Über die

trigonometrische Flächenbestimmung

eines geradlinigen Poligons,

von

J. Pranghofer.

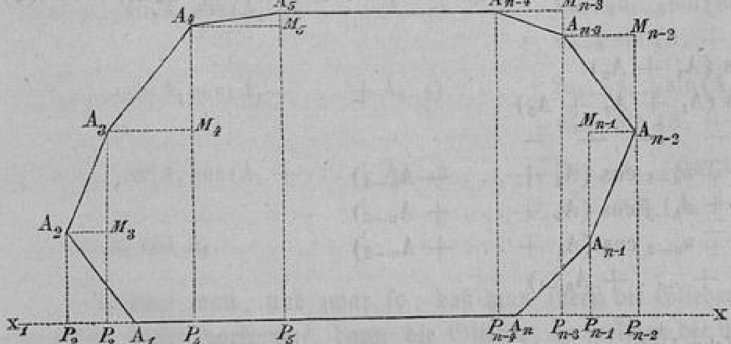
Um den Flächeninhalt eines Poligons zu bestimmen, ausgedrückt durch die Seiten und trigonometrischen Funkzionen der Winkel desselben, leitet man gewöhnlich zuerst die Formel für das Dreieck, dann für das Viereck, Fünfeck ab, und schreibt endlich die Formel für die Fläche eines Polygons von n Seiten vermöge der angewandten gemeinen Induktion nieder.

Es dürfte wohl nicht uninteressant sein, eine direkte Ableitung der Formel für die Fläche eines n ecks anzugeben.

Man kann nun diese Aufgabe auf folgende Art lösen:

Es sei $A_1\, A_2\, A_3\, A_4 \ldots A_{n-3}\, A_{n-2}\, A_{n-1}\, A_n$ ein Polygon von n Seiten; die Winkel desselben wollen wir mit $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-2}, A_{n-1}, A_n \ldots$ bezeichnen und die Seiten $A_1\, A_2$, $A_2\, A_3$, $A_3\, A_4, \ldots A_{n-1}\, A_n$ mit $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$.

Nimmt man nun die Seite a_n als Abszissenaxe an, und fällt von den einzelnen Eckpunkten des Polygons die Senkrechten (Ordinaten) $A_2\, P_2$, $A_3\, P_3, \ldots A_{n-1}\, P_{n-1}$ auf dieselbe, so wird das Polygon durchgehends in Trapeze und Dreiecke zerlegt. Bezeichnet man das



Trapez	$A_2\, P_2\, P_3\, A_3$	mit t_2
"	$A_3\, P_3\, P_4\, A_4$	" t_3
—	—	—
Trapez	$A_{n-4} P_{n-4} P_{n-3} A_{n-3}$	mit t_{n-4}
"	$A_{n-3} P_{n-3} P_{n-2} A_{n-2}$	" t_{n-3}
"	$A_{n-2} P_{n-2} P_{n-1} A_{n-1}$	" t_{n-2}
Dreieck	$A_{n-1} P_{n-1} A_n$	" t_{n-1}
"	$A_1\; A_2\; P_2$	" t_1,

so ist die Fläche des Poligons, nämlich

$$F = t_2 + t_3 + t_4 + \ldots + t_{n-4} + t_{n-3} - t_{n-2} - t_{n-1} - t_1 \quad \ldots \quad (1)$$

Es kommt nun darauf an, t_1, t_2, t_3 zu berechnen, und, da die Fläche eines Trapezes gleich ist der Summe der beiden parallelen Seiten multipliziert mit der halben Höhe, so ersieht man, daß wir die Perpendikel $A_2 P_2 = p_2$, $A_3 P_2 = p_3$, $A_4 P_4 = p_4$, ... und die Stücke $P_2 P_3$, $P_3 P_4$, $P_4 P_5$, ... bestimmen müssen.

Berücksichtigt man noch, daß wenn man $A_2 M_3 \parallel P_2 P_3$, $A_3 M_4 \parallel P_3 P_4$, $A_4 M_5 \parallel P_4 P_5$, ... zieht, die Winkel

$$P_2 A_1 A_2 = 180 - A_1$$
$$A_3 A_2 M_3 = A_1 + A_2 - \pi$$
$$A_4 A_3 M_4 = A_1 + A_2 + A_3 - 2\pi$$
$$A_4 A_4 M_5 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 3\pi \quad \text{sind,}$$

— — — — — — — — — — —

somit

$$\sin A_2 A_1 P_2 = \sin A_1$$
$$\sin A_3 A_2 M_3 = \sin (A_1 + A_2 - \pi) = - \sin (A_1 + A_2)$$
$$\sin (A^4 A_3 M_4) = \sin (A_1 + A_2 + A_3 - 2\pi) = + \sin (A_1 + A_2 + A_3)$$

— — — — — — — — — — — — — — — —

und

$$\cos A_4 A_3 P_2 = - \cos A_1$$
$$\cos A_3 A_2 M_3 = - \cos (A_1 + A_2)$$
$$\cos A_4 A_3 M_4 = + \cos (A_1 + A_2 + A_3),$$

— — — — — — —

sonach

$$A_2 P_2 = p_2 = A_1 A_2 \sin (180 - A_1) = a_1 \sin A_1$$
$$A_3 P_3 = p_3 = A_3 M_3 + M_3 P_3 = A_2 P_2 + A_3 M_3 = a_1 \sin A_1 - a_2 \sin (A_1 + A_2)$$
$$A_4 P_4 = p_4 = A_4 M_4 + M_4 P_4 = A_3 P_3 + A_4 M_4 = a_1 \sin A_1 - a_2 \sin (A_1 + A_2) + a_3 \sin (A_1 + A_2 + A_3)$$

— —

$$A_{n-4} P_{n-4} = p_{n-4} = a_1 \sin A_1 - a_2 \sin (A_1 + A_2) + \dots \pm a_{n-5} \sin (A_1 + \dots + A_{n-5})$$
$$A_{n-3} P_{n-3} = p_{n-3} = a_1 \sin A_1 - a_2 \sin (A_1 + A_2) + \dots \mp a_{n-4} \sin (A_1 + \dots + A_{n-4})$$
$$A_{n-3} P_{n-2} = p_{n-2} = a_1 \sin A_1 - a_2 \sin (A_1 + A_2) + \dots \pm a_{n-3} \sin (A_1 + \dots + A_{n-3})$$
$$A_{n-1} P_{n-1} = p_{n-1} = a_1 \sin A_1 - a_2 \sin (A_1 + A_2) + \dots \mp a_{n-2} \sin (A_1 + \dots + A_{n-2})$$
$$A_n P_n = p_n = 0 = a_1 \sin A_1 - a_2 \sin (A_1 + A_2) + \dots \pm a_{n-1} \sin (A_1 + \dots + A_{n-1}) \quad \dots (2);$$

ferner

$$P_2 P_3 = A_2 M_3 = - a_2 \cos (A_1 + A_2)$$
$$P_3 P_4 = A_3 M_4 = + a_3 \cos (A_1 + A_2 + A_3)$$

— — — — — — — — — —

$$P_{n-4} P_{n-4} = A_{n-4} M_{n-3} = \mp a_{n-4} \cos (A_1 + \dots + A_{n-4})$$
$$P_{n-3} P_{n-2} = A_{n-2} M_{n-3} = \pm a_{n-3} \cos (A_1 + \dots + A_{n-3})$$
$$P_{n-2} P_{n-1} = A_{n-2} M_{n-1} = \mp a_{n-2} \cos (A_1 + \dots + A_{n-2})$$
$$P_{n-1} P_n = \pm a_{n-1} \cos (A_1 + \dots + A_{n-1})$$
$$A_1 P_2 = - a_1 \cos A_1$$

und für $A_1 A_n = a_n$ findet man sehr leicht

$$a_n = a_1 \cos A_1 - a_2 \cos (A_1 + A_2) + a_3 \cos (A_1 + A_2 + A_3) \dots \pm a_{n-1} \cos (A_1 + \dots + A_{n-1}) \quad \dots (3).$$

Nun ist

$$2t_2 = (p_2 + p_3) \,.\, P_2P_3 = [2a_1 \sin A_1 - a_2 \sin(A_1 + A_2)] \,.\, [-a_2 \cos(A_1 + A_2)]$$
$$2t_3 = (p_3 + p_4) \quad P_3P_4 = [2a_1 \sin A_1 - 2a_2 \sin(A_1 + A_2) + a_3 \sin(A_1 + A_2 + A_3)][+ a_3 \cos(A_1 + A_2 + A_3)]$$
$$2t_4 = (p_4 + p_5) \quad P_4P_5 = [2a_1 \sin A_1 - 2a_2 \sin(A_1 + A_2) + 2a_3 \sin(A_1 + A_2 + A_3) - a_4 \sin(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)] \,.\, [-a_4 \cos(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)]$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$2t_{n-4} = (p_{n-4} + p_{n-3}) P_{n-4}P_{n-3} = [2a_1 \sin A_1 - 2a_2 \sin(A_1 + A_2) + \ldots \pm a_{n-5} \sin(A_1 + \ldots + A_{n-5}) \mp a_{n-4} \sin(A_1 + \ldots + A_{n-4})] \,.\, [\mp a_{n-4} \cos(A_1 + \ldots + A_{n-5})]$$
$$2t_{n-3} = (p_{n-3} + p_{n-2}) P_{n-3}P_{n-2} = [2a_1 \sin A_1 - 2a_2 \sin(A_1 + A_2) + \ldots \mp 2a_{n-4} \sin(A_1 + \ldots + A_{n-4}) \pm a_{n-3} \sin(A_1 + \ldots + A_{n-3})] \,.\, [\pm a_{n-3} \cos(A_1 + \ldots + A_{n-3})]$$
$$2t_{n-2} = (p_{n-2} + p_{n-1}) P_{n-2}P_{n-1} = [2a_1 \sin A_1 - 2a_2 \sin(A_1 + A_2) + \ldots \pm 2a_{n-3} \sin(A_1 + \ldots + A_{n-3}) \mp a_{n-2} \sin(A_1 + \ldots + A_{n-2})] \,.\, [\mp a_{n-2} \cos(A_1 + \ldots + A_{n-2})]$$
$$2t_{n-1} = (p_{n-1} + p_n) \quad P_{n-1}P_n = [2a_1 \sin A_1 - 2a_2 \sin(A_1 + A_2) + \ldots \mp 2a_{n-2} \sin(A_2 + \ldots + A_{n-2}) \pm a_{n-1} \sin(A_1 + \ldots + A_{n-1})] \,.\, [\mp a_{n-1} \cos(A_1 + \ldots + A_{n-1})]$$
$$2t_1 = p_2 \,.\, A_1P_2 = [a_1 \sin A_1] \,.\, [-a_1 \cos A_2],$$

sonach wird, da aus (1) folgt:

$$2F = 2t_2 + 2t_3 + 2t_4 + \ldots + 2t_{n-4} + 2t_{n-3} - 2t_{n-2} - 2t_{n-1} - 2t_1$$

$$2F =$$

$$-[2a_1 a_2 \sin A_1 \cos(A_1 + A_2) - a_2^2 \sin(A_1 + A_2 \cos(A_1 + A_3)]$$
$$+[2a_1 a_3 \sin A_1 \cos(A_1 + A_2 + A_3) - 2a_2 a_3 \sin(A_1 + A_2) \cos(A_1 + A_2 + A_3) + a_3^2 \sin(A_1 + A_2 + A_3) \cos(A_1 + A_2 + A_3)]$$
$$-[2a_1 a_4 \sin A_1 \cos(A_1 + \ldots + A_4) - 2a_2 a_4 \sin(A_1 + A_2) \cos(A_1 + \ldots + A_4) + 2a_3 a_4 \sin(A_1 + A_2 + A_3) \cos(A_1 + \ldots + A_4) - a_4^2 \sin(A_3 + \ldots + A_4) \cos(A + \ldots + A_4)]$$

\+ — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\mp[2a_1 a_{u-4} \sin A_1 \cos(A_1 + \ldots + A_{n-4}) \ldots \pm 2a_{n-5} a_{n-4} \sin(A_1 + \ldots + A_{n-5}) \cos(A_1 + \ldots + A_{n-4}) \mp a_{n-4}^2 \sin(A_1 + \ldots + A_{n-4}) \cos(A_1 + \ldots + A_{n-4})]$$
$$\pm[2a_1 a_{n-3} \sin A_1 \cos(A_1 + \ldots + A_{n-3}) \ldots \mp 2a_{n-4} a_{n-3} \sin(A_1 + \ldots + A_{n-4}) \cos(A_1 + \ldots + A_{n-3}) \pm a_{n-3}^2 \sin(A_1 + \ldots + A_{n-3}) \cos(A_1 + \ldots + A_{n-3})]$$
$$\mp[2a_1 a_{n-2} \sin A_1 \cos(A_1 + \ldots + A_{n-2}) \ldots \pm 2a_{n-3} a_{n-2} \sin(A_1 + \ldots + A_{n-3}) \cos(A_1 + \ldots + A_{n-2}) \mp a_{n-2}^2 \sin(A_1 + \ldots + A_{n-2}) \cos(A_1 + \ldots + A_{n-2})]$$
$$\pm[2a_1 a_{n-1} \sin A_1 \cos(A_1 + \ldots + A_{n-1}) \ldots \mp 2a_{n-2} a_{n-1} \sin(A_1 + \ldots + A_{n-2}) \cos(A_1 + \ldots + A_{n-1}) \pm a_{n-1}^2 \sin(A_1 + \ldots + A_{n-1}) \cos(A_1 + \ldots + A_{n-1})]$$
$$+ a_1^2 \sin A_1 \cos A_1.$$

Ordnet man, und zwar so, daß man zuerst die Glieder schreibt, in welchen immer das Quadrat einer Seite vorkommt, dann die Glieder, in welchen die Verbindungen von a_1 mit a_2, a_3 . . . vorkommen, hierauf die Glieder, in welchen die Verbindungen von a_2 mit a_3, a_4, . . . stattfinden u. s. w., so erhält man:

$$
\begin{aligned}
2F \\
= \\
& a_1{}^2 \sin A_1 \cos A_1 + a_2{}^2 \sin (A_1 + A_2) \cos (A_1 + A_2) + a_3{}^2 \sin (A_1 + A_2 + A_3) \cos (A_1 + A_2 + A_3) + \ldots, \\
& \qquad + a_{n-1}^2 \sin (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\
+ & \left\{ \begin{array}{l}
- 2 a_1 a_2 \sin A_1 \cos (A_1 + A_2) + 2 a_1 a_3 \sin A_1 \cos (A_1 + A_2 + A_3) \quad \ldots \ldots \pm 2 a_1 a_{n-1} \sin A_1 \\
\qquad \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\
- 2 a_2 a_3 \sin (A_1 + A_2) \cos (A_1 + A_2 + A_3) + 2 a_2 a_4 \sin (a_1 + a_2) \cos (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \quad \ldots \\
\qquad \mp 2 a_2 a_{n-2} \sin (A_1 + A_2) \cos (A_1 + \ldots + A_{n-2}) \\
- 2 a_3 a_4 \sin (A_1 + A_2 + A_3) \cos (A_1 + \ldots + A_4) + 2 a_3 a_5 \sin (A_1 + A_2 + A_3) \cos (A_1 + \ldots + A_5) \ldots \\
\qquad \pm 2 a_3 a_{n-3} \sin (A_1 + A_2 + A_3) \cos (A_1 + \ldots A_{n-3}) \\
- \quad = \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
- 2 a_{n-3} a_{n-2} \sin (A_1 + \ldots + A_{n-3}) \cos (A_1 + \ldots + A_{n-2}) + 2 a_{n-3} a_{n-1} \sin (A_1 + \ldots + A_{n-3}) \\
\qquad \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\
- 2 a_{n-2} a_{n-1} \sin (A_1 + \ldots + A_{n-2}) \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \qquad (4).
\end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Das Gesetz, an welches die doppelte Fläche $2F$ in dieser Gleichung (4) gebunden ist, wäre wohl deutlich genug ausgesprochen, allein die Formel ist noch viel zu komplizirt zur praktischen Berechnung. Durch folgenden Kunstgriff gelingt es uns, die Formel in einfacher Form darzustellen:

Wir erhielten früher die beiden Gleichungen (2) und (3)

$$a_1 \sin A_1 - a_2 \sin (A_1 + a_2) + a_3 \sin (A_1 + A_2 + A_3) \ldots \mp a_{n-1} \sin (A_1 + \ldots + A_{n-1}) = 0 \qquad (2)$$

$$a_1 \cos A_1 - a_2 \cos (A_1 + A_2) + a_3 \cos (A_1 + A_2 + A_3) \ldots \pm a_{n-1} \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) = a_n \qquad (3)$$

Multiplizirt man diese beiden Gleichungen, und zwar so, daß man zuerst die Produkte nimmt, welche gebildet werden durch a_1 mit a_1, a_2, a_3 ... dann die Produkte, in welchen die Verbindungen von a_2 mit a_2, a_3, ... erscheinen, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l}
a_1{}^2 \sin A_1 \cos A_1 - a_1 a_2 \sin A_1 \cos (A_1 + A_2) + a_1 a_3 \sin A_1 \cos (A_1 + A_2 + A_2) \ldots \pm a_1 a_{n-1} \sin A_1 \\
\qquad \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\
\mathrm{I}_1 \qquad - a_1 a_2 \cos A_1 \sin (A_1 + A_1) + a_1 a_3 \,\mathrm{eos}\, A_1 \sin (A_1 + A_2 + A_3) \ldots \pm a_1 a_{n-1} \cos A_1 \\
\qquad \sin (A_1 + \ldots + A_{n-1})
\end{array} \right\} + \\
+ & \left\{ \begin{array}{l}
a_2{}^2 \sin (A_1 + A_2) \cos (A_1 + A_2) - a_2 a_3 \sin (A_1 + A_2) \cos (A_2 + A_2 + A_3) + \ldots \mp a_2 a_{n-1} \sin (A_1 + A_2) \\
\qquad \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\
\mathrm{I}_2 \qquad - a_2 a_3 \cos (A_1 + A_2) \sin (A_1 + A_2 + A_3) + \ldots \mp a_2 a_{n-1} \cos (A_1 + A_2) \\
\qquad \sin (A_1 + \ldots + A_{n-1})
\end{array} \right\} \\
+ & - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
+ & \left\{ \begin{array}{l}
a_{n-2}^2 \sin (A_1 + \ldots + A_{n-2}) \cos (A_1 + \ldots + A_{n-2}) - a_{n-2} a_{n-1} \sin (A_1 + \ldots + A_{n-2}) \cos (A_1 + \ldots +_{n-1}) \\
\mathrm{I}_{n-2} \qquad - a_{n-2} a_{n-1} \cos (A_1 + \ldots + A_{n-2}) \sin (A_5 + \ldots +_{n-1})
\end{array} \right\} \\
+ & \left\{ \begin{array}{l}
a_{n-1}^2 \sin (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\
\mathrm{I}_{n-1}
\end{array} \right\} = 0,
\end{aligned}
$$

oder, wenn man wieder die Glieder zuerst schreibt, in welchen das Quadrat einer Seite vorkommt, und dann die zweite Reihe von Gliedern innerhalb der Klammern, also die Glieder, die in der Reihe I_1, I_2, ... I_{n-2} vorkommen, auf die rechte Seite das Gleichheitszeichen setzt, wird

$$a_1^2 \sin A_1 \cos A_1 + a_2^2 \sin (A_1 + a_2^2) \cos (A_1 + A_2) + a_3^2 \sin (A_2 + A_2 + A_3) \cos (A_1 + A_2 + A_3)$$
$$+ \ldots + a_{n-1}^2 \sin (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1})$$
$$+\left\{\!\!\left\{\begin{array}{l} -a_1 a_2 \sin A_1 \cos (A_1+A_2) + a_1 a_3 \sin A_1 \cos (A_1+A_2+A_3) \ldots \pm a_1 a_{n-1} \sin A_1 \cos (A_1+ \ldots +A_{n-1}) \\ -a_2 a_3 \sin (A_1+A_2) \cos (A_1+A_2+A_3) + \ldots\ldots \mp a_2 a_{n-1} \sin (A_1+A_2) \cos (A_1+ \ldots +A_{n-1}) \\ -a_3 a_4 \sin (A_1+A_2+A_3) \cos (A_1+A_2+A_2+A_4) + . \pm a_3 a_{n-1} \sin (A_1+A_2+A_3) \cos (A_1+ . +A_{n-1}) \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ -a_{n-2} a_{n-1} \sin (A_1 + \ldots + A_{n-2}) \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \end{array}\right\}\!\!\right\}$$
$$=$$
$$\begin{array}{l} + a_1 a_2 \cos A_1 \sin (A_1 + A_2) - a_1 a_3 \cos A_1 \sin (A_1 + A_2 + A_4) + . \; . \mp a_1 a_{n-1} \cos A_1 \sin (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\ + a_2 a^2 \cos (A_1 + A_2) \sin (A_1 + A_2 + A_3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \pm a_3 a_{n-1} \cos (A_1+A_2) \sin (A_1+ \ldots + A_{n-1}) \\ + a_3 a_4 \cos (A_1 + A_2 + A_3) \sin (A_1 + A_2 + A_3) \; . \; . \; . \mp a_3 a_{n-1} \cos (A_1 + A_2 + A_3) \sin (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\ + \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ + a_{n-2} a_{n-1} \cos (A_1 + \ldots + A_{n-2}) \sin (A_1 + A_3 + A_{n-1}) \end{array} \qquad (5)$$

Addirt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung (5) den in derselben Gleichung auf der linken Seite vorkommenden und in doppelte Klammern $\{\!\{ \ldots \}\!\}$ eingeschlossenen Ausdruck, so ergibt sich nun auf der linken Seite des Gleichheitszeichens

$$\begin{array}{l} a_1^2 \sin A_1 \cos A_1 + a_2^2 \sin (A_1 + A_2) \cos (A_1 + A_2) + a_3^2 \sin (A_1 + A_2 + A_3) \cos (A_1 + A_2 + A_3) + \ldots \\ \qquad + a_{n-1}^2 \sin (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\ -2 a_1 a_2 \sin A_1 \cos (A_1 + A_2) + 2 a_1 a_3 \sin A_1 \cos (A_1 + A_2 + A_3) \; . \pm 2 a_1 a_{n-1} \sin A_1 \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\ -2 a_2 a_3 \sin (A_1 + A_2) \cos (A_1 + A_2 + A_3) \; . \; . \; . \; . \; . \mp 2 a_2 a_{n-1} \sin (A_1 + A_2) \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\ -2 a_3 a_4 \sin (A_1 + A_2 + A_3) \cos (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + . \pm 2 a_3 a_{n-1} \sin (A_1 + A_2 + A_3) \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ -2 a_{n-2} a_{n-1} \sin (A_1 + \ldots + A_{n-2}) \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \end{array} \qquad (\alpha)$$

Vergleicht man nun diesen Ausdruck (α) mit der Gleichung (4), so bemerkt man allsogleich, daß (α) nichts anderes vorstellt, als die doppelte Fläche $2F$.

Wir erhalten daher, wenn wir gleich statt (α) die doppelte Fläche $2F$ substituiren

$$2F =$$
$$\begin{array}{l} a_1 a_2 \cos A_1 \sin (A_1 + A_2) - a_1 a_3 \cos A_1 \sin (A_1 + A_2 + A_3) + . \; . \mp a_1 a_{n-1} \cos A_1 \sin (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\ a_2 a_3 \cos (A_1 + A_2) \sin (A_1 + A_2 + A_3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \pm a_2 a_{n-1} \cos (A_1 + A_2) \sin (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\ a_3 a_4 \cos (A_1 + A_2 + A_4) \sin (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \; . \; . \mp a_3 a_{n-1} \cos (A_1 + A_2 + A_3) \sin (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\ + \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \end{array}$$

$+ a_{n-2} a_{n-1} \cos (A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-2}) \sin (A_1 + \ldots A_{n-1}) +$ dem Ausdrucke $\{\!\{ \ldots \}\!\}$, oder wenn man sich die Glieder innerhalb der Klammern $\{\!\{ \ldots \}\!\}$ geschrieben denkt und dann so ordnet, daß man immer diejenigen Glieder zusammen nimmt, wo dasselbe Produkt aus den Seiten $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ vorkommt, so wird

$$2F$$
$$=$$
$$\begin{array}{l} a_1 a_2 \left[\cos A_1 \sin (A_1 + A_2) - \sin A_1 \cos (A_1 + A_1) \right] - a_1 a_3 \left[\cos A_1 \sin (A_1 + A_1 + A_3) - \sin A_1 \cos (A_1 + A_2 + A_3) \right] \\ \qquad + \ldots \mp a_1 a_{n-1} \left[\cos A_1 \sin (A_1 + \ldots + A_{n-1}) - \sin A_1 \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \right] \\ a_2 a_3 \left[\cos (A_1 + A_2) \sin (A_1 + A_2 + A_3) -- \sin (A_1 + A_2) \cos (A_1 + A_2 + A_3) \right] + \ldots \pm a_2 a_{n-1} \left[\cos (A_1 + A_2) \right. \\ \qquad \left. \sin (A_1 + \ldots + A_{n-1}) - \sin (A_1 + A_2) \cos (A_1 + \ldots + A_{n-1}) \right] \end{array}$$

$$a_3 a_4 [\cos(A_1+A_2+A_3)\sin(A_1+A_2+A_3+A_4) - \sin(A_1+A_2+A_3)\cos(A_1+A_2+A_3+A_4)] - \ldots \mp a_3 a_{n-1}$$
$$[\cos(A_1+A_2+A_3)\sin(A_1+\ldots+A_{n-1}) - \sin(\ldots)\cos(\ldots)]$$
$$+ - - - - - - - - - - - - - - - - - - -$$
$$+ a_{n-2} a_{n-1} [\cos(A_1+\ldots+A_{n-2})\sin(A_1+\ldots+A_{n-1}) - \sin(A_1+\ldots+A_{n-2}\cos(A_1+\ldots A_{n-1})]$$

Berücksichtigt man endlich noch, daß $\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha-\beta)$ ist, so erhält man für die doppelte Fläche des Polygons

$$\begin{aligned} 2F = \; & a_1 a_2 \sin A_2 - a_1 a_3 \sin(A_2+A_3) + \ldots \mp a_1 a_{n-1} \sin(A_1+\ldots+A_{n-1}) \\ & + a_2 a_3 \sin A_3 - a_2 a_3 \sin(A_3+A_4) + \ldots \pm a_2 a_{n-1} \sin(A_2+\ldots+A_{n-1}) \\ & + a_3 a_4 \sin A_4 - a_3 a_5 \sin(A_4+A_5) + \ldots \mp a_3 a_{n-1} \sin(A_3+\ldots+A_{n-1}) \\ & + - - - - - - - - - - - - - - - \\ & + a_{n-2} a_{n-1} \sin A_{n-1} \end{aligned} \tag{6}$$

Wir haben also die Fläche des Polygons ausgedrückt durch $(n-1)$ Seiten, und durch $(n-2)$ Winkel.

Aus dieser allgemeinen Formel kann man nun durch Spezialisirung des Zeigers n, d. i. der Anzahl der Seiten des Polygons die Formeln für die Fläche des Vierecks, Fünfecks 2c. hinschreiben.*)

---

*) Trotz meines fleißigen Suchens in den Lehrbüchern und Journalen der Mathematik fand ich nirgends diese allgemeine Methode. Auch mehrere Fachmänner, denen ich diese Abhandlung vorlegte, bemerkten, daß ihnen ein ähnlicher Weg nicht bekannt sei. Erst nachdem der Druck schon vorbereitet war, erhielt ich von einem tüchtigen Fachmanne die Nachricht, daß Dienger in seiner „Polygonometrie" einen ähnlichen Weg einschlug.
