Arithmetischer Teil.

„Dreimal mehr", „dreimal weniger".

Unter der Überschrift: „Ein unbarmherzig über Bord zu werfender Ausdruck" weist Hoffmann V 369 auf die Ausdrucksweise: 2, 3, 4mal gröfser oder kleiner als .... hin und fordert, dafs dieselbe „doch ganz aus dem mathematischen Unterricht verschwinden" möchte. Als richtige Ausdrucksweise stellt Hoffmann hin: „2, 3, 4mal so grofs, beziehentlich so klein als ....", oder präziser noch: „das 2-, 3-, 4fache von .... und der 2., 3., 4. Teil von ...." und fügt hinzu, dafs strenggenommen „4 ist dreimal kleiner als 12" doch nur heifsen könne: 4 ist dreimal (was denn dreimal? doch wohl nur dreimal 4!) d. h. also 12 kleiner als 12, das wäre aber 0, also 4 = 0!!!

Für die von Hoffmann gerügten Ausdrucksweisen tritt O. Fischer (Stuttgart) in längeren Ausführungen ein. Die Hauptpunkte dieser Erörterungen wollen wir in Verbindung mit der Erwiderung Hoffmanns VI 279 bringen. Fischer behauptet zunächst, dafs die in Frage stehende Ausdrucksweise sehr wohl berechtigt sei, wenn nur „vorher im Unterrichte eine geeignete Definition gegeben worden sei." Als solche Definitionen gelten ihm:

1. Für das Produkt mA, in welchem m eine Zahl, A eine Zahl oder Gröfse bedeutet, kann der Ausdruck „das $m$fache von A", desgleichen der Ausdruck „$m$mal mehr als A" gebraucht werden.
2. Für den Teilungsquotienten $A:m$, d. h. für diejenige Zahl oder Gröfse, welche mit m multipliziert A zum Produkte gibt, kann der Ausdruck „der $m$te Teil von A", desgleichen der Ausdruck „$m$mal weniger als A" gebraucht werden.

Fischer fügt dem noch hinzu: „Hat man diese Definitionen vorausgeschickt, ist in der angegebenen Weise über den Gebrauch der Ausdrücke Verabredung zustande gekommen, sind also die Ausdrücke „der 4. Teil" und „4mal weniger", beziehentlich „das 4fache" und „4mal mehr" für synonym erklärt worden, so ist von Seite der logischen Klarheit und Sicherheit nichts einzuwenden." Gegen diese Ansicht Fischers wendet sich Hoffmann in seiner Erwiderung, indem er ausführt: „Wenn Herr O. Fischer behauptet, in den Sätzen 1 und 2 (siehe oben) können für das Produkt mA und den Quotienten $\frac{A}{m}$ sowohl das „$m$fache", „der $m$te Teil" als auch jene: $m$mal mehr (weniger) als A gebraucht werden, so ist und bleibt das eben eine unberechtigte Behauptung, so lange man unterläfst, sie durch logische und grammatische Analyse dieser Sätze zu begründen. Diese Behauptung kann aber weder vor dem Richterstuhle der Grammatik noch vor dem der Logik bestehen; denn beide Ausdrucksarten sind nicht nur nicht identisch, sondern der von mir gerügte ist auch grammatisch unvollständig und also unklar, folglich auch inkorrekt. Die angebliche Synonymität ist also gar nicht vorhanden, sondern nur eingebildet. Die Verabredung aber, welche ein Lehrer mit seinen Schülern (Zuhörern) oder ein Autor mit seinen Lesern (ausdrücklich oder stillschweigend) trifft, diese Verabredung kann doch wahrlich nicht eine sprachliche oder logische Inkorrektheit aufheben! Oder ist etwa über den zulässigen Gebrauch dieser Ausdrücke von der Gesamtheit der Mathematiklehrer der gebildeten Nationen oder auch nur von einem Bruchteile derselben eine ausdrückliche Vereinbarung zustande gekommen?" Fischer verteidigt seine Ausdrucksweisen weiter vom Standpunkte der Zweckmäſsigkeit aus. Er behauptet: „Diese Ausdrucksweisen haben sich schon in einem beträchtlichen Teile der Schulklassen Deutschlands eingebürgert und haben auch schon längst internationale Währung erlangt. Die Weltausstellungen 1867 und 1873 haben gezeigt, daſs man in ganz Frankreich, wo Schluſsrechnung getrieben wird, stets schreibt: *trois fois plus, douze fois moins* usw. und ähnlich in England und anderen Ländern." Fischer weist auch noch darauf hin, daſs sich die gerügte Ausdrucksweise „sprachlich viel flieſsender abwickele" als der Ausdruck: das $m$fache, der $m$te Teil. Hoffmann hält dem entgegen: „Die kleine sprachliche Härte in „der $m$te Teil" wird leicht überwunden und verschwindet gegen den groſsen Vorteil der Sicherheit und Präzision, welche diesen Ausdrücken innewohnt" und sagt weiter: „Weltausstellungen und internationale Verbreitung unrichtiger, respektive unklarer Ausdrücke dürften doch streng genommen nicht als Beweise für die Richtigkeit von — weder logisch noch grammatisch zu rechtfertigenden — Ausdrücken vorgebracht werden! Sie beweisen eben weiter nichts, als daſs man auch anderwärts dem Schlendrian sich ergeben hat und daſs Althergebrachtes (Eingerostetes) nur schwer auszurotten ist, weil die *vis inertiae* leider auch im geistigen Leben zu sehr zur Herrschaft gelangt ist." Zur weiteren Rechtfertigung seiner Ausdrucksweisen sagt Fischer: „Die Gegner des Ausdrucks (mal mehr, mal weniger) fassen „4 dreimal" zusammen, trotzdem daſs „ist" dazwischen steht; die Anhänger des Ausdrucks dagegen fassen „dreimal kleiner" zusammen. Die Gegner fassen „dreimal" als Attribut zu dem Subjekt 4, was angesichts des dazwischen geschobenen „ist" doppelt gewagt erscheint; die Anhänger des Ausdrucks aber rechnen „dreimal kleiner" zum Prädikat, was auch grammatisch durch die Stellung der Kopula geboten ist. Der eine interpretiert: die dreimal genommene Zahl 4 ist kleiner als 12; der andere: die Zahl 4 ist eine kleinere als die Zahl 12 und zwar eine dreimal kleinere." „Wird denn aber" — so erwidert Hoffmann — „dadurch die Sache klarer? Fragt man denn nicht immer wieder: was (oder genauer: wieviel) denn dreimal? Das heiſst: den Knoten auf die Seite schieben, nicht aber ihn lösen! Es ist und bleibt in dem Ausdrucke Unklarheit. Denn das Wörtchen „mehr" drückt eine Vergröſserung aus und der ganze Satz „12 ist dreimal mehr als 4" eine Vergleichung, welche in die arithmetische Zeichensprache übersetzt, die Gleichung gibt:

$$12 = 4 + 3x.$$

Wie groſs ist nun aber hierin x? Nehmen wir an, x sei $= 4$*), was doch bei der Unbestimmtheit des Ausdrucks am nächsten liegt, so verwandelt sich obige Gleichung in:

$$12 = 4 + 3 \cdot 4 = 16 \text{ (also } 12 = 16\text{)}.$$

Ebenso gibt der zweite Satz „3 ist viermal weniger als 12" die Gleichung:

$$3 = 12 - 4x$$

und für $x = 3$ wird

$$3 = 12 - 12 = 0.$$

Wie weit klarer, präziser und einfacher ist doch der Ausdruck „12 ist das dreifache von 4", in Gleichung: $12 = 3 \cdot 4$, und ebenso der andere „3 ist der vierte Teil von 12", in Gleichung $3 = \frac{12}{4}$!"

Einen besonders glücklichen Einwand gegen die Hoffmannsche Ausdrucksweise glaubt Fischer zu bringen, indem er den Fall hervorhebt, daſs in $mA = B$ m gleich 1 oder gleich einem Bruche, insbesondere einem echten Bruche wird. Er sagt: „In dem Beispiele „3 ist $\frac{1}{9}$mal mehr als 27" ist ja die von mir angewendete Ausdrucksweise unzulässig, es versagt aber auch die

*) Obige Gleichung als Bestimmungsgleichung aufgefaſst, gäbe $x = \frac{8}{3}$.

gegnerische Ausdrucksweise völlig! Denn die Frage „das Wievielfache ist 9 von 27?" mufs doch jeder für unsinnig erklären!" Auf diesen Angriff Fischers antwortet Hoffmann wie folgt: „Woher weifs denn Herr Fischer, dafs ich die Ausdrücke „das $m$fache", „der $m$te Teil" auch ausdehne auf die Fälle, wo $m < 1$ ist, dafs ich also z. B. sage: „Das $\frac{1}{3}$fache, oder gar der $\frac{1}{3}$te Teil." Ich vermeide vielmehr in diesem Falle diese Ausdrücke, obwohl man bei der heutigen Sucht alle Grenzen und Scheidewände der Begriffe einzureifsen und auch Widersprechendes unter einen Hauptbegriff zu bringen, hierin kaum auf Widerspruch stofsen würde. Hat man denn nicht für „das $\frac{1}{3}$fache" den weit bezeichnenderen Ausdruck „ein Drittel" und für „der $\frac{1}{3}$te Teil" „das Dreifache"? Denn gleichwie in der Zahlenlinie die absoluten Zahlen von der positiven Seite durch Null auf die negative übergehen, so verwandelt sich hier die durch „fache" ausgedrückte Multiplikation in eine durch „Teil" ausgedrückte Division, und zwar geschieht der Übergang durch das „Einfache" (die Einheit) hindurch."

VI 285 spricht J. J. Oppel, von der Redaktion aufgefordert, seine Ansicht über die fragliche Ausdrucksweise aus. Er hebt zunächst hervor, dafs er selbst die Ausdrucksweisen „mal mehr" und „mal weniger" im Unterricht vermeide und sich der klareren Formen „das $m$fache", „der $m$te Teil" bediene. Wenn aber „Schüler" die andern Formen gebrauchen, so beanstande er das nicht ängstlich, nur die Fassung „12 ist um dreimal mehr als 4" lasse er nicht zu; auch unterlasse er natürlich zu sagen: „9 ist das $\frac{1}{3}$fache von 27". Oppel fügt dem Gesagten aber sofort hinzu, dafs ihm nur „der gewöhnlich sogenannte mathematische Unterricht" obliege und er mit dem eigentlichen Rechenunterrichte niemals betraut, also auch nicht in der Lage gewesen sei, im Massenunterrichte Bruchsatzrechnung (Schlufsrechnung) zu lehren. Er könne sich aber recht wohl denken, wie dem Lehrer, welchem letzteres obliegt, in der Tat erwünscht sein könne, für die von ihm bevorzugten Ausdrücke auch noch weitere durch Bequemlichkeit und Leichtigkeit der grammatischen Konstruktion sich empfehlende Ausdrucksweisen zu haben. Im weiteren Verlaufe seiner Erörterung sucht Oppel sogar die gerügte Ausdrucksweise zu verteidigen, indem er erklärt: „Ich erkenne in dem Ausdrucke eine Breviloquenz für den Gedanken: 4 ist kleiner als 12, und zwar so, dafs man es (dieses Kleinere) dreimal haben müfste, um 12 zu erreichen. Ebenso scheint mir „12 ist dreimal gröfser als 4" sagen zu wollen: „12 ist gröfser als 4, und zwar so, dafs es dreimal diese (kleinere) Zahl erfordern müfste etc." Schliefslich stellt aber Oppel doch die Forderung auf: „Der Lehrer drücke sich stets so aus, dafs er in jedem einzelnen Falle das Bewufstsein haben kann, von den Aufmerksamen unter seinen Schülern nicht mifsverstanden zu werden; und, wo ihm für ein und dieselbe Sache eine Anzahl verschiedener Kunstausdrücke zu Gebote stehen, wähle er stets denjenigen, welcher nicht nur *per exclusionem* gegen falsche Deutungen gesichert ist, sondern welcher der **an sich** durchsichtigste und anschaulichste ist."

VI 289 äufsert sich E. Bardey zu den Ausdrucksweisen: „mal mehr" und „mal weniger". Bardey stellt sich durchweg auf den Standpunkt O. Fischers und verteidigt Fischers Ausdrucksweisen nicht nur für den Gebrauch in der Volksschule, sondern auch für die Anwendung bei Textgleichungen in den höheren Schulen. Seine Ausführungen schliefst Bardey mit den Worten: „Die Ausdrücke: „dreimal mehr" und „dreimal weniger" sind in den Elementarschulen ganz allgemein, ihre praktische Brauchbarkeit hat sich lange und eingehend bewährt, sie können durch keine anderen Redewendungen nach jeder Richtung hin voll und ganz ersetzt werden. Entsagen wir daher jeglichem Pedantismus und erkennen wir mit ganzer Bereitwilligkeit ihr Bürgerrecht an, das sie ohne unser Zutun längst erworben und wohl verdient haben."

Gerade entgegengesetzt dieser Ansicht Bardeys ist die Meinungsäufserung K. Stammers VI 382. Stammer erinnert zunächst an die Definition der Potenz, „welche a^n als ein Produkt von n Faktoren a bezeichnet und wo vor dem Fehler gewarnt wird, statt dessen zu sagen: a $n$mal mit sich selbst multipliziert“. „Diese letzte Ausdrucksweise“, sagt Stammer, „stimmt vollständig mit der von O. Fischer empfohlenen überein. Eine im Grunde falsche Ausdrucksweise kann nicht durch eine willkürliche Definition richtig gemacht werden. Und wenn die Wissenschaft das Unrichtige einer Sprachweise erkannt und nachgewiesen hat, so hat sie das Recht und die Pflicht, auf Beseitigung derselben zu dringen, unbekümmert um die Unbequemlichkeiten, welche dadurch entstehen.“ „Es wird im Rechenunterricht von Elementarlehrern noch gar viel gesündigt, weil ihnen nur zu häufig die erst durch Kenntnis der Algebra zu gewinnende Klarheit der Anschauung und höhere Gesichtspunkte fehlen und weil sie sich der lieben Gewohnheit ohne gründliches Nachdenken fügen.“ Ganz besonders verdient Beachtung eine von Stammer auf Grund langjähriger Erfahrung gemachte Beobachtung. Stammer teilt mit: „Ich habe nämlich beobachtet, dafs den Schülern im Anfange die Unterscheidung zwischen Multiplikation und Addition, zwischen Division und Subtraktion entsetzlich schwer wird. Ob daran der getadelte Ausdruck Schuld ist, vermag ich nicht zu entscheiden; dafs er aber die Schwierigkeit vermehren hilft und den Unterricht in der Algebra ganz wesentlich erschwert, ist nicht zu bezweifeln, denn er steht der Klarstellung der Begriffe im Wege. Also fort damit!“

VI 458 tritt auch E. E. Müller den Ausführungen Fischers entgegen. Er bemerkt zunächst zur Richtigstellung: „Die Ausdrucksweise *„trois fois plus“* und *„douze fois moins“* mag sich wohl in Rechenbüchern für niedere Klassen finden, in den für höhere Schulen bestimmten und von wissenschaftlichen Mathematikern, wie z. B. Lacroix, Bourdon verfafsten Lehrbüchern der Arithmetik heifst es aber durchweg: *„trois fois plus grand“* und *„douze fois plus petit“*.“ Was die Anwendung der deutschen Ausdrucksweise „mal mehr“ und „mal weniger“ anbelangt, so präzisiert Müller seinen Standpunkt folgendermafsen: „Um (nun) auch jede Möglichkeit eines Mifsverständnisses zu verhüten, ist es (daher) geraten, die Ausdrücke „dreimal mehr“ und „dreimal weniger“, wie auch „dreimal gröfser“ und „dreimal kleiner“, desgleichen auch „dreimal so grofs“ und „dreimal so klein“ zu vermeiden und dafür immer zu sagen: A ist das Dreifache oder der dritte Teil von B.“

Veranlafst durch den Aufsatz Stammers kommt VII 203 E. Bardey auf die getadelten Ausdrücke zurück. Es liegt ihm, wie er sagt, daran, „die Sache jetzt ganz zum Austrag zu bringen.“ Er will nicht, dafs man „auf halbem Wege“ stehen bleibe, damit man „in späteren Jahren nicht sagen könne, es sei etwas Wesentliches vergessen worden“. Bardey geht zunächst auf Einzelheiten (Äufserlichkeiten) des Stammerschen Aufsatzes ein und wendet sich dann gegen die Beweisführung Hoffmanns, die dieser auf Grund der Gleichung: $12 = 4 + 3x$ gegeben hatte; Bardey hält es nicht für berechtigt, wenn Hoffmann sich vor „einmal, zweimal, dreimal“ stets das Wörtchen „um“ hinzudenkt. Den Hauptinhalt der Bardeyschen Ausführungen bildet eine eingehende sprachliche Studie über die gerügten Ausdrucksweisen; in dieser führt er zwei Punkte an, welche für, und drei Punkte, welche gegen die Anwendung der Ausdrucksweisen „mal mehr“, „mal weniger“ sprechen. Bardey schliefst seine Erörterung mit den Worten: „Damit habe ich den Gegnern die Waffen ins Lager getragen und habe als ein ehrlicher Mensch, dem es um die Sache selbst zu tun ist, die wunden Punkte blofsgelegt, an welchen die Ausdrücke zu fassen sind. Mögen die Gegner das *Contra* mehr betonen und die Anhänger das *Pro*.“ Bardey versichert schliefslich noch, „dafs er in mathematischen Büchern solche Ausdrücke (mal mehr, mal weniger) nicht mehr gebrauchen werde“.

Mit einer humoristisch gefärbten Schlufsbemerkung*) beendet Hoffmann VII 210 den Kampf um die Ausdrucksweisen „mal mehr“ und „mal weniger“. In den Stellen XI 369, XVI 258, XX 577, XXVIII 88 wird nur kurz, und zwar XI 369, XX 577, XXVIII 88 von Hoffmann und XVI 258 von H. Stade auf die Richtigkeit der Ausdrucksweisen „mal soviel“ und „der *n*te Teil“ hingewiesen, der Gebrauch derselben immer aufs neue wieder empfohlen und das Bedauern ausgesprochen, dafs sich diese Ausdrucksweisen noch nicht allerorts eingebürgert haben.

Die „gleichen“ Hälften und die „gröfsere“ Hälfte.

XVII 269 führt Hoffmann aus einem Artikel einer musikalischen Zeitschrift, in dem über eine neue Stiftung Rubinsteins berichtet wird, folgende Stelle an: „Die Zinsen in der Höhe von 10 000 Franks sollen entweder ganz oder an zwei in gleiche Hälften geteilt als Stipendien gegeben werden.“ Hoffmann fügt ironisch hinzu: „Wir möchten gerne wissen, wie etwa die ungleichen Hälften aussehen“, und führt weiter aus: „Da man diesen Ausdruck (ungleiche Hälften) mitunter auch in (sogar mathematischen elementaren) Schulschriften liest, im Alltagsgespräch nicht selten hört, wenn jemand damit zwei nahezu gleiche Teile eines Ganzen bezeichnen will, so dürfte es wohl nicht unnötig sein, wiederholt auf seine Unrichtigkeit aufmerksam zu machen und zu einer Verfolgung und Ausmerzung aufzufordern. Dasselbe gilt für den noch häufiger vorkommenden Ausdruck „die gröfsere Hälfte“.“ Hierauf nimmt H. Fritsch XVII 434 Bezug. Er wendet sich a. a. O. an Hoffmann in folgendem: „Gehen Sie nicht, indem Sie den Ausdruck „gröfsere Hälfte“ beanstanden, in ihren Ansprüchen zu weit? In einem mathematischen Lesebuche dürften Hälften wohl nur gleich genommen werden; in einer für gebildete Leser bestimmten Mitteilung wird aber doch diejenige Sprache gebraucht werden dürfen, die ein gebildeter Mensch dann spricht, wenn er mit einem gebildeten Mann spricht, und die neuere deutsche Sprache setzt nicht ohne weiteres Hälften als gleich voraus; vergleichen Sie vielleicht die hierher gehörigen Abschnitte aus dem Sanderschen Wörterbuch der deutschen Sprache.“

Obwohl vom Herausgeber XVII 434 eine Fortsetzung des Meinungsaustausches über „die gröfsere Hälfte“ bez. „die gleichen Hälften“ angeregt wurde, hat sich doch kein Leser weiter über diesen Gegenstand geäufsert. Dies erklärt sich wohl daraus, dafs den Lesern die Richtigkeit der Hoffmannschen Ansicht aufser allem Zweifel stand. Sicher sind die Ausdrucksweisen „die gröfsere Hälfte“, „die gleichen Hälften“ als fehlerhaft zu bezeichnen. Denn wie sich der Sinn des Wortes „Hälfte“ durch die Anwendung desselben in der Sprache der Mathematik herausgebildet hat, soll man unter „Hälften“ zwei völlig gleiche Teile verstehen.**)

---

*) Der ganze Streit erinnert mich lebhaft an die Geschichte, welche mir einmal in früheren Jahren passierte. Auf einer kleinen Reise im sächsischen Erzgebirge kam ich auch in ein zu beiden Seiten eines Flüfschens gelegenes Dorf. Ich sah zu meiner Verwunderung, dafs die Bewohner desselben auf hintereinandergelegten Steinen durch das zur Sommerszeit seichte Flufsbett gingen, und einige Vorsicht anwenden mufsten, um nicht durch einen Fehltritt die Füfse ins Wasser zu tauchen, trotzdem dafs daneben (wahrscheinlich aus älterer Zeit) ein Brettersteig (*vulgo:* Stäg) und nicht ferne davon eine (neue) feste steinerne Brücke stand. Auf meine Frage, warum man denn den beschwerlichen Weg über die wankenden Steine gehe, da man ja zwei Brücken habe, entgegnete mir ein Bauer in seinem sächsischen Dialekt: „Ich wefs o nich worum, se gihen alle drübber, mer sin's emul su gewahne!“ Auf meine weitere Frage, wie sie es denn machten, wenn das Flüfschen angeschwollen sei, antwortete der gutmütige Bauer: „Nu, do müfs'n mer übern Stäg, manche gihn o üb'r de Brücke.“ — — Diese Geschichte ist recht geeignet, das Verfahren vieler Lehrer der Mathematik beim Gebrauche der bez. Ausdrücke zu beleuchten. Im Schlendrian gebraucht man gewohnheitsmäfsig die (zu Mifsverständnissen führenden) Ausdrücke „4 ist dreimal weniger als 12“ etc., indem man sich einredet, sie seien bequem und meint, für das Volk (die Volksschule) seien sie gut genug! Wenn aber das Hochwasser der Gründlichkeit und Wissenschaftlichkeit drängt, flüchtet man sich zur schlichten Holzbrücke und sagt: „4 ist dreimal so wenig als 12“. Nur wenige, in dem festen Willen auf sicherem Boden gehn zu wollen, benützen die steinerne Brücke und sprechen: „4 ist der dritte Teil von 12“. *Sapienti sat!*

**) Ist es bei der Ausführung einer Halbierung nicht möglich, zwei völlig gleiche Teile herzustellen, so mufs es doch das Streben des Ausführenden sein, die Differenz der Teile auf die denkbar kleinste Gröfse (unendlich kleine Gröfse) herabzumindern.

Dann aber ist es eine Tautologie zu sagen „gleiche Hälften", und dann widerspricht es dem Wesen des Wortes „Hälfte" ganz und gar, wenn in der Ausdrucksweise „die gröfsere Hälfte" durch „gröfsere" betont wird, dafs die Teile nicht gleich sein sollen. Dazu kommt, dafs gar kein zwingender Grund vorliegt, das Wort „Hälfte" für ungleiche Teile zu mifsbrauchen. Man hat ja die Ausdrucksweise „der gröfsere Teil". Diese besagt doch, dafs die Teile zwar ungleich, aber auch nicht zu sehr von einander verschieden sein sollen. Will man nämlich betonen, dafs der Unterschied der Teile ein beträchtlicher sein soll, so wird man sagen müssen: „der bei weitem gröfsere Teil", oder etwa in Anwendung auf eine Schulklasse „fast die ganze Klasse"." Soll der Unterschied der beiden Teile als möglichst klein hervorgehoben werden, so kann auch die Ausdrucksweise „beinahe die Hälfte" angewendet werden.

Multiplikation entgegengesetzter Gröfsen.

X 194 macht J. Kober Front gegen die Fassung der Regel: „Das Produkt gleichartiger Gröfsen ist positiv, das Produkt entgegengesetzter Gröfsen ist negativ zu nehmen", oder die noch kürzer gefafste: „Gleiche Zeichen geben *plus*, ungleiche *minus*." „Also ist", sagt Kober, „$(-a)(-b)(-a) = a^2b$; denn dafs Produkte aus mehr als zwei Faktoren nicht ausgeschlossen sind, ist vor wie nach dieser Regel zu lesen; bei Bardey geht z. B. obiger Regel voraus der Satz $abc = acb$ etc., auf die Regel folgt: „Produkte aus lauter gleichen Faktoren, z. B. aa, aaa, $aaaa$." Warum spricht man das Gesetz nicht korrekt so aus: „Jeder negative Faktor ändert das Zeichen des Produktes", oder „Ein Produkt wird negativ, wenn die Anzahl der negativen Faktoren ungerade ist"."

Das „in" in der Division.
(Messen, Teilen.)

XIII 274 kommt J. Kober auf das „in" in der Division zu sprechen und bringt zum Ausdruck, dafs man wohl sagen dürfe „3 in 12 geht viermal" und ebenso „3 von 12 bleibt 9", nicht richtig sei es aber, dafür zu schreiben „3 : 12" und beim Subtrahieren „3 — 12". Ein besonderes Zeichen für „in" einzuführen erklärt Kober für eine „entbehrliche Last", genau so, wie es überflüssig sei, in der Subtraktion für „von" ein neues Zeichen erfinden zu wollen. „Man darf eben", sagt Kober, „3 in 12 oder 12 durch 3" nur auf die eine Art schreiben „12 : 3" $\left(\text{oder } \frac{12}{3}\right)$. Die Hauptsache bleibt immer, dafs der Divisor rechts steht.

XX 575 kommt in einem Kampfartikel über „alte aber noch nicht ausgerottete Übel im mathematischen Unterricht" Hoffmann auch auf die von Kober gerügte Schreibweise zu sprechen und sagt: „Durch die ganze Wissenschaft geht der Satz, dafs der Doppelpunkt „:" einzig und allein zu übersetzen ist mit „dividiert durch". Aber wie oft wird dieser selbe Doppelpunkt so benützt, dafs fälschlich der Divisor vor ihm, der Dividend hinter ihm steht. Es ist hohe Zeit, dafs gegen diesen Mifsbrauch mit unerbittlicher Strenge von oben her eingeschritten wird." Die Behauptung, es sei die getadelte Stellung von Dividend und Divisor bequemer, bestreitet Hoffmann auf das entschiedenste und fügt hinzu, dafs, auch wenn diese Stellung wirklich bequemer wäre, damit der Mifsbrauch des Doppelpunktes zu ganz widersprechender Bedeutung wahrlich nicht gerechtfertigt werden könnte. Hoffmann sagt a. a. O. schliefslich: „Es kommt aber noch ein viel wichtigerer Gesichtspunkt hinzu: man mufs so früh wie möglich beim Unterricht die Schüler an die strenge Form gewöhnen; die strenge Form aber kann nur eingehalten werden, wenn geschrieben wird, wie es sich später überall nötig macht,

$$\textit{Dividend} : \textit{Divisor} = \textit{Quotient}.$$

Diese Stellung hat auch noch den Vorteil, dafs Divisor und Quotient bequem zur Probe stehen."

XXII 179 beschäftigt sich Hoffmann noch einmal eingehend mit der Frage bez. der Stellung von Dividend und Divisor. Er führt a. a. O. folgendes aus: „Bekanntlich gibt es zwei Arten des Dividierens: das Enthaltensein (Messen) und das Teilen. Beide Arten werden auch in Volksschul- und Seminar-Rechenbüchern, sowie in den Rechenwerken für die unteren Klassen höherer Schulen auseinandergehalten und getrennt gelehrt. Das Enthaltensein (Messen) ist offenbar das Leichtere, weil Verständlichere, Zugänglichere. Früher sagte man: 3 in 24 geht achtmal; man nannte also das Mafs zuerst und das zu Messende hinterdrein. Das ist aber unlogisch. Denn gerade wie bei der Teilung das zu Teilende (der Dividend) erst da sein mufs, bevor überhaupt von einer Teilung die Rede sein kann, so ist auch beim Messen das zu Messende (der Metiend) das zuerst Vorhandene. Beide, Dividend und Metiend, müssen also denkfolgerichtig (logisch) vorangestellt werden, und dann erst dürfen Teiler und Mafs folgen. Dafs man aber nun die Formel „3 : 24" aussprach: 3 dividiert in 24, wörtlich übersetzt „3 geteilt in 24", oder dafs man sagte: „Man dividiere mit 3 in 24", das kennzeichnet die frühere Seichtigkeit und Gedankenlosigkeit in der sprachlichen Darstellung der Rechnungsoperationen. Eher hätte es Sinn gehabt, umgekehrt zu setzen „24 : 3" und dies zu lesen: „24 dividiert (geteilt) in 3 (nämlich 3 gleiche Teile)".

Abgesehen von der unlogischen Aufeinanderfolge „3 : 24" liegt auch noch darin ein Mifsstand, dafs man für zwei völlig verschiedene Operationen „Messen" und „Teilen" ein und dasselbe Zeichen (:) benützt und das eine Mal liest „gemessen durch", das andere Mal „geteilt durch". Hierdurch entsteht ein logischer Wirrwarr. „Messen" und „Teilen" sind einmal im Wesen nicht dasselbe und werden es nie sein."

Um dieser Verwirrung ein Ende zu machen, schlägt Hoffmann vor, für das Teilen das hergebrachte Zeichen „:" beizubehalten und es zu lesen „geteilt durch", also:

$$24 : 3 = 8,$$

für das „Messen" aber ein neues Zeichen einzuführen, und zwar das Zeichen „$\div$". Man schreibe also:

$$24 \div 3 = 8$$

und lese: „24 gemessen an 3 gibt 8", indem man das zu Messende im Gedanken an das Mafs (hinan) hält und (es) allmählich „so oft es geht" vor demselben vorbeizieht. Hierbei darf der Strich zwischen den Punkten zugleich auf die Subtraktion hindeuten, mit der die Operation des Messens doch verbunden ist. Den Ausdruck „dividieren" will Hoffmann „fortan verbannt" wissen; auch wünscht er, dafs die Ausdrücke „Dividend, Divisor und Quotient" verschwinden möchten. Hoffmann gibt für die Operationen „Messen" und „Teilen" folgende Übersicht:

Messen:	Zu Messendes 24	$\div$	Mafs 3	=	Mafszahl 8
Teilen:	Zu Teilendes 24	:	Teiler 3	=	Teil 8

Hoffmann fügt noch hinzu, dafs es sich empfehlen würde, für „zu Messendes" und „zu Teilendes" kurze deutsche Wörter ausfindig zu machen. Die von ihm angeführten Ausdrücke „Teilerganzes" und „Mafsganzes" erscheinen ihm selbst „zu lang".

XXVIII 89 kommt Hoffmann noch einmal auf den von ihm gemachten Vorschlag, für „das Messen" ein besonderes Zeichen einzuführen, zu sprechen und erweist die Notwendigkeit eines solchen Zeichens an dem Beispiele:

$$36 : \frac{3}{4}.$$

„In diesem Falle", sagt Hoffmann, „wird leider das Zeichen „:" flottweg gelesen: „Geteilt durch", während es doch auf jeden Fall zu lesen ist: „Gemessen durch (an)". Denn immer, wenn der sogenannte Divisor ein Bruch oder eine gemischte Zahl ist, kann nicht vom Teilen, sondern nur vom Messen die Rede sein. Dies nun gleich durch ein besonderes Zeichen anzudeuten, dürfte sicher von Vorteil sein."

Bruchregeln.

XIII 21 wendet sich P. Meutzner gegen die Fassung der Regeln der Bruchrechnung,*) die sich in der Aufgabensammlung von E. Bardey vorfindet. Man liest dort:

1. Brüche mit gleichen Nennern werden addiert, indem man die Zähler addiert.
4. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit derselben multipliziert oder . . . .
5. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Nenner mit derselben multipliziert oder . . . .
8. Brüche werden mit einander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Gegen diese Fassung der Regeln bei Bardey erhebt Meutzner den Vorwurf der Unvollständigkeit und schlägt folgende Fassung der Regeln vor:

1. Gleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man die Summe (Differenz) der Zähler durch den gemeinschaftlichen Nenner dividiert.
4. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem das Produkt des Zählers und der ganzen Zahl durch den unveränderten Nenner dividiert wird.
5. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den unveränderten Zähler durch das Produkt des Nenners und der Zahl dividiert.
8. Brüche werden mit einander multipliziert, indem man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert.

In seiner Entgegnung XIII 23 verwahrt sich E. Bardey entschieden gegen den Vorwurf, dafs die von ihm gegebenen Bruchregeln nicht korrekt gefafst seien. Eingangs seiner Erwiderung führt Bardey eine Reihe Autoren von arithmetischen Aufgabensammlungen auf, die in derselben Weise wie Bardey die Bruchregeln aussprechen und gibt seiner Verwunderung Ausdruck, dafs gerade er (Bardey) von Meutzner angegriffen worden sei. Bardey behauptet, dafs die Art, wie er die Sätze ausgedrückt habe, zweckmäfsiger und richtiger sei als die von Meutzner bevorzugte. Zur Begründung dieser Behauptung führt Bardey etwa folgendes aus: „Fast jede arithmetische Formel, wie auch fast jeder Satz in der Geometrie hat ein ruhendes und ein bewegendes Moment, oder ein aufbauendes, synthetisches Moment und ein operatives oder analytisches Moment in sich, d. h. in einer Formel sind meistens zwei Lehrsätze enthalten, ein Lehrsatz, der zur Grundlage für die Beweise später vorgeführter Lehrsätze benützt wird und der daher gleichsam ein Stein zum Aufbau der Wissenschaft ist, und ein zweiter Lehrsatz, der uns Aufschlüsse gibt über Operationen, in der Geometrie über Konstruktionen, die wir zu machen haben. In der Geometrie mufs wegen der ganzen Anlage dieser Wissenschaft der Charakter der Sätze vorzugsweise ein synthetischer sein. In der Arithmetik dagegen sind die analytischen Momente vorherrschend. Die beiden genannten Momente müssen jedoch, wenn man eine Formel richtig in Worte übertragen will, auseinander gehalten werden.

*) Schon I 276 hatte R. Sturm auf die inkorrekte Fassung der Bruchregeln in arithmetischen Aufgabensammlungen aufmerksam gemacht.

Ein Beispiel erklärt dies leicht. Die Formel

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x}=\frac{a+b}{x},$$

synthetisch erfaſst, sagt: Die Summe zweier gleichnamiger Brüche ist gleich einem Bruche, dessen Zähler die Summe der Zähler und dessen Nenner der gemeinsame Nenner ist. Analytisch erfaſst: Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Zähler addiert. In der Arithmetik handelt es sich in der Hauptsache darum, das operative Element zum Ausdruck zu bringen, und das muſs in einfachster Weise geschehen. Jedes überflüssige Wort ist als Ballast anzusehen, das Wesentliche hat gegen das Unwesentliche hervorzutreten. Worauf hat nun der Schüler sein Augenmerk zu richten bei der Addition der Brüche? Der Schüler hat erstens sein Augenmerk auf die Nenner zu richten und zuzusehen, ob sie auch gleich sind. Deshalb habe ich dem Ausdruck „Brüche mit gleichen Nennern" den Vorzug gegeben vor „gleichnamige Brüche". Der Schüler hat zweitens die Zähler zu addieren. Das sind die Hauptsachen, die der Schüler sich einzuprägen hat. Liegen diese Hauptpunkte nicht in dem Satze, so ist der Satz, ohne seine sonstige Fassung zu berücksichtigen, für den Zweck der Rechnung unbrauchbar und fehlerhaft. Es hätte in dem von mir gegebenen Satze, um denselben vollständig zu machen, noch hinzugefügt werden müssen: „und unter das Resultat den gemeinschaftlichen Nenner als Nenner setzt". Das in diesen Worten angedeutete Verfahren ist aber so selbstverständlich, daſs der Schüler das nicht wieder vergiſst, wenn der Lehrer das ein einziges Mal hinzugefügt oder vorgemacht hat." Bardey schlieſst seine Entgegnung mit folgenden Worten: „Die Fassung der Sätze, wie Meutzner sie gibt, ist nicht nur unzweckmäſsig, sondern auch fehlerhaft. Denn Herr Meutzner hat weder das operative noch das synthetische Moment, das in der Formel liegt, rein festgehalten. Er fängt an: „Gleichnamige Brüche werden addiert", als ob er eine Regel zu der Operation geben oder das operative Moment der Formel darlegen wollte. Dann spricht er aber wieder von der Summe, wodurch er in die synthetische Übertragung hineingerät. Die Hauptsache aber, daſs die Zähler addiert werden müssen, erwähnt er mit keinem Worte; er tut, als ob das, was für die Schüler gerade das Wesentlichste ist, sich von selbst versteht, und scheint für die Hauptsache zu halten, was gar nicht hierher gehört, daſs nämlich die Summe der Zähler durch den gemeinsamen Nenner dividiert wird."

In seiner Erwiderung XIII 115 sagt Meutzner nach einigen einleitenden Bemerkungen zunächst: „Der Hauptpunkt, auf den es mir ankommt, ist und bleibt: es ist ungenügend und also fehlerhaft, daſs bei der herkömmlichen und auch von Bardey adoptierten Fassung der Bruchregeln nur dem ersten Teile der vorzunehmenden Operationen Ausdruck gegeben wird, während der zweite Teil verschwiegen wird." Weiterhin betont Meutzner: „Erst sehr in zweiter Linie steht für mich die Frage nach der definitiven Fassung der Regeln, denn dies ist doch nur die formelle Seite der ganzen Sache. Gut, wenn Herr Bardey so wünscht, mag die Regel in Zukunft lauten: „Brüche mit gleichen Nennern werden addiert, indem man die Zähler addiert und unter das Resultat den gemeinschaftlichen Nenner als Nenner setzt" und ähnlich die andern. Eine derartige Vervollständigung würde allerdings „einen groſsen Ballast" in die Arithmetik bringen. Also haben wir darnach zu trachten, durch andere Fassung diesen Übelstand zu vermeiden, und einen diesbezüglichen Vorschlag habe ich die Vermessenheit gehabt den Herren Kollegen zu unterbreiten." Hierauf kommt Meutzner auf die Einwände zu sprechen, die Bardey gegen die Meutznersche Fassung vorgebracht hatte. Er führt hierbei folgendes aus: „Wenn meine Fassung mit „gleichnamige Brüche" beginnt, so wird doch durch die bevorzugte Stellung dieses Prädikats an der Spitze des ganzen Satzes sicher nicht weniger nachdrücklich darauf hingewiesen, Ein Beispiel erklärt [illegible]

synthetisch erfafst, sagt: [illegible] ist gleich
einem Bruche, dessen Zähl[illegible]Nenner der
gemeinsame Nenner ist. [illegible]he werden
addiert, indem man die Z[illegible]lelt es sich
in der Hauptsache darum, [illegible]zu bringen,
und das mufs in einfachste[illegible]Vort ist als
Ballast anzusehen, das We[illegible]vorzutreten.
Worauf hat nun der Schüle[illegible]ddition der
Brüche? Der Schüler hat [illegible] zu richten
und zuzusehen, ob sie auc[illegible] Ausdruck
„Brüche mit gleichen Nenne[illegible]ge Brüche".
Der Schüler hat zweitens d[illegible]auptsachen,
die der Schüler sich einzup[illegible]icht in dem
Satze, so ist der Satz, oh[illegible]htigen, für
den Zweck der Rechnung [illegible]n dem von
mir gegebenen Satze, um [illegible]hinzugefügt
werden müssen: „und unte[illegible]Nenner als
Nenner setzt". Das in [illegible]st aber so
selbstverständlich, dafs der [illegible]der Lehrer
das ein einziges Mal hinzu[illegible]y schliefst
seine Entgegnung mit fol[illegible]Sätze, wie
Meutzner sie gibt, ist n[illegible] fehlerhaft.
Denn Herr Meutzner hat [illegible]e Moment,
das in der Formel liegt, rei[illegible]ige Brüche
werden addiert", als ob [illegible] oder das
operative Moment der Forn[illegible]ber wieder
von der Summe, wodurch [illegible]hineingerät.
Die Hauptsache aber, dafs [illegible]hnt er mit
keinem Worte; er tut, als o[illegible]esentlichste
ist, sich von selbst versteh[illegible]alten, was
gar nicht hierher gehört, [illegible]durch den
gemeinsamen Nenner divid[illegible]

In seiner Erwiderung [illegible]inleitenden
Bemerkungen zunächst: „I[illegible]t, ist und
bleibt: es ist ungenügend[illegible]ömmlichen
und auch von Bardey ado[illegible]lem ersten
Teile der vorzunehmenden [illegible]ihrend der
zweite Teil verschwiegen w[illegible]rst sehr in
zweiter Linie steht für m[illegible]ssung der
Regeln, denn dies ist doch [illegible]he. Gut,
wenn Herr Bardey so wün[illegible]: „Brüche
mit gleichen Nennern werde[illegible] und unter
das Resultat den gemeinsch[illegible]ähnlich die
andern. Eine derartige V[illegible]n grofsen
Ballast" in die Arithmetik[illegible] trachten,
durch andere Fassung diese[illegible]ezüglichen
Vorschlag habe ich die Ve[illegible] zu unter-
breiten." Hierauf kommt [illegible]echen, die
Bardey gegen die Meutzne[illegible]hrt hierbei
folgendes aus: „Wenn mein[illegible]eginnt, so
wird doch durch die bevo[illegible]er Spitze
des ganzen Satzes sicher [illegible]ngewiesen,

„erstens sein Augenmerk auf die Nenner zu richten“, als wenn sie beginnt: „Brüche mit gleichen Nennern“. Dafs der Schüler zweitens die Zähler zu addieren hat, auf diese zweite „Hauptsache“ weist das Subjekt des folgenden Satzes „die Summe der Zähler“ jeden deutlich genug hin. Wie nun die „Summe der Zähler“ anders als durch Addition zu finden ist, weifs ich wahrlich nicht, und darum erscheint es mir als eine unverständliche Behauptung, wenn Herr Bardey schreibt: „Die Hauptsache, dafs die Zähler addiert werden müssen, erwähnt Meutzner mit keinem Wort“. Ebenso protestiere ich energisch gegen die willkürliche Unterstellung, welche ich in dem von Herrn Bardey, **nicht** von mir veranlafsten gesperrten Druck des Wortes „dividiert“ finden mufs; sucht Bardey doch damit nichts weniger zu beweisen als: „Meutzner scheint das für die „Hauptsache“ zu halten, was gar nicht hierher gehört, dafs nämlich die Summe der Zähler durch den gemeinsamen Nenner dividiert wird.“ Die Schlufsoperation mit den Nennern ist zwar nicht die Hauptsache, aber allerdings meines Erachtens „der ersten Hauptsache“ ganz gleichwertig, wenn sich über sie auch die unantastbare, herkömmliche Fassung völlig ausschweigt.“ Am Schlusse beantwortet Meutzner noch die Frage, warum er sich gerade gegen Herrn Bardey gewendet habe, indem er sagt: „Die Bücher des Herrn Bardey erscheinen mir so hervorragend geeignet für den mathematischen Unterricht, dafs sie eine sehr grofse Verbreitung bereits gefunden haben und noch finden werden. Deshalb hielt ich kein Buch für so geeignet wie dieses, mit einer eingerosteten Inkorrektheit endlich aufzuräumen. Ich wagte also diese Ausstellungen zu machen, zumal am Schlusse des Vorwortes allen der Dank des Herrn Bardey schon im voraus dargebracht wird, die ihn auf Mängel des Buches aufmerksam machen werden.“

XIII 162 wendet sich V. Schlegel der Kontroverse Meutzner - Bardey zu und betont, dafs er im Prinzip auf Herrn Meutzners Seite stehe, dafs aber die alten Fassungen nicht gänzlich zu verwerfen seien. Schlegel sagt u. a.: „So wünschenswert es ist, dafs der Schüler zuerst den präzisen längeren Wortausdruck kennen lernt, so wird er sich, wenn er das Verfahren, welches in dem Satze liegt, sich zu eigen gemacht hat, ohne Schaden der althergebrachten kürzeren, wenn auch mehr mechanischen, Fassung bedienen können.“

Schliefslich nehmen noch XIII 163 ff. Kallius und G. Schubring zu dem Streite Stellung. Während Kallius im vollen Umfange die Ansicht Meutzners vertritt, meint Schubring, dafs man die Bardeysche Form unter gewissen Voraussetzungen sehr wohl als ganz korrekt bezeichnen könne.

Mit der vorstehenden Zusammenstellung soll eine Unterlage geschaffen sein für weitere Betätigung auf dem Gebiete der Verbesserung der mathematischen Ausdrucksweise. Allen Fachkollegen, die sich mit dem genannten Gebiete besonders beschäftigen, wird es sicher von Wert sein, übersichtlich einmal dargeboten zu sehen, was in der einschlägigen Zeitschrift bereits über „fehlerhafte mathematische Ausdrucksweise“ veröffentlicht worden ist. Die Zusammenstellung zeigt, dafs wohl schon fleifsig auf diesem Gebiete gearbeitet, trotzdem aber doch nur ein (vielleicht recht geringer) Teil von dem behandelt worden ist, was in das Kapitel: „Fehlerhafte Ausdrucksweise im mathematischen Unterricht“ gehört. Möge diese Arbeit recht vielen Lehrern der Mathematik eine Anregung sein, zur weiteren Klärung von schon in der Zeitschrift vorgebrachten Ausdrucksweisen beizutragen oder Neues über das genannte Gebiet zu bringen. Alle Mathematiker, die es sich angelegen sein lassen, fördernd für die mathematische Ausdrucksweise zu wirken, erfüllen eine Pflicht, die ihnen ihre Wissenschaft auferlegt, und erweisen dem mathematischen Unterrichte einen grofsen Dienst.