Ueber die

razionale Darstellung der Gleichungen,

von

Professor Dr. Hartmann E. v. Franzenshuld.

Einflußreich auf das Gedeihen der Wissenschaft ist das Streben, das System der mathematischen Lehren durch zweckmäßige Behandlung solcher allgemeiner Probleme, über deren Auflösung irrige Ansichten herrschen, zu vervollkommnen; denn dadurch erhält die Wissenschaft offenbar einen reellen Gewinn und es wird derselben ihr eigenthümlicher Charakter und ihre Würde bewahrt. Ein Problem der genannten Art ist die razionale Darstellung der Gleichungen. *)

Um der an unseren Realschulen studierenden Jugend, bei welcher die Vorliebe zur Mathematik unverkennbar ist, über die Behandlung der erwähnten Aufgabe eine gründliche Belehrung zu gewähren, wollen wir unser Augenmerk auf diesen Gegenstand richten, und die Auflösung des obigen Problems zur wissenschaftlichen Klarheit erheben. Die hieraus entspringende Theorie ist jedoch zu umfangreich, als daß sie in diesen Blättern eine erschöpfende Darstellung finden könnte; es soll demnach nur ein Haupttheil unserer dießfälligen Ergebnisse hier entwickelt werden, und die weitere Würdigung dieses Gegenstandes einer späteren Gelegenheit vorbehalten bleiben.

§. 1. Razionale Darstellung der Gleichung

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\ .\ .\ .\ .\ +\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}=0$$

in welcher $a_1, a_2, a_3, \ .\ .\ .\ a_{n-1}, a_n$ keine Wurzelgrößen enthalten.

---

*) Schon Fermat hat dem Descartes die Gleichung

$$\sqrt{ab-a^2}+\sqrt{a^2+ab+z^2}+\sqrt{am}+\sqrt{d^2-a^2}-\sqrt{ar+a^2}=ab$$

zur Befreiung von aller Irrazionalität vorgelegt (Klügels mathematisches Wörterbuch, II. Band, Seite 954 und Schulz von Strasnicky, Lehrbuch der Mathematik 1. Band, Seite 194); allein die Aufgabe blieb unaufgelöst und Herr Professor Schulz sagt hierüber an jenem Orte: »Descartes hielt die Auflösung dieser Aufgabe für sehr leicht, worin er sich aber stark irrte; denn die razionale Endgleichung hat nicht weniger als 359026206 Glieder.«

Der berühmte Descartes hatte aber nicht so ganz unrecht; denn aus §. 2 dieser Abhandlung geht klar hervor, daß die gesuchte Gleichung durch fünfmaliges zweckmäßiges Erheben zur zweiten Potenz gewonnen werde und im §. 3 ist das Verfahren wirklich ausgeführt worden.

Es sei der Kürze wegen

$$\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \dots + \sqrt{a_n} = b;$$

so ergiebt sich

$$\sqrt{a_1} + b = o, \text{ daher } \sqrt{a_1} = -b, \text{ also } a_1 = b^2 \quad (1)$$

die von $\sqrt{a_1}$ freie Gleichung. Ist ferner

$$\sqrt{a_3} + \sqrt{a_4} + \dots + \sqrt{a_n} = c,$$

so hat man offenbar $b = c + \sqrt{a_2}$, also

$$b^2 = a_2 + c^2 + 2c\sqrt{a_2},$$

demnach durch Substituzion dieses Wertes in die Gleichung (1)

$$a_2 - a_1 + c^2 = -2c\sqrt{a_2}, \text{ somit}$$

$$(a_2 - a_1 + c^2)^2 = 4\, a_2\, c^2 \ldots \quad (2)$$

die von $\sqrt{a_2}$ befreite Gleichung. Um aus dieser $\sqrt{a_3}$ wegzuschaffen, wollen wir

$$\sqrt{a_4} + \sqrt{a_5} + \dots + \sqrt{a_n} = d$$

setzen, so wird $c = d + \sqrt{a_3}$ also

$$c^2 = a_3 + d^2 + 2d\sqrt{a_3}$$

und die Gleichung (2) geht nun in folgende über

$$(a_3 + a_2 - a_1 + d^2 + 2d\sqrt{a_3})^2 = 4a_2\,(a_3 + d^2 + 2d\sqrt{a_3}).$$

Ordnet man diese Gleichung nach den Potenzen $\sqrt{a_3}$ so folgt, wenn

$$(a_3 + a_2 - a_1 + d^2)^2 + 4\,(a_3 d^2 - a_2\, a_3 - a_2\, d^2) = A \text{ und}$$

$$4\, d\, (a_1 + a_2 - a_3 - d^2) = B$$

gesetzt wird

$$A = B\sqrt{a_3}, \text{ also ist } A^2 = a_3\, B^2 \quad (3)$$

die $\sqrt{a_3}$ nicht enthaltende Gleichung.

Ordnet man dieselbe nach den Potenzen von d so ergibt sich, wenn

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2\,(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) = C,$$

$$4\,[a_1^2 a_3 + a_2^2 a_3 + a_2 a_3^2 + a_1 a_2^2 + a_1 a_3^2 + a_1^2 a_2 - 10\, a_1 a_2 a_3 - a_1^3 - a_2^3 - a_3^3] = D,$$

$$6\,(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 4\,(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) = E,$$

$$-4\,(a_1 + a_2 + a_3) = F$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$C + D\,d^2 + E\,d^4 + F\,d^6 + d^8 = o. \quad (4)$$

Nun sei

$$\sqrt{a_5} + \sqrt{a_6} + \dots + \sqrt{a_n} = f,$$

so wird

$$d = f + \sqrt{a_4},$$

und durch Substituzion dieses Wertes in die Gleichung (4) folgt, wenn man die Potenzen von d gehörig entwikelt, ferner

$$C + D\,(a_4 + f^2) + E\,(a_4^2 + 6\, a_4 f^2 + f^4) +$$
$$+ F\,(a_4^3 + 15\, a_4^2 f^2 + 15\, a_4 f^4 + f^6) + a_4^4 + 28\, a_4^3 f^2 +$$
$$+ 70\, a_4^2 f^4 + 28\, a_4 f^6 + f^8 = G$$

und

$$2\,Df + 4\,Ef\,(a_4 + f^2) + 2\,Ff\,(3\, a_4^2 + 10\, a_4 f^2 + 3\, f^4)$$
$$+ 8\, f\,(a_4 + f^2)(a_4^2 + 6\, a_4 f^2 + f^4) = H$$

setzt, der Ausdruck

$$G + H\sqrt{a_4} = 0, \text{ somit } G^2 = a_4 H^2$$

die von $\sqrt{a_4}$ befreite Gleichung.

Fährt man auf die hier gezeigte Weise fort, ist klar, daß die aufgestellte Gleichung

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_n} = 0$$

von sämmtlichen darin vorkommenden Wurzelgrößen befreit wird.

§. 2. Kürzere Darstellung der entwickelten Methode.

Die bereits betrachtete Gleichung

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_n} = 0$$

gibt, wenn aus derselben $\sqrt{a_1}$ entfernt wird,

$$a_1 = (\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_n})^2;$$

entwickelt man nun das angezeigte Quadrat, indem man die Summe

$$\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_n} = \sqrt{a_2} + (\sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_n})$$

als ein Binom betrachtet, dann die Gleichung nach den Potenzen von $\sqrt{a_2}$ ordnet, so ergibt sich offenbar ein Ausdruck von der Form

$$A + B\sqrt{a_2} = 0$$

in welchem die von $\sqrt{a_2}$ freien Größen A und B durch wirkliche Ausführung der genannten Operazion gefunden werden. Erhebt man die hieraus folgende Gleichung

$$A = -B\sqrt{a_2}$$

auf die zweite Potenz, so hat man die von $\sqrt{a_2}$ befreite Gleichung

$$A^2 = a_2 B^2,$$

in welcher die Ausdrücke A und B nur mehr die Wurzelgrößen

$$\sqrt{a_3}, \sqrt{a_4}, \sqrt{a_5} \ldots \sqrt{a_n}$$

enthalten. Werden die Quadrate von A und B entwickelt, und ordnet man hierauf die Gleichung nach den Potenzen von $\sqrt{a_3}$, so ergibt sich, wie man sieht, eine Gleichung von der Form

$$C + D\sqrt{a_3} = 0,$$

in welcher die leicht zu findenden Größen C und D bloß die Wurzeln

$$\sqrt{a_4}, \sqrt{a_5}, \ldots \sqrt{a_n}$$

enthalten. Aus dieser Gleichung folgt nun

$$C^2 = a_3 D^2.$$

Auf dieselbe Art werden auch alle folgenden Wurzelgrößen nach einander weggeschafft, und es geht nun aus dieser Methode ganz deutlich hervor, daß durch jedesmaliges Quadriren eine der, in der Gleichung

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_n} = 0$$

vorkommenden Wurzeln wegfällt, somit durch n maliges zweckmäßiges Erheben zur zweiten Potenz die Gleichung in vollkommen razionaler Form erscheinen müsse.

§. 3. Razionale Darstellung der Fermatschen Gleichung.

Betrachtet man die Gleichung

$$\sqrt{ab - a^2} + \sqrt{(a^2 + ad + z^2)} + \sqrt{am} + \sqrt{d^2 - a^2} - \sqrt{ar + a^2} = ab,$$

welche fünf Wurzelgrößen enthält, so zeigt sich, daß sie durch fünfmaliges zweckmäßiges Quadriren, und zwar ganz nach den in §. 1 und 2 gegebenen Belehrungen razional gemacht wird. Man kann aber hiebei auch auf folgende Art verfahren.

Setzt man der Kürze wegen

$$ab - a^2 = A,\ a^2 + ad + z^2 = B,\ am = C,$$
$$d^2 - a^2 = D,\ ar + a^2 = E \text{ und } ab = F,$$

so läßt sich die aufgestellte Gleichung auf folgende Weise einfacher ausdrücken:

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D} - \sqrt{E} = F,$$

und aus dieser ergibt sich nun

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} = F - \sqrt{D} + \sqrt{E}.$$

Wird nun diese Gleichung auf die zweite Potenz erhoben, und

$$\alpha_1 = A + B + C - D - E - F^2$$

gesetzt, so hat man

$$\alpha_1 + 2(\sqrt{AB} + \sqrt{DE}) = 2(F\sqrt{E} - F\sqrt{D} - \sqrt{AC} - \sqrt{BC})$$

Durch nochmaliges Quadriren wird, wenn man

$$\alpha_2 = \alpha_1^2 + 4(AB - AC - BC + DE - DF^2 - EF^2)$$

sein läßt, die Gleichung

$$\alpha_2 + 4(\alpha_1 - 2C)\sqrt{AB} + 4(\alpha_1 - 2F^2)\sqrt{DF} + 8\sqrt{ABDE}$$
$$= 8F(\sqrt{ACD} - \sqrt{ACE} + \sqrt{BCD} - \sqrt{BCE})$$

gefunden; und aus dieser folgt, wenn sie auf die zweite Potenz erhoben, ferner wenn

$$\alpha_2^2 + 16AB(\alpha_1 - 2C)^2 + 16DE(\alpha_1 - 2F^2)^2$$
$$+ 64ABDE - 64F^2(ACD + ACE + BCD + BCE) = \alpha_3,$$
$$8\alpha_2(\alpha_1 - 2C) + 64DE(\alpha_1 - 2F^2) - 128CF^2(D + E) = \beta_1,$$
$$-8\alpha_2(\alpha_1 - 2F^2) - 64AB(\alpha_1 - 2C) - 128CF^2(A + B) = \beta_2,$$
$$-16\alpha_2 - 32(\alpha_1 - 2C)(\alpha_1 - 2F^2) - 256CF^2 = \beta_3,$$

gesetzt wird,

$$\alpha_3 + \beta_1\sqrt{AB} = \beta_2\sqrt{DE} + \beta_3\sqrt{ABDE}.$$

Das Quadrat dieser Gleichung gibt, wenn man den Werth

$$\alpha_3^2 + AB\beta_1^2 - DE\beta_2^2 - ABDE\beta_3^2$$

mit α_4 bezeichnet, den Ausdruck

$$\alpha_4 = 2(DE\beta_2\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\sqrt{AB},$$

und hieraus folgt nun die verlangte razionale Endgleichung

$$\alpha_4^2 = 4AB(DE\beta_2\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2$$

welche also, wie man sieht, auch nach dieser Methode behandelt, durch fünfmaliges zweckmäßiges Erheben zur zweiten Potenz gewonnen wurde.

§. 4. Behandlung verwickelterer Fälle.

Es können noch weit schwierigere Probleme der betrachteten Art eine vollkommen genügende und einfache Auflösung finden, bevor wir jedoch unsere Aufmerksamkeit auf einige derselben richten, wollen wir die Potenzen

$$(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})^{2n} \text{ und } (\sqrt{A} \pm \sqrt{B})^{2n+1}$$

entwickeln, und den sich ergebenden Resultaten die zweckmäßigste Form ertheilen.

Bezeichnet man die zur 2n ten Potenz eines Binoms gehörigen Binomial-Coeffizienten der Reihe nach durch

$$\binom{2n}{1},\ \binom{2n}{2},\ \binom{2n}{3} \ldots,$$

daher dem Sinne dieser Bezeichnung gemäß $\binom{2n}{0} = 1$ angenommen werden muß; so ergibt sich, wie man leicht sieht, für die Entwickelung des Ausdruckes

$$(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})^{2n}$$

wenn

$$A^{n} + \binom{2n}{2} A^{n-1} B + \binom{2n}{4} A^{n-2} B^{2} + \binom{2n}{6} A^{n-3} B^{3} + \ldots = P$$

und

$$\binom{2n}{1} A^{n-1} + \binom{2n}{3} A^{n-2} B + \binom{2n}{5} A^{n-3} B^{2} + \ldots = Q$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})^{2n} = P \pm Q\sqrt{AB}.$$

Wird aber die Potenz

$$(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})^{2n+1}$$

entwickelt, so ergibt sich wenn man

$$A^{n} + \binom{2n+1}{2} A^{n-1} B + \binom{2n+1}{4} A^{n-2} B^{2} + \ldots = R$$

und

$$\binom{2n+1}{1} A^{n} + \binom{2n+1}{3} A^{n-1} B + \binom{2n+1}{5} A^{n-2} B^{2} + \ldots = S$$

setzt, das Resultat

$$(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})^{2n+1} = R\sqrt{A} \pm S\sqrt{B}.$$

Wir gehen nun zur Auflösung einiger spezieller Probleme über, wobei wir uns jedoch nur ganz kurz fassen wollen.

1. Hat man die Gleichung

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{6} + (\sqrt{c} - \sqrt{d})^{4} = g$$

razional darzustellen, so entwickle man die vorkommenden Potenzen, und es ergibt sich, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, für den Ausdruck

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{6}$$

ein Resultat von der Form

$$p + q\sqrt{ab}$$

in welchem p und q razionale Größen vorstellen.

Auf gleiche Weise hat man für die Entwicklung der Potenz

$$(\sqrt{c} - \sqrt{d})^{4}$$

einen Ausdruck von der Form

$$r - s\sqrt{cd}.$$

Die aufgestellte Gleichung geht also in folgende über

$$p + q\sqrt{ab} + r - s\sqrt{cd} = g$$

deren weitere Behandlung höchst einfach ist.

2. Um die Gleichung

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{5} - (\sqrt{c} - \sqrt{d})^{7} = g$$

auf die einfachste Weise von den vorhandenen Wurzelgrößen zu befreien, ist es ebenfalls zweckmäßig die angezeigten Potenzen zu entwickeln, wobei der Ausdruck

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{5}$$

zu einem Resultate von der Form

$$p\sqrt{a} + q\sqrt{b},$$

und die Potenz

$$(\sqrt{c} - \sqrt{d})^{7}$$

auf ein Ergebniß von der Form

$$r\sqrt{c} - s\sqrt{d}$$

führt; man erhält demnach die Gleichung

$$p\sqrt{a}+q\sqrt{b}-r\sqrt{c}+s\sqrt{d}=g$$

deren razionale Darstellung aus dem Vorhergehenden bekannt ist.

3. Die rationale Darstellung der Gleichung

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4+(\sqrt{c}+\sqrt{d})^5=g$$

wird am zweckmäßigsten ausgeführt, indem man die vorkommenden Potenzen entwickelt, wodurch die Ausdrücke

$$p-q\sqrt{ab} \text{ und } r\sqrt{c}+s\sqrt{d}$$

in welchen p, q, r und s leicht zu bestimmende rationale Zahlen bezeichnen, erhalten werden; und nun ergibt sich aus der aufgestellten Gleichung folgende

$$p-q\sqrt{ab}+r\sqrt{c}+s\sqrt{d}=g,$$

aus welcher die Wurzelgrößen ohne Mühe weggeschafft werden können.

4. Um die Gleichung

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^5+(\sqrt{d}+\sqrt{f})^7=g$$

razional zu machen, setze man

$$\sqrt{b}+\sqrt{c}=h;$$

so ergibt sich

$$(h+\sqrt{a})^5+(\sqrt{d}+\sqrt{f})^7=g.$$

Die Entwicklung der vorkommenden Potenzen gibt nun den Ausdruck

$$p+q\sqrt{a}+r\sqrt{d}+s\sqrt{f}=g,$$

in welchem r und s razionale Zahlen vorstellen, p und q aber noch die Größe h enthalten. Diese Gleichung läßt sich durch dreimaliges Quadriren von $\sqrt{a}$, $\sqrt{d}$ und $\sqrt{f}$ befreien. Wird die erhaltene Gleichung nach den Potenzen von h geordnet und dann statt h der entsprechende Werth substituirt, so findet man eine neue Gleichung, welche durch zweimaliges zweckmäßiges Erheben zur zweiten Potenz auch von $\sqrt{b}$ und $\sqrt{c}$ befreit erscheint.

Auf ähnliche Weise wird auch die Gleichung

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^4+(\sqrt{d}+\sqrt{f}+\sqrt{g})^6=h$$

razional gemacht.

5. Gleichungen von der Form

$$\sqrt[m]{a}+\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots\ldots+\sqrt{a_n}=b$$

lassen sich nun auch razional darstellen, denn man erhält

$$a=(b-\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}-\ldots-\sqrt{a_n})^m$$

einen Ausdruck, welcher durch n maliges Quadriren die razionale Form annimmt.

6. Hat man die Gleichung

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4+\sqrt[5]{(\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{f})^3}=g$$

razional zu machen, so ergibt sich aus derselben

$$(\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{f})^3=[g-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4]^5.$$

Diese Gleichung wird, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist durch fünfmaliges Quadriren von den darin vorkommenden Wurzelgrößen befreit.

Auch Gleichungen von der Form

$$\sqrt[m]{(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots\ldots+\sqrt{a_n})^r}\pm\sqrt[p]{(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\ldots+\sqrt{b_s})^q}=0$$

können auf die gezeigte Art von sämmtlichen Wurzelgrößen befreit werden.

Aus der Behandlungsweise der hier betrachteten wenigen Fälle geht hervor, wie auch andere ähnliche Probleme aufgelöst werden können.

§. 5. Gleichungen, die Wurzelgrößen des vierten Grades enthalten.

Gleichungen welche unter der allgemeinen Form

$$\sqrt[4]{a_1} + \sqrt[4]{a_2} + \sqrt[4]{a_3} + \ldots + \sqrt[4]{a_n} = 0$$

stehen, können nun auch razional dargestellt werden, wie hier gezeigt werden soll.

1. Setzt man

$$\sqrt{a_1} = \alpha_1, \sqrt{a_2} = \alpha_2, \sqrt{a_3} = \alpha_3, \ldots \sqrt{a_n} = \alpha_n,$$

so geht obige Gleichung in folgende über

$$\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_3} + \ldots + \sqrt{\alpha_n} = 0$$

welche, wie bereits (§. 1 und 2) gelehrt wurde, durch n maliges Quadriren von den vorhandenen Wurzelgrößen befreit wird. Die sich ergebende Gleichung ist aus den Größen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$$

auf eine bestimmte Weise zusammen gesetzt; daher enthält dieselbe noch die Wurzelgrößen

$$\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \ldots \sqrt{a_n},$$

zu deren Wegschaffung die Gleichung neuerdings n mal auf die zweite Potenz erhoben werden muß, worauf sich die gesuchte razionale Endgleichung ergibt.

Die aufgestellte Gleichung wird also durch 2 n maliges zweckmäßiges Quadriren auf eine rationale Form gebracht.

2. Das eben gezeigte Verfahren ist jedoch nicht die einzige Methode, nach welcher eine Gleichung der hier betrachteten Art razional gemacht werden kann; denn es könnten noch verschiedene andere ebenfalls zum Ziele führende, erklärt werden, von welchen wir aber nur eine, nicht minder zweckmäßige, hier entwickeln wollen. Bevor wir aber zur Auseinandersetzung dieser Methode schreiten, ist es vortheilhaft, die razionale Darstellung der Gleichung

$$b\sqrt[4]{a^3} + c\sqrt[4]{a^2} + d\sqrt[4]{a} = f$$

auszuführen. Aus derselben folgt

$$b\sqrt[4]{a^3} + d\sqrt[4]{a} = f - c\sqrt{a}$$

und hieraus, wenn man diese Gleichung auf die zweite Potenz erhebt und die $\sqrt{a}$ enthaltenden Glieder auf eine Seite des Gleichheits-Zeichens bringt

$$(ab^2 + d^2 + 2fc)\sqrt{a} = ac^2 - 2abd + f^2.$$

Wird dieser Ausdruck nochmals zur zweiten Potenz erhoben, so ergibt sich die razionale Gleichung

$$a(ab^2 + d^2 + 2fc)^2 = (ac^2 - 2abd + f^2)^2,$$

welche also durch zweimaliges Quadriren gewonnen wurde.

Kehren wir nun zur Betrachtung der früher aufgestellten Gleichung

$$\sqrt[4]{a_1} + \sqrt[4]{a_2} + \sqrt[4]{a_3} + \ldots + \sqrt[4]{a_n} = 0$$

zurück, so ergibt sich aus derselben

$$a_1 = (\sqrt[4]{a_2} + \sqrt[4]{a_3} + \ldots + \sqrt[4]{a_n})^4.$$

Wird die angezeigte vierte Potenz, indem man den Ausdruck

$$\sqrt[4]{a_2} + \sqrt[4]{a_3} + \ldots + \sqrt[4]{a_n} = \sqrt[4]{a_2} + (\sqrt[4]{a_3} + \ldots + \sqrt[4]{a_n})$$

als ein Binom betrachtet, entwickelt und die auf Null reduzirte Gleichung nach den Potenzen von $\sqrt[4]{a_2}$ geordnet, so findet man eine Gleichung von der Form

$$b\sqrt[4]{a_2}^3 + c\sqrt[4]{a_2}^2 + d\sqrt[4]{a_2} + f = 0$$

in welcher b, c, d und f Werthe bezeichnen, welche die Wurzelgrößen

$$\sqrt[4]{a_3}, \sqrt[4]{a_4}, \ldots \sqrt[4]{a_n}$$

enthalten, und durch Ausführung der genannten Operationen gefunden werden. Diese Gleichung wird nun, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, durch zweimaliges Quadriren von der Größe $\sqrt[4]{a_2}$ befreit. Ordnet man die nun entstandene Gleichung nach den Potenzen von $\sqrt[4]{a_3}$ so nimmt sie offenbar die Form

$$g\sqrt[4]{a_3}^3 + h\sqrt[4]{a_3}^2 + k\sqrt[4]{a_3} + m = 0$$

an, in welcher die Zahlen g, h, k und m nur mehr die Wurzelgrößen

$$\sqrt[4]{a_4}, \sqrt[4]{a_5}, \ldots \sqrt[4]{a_n}$$

enthalten. Aus dieser Gleichung wird, durch zweimaliges Quadriren $\sqrt[4]{a_3}$ entfernt. Fährt man auf diese Weise so lange fort, bis sämmtliche Wurzelgrößen wegfallen, was offenbar durch n malige Anwendung des gezeigten Verfahrens ausgeführt wird; so geht daraus hervor, daß obige Gleichung auch nach dieser Methode behandelt, durch 2 n maliges Quadriren die razionale Form erhält.

3. Auch komplizirtere Gleichungen der hier betrachteten Art können, wie eben erklärt wurde, razional dargestellt werden, was wir an einem Beispiel zeigen wollen.

Es seien aus der Gleichung

$$(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c})^5 + \sqrt[4]{d} = f$$

sämmtliche Wurzelgrößen wegzuschaffen. Setzt man

$$\sqrt{a} = \alpha, \sqrt{b} = \beta, \sqrt{c} = \gamma \text{ und } \sqrt{d} = \delta,$$

so ergibt sich die Gleichung

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})^5 + \sqrt{\delta} = f$$

welche nach §. 4. durch viermaliges Quadriren von allen vorhandenen Wurzeln befreit wird. Werden in dem erhaltenen Ausdrucke statt der Größen α, β, γ und δ die entsprechenden Werthe substituirt; so findet man eine Gleichung, welche, indem man sie neuerdings viermal zur zweiten Potenz erhebt, in razionaler Form erscheint.

Es läßt sich aber das Verfahren auch auf folgende Art einrichten. Man ordne die gegebene Gleichung nach den Potenzen von $\sqrt[4]{a}$ und schaffe diese Wurzelgröße auf die bereits gezeigte Weise weg; hierauf werden ebenso nach einander auch die übrigen Wurzeln aus der Gleichung entfernt. Die gegebene Gleichung wird also, wie nach der vorigen Methode, so auch nach dieser, durch achtmaliges Quadriren von aller Irrazionalität befreit.

Es ist einleuchtend, daß auch solche Gleichungen, welche besondere Fälle der allgemeinen Form

$$\sqrt[m]{a} + \sqrt[4]{a_1} + \sqrt[4]{a_2} + \ldots + \sqrt[4]{a_n} = b$$

sind, ebenfalls durch Anwendung des erklärten Verfahrens razional gemacht werden können.

§. 6. Gleichungen die Wurzelgrößen des achten Grades enthalten.

Es seien aus der Gleichung

$$\sqrt[8]{a_1} + \sqrt[8]{a_2} + \sqrt[8]{a_3} + \ldots + \sqrt[8]{a_n} = 0$$

sämmtliche Wurzelgrößen zu entfernen.

1. Setzt man

$$\sqrt{a_1} = \alpha_1,\ \sqrt{a_2} = \alpha_2,\ \sqrt{a_3} = \alpha_3,\ \ldots\ \sqrt{a_n} = \alpha_n$$

so gibt die aufgestellte Gleichung folgende

$$\sqrt[4]{\alpha_1} + \sqrt[4]{\alpha_2} + \sqrt[4]{\alpha_3} + \ldots + \sqrt[4]{\alpha_n} = 0,$$

welche nach §. 5 von allen vorhandenen Wurzelgrößen durch 2 n maliges Quadrieren befreit wird. Substituirt man in die sich ergebende Gleichung statt

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots \alpha_n$$

die entsprechenden Werte, so wird eine Gleichung erhalten, welche durch n maliges Quadrieren in razionaler Form erscheint. Die gegebene Gleichung wird also durch 3n maliges zweckmäßiges Erheben zur zweiten Potenz razional gemacht.

2. Das zur razionalen Darstellung erforderliche Verfahren läßt sich aber auch auf folgende Weise einleiten.

Aus der obigen Gleichung folgt nämlich

$$a_1 = (\sqrt[8]{a_2} + \sqrt[8]{a_3} + \ldots + \sqrt[8]{a_n})^8$$

und diese gibt, wenn sie nach den Potenzen von $\sqrt[8]{a_2}$ geordnet wird, einen Ausdruck von der Form

$$b\sqrt[8]{a_2^7} + c\sqrt[8]{a_2^6} + d\sqrt[8]{a_2^5} + f\sqrt[8]{a_2^4} + g\sqrt[8]{a_2^3} + h\sqrt[8]{a_2^2} + k\sqrt[8]{a_2} + q = 0,$$

wo b, c, d, . . . Werthe vorstellen, welche die Wurzelgrößen

$$\sqrt[8]{a_3},\ \sqrt[8]{a_4},\ \sqrt[8]{a_5},\ \ldots \sqrt[8]{a_n}$$

enthalten, und durch wirkliche Ausführung der genannten Operazion gefunden werden. Aus dieser Gleichung folgt

$$b\sqrt[8]{a_2^7} + d\sqrt[8]{a_2^5} + g\sqrt[8]{a_2^3} + k\sqrt[8]{a_2} = -c\sqrt[4]{a_2^3} - f\sqrt[4]{a_2^2} - h\sqrt[4]{a_2} - q,$$

wird nun dieselbe auf die zweite Potenz erhoben, so ergibt sich, wenn man

$$a_2 b^2 + g^2 + 2dk - 2cq - 2fh = A,$$
$$2a_2 bd + 2gk - a_2 c^2 - h^2 - 2fq = B,$$
$$a_2 d^2 + k^2 + 2a_2 bg - 2a_2 cf - 2hq = C,$$
$$2a_2 bk + 2a_2 dg - a_2 f^2 - q^2 - 2a_2 ch = D$$

setzt, die Gleichung

$$A\sqrt[4]{a_2^3} + B\sqrt{a_2} + C\sqrt[4]{a_2} + D = 0,$$

welche nach §. 5, 2 durch zweimaliges Quadrieren razional gemacht wird. Ordnet man den erhaltenen Ausdruck nach den Potenzen von $\sqrt[8]{a_3}$, so wird auf dieselbe Weise auch diese Wurzelgröße aus der Gleichung weggeschafft, und die nämliche Methode wiederholt angewendet, führt endlich zur gesuchten razionalen Endgleichung; diese wird also, wie vorhin, auch nun durch zweckmäßiges 3 n maliges Quadrieren gewonnen.

Auch verwickeltere hieher gehörige Fälle wie z. B.

$$(\sqrt[8]{a} + \sqrt[8]{b} + \sqrt[8]{c})^5 + \sqrt[8]{d} = g,$$

$$(\sqrt[8]{a} + \sqrt[8]{b})^7 + \sqrt[4]{(\sqrt[8]{c} - \sqrt[8]{d} + \sqrt[8]{f})^3} = g,$$

$$\sqrt[m]{a} + \sqrt[8]{a_1} + \sqrt[8]{a_2} + \ldots + \sqrt[8]{a_n} = b,$$

können auf ähnliche Weise behandelt werden.

§. 7. Razionale Darstellung der allgemeinsten Gleichung der betrachteten Art.

Alle bereits behandelten Gleichungen, in welchen sämmtliche Wurzel-Exponenten Potenzen von 2 sind, können offenbar als besondere Fälle der allgemeinen Form

$$\sqrt[m]{a_1} + \sqrt[m]{a_2} + \sqrt[m]{a_3} + \ldots + \sqrt[m]{a_n} = b$$

wo $m = 2^r$ ist, betrachtet werden; und diese wollen wir nun einer nähern Untersuchung unterziehen.

1. Setzt man

$$s = 2^{r-1} \text{ und } \sqrt[s]{a_1} = \alpha_1,\ \sqrt[s]{a_2} = \alpha_2,\ \sqrt[s]{a_3} = \alpha_3, \ldots \sqrt[s]{a_n} = \alpha_n,$$

so geht obiger Ausdruck in folgenden über

$$\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_3} + \ldots + \sqrt{\alpha_n} = b,$$

aus welchem durch $n$maliges Quadrieren alle Wurzelgrößen entfernt werden. Die erhaltene Gleichung ist aus den Größen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots \alpha_n$$

zusammengesetzt, enthält also bloß Wurzelgrößen des Grades 2^{r-1}. Auf ähnliche Weise werden dieselben auf den Grad 2^{r-2} reduzirt, und fährt man auf diese Art fort, bis die erklärte Methode $r$mal angewendet wurde; so ergibt sich die gesuchte razionale Endgleichung, welche also durch $n\,r$maliges Erheben zu zweiten Potenz, erhalten wird.

2. Die razionale Darstellung jener Gleichung kann aber auch auf folgende Art ausgeführt werden. Aus derselben folgt nämlich

$$a_1 = (b - \sqrt[m]{a_2} - \sqrt[m]{a_3} - \ldots - \sqrt[m]{a_n})^m$$

und hieraus ergibt sich, wenn die angezeigte Potenz entwickelt, dann die auf Null reduzirte Gleichung nach der Größe $\sqrt[m]{a_2}$ geordnet wird, ein Ausdruck von der Form

$$c_1 \sqrt[m]{a_2^{m-1}} + c_2 \sqrt[m]{a_2^{m-2}} + c_3 \sqrt[m]{a_2^{m-3}} + \ldots + c_{m-2} \sqrt[m]{a_2^2} + c_{m-1} \sqrt[m]{a_2} + c_m = 0,$$

in welchem die leicht zu bestimmenden Werthe von

$$c_1,\ c_2,\ c_3 \ldots \ldots c_m$$

bloß Potenzen der Wurzelgrößen

$$\sqrt[m]{a_3},\ \sqrt[m]{a_4}, \ldots \sqrt[m]{a_n}$$

enthalten. Diese Gleichung gibt nun

$$c_1 \sqrt[m]{a_2^{m-1}} + c_3 \sqrt[m]{a_2^{m-3}} + \ldots + c_{m-1} \sqrt[m]{a_2} = - c_2 \sqrt[m]{a_2^{m-2}} - c_4 \sqrt[m]{a_2^{m-4}} - \ldots - c_{m-2} \sqrt[m]{a_2^2} - c_m$$

und aus dieser entsteht, mit Berücksichtigung der früher angegebenen Bedeutung von m, durch r maliges zweckmäßiges Quadrieren, wie im §. 5 und 6 für $r = 2$ und $r = 3$ gezeigt wurde, die von $\sqrt[m]{a_2}$ freie Gleichung. Auf dieselbe Art werden auch die übrigen Wurzelgrößen aus der erhaltenen Gleichung nach einander entfernt; und es zeigt sich demnach, daß auch nach dieser Methode, die razionale Endgleichung durch n r maliges zweckmäßiges Erheben zur zweiten Potenz, gewonnen wird. Sind die Wurzelexponenten der wegzuschaffenden Größen verschiedene Potenzen von 2, so ist es weder nothwendig noch zweckmäßig, jene Wurzelgrößen gleichnamig zu machen, so wird z. B. die Gleichung

$$\sqrt{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[8]{c} = d$$

mit Beibehaltung der ungleichnamigen Wurzelgrößen, durch 6 maliges zweckmäßges Quadriren razional.

§. 8. Wenn die Wurzel-Exponenten der in der Gleichung vorkommenden Größen, keine Potenz von 2 sind.

1. Das Problem der razionalen Darstellung einer Gleichung läßt sich, wenn die Wurzel-Exponenten keine Potenz von 2 sind, durch das Potenziren allein nicht auflösen; und es ist demnach dann erforderlich, noch zu andern Hilfsmitteln seine Zuflucht zu nehmen. Ist z. B. die Gleichung

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = o$$

von sämmtlichen Wurzelgrößen zu befreien, so erhält man, nach der gewöhnlichen Weise verfahrend

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = -\sqrt[3]{c}$$

und hieraus, wenn diese Gleichung auf die dritte Potenz erhoben wird

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 = -c$$

oder auch

$$3\sqrt[3]{a^2 b} + 3\sqrt[3]{ab^2} = -(a + b + c).$$

Man kann sich nun sehr leicht die Ueberzeugung verschaffen, daß diese Gleichung, wenn sie auch noch so oft auf den Cubus erhoben wird, dennoch nie die razionale Form annimmt; vielmehr die Wurzelgrößen $\sqrt[3]{a^2 b}$ und $\sqrt[3]{ab^2}$ stets in derselben verbleiben. Das Potenzieren allein ist also zur Auflösung des besprochenen Problems nicht hinreichend; wohl aber erreicht man den beabsichtigten Zweck, wenn das Verfahren auf folgende Weise eingerichtet wird.

Zerlegt man das linker Hand des Gleichheitszeichens stehende Binom, indem der gemeinschaftliche Faktor herausgehoben wird, so ergibt sich

$$3\sqrt[3]{ab}\,(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) = -(a + b + c),$$

und hieraus folgt, wenn statt der Summe

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$$

der entsprechende Werth $-\sqrt[3]{c}$ substituirt wird

$$3\sqrt[3]{abc} = a + b + c.$$

Dieser Ausdruck gibt nun, wenn man ihn auf die dritte Potenz erhebt, die gesuchte razionale Endgleichung

$$(a + b + c)^3 - 27\,a\,b\,c = o.$$

2. Wenn auch in den genannten Fällen das Potenziren allein, nicht zur gewünschten razionalen Gleichung führt, so ist doch, wie schon aus dem eben behandelten Beispiele hervorgeht, die Anwendung desselben nicht nur vortheilhaft, sondern auch stets nothwendig; dadurch wird auch nicht selten die Behandlung verwickelter Probleme vereinfacht. Ist z. B. die Gleichung

$$\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}+\sqrt[6]{c}=0$$

razional zu machen, so setze man

$$\sqrt{a}=\alpha, \sqrt{b}=\beta \text{ und } \sqrt{c}=\gamma$$

wodurch sich

$$\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma}=0$$

ergibt, und woraus (nach 1)

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3-27\,\alpha\beta\gamma=0$$

folgt. Dieser Ausdruck gibt nun durch Substituzion die Gleichung

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^3-27\sqrt{abc}=0$$

welche durch dreimaliges zweckmäßiges Erheben zur zweiten Potenz, in razionaler Form erscheint.

Durch Anwendung der erklärten Methoden lassen sich bisweilen Gleichungen auf eine einfache Weise auflösen, während dies ohne Gebrauch derselben kaum thunlich wäre. Dieser Fall findet z. B. bei Bestimmung der unbekannten Größen x, y und z aus den Gleichungen

$$x+y+z=axyz,$$
$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0,$$
$$cx^r y^r z^r+dx^n=b$$

statt, in welchen a, b, c und d gegebene Werte vorstellen. Ebenso läßt sich auch die Aufgabe, aus den Gleichungen

$$x(x+y)(x+z)(y+z)=a,$$
$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}+\sqrt{y+z}+\sqrt{2x}=0,$$
$$(x+y)(x+z)-b\sqrt[m]{y+z}=c$$

die Werte der Unbekannten x, y und z zu berechnen, sehr einfach auflösen; wenn man vor Allem die zweite Gleichung razional darstellt.