die zweite Potenz der Unbekannten wird mâl (posessio, opes, Besitz, Reichthum) genannt, welches Wort von den Italienern mit census, censo übersetzt wurde. Das von x freie Glied hat den Namen ádad (numerus, Zahl) oder auch ádad mufrad (numerus separatus, abgesonderte Zahl), anstatt dessen die Italiener numero oder il noto anwendeten. Wo wir sagen würden: setze für die Unbekannte x, heißt es z. B. in dem oben zitirten Manuscripte: setze für die Unbekannte „das Ding" (rem). In der zweiten Phase oder in der synkopirten Algebra treten schon einzelne, regelmäßig wiederkehrende Abkürzungen auf, welche zur Bezeichnung gewisser Begriffe und Operationen dienen; in diese Phase fallen Diophant, die späteren europäischen Algebraisten bis gegen die Mitte des 17. Jahrhunderts. Um ein Beispiel für diese Stufe zu geben, wählen wir das 189. Exempel aus Rudolf's Coß *) Fol. 308. Stifel hatte bereits eine ziemlich allgemeine Bezeichnung, welche sich der unsrigen schon sehr nähert Die unbekannte Größe bezeichnet er mit $\mathcal{X}$. Dieß Zeichen dürfte aus dem Anfangsbuchstaben von radix entstanden sein, und wahrscheinlich kommt von demselben der heutige Gebrauch des x. In Rudolfs Coß Fol. 59 sagt

*) Hieran schließt Mohammed ben Musa auch noch die Bemerkung, daß die Frage unmöglich ist, wenn $\frac{1}{4} a^2 < b$, und daß $x = \frac{1}{2} a$, wenn $\frac{1}{4} a^2 = b$ ist.

**) Die Coß Christoffs Rudolf's mit schönen Exempeln der Coß durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehret. Zu Königsperg in Preussen gedrückt durch Alexandrum Lutomyslensem im jar 1553.

Stifel: „So wirt nu die Radix jn einer yeden Geometrischen progreß verzeychnet mit einem R., also $\varkappa$. Heyset Radix vnd bedeut 1 $\varkappa$ ein yede erste zal nach der vnitet jn einer yeden progreß"). Enthält eine Aufgabe mehrere Unbekannte, so bezeichnet Stifel dieselben mit den Buchstaben A, B, C u. s. w. Die Zeichen + und —, deren erste Benützung man bisher demselben Mathematiker zuschrieb, dürften schon vor ihm üblich gewesen sein; denn Gerhardt sagt in seiner Abhandlung: „Die Abgebra in Italien seit Fibonacci" (Grunert's Archiv Bd. III, S. 291): „Drobisch hat in einem alten Rechenbuche des Johann Wiedemann von Eger vom Jahre 1489 die Zeichen + und — schon gefunden". Das Exempel lautet: „Gib zwo zalen also. Wenn ich von der ersten subtrahir 12 gibs der andern und vom collect subtrahir sein $\frac{1}{3}$. Gib dasselbig dem rest der andern das mir so vil komme auf diser seiten, als mir blib auf der andern seiten. Und das $\frac{1}{5}$ der ersten zal so gefunden soll werden, sei so vil als $\frac{1}{11}$ der andern zal. ist die frag. Wie groß jede sei.

Facit die erst 1 $\varkappa$. die ander 1 A.

Machs nach der Aufgab also.

12 von 1 $\varkappa$ zu 1 A. facit 1 $\varkappa$ — 12 und 1 A + 12. Nu $\frac{1}{3}$ von 1 A + 12. ist $\frac{1\,A + 12}{3}$ subtrahir es von 1 A + 12 und addir es zu 1 $\varkappa$ — 12. so bleibt auf einer seiten $\frac{2\,A + 24}{3}$ auf der andern seiten wird $\frac{3\varkappa - 24 + 1\,A}{3}$. Drumb sind 3 $\varkappa$ — 24 + 1 A gleich 2 A + 24. facit 1 A. 3 $\varkappa$ — 48.

Und stehn die zalen jetzt also
die erste 1 $\varkappa$
die ander 3 $\varkappa$ — 48.

So spricht nun die aufgab weiter.

Das $\frac{1}{5}$ der ersten zal soll so vil sein als $\frac{1}{11}$ der andern zal. drumb ist jetzt $\frac{1}{5}\varkappa$ gleich $\frac{3\varkappa - 48}{11}$ facit 1 $\varkappa$ 60.

Ist die erste zal 60.
die ander 132."

Zur dritten Stufe, d. i. zur symbolischen Algebra, legte bei den Eropäern vorzugsweise F. Vieta den Grund; in derselben wird alles durch bestimmte Zeichen ausgedrückt, so daß vollständige Worte höchstens nur dazu benützt werden, einzelne Formeln miteinander zu verbinden oder eine auf die andere zu beziehen. Die symbolische Algebra war bei den Indern schon durch Jahrhunderte im Gebrauche, ehe zu derselben in Europa der Grund gelegt wurde. Die Inder bezeichneten z. B. die Unbekannte durch die Anfangsbuchstaben ya des Wortes yavat-tavat (so viel als oder so groß als), denen sie den Koeffizienten folgen ließen, wobei der Koeffizient 1 niemals wegblieb. ya 5 ist also unser 5 x. Eine bekannte Zahl machten sie durch die vorgesetzte Silbe ru (von rupa, die bestimmte Zahl) ersichtlich; die zu addirenden Größen stellten sie einfach nebeneinander; zur Bezeichnung der Subtraktion setzten sie oberhalb der Zahl des Subtrahends einen Punkt. Es ist demnach unser 5 x + 8 nach der indischen Schreibweise ya 5 ru 8; unser 5 x — 8 wäre darnach ya 5 ru $\dot{8}$ zu schreiben. Die Inder hatten auch eigene Zeichen für die Multiplikation, für irrationale Größen, für die Bezeichnung der Potenzen der Unbekannten; sie benützten ferner die Namen der Farben zur Bezeichnung der verschiedenen Unbekannten, wenn mehrere solche in einer Aufgabe vorkamen. Ein eigenes Gleichheitszeichen besaßen die indischen Mathematiker nicht, sie schrieben vielmehr die Theile untereinander, so daß z. B. $\begin{matrix}\text{ya}\,7\ \text{ru}\,\dot{8}\\ \text{ya}\,4\ \text{ru}\,3\end{matrix}$ dasselbe bedeutet was bei uns durch $7x - 8 = 4x + 3$ vorgestellt wird. Es ist bemerkenswerth, daß das Gleichheitszeichen so spät in die Rechnung eingeführt wurde. Decartes benützte als solches zuerst das Zeichen ∞, wofür Wallis (1616—1703) das jetzt gebräuchliche $=$ anwendete.

Nach diesen Vorbemerkungen kehren wir zu der Erklärung des Wortes Algebra zurück. Hatte ein arabischer Mathematiker eine Aufgabe in Form einer Gleichung ausgedrückt, so war es sein nächstes Geschäft etwa die vorkommenden negativen Größen aus der Gleichung dadurch wegzuschaffen, daß er die gleichen Größen beiderseits hinzuaddirte. Diese Operation wurde von den Arabern jebr oder aljebr (j = dsch) Herstellung oder Ergänzung (restauratio) genannt *). In diesem Sinne wurde das Wort jebr schon von Fibonacci und Lucas di Borgo (Paccioli) in seiner Summa de Arithmetica etc. 1494 aufgefaßt und zugleich mit restauratio übersetzt. Hat die Gleichung auf diese Art beiderseits nur positive Glieder erhalten, so wurden dann die beiden Seiten verglichen und das, was sich etwa aufheben läßt, durch Subtraktion fortgeschafft. Diese dem jebr folgende Operation hieß mukâbalah, Vergleichung, welches Fibonacci mit approportio, proportio, oppositio **) übersetzt, während Lucas di Borgo nur oppositio gebraucht. Hat in der so resultirenden Gleichung x^2 einen Koeffizienten, so wird derselbe durch die Division beseitigt, für welche Operation mit Bezug auf die Gleichungen jedoch kein besonderer Name existirt zu haben scheint. Nach Vornahme all dieser Geschäfte hat die Gleichung eine der oben erwähnten sechs Normalformen, auf welche behufs ihrer Auflösung nachher die speziell für sie geltende Regel angewendet wurde.

Zur Erläuterung des eben Gesagten mögen zwei Beispiele dienen, welche der bereits erwähnten Uebersetzung der Algebra des Mohammed ben-Musa nach Libri's Publikation entnommen sind. Damit dieselben die Form der rhetorischen Algebra möglichst genau repräsentiren, will ich mich strenge an den mir vorliegenden Text halten. Die erste Aufgabe (Libri I. Bd., S. 274) lautet folgendermaßen: „Du würdest sagen, theile zehn in zwei Theile und multiplizire einen der zwei Theile in den andern; nachher multiplizire einen derselben in sich und dieses Produkt soll gleich sein dem vierfachen Produkte eines der zwei Theile in den andern. Die Regel dieser Frage aber ist, daß du für einen der zwei Theile Ding (rem) und für den andern Theil zehn vermindert um das Ding setzest. Multiplizire also das Ding in zehn vermindert um das Ding, und es werden zehn Dinge mit Hinwegnahme des Quadrates hervorgehen. Hernach multiplizire das Ganze mit vier wie du gesagt hast. Es wird also das, was herauskommt, das Vierfache des Produktes eines der zwei Theile in den andern sein; es werden nämlich vierzig Dinge vermindert um vier Quadrate sein. Sodann multiplizire das Ding mit dem Dinge, d. i. einen der zwei Theile in sich und es wird das Quadrat sein, welches vierzig Dingen vermindert um vier Quadrate gleich ist; nachher ergänze (jebr) vierzig durch vier Quadrate. Nach diesem gib die Quadrate dem Quadrate hinzu und es werden vierzig Dinge fünf Quadraten gleich sein. Also wird ein Quadrat acht Wurzeln gleich sein und jenes ist vierundsechzig. Die Wurzel von vierundsechzig ist demnach einer der zwei Theile, welcher in sich multiplizirt worden ist, und der Rest von zehn ist zwei, welches der andere Theil ist. Ich habe daher diese Frage schon auf eines der sechs capitula zurückgeführt, nämlich auf jenes, wo das Quadrat gleich ist den Wurzeln."

---

*) Freytag's arab. lat. Lexikon gibt jâbara mit conjunctio plurium separatarum, ut ex his unum fiat; restauratio; in integrum restitutio.

**) In II. Band Note III., Seite 307, veröffentlicht Libri das 15. Capitel des Abacus von Fibonacci nach einem Manuscripte, welches in der Bibliothek Magliabechi zu Florenz vorhanden ist. Der dritte Theil dieses Kapitels, welcher über die Algebra handelt, hat die Aufschrift: „Incipit pars tertia de solutione quarumdam quaestionum secundum modum algebrae et almichabile scilicet approportionis et restaurationis". Fibonacci übersetzt die Wörter algebra et almichabila (wohl falsch geschrieben für almuchabila, was in der Aufschrift des Kapitels vorkommt) in verkehrter Ordnung.

In unserer Zeichensprache würde die Rechnung so stehen. Heißt x der eine Theil, also 10 — x der andere, so erhält man die Gleichung

$$4x(10 - x) = x^2, \text{ oder}$$
$$40x - 4x^2 = x^2.$$

Addirt man beiderseits $4x^2$ hinzu (d. i. jebr), so ergibt sich

$$40x = 5x^2 \text{ oder } x^2 = 8x;$$

daher ist $x = 8$ der eine und $10 - 8 = 2$ der andere Theil.

Die fünfte Aufgabe (Libri I. Bd., S. 277) lautet:

„Theile zehn in zwei Theile, und multiplizire jeden derselben in sich und addire dieselben (nämlich die Produkte) und es soll achtundfünfzig herauskommen. Die Regel hiefür besteht darin, daß du zehn vermindert um das Ding in sich selbst multiplizirst und es werden hundert und das Quadrat weniger zwanzig Dinge hervorgehen. Sodann multiplizire das Ding in sich und es wird das Quadrat sein. Nachher addire dieselben und sie werden hundert Bekannte (centum nota) und zwei Quadrate vermindert um zwanzig Dinge ausmachen, was achtundfünfzig gleich ist. Stelle also hundert und die zwei Quadrate her durch die Dinge, welche abgezogen waren, und addire diese zu achtundfünfzig und sage, hundert und die zwei Quadrate sind achtundfünfzig und zwanzig Dingen gleich. Führe dieses also auf ein Quadrat zurück; sage daher, fünfzig und das Quadrat sind neunundzwanzig und zehn Dingen gleich. Vergleiche nun (almukâbalah) was darin besteht, daß du neunundzwanzig von fünfzig wegwirfst. Es bleibt somit einundzwanzig und das Quadrat, was zehn Dingen gleich ist. Halbire also die Wurzeln (d. i. die Anzahl der Wurzeln) und es kommt fünf heraus; dieses multiplizire in sich und es werden fünfundzwanzig sein. Aus diesem wirf einundzwanzig fort und es wird vier übrig bleiben, dessen Wurzel du nehmen mögest, welche zwei ist. Vermindere um dieses die fünf Dinge, welche die Hälfte der Wurzeln sind, und es verbleibt drei, welches einer der zwei Theile ist. Wir haben also diese Frage auf eines der sechs capitula zurückgeführt, und zwar auf jenes, in welchem das Quadrat und die Zahl den Wurzeln gleich sind."

In unseren Zeichen würde die Rechnung so stehen

$$(10 - x)^2 + x^2 = 58,$$
$$100 + 2x^2 - 20x = 58,$$

oder beiderseits $20x$ hinzuaddirt (al-jebr),

$$100 + 2x^2 = 58 + 20x$$
$$50 + x^2 = 29 + 10x,$$

und auf beiden Seiten 29 abgezogen (mukâbalah),

$$21 + x^2 = 10x,$$

welche Gleichung die Normalform $x^2 + b = ax$ besitzt.

Die gegebene Erklärung der Wörter jebr und mukâbalah ist keineswegs neu, denn sie findet sich schon in dem Khilâsat al-Hisab (Essenz der Rechenkunst) von Mohammed Beha-eddin aus dem 16. Jahrhunderte. Es heißt in diesem Werke nach der Nesselmann'schen Uebersetzung: „Die Seite, welche mit einer Negation behaftet ist, wird ergänzt und etwas dieser Gleiches auf der anderen Seite addirt; das ist aljebr. Die homogenen und gleichen Glieder auf beiden Seiten werden ausgeworfen und das ist al-mukâbalah." Aehnlich lautet die Vorschrift in der in gereimten Distichen geschriebenen Algebra des Persers Nejm-eddin Khân. Daß auch die älteren italienischen Algebristen die richtige Bedeutung der in Rede stehenden Wörter erkannt haben, dafür wurden bereits Belege mitgetheilt. Mohammed ben Musa Alkharezmi, welcher zur Zeit des Khalifen Al-Mamun (814—833) lebte, und welchen Cardan zu den zwölf größten Genies der Welt zählt, gebraucht die beiden Wörter in dem obigen Sinne, ohne jedoch ihre Bedeutung etwas näher zu erklären, woraus man schließen kann, daß die durch jene Wörter bezeichneten Rechnungsoperationen sowohl, als auch die Wörter selbst schon vor dem 9. Jahrhunderte bei den Arabern gebräuchlich gewesen sind. Wegen des häufigen Gebrauches der von den beiden Operationen bei der Auflösung der Gleichungen gemacht wurde, haben die Araber die Namen dieser Operationen schon frühzeitig auf die Wissenschaft selbst übertragen, was aus der Thatsache erhellet, daß Mohammed ben Musa sein Werk „aljebr w'almukâbalah" betitelt hat, welcher Titel auch von den späteren arabischen Algebristen und auch von Fibonacci beibehalten worden ist.

Bei den Arabern wurde das Wort aljebr zur Bezeichnung der Algebra niemals allein, sondern stets in Verbindung mit almukâbalah gebraucht, es ist daher um so auffälliger, daß schon die älteren Italiener, welche doch ihre mathematischen Kenntnisse fast ausschließlich aus arabischen Werken schöpften, das Wort almukâbalah mitunter wegließen. So wird bereits von Leonardo Fibonacci, welcher im Anfange des 13. Jahrhunderts die Algebra in das christliche Europa einführte, wobei er sich das Werk des Mohammed ben Musa zur Richtschnur nahm, die in Rede stehende Wissenschaft bald einfach Algebra, bald Algebra et Almucabala genannt. In den folgenden Werken des 13. und 14. Jahrhunderts, bei welchen (insbesondere in den Werken der florentinischen Mathematiker) der Einfluß Fibonacci's sehr stark hervortritt, wird der Ausdruck Algebra sehr häufig, weit seltener aber Almucabala angetroffen. Raphael Canacci z. B., ein florentinischer Mathematiker aus dem 14. Jahrhundert, wendet in seiner Abhandlung über Algebra, die in italienischer Sprache geschrieben ist, das Wort Algebra ganz allein an, nur setzt er an dessen Stelle öfter regola dell' algibra. Canacci schreibt statt algibra auch arcibra, was eben so verderbt ist, wie almucgrabala, welches Wort an mehreren Stellen des lateinischen Gedichtes „de Vetula" *) für almucabala gebraucht wird. In der Folge wurde das Wort mukâbalah fast durchgehends weggelassen, nur Lucas di Borgo bediente sich wieder beider Namen, denn die achte Distinction seines Hauptwerkes „Summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita (1494 in Venedig zum ersten Male gedruckt) enthält die „Algebra ed Almucabala" und es ist Gosselin's Werk „De arte magna seu de occulta parte numerorum, quae et Algebra et Almucabala vulgo dicitur" (1577) wahrscheinlich das letzte, in welchem noch Almucabala vorkommt.

Das Werk von Gosselin führt uns auf einen neuen Namen der Algebra, nämlich auf ars magna. Diese Benennung war nebst mehreren anderen bereits im 15. Jahrhundert im Gebrauche. Lucas di Borgo zählt in seinem oben zitirten Werke als solche Benennungen auf: „arte maggiore, pratica speculativa, la regola o l'arte della cosa." Bezüglich des Namens arte maggiore (die höhere Kunst) ist zu erwähnen, daß schon lange vor Lucas di Borgo die Algebra als ein höherer Theil der Arithmetik angesehen und deshalb, wahrscheinlich bereits von Fibonacci, ars magna genannt worden ist im Gegensatze zu der ars minor oder niederen Arithmetik, deren Inhalt die Rechnungen des alltäglichen Lebens gebildet haben. Dieser Titel ist aber fast ausschließlich nur in Italien gang und gebe gewesen, und hat sich daselbst bis auf Cardan (geb. zu Pavia 1501) erhalten, welcher denselben mehrmals anwendet. So betitelt Cardan ein Werk: „Ars magna arithmeticae" und ein anderes „Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus. „Die Algebra stand jedoch zur gemeinen Arithmetik noch in einem anderen gegensätzlichen Verhältnisse. Die arithmetischen Werke der damaligen Zeit enthalten nämlich eine eigene Abtheilung über kaufmännische und andere rein praktische Rechnungen, welche pratica mercantilis genannt wurde. So werden z. B. in der Summa arithmetica des Lucas di Borgo nicht nur Gesellschafts- und Wechselrechnungen u. dgl. abgehandelt, sondern es wird darin auch über die Maße und Gewichte und über Buchhaltung, und zwar zum ersten Male über die doppelte Buchhaltung gesprochen. Die Algebra wurde dagegen mehr zu rein theoretischen Untersuchungen und zur Lösung von Zahlenräthseln, denn zu praktischen Zwecken benutzt, und in dieser Hinsicht ist ihr Name pratica speculativa gerechtfertigt.

---

*) Dieses Gedicht ist in soferne von hohem Interesse, als in demselben wiederholt gesagt wird, daß wir den Indern die „algebra et almucgrabala" verdanken. Dieses Gedicht, welches sonderbarer Weise dem Ovid zugeschrieben ward, dürfte nach M. Leclerc's und Leyser's Meinung von Leon verfaßt sein, welcher Protonotär des heiligen Palastes zu Byzanz war und in der ersten Hälfte des 13. Jahrhunderts lebte.

Von weit größerem Belange ist aber der Name la regola della cosa oder auch l'arte della cosa geworden. Derselbe war zur Zeit des Lucas di Borgo in Italien am gebräuchlichsten, hat sich auch weit über die Grenzen Italiens hinaus verbreitet und bis gegen das Ende des 17. Jahrhunderts erhalten. Die italienischen Mathematiker nannten nach dem Vorbilde ihrer Lehrer, der Araber, die erste Potenz der Unbekannten cosa, auch cossa (Sache, Ding, latein. res); die zweite Potenz der Unbekannten hießen sie censo (verderbt zenso), welches aus dem lateinischen census gebildet ist. x^3, x^4, x^5 u. s. w. hatten folgeweise die Namen cubo, censo di censo, relato primo u. s. w., während die bekannte Zahl numero oder auch il noto (in lateinischen Uebersetzungen auch dragma, denarius) genannt wurde. Lucas di Borgo benutzt bei seinen Rechnungen bereits die Anfangsbuchstaben dieser Wörter zur Bezeichnung der Unbekannten und ihrer Potenzen; so setzt er co. für x, ce. für x^2, cu. für x^3, ce. ce. für x^4 u. s. w., gleichwie er hie und da den Buchstaben p. abkürzend für più (plus) und m statt meno (minus), und statt des Wurzelzeichens den Buchstaben R (radix) anwendet, im Uebrigen aber ganz in Worten rechnet. Wegen der wichtigen Rolle, welche dem cosa bei der Auflösung der Gleichungen zugetheilt war, erhielt die Algebra den Namen la regola o l'arte della cosa, d. i. die Regel oder die Kunst vom Dinge, welche Benennung in den lateinisch geschriebenen Werken in ars cossica, ars cosae oder auch kurzweg in cossa verwandelt wurde, wofür aber auch ars rei, sowie ars rei et census gebraucht wurden. Die Unbekannte und deren Potenzen heißen sogar numeri cossici, cossische Zahlen, und die dafür bei den Rechnungen angewendeten Abbreviaturen cossische Zeichen *). Die deutschen Mathematiker nahmen von den Italienern den Namen Coß herüber; wahrscheinlich hat Christoph Rudolf von Jauer (1524) diesen Namen zuerst angewendet. In der von Stifel neu herausgegebenen Coß des Christoph Rudolf wird Fol. 62 gesagt: „Die alten unser vorfarn habenn nach ernstlichem vleyss erfunden die Coß, das ist die rechnung von einem Ding." Fol. 140 heißt es über den Ursprung des Namens Coß ferner: „In diesem andern fürnemlichsten Teyl, werden nachgesetzt acht regeln der vergleychung. In welchen die Coß gegründet ist. Damit aber bekannt werde der ursprung, von welchem geflossen ist der Nahm dieser übung, das es die Coß genennet wirt, verstehe, das die alten diß werk genennet haben ein Kunst von Dingen, darumb das durch sye verborgenheyt der Fragen, so von dingen, das ist, von zalen und massen geschehen, aufgelöset werden. Das bezeugen alte bücher (nicht vor wenig jaren) von der Coß geschrieben. In welchen die quantitet, Dragma, Res, substantia rc. nicht durch Character, sondern durch gantz geschribene wort dargegeben sind. Und sonderlich in practicirung eines yeden Exempels, wirt die Frag gesetzt Ein ding, mit sollichen worten. Ponatur una Res. Dieweyl nu dise Kunst von den Gräcis zu den latinischen kommen, von jhnen mit sampt aller Philosophi auffgenommen, haben sye die wahlen, dem latin nach, zu welsch genennet Regule de le Cosse. Denn Cossa bedeut ein ding. von dannen kompt, das es von den Teutschen die Coss genennt wirt."

---

*) Stifel spricht in der Arithmetica integra (Norinbergae 1544) und in Rudolfs Coß sogar von einer cossischen Progression, worunter die Progression 1, x, x^2, x^3, ... in infinitum zu verstehen ist. Bei der Betrachtung dieser Progression erhebt sich Stifel schon zu einer sehr allgemeinen Anschauungsweise; er sagt in Rudolfs Coß, Fol. 59. „Die quadratzal so da folget, heyffet Zensus. wirt verzeychnet also z. vnd bedeutet 1z ein yede zal so nach der wurzel die nehist zal ist vnd begreyfft also in sich alle quadrat, gleichwie 1 𝔛 in sich begreyfft alle zalen, sye seyen gantz oder gebrochen, National oder Irrational, Erdicht oder unerdicht .... Hieraus ist nu leychtlich zu verstehn wie die Cossische progress in sich schliess vnd begreyff alle geometrische progress, sie seyen gantz oder gebrochen, Rational oder Irrational, derhalben sie auch vber die mass reych ist an zalen, das sich nyemands darff verwundern, das man durch sie alles rechnet Was menschlicher Aritmetica vnder worffen ist". Aehnlich spricht sich Stifel auch im III. Buche seiner Arithmetica integra Fol. 235, aus. Stifel's Werke zeigen im Verhältniß zu andern Werken aus dieser Zeit manche sehr wichtige Fortschritte; denn er ließ es sich nicht blos angelegen sein, die Regeln möglichst zu vereinfachen, sondern er hat auch zur Weiterentwicklung der Wissenschaft schöpferisch mitgewirkt. Stifel half z. B. die Erfindung der Logarithmen anbahnen und kannte auch das Gesetz $n_m + n_{m+1} = (n+1)_{m+1}$ für die Bildung des Binomialkoeffizienten.

In der Arithmetica integra (Norinbergae apud Joh. Petreium 1544) wendet Stifel die Namen Cossa, regula Cossae, Algebra, regula Algebrae, regula Gebri und ars Gebri abwechselnd an. Die beiden letzten Benennungen geben Veranlassung jener irrthümlichen Meinung zu gedenken, nach welcher man lange Zeit hindurch das Wort Algebra von dem Namen des arabischen Astronomen Jâber (auch Jeber und Geber geschrieben), als dem angeblichen Erfinder dieser Wissenschaft herleiten wollte. Raphael Canacci, welcher bereits früher angeführt worden ist, spricht in seinem Ragionamento di algibra diese Ansicht zuerst aus. In einem Briefe, welchen Stifel an Milichius geschrieben, und welcher vor dem III. Buche der Arithmetica integra abgedruckt ist, heißt es: „Deinde tuo quoque consilio usus, Algebram (quam persuasisti bonis rationibus a Gebro Astronomo, auctore ejus, ita esse nuncupatam) multis exemplis illustratam scripsi etc.“ Stifel sagt also ausdrücklich, Milichius habe ihn davon überzeugt, daß die Algebra von dem Astronomen Jâber erfunden, und nach diesem benannt worden ist. In einer Note zu dem Werke „Arithmeticae practicae methodus facilis per Gemmam Frisium etc. Huc acc. Jacobi Peletarii annotationes. Coloniae 1577 sagt Jakob Peletarius: „Algebra autem dicta videtur a Gebro Arabe ut vox ipsa sonat; hujus artis si non inventore, saltem excultore. Alii tribuunt Diophanto cuidam Graeco,“ d. h. die Algebra scheint benannt worden zu sein nach dem Araber Geber, wie das Wort selbst klingt, welcher, wenn nicht der Erfinder, so doch der Fortbildner dieser Kunst war. Andere schreiben sie dem Diophant, einem gewissen Griechen zu.

Obgleich die Grundlosigkeit dieser von Stifel und Peletarius ausgesprochenen Ansicht nach dem Vorhergehenden schon zur Genüge erhellet, so dürfte es trotzdem nicht überflüssig sein, noch einige andere Gründe dagegen anzuführen. Nach unseren gegenwärtigen Kenntnissen über die arabischen Mathematiker gab es nur einen einzigen arabischen Astronomen, welcher den Namen Jâber führte; der vollständige Name desselben lautet: Abu-Mohammed Jâber Ben Aflah Al-Ischbîlî (d. i. von Sevilla). Dieser Astronom, abgesehen davon, daß von ihm kein Werk über Algebra bekannt ist, lebte erst im 11. Jahrhundert, während Mohammed ben Musa Alkharezmi schon im Anfange des 9. Jahrhunderts seine Al jebr w'al mokâbalah abgefaßt hat. Wie sehr aber selbst vor Mohammed ben Musa die mathematischen Kenntnisse der Inder, insbesondere die Algebra in das geistige Eigenthum der Araber übergegangen waren, davon wird uns ein kurzer Rückblick auf die Leistungen des Mohammed ben Musa leicht überzeugen. Dieser arabische Mathematiker hat zunächst auf Verlangen des Khalifen Almamun einen Auszug aus den bereits vor ihm aus der indischen Brahma-Siddhanta übersetzten großen astronomischen Tafeln (bei den Arabern der große Sindhind genannt), d. i. den kleinen Sindhind verfaßt; ja er bearbeitete auf Grundlage indischer und persischer Tafeln und mit Berücksichtigung der Arbeiten des Ptolomäus neue verbesserte astronomische Tafeln. Von entscheidendem Gewichte in der berührten Frage ist aber eine Stelle aus der Einleitung zu der al jebr w'al mukâbalah. In dieser sagt Mohammed ben Musa: „Die Liebe zu den Wissenschaften, durch welche Gott den Imam Al-Mamun, den Beherrscher der Gläubigen ausgezeichnet hat, die Freundlichkeit und Herablassung, welche er den Gelehrten zeigt, die Güte, mit welcher er sie beschützt und in ihren Bemühungen unterstützt, Dunkelheiten in den Wissenschaften zu erhellen und Schwierigkeiten zu entfernen, haben mich ermuntert, ein kurzes Werk über Rechnung durch Ergänzung und Vergleichung (al jebr w'al mukâbalah) zu schreiben. Hier beschränkte ich mich auf das Leichteste, und auf das, was das Nützlichste in der Arithmetik ist, wie es die Menschen am meisten gebrauchen in Fällen von Erbschaften, Legaten, Theilungen, Rechtsfragen und Handel und in allen ihren Geschäften miteinander. Ebenso, wo es sich um die Ausmessung von Ländereien handelt, überhaupt von geometrischen Rechnungen und verschiedenen anderen Dingen“ u. s. w. Müssen uns diese Vorbemerkungen einerseits mit Achtung erfüllen gegen die Khalifen, welche als echte Nachahmer der Ptolomäer zu Alexandrien der in Griechenland und Indien mehr und mehr verkommenden Bildung in ihren Herrschersitzen zu Bagdad eine neue Zufluchtsstätte gewährten, wo das indische und griechische Culturelement zu einem neuen Ganzen sich verschmelzen konnten: so gibt uns die angezogene Stelle andererseits auch den sprechendsten Beleg dafür ab, daß unter den Arabern schon vor dem 9. Jahrhunderte mathematische, respective algebraische Kenntnisse sehr stark verbreitet gewesen sein müssen. Es wäre sonst geradezu unerklärlich, wie zu einem Volksbuche hätte ein Werk bestimmt werden können, welches einen so reichen Inhalt besitzt, und welches „700 Jahre später die ars magna der christlichen Europäer und die Basis und der Ursprung ihrer großen wissenschaftlichen Entdeckungen wurde.“ Hiezu tritt noch die gewichtige Thatsache, daß Mohammed ben Musa es nicht einmal für nothwendig hält, die in dem Werke gebrauchten Kunstausdrücke, wie z. B. al-jebr und mukâbalah zu erklären, was annehmen läßt, daß dieselben und ihre Bedeutung bereits allgemein bekannt waren. Außerdem liegen Zeugnisse arabischer Geschichtsschreiber vor, welche die aljebr w' al mukâbalah des Mohammed ben Musa als das älteste arabische Werk über Algebra bezeichnen. Wie viel aus diesem Buche die älteren italienischen Mathematiker entlehnten, zeigt schon eine flüchtige Vergleichung der Arbeiten dieser mit jenem Werke. Fibonacci z. B. hat nicht nur dieselbe Terminologie wie Mohammed ben Musa, sondern benutzt auch die Beispiele desselben; einige der letzteren werden sogar noch von Cardan angeführt und dieser sagt in seiner Ars magna ausdrücklich, daß diese Kunst ihren Anfang von Mohammed ben Musa genommen hat.

Nicht minder unrichtig ist die in der Note des Peletarius ausgesprochene Ansicht, daß Diophant der Erfinder der Algebra ist, und die von einigen aus derselben gezogene Folgerung, daß die Araber ihre algebraischen Kenntnisse dem Diophant entlehnt haben. Wer die Algebra erfunden hat, läßt sich nicht bestimmen, da es wegen der fehlenden Quellen unmöglich ist, die Algebra bis auf ihre ersten Anfänge zu verfolgen. Nur so viel ist fast als sicher anzunehmen, daß sie zweimal, nämlich in Griechenland und Indien erfunden worden ist. Die analytische Methode, welche in der Algebra zur Anwendung kommt, war bei den Griechen schon zu Plato's Zeit in der Geometrie gebräuchlich. Die Uebertragung derselben auf die Rechnung ward allerdings durch die eigenthümliche Zahlenmotation der Griechen, in Folge welcher zur Bezeichnung der Unbekannten nur das Finalsigma (ς) übrig blieb, nicht wenig erschwert, aber nichts destoweniger ist sie vor Diophant ausgeführt worden; insbesondere war die Auflösung der Gleichungen des ersten Grades, der reinen und wahrscheinlich auch die der unreinen quadratischen Gleichungen schon vor Diophant bekannt, dessen Zeitalter am sichersten in die zweite Hälfte des vierten Jahrhunderts n. Chr. zu setzen ist. Ebenso hat bereits Pythagoras den Grund zur unbestimmten Analytik gelegt, denn nach den Zeugnissen griechischer Mathematiker hat derselbe eine Methode erfunden, zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder ein Quadrat ist. Eine sistematische Darstellung der damals bekannten Bruchstücke der Algebra scheint jedoch den Griechen vor Diophant gefehlt zu haben. Diesem Mangel hat Diophant mit seinem Werke 'Αριθμητικῶν βιβλία ιγ (13 Bücher über Arithmetisches) abgeholfen; er selbst sagt in der Vorrede zu diesem Werke: „ich habe versucht, die Methode (nämlich zur Auflösung arithmetischer Probleme) sistematisch darzustellen, zu ordnen.“ Dadurch hat sich Diophant ein eben so großes Verdienst erworben, als durch die vielen Sätze und Auflösungsmethoden, welche er mit seinem bewunderungswürdigen Scharfsinn aufgefunden, und durch welche er sich eine ganz isolirte, ausgezeichnete Stellung in der Reihe der griechischen Mathematiker erworben hat. Obgleich Diophant in dem erwähnten Werke die Auflösung der Gleichungen, also Algebra behandelt, so gab er ihm den Namen 'Αριθμητικά (Arithmetisches), weil die Griechen keinen besonderen Namen für Algebra hatten, und blos zwischen praktischer und theoretischer Rechenkunst unterschieden, wovon sie die erstere Logistik, die letztere Arithmetik nannten. Den Gegenstand der Arithmetik bildeten die Untersuchungen über die Eigenschaften der Zahlen, die Arithmetik der Griechen war also speziell Zahlenlehre, und diese herrscht auch im Werke des Diophant vor, weshalb es seinen Titel mit vollem Rechte führt. Gleichwie die Geometrie der Glanzpunkt der griechischen, so ist die Algebra der Glanzpunkt der indischen Mathematik. Die Algebra als die Rechnung mit unbekannten Größen (avyakta), wurde von den Indern avyakta-ganita oder avyakta-kriyâ, d. i. Rechnung oder Operation mit Unbekannten genannt, während die gemeine Arithmetik vyakta-ganita, d. i. Rechnung mit bekannten Größen hieß. Uebrigens waren zur Bezeichnung der Algebra auch die Namen vîja-ganita, vîja-kriyâ, d. i. Ursprungsrechnung oder Causalrechnung im Gebrauche, weil die Algebra die Gründe ihrer Verfahrungsweise darlegt. Die indische Algebra, welche durch Aryabhat't'a, Brahmegupta, Bhascara repräsentirt wird, steht weit höher als die griechische, denn die Inder hatten nicht nur eine weit allgemeinere Bezeichnungs- und Benennungsweise, sondern auch allgemeinere Methoden. So besaßen die Inder eine ganz allgemeine Methode, um die unbestimmten Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten in ganzen Zahlen aufzulösen, während diese Aufgaben von Diophant nur in besonderen Fällen aufgelöst wurden. Diese Methode, welche in Europa erst 1624 durch Bachet de Meziriac erfunden wurde, wird zugleich mit der Auflösung der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten von den indischen Mathematikern dem Aryabhat't'a zugeschrieben, welchen Käuffer in seiner Geschichte von Ostasien (II. Bd.) in das vierte Jahrhundert unserer Zeitrechnung setzt. Diese wenigen Daten reichen wohl schon hin, um eine selbstständige, von den Griechen unabhängige Erfindung der Algebra in Indien anzuerkennen, wenngleich der griechische Einfluß in anderen Zweigen der indischen Cultur, wie z. B. in der Astronomie, sich nicht abläugnen läßt. Daß aber die Araber die Algebra nicht aus dem Werke des Diophant (Ἀριθμητικῶν βιβλία ιγ), sondern aus indischen Werken kennen gelernt haben, dafür spricht schon der Charakter der algebraischen Werke der Araber, welcher dem der indischen ganz verwandt ist. Zudem ist Diophant's Werk am spätesten ins Arabische übersetzt worden. Nach Ibn-Khaldoun war Euklid der erste griechische Autor, welcher von den Arabern übersetzt wurde; in der Folge entstanden auch Uebersetzungen der Werke von Apollonius, Ptolomäus, Archimedes und Aristoteles. Ebenso wurde die Arithmetik des Nikomachus von Thâbet ben Korrah Abu'l Hassan (836—901) bearbeitet, während das Werk ἀριθμητικῶν des Diophant durch Mohammed Abulwafa erst gegen Ende des zehnten Jahrhunderts übersetzt wurde. Auch im christlichen Europa wurde Diophant verhältnißmäßig sehr spät bekannt. Zum ersten Male erwähnt findet sich Diophant in einer Antrittsrede, welche Regiomontanus oder Johannes Müller (15. Jahrh.) zu Padua gehalten hat; die erste lateinische Uebersetzung wurde durch Wilhelm Xylander (Holzmann, aus Heidelberg) veranstaltet und 1575 herausgegeben.

In Bezug auf unser Thema erübrigt uns nur noch zweier Namen zu gedenken, welche beide zuerst von F. Vieta gegen Ende des 16. Jahrhunderts der Algebra beigelegt worden sind. Bekanntlich beschäftigten sich die alten Algebraisten nur mit numerischen Gleichungen, da ihnen der Begriff der allgemeinen Koeffizienten gänzlich mangelte. Das Verdienst, die Zahlenkoeffizienten durch literale ersetzt und auf diese Art den Grund zur allgemeinen Arithmetik gelegt zu haben, gebührt unstreitig Vieta, ungeachtet schon Jahrhunderte vorher Buchstaben zur Bezeichnung von unbestimmten Größen benutzt worden sind. Abgesehen von den abkürzenden Bezeichnungen der Unbekannten, wie sie bei den alten Mathematikern, insbesondere bei den Indern, ja selbst bei den Chinesen angetroffen werden, verdient hier erwähnt zu werden, daß Aristoteles in seiner Physik die Kraft, die Masse, den Weg und die Zeit durch die Buchstaben α, β, γ, δ ausdrückt, und daß Euklid in den Büchern (7—10) seiner Elemente, welche über Arithmetik, und zwar vorzugsweise über die Lehre der Zahlen handeln, Linien als allgemeine Repräsentanten der Zahlen anwendet und hierdurch seinen Untersuchungen und Beweisen einen sehr hohen Grad von Allgemeinheit verschafft. Eine ähnliche Art von „linearer" Arithmetik findet sich auch bei Fibonacci. Es darf aber nicht vergessen werden, daß vor Vieta kein Mathematiker für eine als gegeben anzusehende Größe ein allgemeines Zahlzeichen gesetzt und mit diesem sowie mit besonderen Zahlzeichen gerechnet hat. Vieta bediente sich der großen Buchstaben, an deren Stelle erst Harriot die kleinen einführte, und nannte diese allgemeinen Buchstabenkoeffizienten species und deshalb die allgemeine Algebra zum Unterschiede der numerischen arithmetica (auch logistica) speciosa, wofür später auch die Benennung arithmetica universalis angewendet wurde. Dieser Name arithmetica speciosa war übrigens nur von kurzer Dauer; bedeutend länger erhielten sich dagegen die Namen Ars analytica und Arithmetica analytica und Analysis. Das Werk, in welchem Vieta seine allgemeine Algebra niederlegte, führt bereits den Titel: „In artem analyticam isagoge." Nach Erfindung der Differential- und Integralrechnung (17. Jahrh.), welche man unter dem gemeinsamen Namen Infinitesimalrechnung oder Analysis infinitorum zusammenfaßte, erhielt die Algebra, da sie mit endlichen Größen rechnet, den Titel Analysis finitorum oder Analysis endlicher Größen. Dieser Titel wurde zwar der Algebra streitig gemacht, indem man die Analysis, d. i. nach Euklid „die Annahme des Gesuchten als etwas Gegebenen, um durch Schlüsse zu etwas wahrem Gegebenen zu gelangen", ausschließlich der Geometrie vindiciren wollte. Wenn man aber erwägt, wie die Algebra die gestellten Aufgaben in die Form von Gleichungen bringt, so wird ersichtlich, daß sie ebenso gut Analysis treibt wie die Geometrie, daß also der Name Analysis, als er der Algebra beigelegt ward, keineswegs auf etwas Fremdartiges übertragen wurde. Nesselmann hat daher vollkommen recht, wenn er den Namen Analysis für die in Rede stehende Wissenschaft bezeichnender findet, als das jetzt gebräuchliche Wort Algebra, indem diejenige mathematische Operation, welche mit demselben bezeichnet wurde, uns ganz entfremdet worden ist.
