

## Geometrischer Teil.

H. Sturm (Bromberg) hat das Verdienst, in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht den Kampf gegen fehlerhafte mathematische Ausdrucksweise eröffnet zu haben. Er macht I 273 aufmerksam auf die falsche Anwendung des unbestimmten Artikels in der Ausdrucksweise: Fülle ein Lot vom Punkte  $C$  auf die Gerade  $AB$ . Sturm sagt: „Es muß unter allen Umständen heißen: das Lot fällen, da doch eben nur ein Lot möglich ist.“ Zu dieser Richtigstellung hat sich damals in der Zeitschrift niemand in gegnerischem Sinne geäußert, vielmehr finden wir die Sturmsche Ausdrucksweise in einer von G. Emsmann VI 51 gegebenen Zusammenstellung verbesserter, einwandfreier Ausdrucksweisen mit vor.

XVI 436 — zehn Jahre später — gibt nun der Begründer der Zeitschrift, J. C. V. Hoffmann, da er bei seinem Studium der inzwischen erschienenen Lehrbücher und Leitfäden immer wieder die gerügte Ausdrucksweise (den unbestimmten Artikel) vorgefunden hatte, die Anregung zu einer Aussprache über die in Frage stehende Ausdrucksweise. Dieser Aufforderung kommt als erster A. Häbler (Grimma) nach XVII 433. Häbler bricht für den unbestimmten Artikel eine Lanze. Er weist darauf hin, daß in der fraglichen Ausdrucksweise der unbestimmte Artikel „allgemeiner Sprachgebrauch“ ist und sagt: „Die Sprache wird wahrscheinlich ihre Gründe haben, warum sie sich so und nicht anders ausdrückt.“ Der Sprachgelehrte Sanders, der von der Redaktion um ein Gutachten ersucht worden war, ergreift in seiner Erörterung XVII 435 im wesentlichen Partei für den unbestimmten Artikel. Rapp (Ulm) meint XVIII 113, daß in der Ausdrucksweise: „ich fülle eine Senkrechte“ der Nachdruck ganz und gar auf dem Worte Senkrechte liegt, „der Schüler soll eben eine Senkrechte und keine andre Art von Linie ziehen“. Nach Rapp ist die Ausdrucksweise „eine Senkrechte“ vollauf berechtigt. Der Ansicht des Urhebers der ganzen Streitfrage nähert sich etwas wieder F. Wimmenauer, wenn er XVIII 114 sagt: „Man sollte stets den bestimmten Artikel gebrauchen, sofern nur ein Ding gemeint sein kann; den unbestimmten, sofern dies noch nicht entschieden ist.“ Wimmenauer hebt hierbei den Fall hervor, daß die Aufgabe: „durch drei gegebene Punkte einen Kreis zu legen“ erstmalig gestellt wird und befürwortet für diesen Fall auf das entschiedenste den unbestimmten Artikel, da der Schüler doch durch die der Lösung folgende Determination erst belehrt werden soll, daß es (in diesem Fall) nur einen Kreis gibt.

Auf diese überaus beachtenswerte Ansicht Wimmenauers geht Hoffmann in seiner XVIII 115 gegebenen Erwiderung leider nicht ein. Hoffmann bringt in dieser Erwiderung neue Beweise für die Richtigkeit der Anwendung des bestimmten Artikels und sucht die von Rapp und Wimmenauer vorgebrachten Argumente für den unbestimmten Artikel zu widerlegen.

Bestimmter oder unbestimmter Artikel.

(Eine oder die Parallele ziehen.)

Mit viel sprachlichem und philosophischem Gepränge tritt E. Meyer (Herford) als Verteidiger der Berechtigung des unbestimmten Artikels auf XIX 576. Meyer hat bei seinen Erörterungen offenbar immer nur den Fall der erstmaligen Lösung der Aufgabe im Sinne. Das geht deutlich aus mehreren Stellen hervor. So sagt er S. 578: „Übrigens ist es ja auch aus methodischen Gründen nicht einmal wünschenswert, Dinge, welche zu untersuchen der Determination zukommt, bereits in die Aufgabe hineinzutragen.“ S. 579: „Etwas anders liegt die Sache, wenn man sagt: ich ziehe im Dreieck  $ABC$  von  $A$  die Mittellinie; hier will der Sprechende auf die Mittellinie als auf eine dem Hörer bekannte hinweisen und er tut recht daran; die drei Höhen, die drei Winkelhalbierenden usw. sind festbestimmte und dem Bewußtsein unmittelbar vorschwebende Linien, auf welche man als auf bekannte hinweisen kann.“ Nach dieser letzten Bemerkung ist es unbegreiflich, daß Meyer für keinen Fall beim „Lotfällen“ den bestimmten Artikel angewendet wissen will. Auf diese Inkonsequenz macht ihn in seiner Erwiderung XIX 579 Hoffmann aufmerksam, indem er sagt: „Einen komischen, ja beinahe erheiternden Eindruck hat es auf mich gemacht, daß Meyer, was er den Senkrechten hartnäckig verweigert, ihren Schwestern, den Höhen, Seiten- und Winkelhalbierenden freundlichst zubilligt.“ Gegen die philosophische Art der Beweisführung Meyers sich wendend sagt Hoffmann in dieser Erwiderung weiter: „In einer so anschaulichen, d. h. von der Anschauung getragenen Wissenschaft, wie in der Geometrie hat sich der Lernende und der Sprechende nach dem Objekt, nach dem Realen zu richten und demgemäß den sprachlichen Ausdruck zu formen. Oder ist es etwa nicht wirklich, will man leugnen, daß von einem Punkte  $O$  auf eine Gerade  $MN$  nur eine Senkrechte ( $OP$ ) möglich ist? Soll man „es der Willkür des Anschauenden“ überlassen, ob er das sehen bzw. einsehen, und dem Sprechenden, ob er das behaupten oder, wie der Herr Verfasser sagt, „entscheiden“ will. Hoffmann schließt seine Entgegnung mit den Worten: „Ich bin sonach durch des Herrn Verfassers logische Auseinandersetzungen nicht bekehrt und muß mich aufs neue zu Sturm bekennen.“

Überblicken wir das Ganze, so leuchtet ein, daß bei der in Rede stehenden Ausdrucksweise nicht scharf genug auseinandergehalten werden kann, ob es sich 1. um die erstmalige Lösung einer Aufgabe handelt, oder ob 2. die Lösung der Aufgabe bereits als eine bekannte vorausgesetzt wird. Der zweite Fall ist im Unterricht offenbar der bei weitem häufigere, während der erste Fall doch nur einmal bei der erstmaligen Behandlung der Fundamentalaufgaben in Quarta oder Tertia vorkommt. Im zweiten Falle muß unbedingt der bestimmte Artikel angewendet werden. Im ersten Falle aber, d. h. wenn der Lehrer zum ersten Male, nachdem er vielleicht erst einen Punkt mit einer Geraden durch allerhand schräge Linien hat verbinden lassen, zur Aufgabe des „Lotfallens“ kommt, darf er ganz richtig sagen: „Wir wollen nun einmal von dem Punkte  $P$  auf die Gerade ein Lot fallen“, um seine Schüler dann erst zur Erkenntnis zu führen: es gibt nur ein Lot.

#### Der Begriff „Richtung“.

(Lage, Stellung.)

Über die falsche Anwendung des Begriffes „Richtung“ äußert sich zunächst J. C. Becker, indem er II 94 folgendes ausführt: „Jedem Raumgebilde kommt als solchem außer der Gestalt und Größe noch das der Stellung im Raume zu, welches etwa als dasjenige Merkmal definiert werden könnte, das sich ändert, sobald das Gebilde in Drehung versetzt wird, wenn nicht Drehung und Stellungsänderung ein und dasselbe wäre. Dieses wesentliche Merkmal der Geraden ist nun, wo es in der Planimetrie auftritt, meistens durch das gänzlich unpassende Wort „Richtung“ ausgedrückt, was zu vielfachen Unklarheiten führt. Einer Linie als Raumgebilde kommt eine Stellung, nicht aber eine Richtung zu. Diese ist ein Merkmal der Bewegung oder anderer Tätigkeiten. Das Auge sieht einen Gegenstand in

einer bestimmten Richtung, und ein bewegter Punkt, der von einer bestimmten Stelle aus immer in derselben Richtung gesehen wird, bewegt sich mit unveränderter Richtung. Die Bahn aber, welche dabei jeder einzelne seiner Punkte durchläuft, hat eine bestimmte Stellung, und nicht eine Richtung". „Auf jeder Geraden von bestimmter Stellung kann ein Punkt sich nach zwei entgegengesetzten Richtungen bewegen, und diese ändern sich, sobald die Linie ihre Stellung ändert, sind aber darum keineswegs mit ihr identisch.“

Zu diesen Erörterungen Beckers nimmt II 333 K. Stammer Stellung. Er betont, daß man die Begriffe „Lage“ und „Richtung“ nicht mit einander verwechseln dürfe, und fügt zur Klärung der Begriffe hinzu: „Richtung wird bestimmt durch den Winkel, den die Gerade mit einer festen Geraden bildet oder durch eine andere Gerade, welcher sie parallel sein soll; die Lage dagegen bestimmt den Ort derselben vollständig; sie ist z. B. gegeben durch die Richtung und einen Punkt.

II 516 kommt Becker auf eine Anregung zu sprechen, die J. C. V. Hoffmann in einer Anmerkung zu dem Beckerschen Aufsatz gegeben hatte. Hoffmann hatte gesagt: „Für Stellung wähle man doch das Wort „Lage“, denn mit Stellung wird immer stillschweigend der Begriff des Aufrechten (Vertikalen) verbunden“. Hierzu bemerkt Becker: „Abgesehen davon, daß mit dem Worte „Lage“ jedenfalls ebenso oft der Begriff des Liegens verbunden wird, welcher der Gegensatz des Stehens ist, habe ich dagegen einzuwenden, daß das Wort Lage in der Geometrie durch die Geometrie der Lage eine feststehende Bedeutung erlangt hat und auch das Wort Stellung bereits vielfach von Geometern in der Bedeutung genommen wird, in welcher ich es genommen habe.“ Bezieht sich des Begriffes Richtung fügt dann Becker hinzu: „Richtung kommt (dagegen) keinem einzigen Raumgebilde als solchem zu und nur dann kann man von der Richtung einer Strecke  $AB$  sprechen, wenn man darunter die Bewegung eines Punktes von  $A$  nach  $B$  versteht (oder den dadurch zurückgelegten Weg), und diese ist dann entgegengesetzt derjenigen von  $B$  nach  $A$ .“

Über den Begriff Richtung äußert sich weiter H. Bolze II 334, indem er unter der Überschrift: „Parallellinien“ folgendes ausführt: „Richtung ist nur vorhanden bei Bewegung. Nun sind aber unsere mathematischen Linien so ruhig, daß bei ihnen unmittelbar an irgendwelche Bewegung gar nicht zu denken ist. Hierbei wird nicht in Abrede gestellt, daß sie in übertragener Bedeutung das Bild oder Gleichnis einer Richtung angeben können; aber die übertragene Bedeutung ist keineswegs die unmittelbare und ursprüngliche. Man muß überhaupt mit dem Begriff Richtung vorsichtig umgehen. Dem deutschen Sprachgebrauch ist folgender Satz vollkommen angemessen: „Mein Freund wird von Stettin, ich werde von Kottbus nach Berlin reisen; wir haben ja dieselbe Richtung.““

An dieses Beispiel knüpft III 535 J. Kober an und zeigt, daß in diesem Beispiel „Ziel“ mit „Richtung“ vermengt wird. „Dies kommt daher“, sagt Kober, „weil allerdings die Richtung einer Linie durch einen (zweiten) Punkt (das Ziel) bestimmt werden kann. Deshalb soll aber das Wort „Richtung“ nicht verworfen, sondern der Begriff „Richtung“ lieber geklärt werden. Rein erhalten ist ja der Begriff in allen denjenigen praktischen Verhältnissen, in denen die Richtung ihre Hauptrolle spielt: Schiffahrt und Bergbau. Das Hauptinstrument zur Erkennung der Richtung ist die Magnetnadel, und diese weist deutlich die innige Verwandtschaft des Begriffes der Richtung mit dem des Winkels auf.“ Kober kommt weiter zu sprechen auf das von Becker geforderte Wort „Stellung“ und sagt: „Becker faßt die Linie nur als Grenze auf, verwirft aber, wie es scheint, die Auffassung, daß die Linie durch die Bewegung eines Punktes entsteht. Er meint, jeder



bewegte Punkt bewege sich in einer bereits fertigen Bahn. Hierin scheint er mir aber, durch eine dogmatische Ansicht verleitet, die natürliche Wahrheit zu verkennen; die Linie, die der zeichnende Bleistift, die fallende Sternschnuppe beschreibt, hat vorher noch nicht existiert, sie ist erst geworden, ebenso wie die Bahn eines Planeten. Und der werdenden Linie eine Richtung zuzuschreiben, der gewordenen eine Stellung, möchte doch wohl nicht tunlich sein.“ „Gerade und Richtung sind innig verwandte Begriffe, wie ja schon in der Sprache angedeutet ist. Richtung kommt von „recht“ sowie *directio* mit *rectus* zusammenhängt. Darin ist ausgesprochen, daß man notwendig bei dem Begriffe „gerade“ ebenso wie bei „Richtung“ an eine Bewegung denkt, daß es eine gewaltsame Abstraktion ist, wenn man bei dem Begriffe der geraden Linie die „Bewegung oder andere Tätigkeit“ ausschließt.“ Kober macht schließlich darauf aufmerksam, daß sich die praktische Anwendung des Wortes Stellung in den verschiedenen Redensarten recht sonderbar ausnehmen würde und betont die Schwierigkeiten, die diejenigen Fälle bereiten, in denen es zweifelhaft ist, ob man Richtung oder Stellung sagen soll.

Der Kampf um den Begriff „Richtung“ wurde dem Begründer der Zeitschrift ein Anlaß, wie über andere geometrische Grundbegriffe, so im besonderen über den Begriff „Richtung“ eingehende Studien zu treiben. Die Früchte dieser Studien hat Hoffmann in einem längeren, mehrteiligen Artikel III 413, 523 und IV 103 seinen Lesern dargeboten. Bei der Ausführlichkeit dieser Hoffmannschen Untersuchungen müssen wir uns darauf beschränken, die Ergebnisse seiner Erörterungen hier kurz aufzuführen. Die Ergebnisse des ersten Teils derselben finden sich in folgender Zusammenfassung: „Richtung hat (demnach) sozusagen drei Stadien ihres Seins:

1. Auswahl des Zieles schon vor der Bewegung; die Wahl des Zieles ist das erste Moment (Keim der Richtung).
2. Fixierung des Ziels während der Bewegung; zu „Richtung“ gehört notwendigerweise ein Subjekt.
3. Das Streben, das Ziel auf dem kürzesten Wege zu erreichen.

Von diesen drei Stadien ist das zweite, die Fixierung des Ziels, das wesentlichste. Die Verlängerung oder Verkürzung der Geraden ändert die Richtung derselben nicht; die Richtung wird nur geändert durch Wahl und Fixierung eines neuen Ziels.“

Auf Grund einer eingehenden Erörterung über Richtungsverschiedenheit zeigt Hoffmann weiter, daß man sehr wohl berechtigt ist, von einem Richtungsunterschiede zu sprechen, insofern nämlich das Unterscheidende die Lage der Ziele oder die Verschiedenheit in der Wahl des Ziels, von welcher die Lage des Richtungsstrahles abhängt, gemeint ist. Hoffmann stellt weiter fest, daß Gerade gleichgerichtet sind, wenn sie gegen eine dritte Gerade gleichen Richtungsunterschied haben und betont schließlich, daß der Begriff „parallel“ als Gattung die Art „gleichgerichtet“ einschließt, und daß daher der Ausdruck „gleichgerichtet und parallel“ ein Pleonasmus ist.

X 416 klagt Hoffmann aufs neue über die Unklarheiten, die bez. des Begriffes „Richtung“ herrschen. Zum Beweise führt er eine Stelle aus Tyndalls berühmtem Werke: „Vorlesungen über das Licht“ an. In der Übersetzung von Wiedemann heißt es S. 12: „Ein Lichtstrahl wird zunächst auf den Spiegel geleitet und in seiner eignen Richtung zurückgeworfen . . . . Obgleich die einfallenden und reflektierten Strahlen in entgegengesetzter Richtung gehen, so verschieben oder stören sie sich doch nicht.“ Hoffmann bemerkt hierzu: „Wenn der Lichtstrahl in „seiner eignen Richtung“ zurückgeworfen wird, dann kann das doch nicht zugleich die entgegengesetzte Richtung sein! Und liegt nicht schon in den Worten „in seiner eignen Richtung“ und „zurückgeworfen“ ein Widerspruch?“

XVI 339 teilt Hoffmann eine Definition des Begriffes „Richtung“ in Fiedlers Werk „Die darstellende Geometrie“ mit. Dieselbe lautet: „Es ist notwendig anzunehmen, jede Gerade habe einen einzigen und bestimmten unendlich fernen Punkt. Wir nennen denselben in genauer Übereinstimmung mit dem Sprachgebrauch die „Richtung der Geraden“ und haben damit zugleich die Erklärung des Begriffes gewonnen.“ Unter Hinweis auf seine Studien über geometrische Grundbegriffe (III 443, 523; IV 103) macht Hoffmann zu der Fiedlerschen Definition folgende Bemerkungen: „Hier kommt es darauf an, der Verwechslung der Begriffe „Richtung“ und „Ziel“ entgegenzutreten, einem Fehler, an dem obige Definition zweifellos leidet, da sie „Ziel“ (den unendlich fernen Punkt) und „Richtung“ identifiziert: „Richtung“ setzt stets ein Ziel voraus. Ohne Ziel keine Richtung; das Ziel muß immer vor der Richtung da sein. „Richtung“ und „Ziel“ können also nicht identische Begriffe sein, sie können einander nicht ersetzen. Das „Ziel“ kann versinnlicht werden durch einen Punkt, die „Richtung“ durch eine nach dem Ziele gezogene Gerade. Die Gerade an und für sich ist aber deshalb noch nicht Richtung selbst, denn sie enthält zwei Richtungen in sich. Es bedarf erst eines idealen Aktes der Bewegung nach dem Ziele hin, um Richtung vorstellbar zu machen. Wenn übrigens die obige Definition richtig wäre, so möchten wir doch wissen, wie man den im Sprachgebrauch — und mit diesem soll ja die Definition „in genauer Übereinstimmung“ sein — eingebürgerten Ausdruck „in der Richtung nach“ durch einen ihm gleichbedeutenden ersetzen sollte (z. B. in der Richtung nach Berlin, nach einem Sterne etc.).“

XXXII 268 nimmt Hoffmann nochmals Gelegenheit, sich über geometrische Grundbegriffe, insonderheit über den Begriff „Richtung“ zu verbreiten. Veranlassung hierzu waren ihm gewesen einmal Tötössy's Rezension von Peschka's darstellender Geometrie mit ihrer Richtungsdefinition XIX 353 und sodann folgende Stelle aus einem Schulprogramm: „Für die Lage einer Geraden, genauer eines Strahles im Raume, gibt es das (entbehrliche) Wort „Richtung“. Eine analoge Bezeichnung für die Lage einer Ebene gibt es nicht. Diese schon häufig aufgestellte Definition der Richtung genügt vollständig unseren Anforderungen, da sofort eine Richtung vorhanden ist, sobald man irgend einen Strahl hergestellt hat. Ihre Richtigkeit läßt sich wohl schon daraus erkennen, dafs man überall „Richtung“ durch „Lage“ (eines Strahls) ersetzen kann, ohne dadurch unklar zu werden (?). Da eine Gerade aus zwei Strahlen besteht, so besitzt sie auch zwei Richtungen, d. h. zwei Strahlen von verschiedener Lage.“ Hierzu bemerkt Hoffmann: „Der Verfasser verwechselt sonach entschieden die Begriffe „Lage“ und „Richtung“ oder vermengt sie. Es darf uns daher nicht wundern, dafs er „Richtung“ als „entbehrliches Wort“ bezeichnet.“ Unter Hinweis auf seine früheren Artikel über geometrische Grundbegriffe führt Hoffmann bez. des Begriffes Richtung noch folgendes aus: „... Eher schon dürfte der Begriff „Richtung“ beim Schüler feste Gestalt und Sicherheit gewinnen. Denn sobald er genötigt ist, eine gerade Linie zu ziehen, muß er schlüssig werden, nach welcher Seite er die Gerade ziehen soll, ob nach rechts oder nach links, ob nach oben oder nach unten. Die Ausführung nötigt ihn, einen Punkt zu wählen, von dem aus er die Linie zieht. Ist ihm nun ein Punkt vorgezeichnet, nach welchem hin er die Gerade ziehen soll, so findet er leicht, dafs er die Linealkante an diese Punkte anlegen muß; so werden jetzt im Schüler die Begriffe Anfangs- oder Ausgangspunkt (Ursprung) der Geraden und Ziel oder Endpunkt kurz „Ziel“ entwickelt und durch fortgesetztes Zeichnen befestigt. Das im Geiste (der inneren Anschauung) des Schülers erweckte beziehentlich erwachte und durch die Hand betätigte Streben, vom Ursprung aus das Ziel zu erreichen ist nun das, was wir mit dem Worte „Richtung“ bezeichnen. Richtung ist also —

um es recht kurz und prägnant auszudrücken — das Streben, das Ziel zu erreichen. Das muß dem Schüler zum Bewußtsein kommen und dieses Erwachen des Bewußtseins ist vom Lehrer in jeder Weise zu fördern. Mit andern Worten: Der Begriff „Richtung“, dieses *noli me tangere* von Begriff, ist vom Lehrer zu entwickeln. Nun wird und muß dem Schüler klar werden, daß „Richtung“ stets ein „Ziel“ erfordert. Die Analogie beim Schießen wird ihn hierin unterstützen. Der Begriff „Ziel“ ist von „Richtung“ gar nicht zu trennen, er gehört zum Wesen der Richtung. Es wird und muß dem Schüler aber auch klar werden, daß zur Erreichung des Ziels eine Bewegung erforderlich ist, mag diese nun materiell (Lauf der Bleistiftspitze, Sausen der Flintenkugel etc.) oder mag sie ideal (intuitiv) in der Vorstellung der Bewegung eines gedachten Punktes nach einem gedachten Ziel stattfinden. Ist dem Schüler nur der Ursprung gegeben und nicht das Ziel, ist also das Ziel beliebig zu wählen, so wird es ihm schon früher klar geworden sein, daß von einem Punkte aus viele, sehr viele, unendlich viele Ziele, also auch unendlich viele Richtungen möglich sind, von denen aber immer zwei sozusagen „reziprok“ sind (Richtung und Gegenrichtung).“

#### Definition des Winkels.

In enger Beziehung zum Begriff „Richtung“ steht der Begriff „Winkel“. Über diesen hat sich zuerst J. C. Becker II 96 ausgesprochen. Er erklärt sich a. a. O. schroff gegen die Definition des Winkels als eines „Richtungsunterschiedes“ — das hängt eng zusammen mit seiner im vorigen Kapitel dargelegten Ansicht über den Begriff „Richtung“ — und will unter „Winkel“ den Drehungsabstand zwischen den Schenkeln verstanden haben. Becker hält auch die Winkelerklärung von Schweins für richtig, nach welcher ein Winkel „das durch zwei in einem Punkte zusammentreffende gerade Linien erzeugte Gebilde“ ist. Dieser Ansicht neigt sich im allgemeinen auch Hoffmann zu, wenn er III 532 sagt: „Ein offenes Linien- oder besser „Strahlengebilde“, welches aus der allgemeinen Ebene ein Stück, einen Sektor, abgrenzt, aber nicht ein- oder umschließt, heißt bekanntlich Winkel. Er gibt auch zugleich dem Flächenstück die Form, er gestaltet es; er ist das Urelement der Form.“ XVI 341 versucht Hoffmann aufs neue den Begriff „Winkel“ zu klären und sagt: „Winkel ist nicht der von den Schenkeln abgegrenzte nach einer Seite noch offene (unbegrenzte) Flächen- (resp. Ebenen-) Raum, sondern nur das diesem Flächenstück Form (Gestalt) gebende, durch Drehung erzeugte und daher der Vergrößerung und Verkleinerung fähige Liniengebilde. Dieses Wesentliche des Winkels, die Formgebung, ist in der Geometrie so auffallend und wichtig, daß man sich verwundert fragt, warum es bei der Definition des Winkels nicht mehr zur Geltung gelangt ist.“

XIX 261 kommt T. Wimmenauer auf den Begriff „Winkel“ zu sprechen. Er kann sich mit keiner der ihm bekannten Winkeldefinitionen einverstanden erklären. Er gibt zu, daß es sehr schwierig sei, eine einwandfreie Winkelerklärung zu geben. Ja er geht so weit zu sagen: „Es kann nahe liegen, den Winkel im Unterrichte überhaupt nicht zu definieren.“ Schließlich stellt er es aber doch als eine unerläßliche Forderung hin, eine Winkeldefinition festzustellen und gibt den Lesern der Zeitschrift die Anregung, in eine allgemeine Diskussion über den Begriff „Winkel“ eintreten zu wollen.

Dieser Aufforderung ist als erster H. Schotten gefolgt. In klarer und sachlicher Weise stellt er zunächst XX 481 den augenblicklichen Zustand in der Winkelerklärung fest, indem er nach einigen einleitenden Bemerkungen sagt: „Unter den zahlreichen Erklärungen haben sich in der Hauptsache drei, wesentlich von einander verschiedene, Heimatsrecht erworben:

1. Die Definition des Winkels als Richtungsunterschiedes.
2. Die Definition des Winkels als Ebenenstückes.
3. Die Definition des Winkels als Größe der Drehung.“



Nachdem Schotten aus nicht weniger als 45 Lehrbüchern die Winkeldefinitionen\*) aufgeführt, insonderheit die in den „Elementen“ von E. Müller sich vorfindende Winkeldefinition besonders besprochen, aber als zu wissenschaftlich und daher ungeeignet für den Elementarunterricht erklärt hat, wendet er sich der Kritik der drei genannten hauptsächlichsten Definitionen zu. Die erste Definition verwirft Schotten, indem er dreierlei geltend macht. 1. Der Winkel ist eine Quantität, nach dieser Definition aber würden wir es mit einem qualitativen Unterschiede zu tun haben. 2. In diese Definition wird ein neuer Begriff, der Begriff der Richtung, eingeführt, der mindestens dieselben Schwierigkeiten bei der Definition darbietet, wie der Begriff „Winkel“ selbst. 3. Im Begriff „Richtungsunterschied“ liegt kein Moment, was irgend auf Bewegung deutet, im Gegenteil, er leidet an (Euklidischer) Starrheit. Auch die zweite Definition kann Schotten nicht billigen. Er sagt: „Nach dieser Definition würden alle Winkel unendlich groß, also untereinander gleich sein. Man sieht, daß man aus diesem Grunde von der Fläche als einem wesentlichen Teil des Winkels ganz absehen muß, da man auf etwas Widersinniges stößt.“ Gegen die Auffassung des Winkels als (offene) Figur hat Schotten nichts Wesentliches einzuwenden, er meint nur, daß diese Definition zu weit sei. An der dritten Definition tadelt Schotten das Wort „Größe“ und will dasselbe durch „Maß“ ersetzt haben, sodafs ihm als richtige Definition gilt:

„Der Winkel ist das Maß der Drehung.“

Gegen diese Definition Schottens wendet sich Hoffmann XX 581, indem er vorhält, daß durch das Wort Drehung sich ein Begriff der Mechanik in die Definition einschleiche und daß „Maß“ doch nur ein Wort für eine bestimmte Größe, „Maß“ schließlichs nichts anderes als „Größe“ sei. Außerdem könne unter „Maß der Drehung“ doch leicht der Kreisbogen verstanden werden, sodafs in der gegebenen Definition schließlichs dieser und nicht der Winkel erklärt sei.

XXI 249 kommt Hoffmann in einem Aufsatz über die Lehre vom Winkel auch wieder auf die Winkeldefinition in der Schule zu sprechen und stellt nach längerer Erörterung folgende Definition auf:

„Ein Winkel ist ein Liniengebilde, bestehend aus zwei zu einander geneigten Geraden“

und fügt zur Vervollständigung noch hinzu: „Das Winkelgebilde stellt eine offene Figur dar, welche einem Ebenenstück die Form erteilt.“

XXII 1 stellt H. Gerlach in einer längeren Betrachtung über die Definition des Winkels auf Grund der bis dahin über diesen Gegenstand erfolgten Veröffentlichungen Erörterungen an, die ihn zu folgendem Resultate führen: „Schließlichs bleibt also die ursprünglichsste Erklärung des Winkels als eines sich öffnenden Gebildes die zutreffendste. Sie bildet den Stamm, dem die übrigen Vorstellungen von Fläche, Drehung, Richtungsunterschied als einzelne Zweige angehören, und zugleich gestattet sie, je nach Bedürfnis, auch den Teil für das Ganze zu setzen. Wegen ihrer allgemeinen Form kann man sie als Erklärung für die Gattung hinstellen. Bei dem planimetrischen Winkel wäre dann das sich öffnende Gebilde durch die gebrochene Linie zu ersetzen. Mit diesem Endresultat schließlichs ich mich der vom Herausgeber vertretenen Ansicht (XX 410) an und schlage folgende Definition vor:

Die gebrochene Linie als Träger für die Vorstellung der Form eines Sektors (oder als formgebendes Gebilde) heißt Winkel. Eine kürzere Form wäre:

Der Zweistrahls als lineare Größe heißt gebrochene Linie, als intensive Größe heißt er Winkel.“

\*) Beziehentlich Nichtdefinitionen, denn manche Erklärung beginnt mit den Worten: „Ein Winkel entsteht usw.“

XXII 13 äußert sich weiter A. Schmitz zur Definition des Winkels. Nach seiner Ansicht ist „Winkel“ ein undefinierbarer Grundbegriff. Soll aber dennoch dem Schüler eine Definition gegeben werden, so hält Schmitz auf der Unterstufe die Definition des Winkels als Richtungsunterschiedes für richtig, während er auf der Oberstufe etwa folgende Erklärung abgegeben wissen will: „Bei einer Geraden ist außer der Länge auch noch die Richtung der Geraden zu beachten. Die Richtung können wir uns aber nicht versinnlichen, sondern nur den Richtungsunterschied zweier Geraden. Ein Maß für diesen Richtungsunterschied gewinnen wir, wenn wir den möglichen Gesamtrichtungsunterschied aller in einem Punkt sich schneidenden Geraden durch eine Zahl (4 R) bezeichnen. Das Maß für den Richtungsunterschied heißt Winkel.“

XXIX 93 bringt noch einen kurzen Artikel über die Winkeldefinition. Der Verfasser desselben, P. Hoyer, bekämpft in ihm die Schottensche Definition des Winkels als „Maß der Drehung“ und redet der Definition des Winkels als „Ebenenstückes“ das Wort, indem er betont, daß die Auffassung des Winkels als Ebenenstückes keinesfalls die Auffassung desselben als unendliche Größe bedingt. Die Definition des Winkels als Ebenenstückes will er nur noch dahin modifiziert haben, daß man den Winkel als ein Flächengebilde definiert, das entsteht, wenn ein Strahl in der Ebene sich um seinen Anfangspunkt dreht.

Im Anschluß an diesen Artikel ergreift noch einmal Hoffmann das Wort — es ist das Schlusswort in diesem Meinungskampfe — indem er folgendes ausführt: „Ich stimme mit dem Verfasser des vorstehenden Artikels darin überein, daß die Auffassung des Winkels als Ebenengebilde keineswegs die unendliche Ausdehnung dieses Ebenenstückes bedingt, oder anders ausgedrückt, gar nichts mit der Unendlichkeit zu tun hat. Daraus, daß der Winkel ein Ebenengebilde darstellt, das nach einer Seite hin noch offen ist, folgt doch nicht, daß dieses Ebenenstück nach der offenen Seite hin als unendlich ausgedehnt zu denken habe. Es ist nur noch nicht begrenzt. Aber seit wann existiert und von wem stammt das Postulat: Alles noch nicht Begrenzte ist als unendlich ausgedehnt zu denken? Das noch Unbegrenzte läßt nur die Möglichkeit, es noch zu begrenzen, offen, bedingt aber nicht, es als unendlich zu denken.“ „Ich begreife nicht, warum man sich nicht entschließt, den Begriff Figur dahin zu erweitern, daß man ihn auch auf nicht geschlossene Gebilde anwendet, während man bei der Arithmetik in der allmählichen Erweiterung der Begriffe das Mögliche geleistet hat.“ Unter Hinweis auf seine früheren Erörterungen betont Hoffmann, daß er den Winkel als „Eineck“ erkläre, wofür aber auch das schon vielfach gebrauchte Wort „Zweistrahl“ gesetzt werden könne.

#### Winkelgrad und Bogengrad.

XVIII 344 kommt Hoffmann auf die Begriffe Winkelgrad und Bogengrad zu sprechen und weist auf die große Unklarheit hin, die in dem in vielen Lehrbüchern enthaltenen Satze gipfelt: „Der Winkel wird durch den zugehörigen Bogen gemessen.“ Hoffmann tadelt, daß von vorn herein nicht streng genug zwischen Bogeneinheit und Winkleinheit unterschieden wird. Diese Nachlässigkeit erklärt er aus dem Umstande, daß sich die Bogeneinheit leicht, die Winkleinheit schwerer anschaulich darstellen läßt. Mit allem Nachdrucke hebt Hoffmann hervor, daß sich so verschiedene Gebilde wie Winkelgrad und Bogengrad nicht durcheinander messen lassen. Um diese beiden Begriffe scharf auseinander halten zu können, schlägt Hoffmann vor, das bisher beiden Begriffen gemeinsame Zeichen „°“ nur für den Bogengrad anzuwenden und bezüglich der Winkleinheit auf die Bildung eines neuen Wortes zuzukommen. Als solches erscheint ihm das Wort „Off“ als Anfangsilbe des Wortes „offen“<sup>\*)</sup> empfehlenswert.

\*) Weil jeder Winkel eine Öffnung hat, also ein noch offenes Gebilde ist.



Bezüglich der Auseinanderhaltung der Begriffe Winkelgrad und Bogengrad fand Hoffmann bald allgemeine Zustimmung, während man sich mit der Einführung des neuen Wortes „Off“ nicht allenthalben einverstanden erklären konnte. Besonders erfreulich war es für Hoffmann, daß neu erschienene Lehrbücher und Leitfäden seiner Anregung Folge leisteten. So brachte ein von Hertter herausgegebenes Lehrbuch in dem betreffenden Kapitel folgende Erklärung: „Die Maßeinheit für die Winkelmessung ist der Winkelgrad =  $\frac{1}{360}$  des Vollwinkels, diejenige für die Kreisbogenmessung der Bogengrad =  $\frac{1}{360}$  der Vollkreislinie, d. h. des Umfangs.“ Und in einer Anmerkung sagt Hertter: „Bogengrad und Winkelgrad sind so wenig ein und dasselbe als Rauminhalt und Gewicht; eins kann daher auch nicht als Maß des andern dienen.“

II 116 lenkt K. Zerlang die Aufmerksamkeit der Leser auf das Pronomen „sich“ mit seiner doppelten Bedeutung als reflexives und reziprokes und gibt die Anregung, in der Sprache der Mathematik „sich“ nur in reflexiver Bedeutung zu gebrauchen und das reziproke jederzeit durch „einander“ zu ersetzen. Es soll also stets gesagt werden: Zwei Gerade schneiden „einander“ (nicht „sich“). Dieser Vorschlag Zerlangs fand bei den Lesern der Zeitschrift zunächst keinen Widerspruch. Vielmehr führen die Zusammenstellungen verbesserter (einwandfreier) mathematischer Ausdrucksweisen III 176 und XXVIII 88 die „einander schneidenden Geraden“ als allgemein anerkannte mathematische Ausdrucksweise mit auf. Erst im 30. Bande — also nach 28 Jahren — wendet sich ein Leser der Zeitschrift gegen diese Ausdrucksweise. Zur Begründung seiner Ansicht führt er lediglich nur das Sprachgefühl, beziehentlich den Sprachgebrauch ins Feld. Ein auf Grund dieser Meinungsäußerung durch den Herausgeber der Zeitschrift von Dr. Lyon (Dresden) eingeholtes Gutachten bestätigt die sprachliche Richtigkeit der Ausdrucksweise: „Die Geraden schneiden sich“, während ein von E. Meyer (Herford) erbetenes Gutachten sagt: „Ich meine, daß man in der mathematischen Sprache gut daran tut, jetzt wo die deutsche Sprache für das reziproke Verhältnis eine besondere Form gebildet hat, diese nicht zu ignorieren, d. h. „sich“ nur als reflexives Pronomen zu gebrauchen und als reziprokes stets „einander“ zu verlangen.“

Wie beherzigenswert dieser Vorschlag ist, beweist ein Beispiel jenes Lesers der Zeitschrift, das er zum Beweise seiner Behauptung anführt. Er sagt: „Richtig ist doch die Ausdrucksweise: die Jungen schlugen sich“, fügt aber schleunigst hinzu: „d. h. nicht: jeder schlug sich selbst, sondern einer den andern.“ Ist es nicht empfehlenswerter, sich stets so auszudrücken, daß man es nicht nötig hat, den ausgesprochenen Satz durch ein „das heißt“ — wenn vielleicht auch nur im stillen — zu ergänzen beziehentlich zu erklären. Daß man die Empfindung hat, mit dem reziproken „sich“ die Sache nicht klar genug ausgedrückt zu haben, das beweist die in vielen Fällen übliche Hinzufügung des Wortes „gegenseitig“; z. B. die Diagonalen (des Vierecks) schneiden sich gegenseitig. Würde man unsrer Sprache nicht einen Dienst erweisen, wenn man darauf dringen würde, jederzeit das wahrlich nicht schön klingende und auch nicht einmal leicht zu sprechende „sich gegenseitig“ durch das so angenehm klingende und tönende „einander“ zu ersetzen? Dabei würden wir Deutschen uns auch noch im Einklang mit dem Sprachgebrauch anderer Völker (z. B. Franzosen, Engländer) befinden!

Alt ist die Klage über die große Unklarheit, die bezüglich „der Benennung der Winkel an Parallelen“\*) herrscht. I 278 wendet sich H. Sturm diesem Kapitel der Elementargeometrie zu.

\*) Richtiger: Winkel an zwei Geraden einer Ebene, die von einer dritten geschnitten werden.

Nicht „sich schneiden“, sondern „einander schneiden“.

Benennung der Winkel an zwei Geraden, die von einer dritten geschnitten werden.

Sturm unterscheidet drei Arten von Winkelpaaren. Die erste Art dieser Winkel sind die Winkel, die an derselben Seite der schneidenden und an entsprechenden Seiten der geschnittenen Geraden liegen. Als bekannte Benennungen dieser Winkel führt er an:

1. Gegenwinkel. 2. Homologe Winkel. 3. Korrespondierende Winkel.

Die ersten beiden Benennungen verwirft Sturm, weil sie nach seiner Ansicht besser für gewisse Winkel in andern geometrischen Gebilden passen. Für richtig erklärt Sturm die Benennung „korrespondierende Winkel“ oder besser noch „entsprechende Winkel“. Die Benennung der zweiten Art von Winkelpaaren an zwei Geraden, die von einer dritten geschnitten werden, nämlich die Winkel zu verschiedenen Seiten der schneidenden Linie und auf verschiedenen Seiten der geschnittenen Geraden, als Wechselwinkel billigt Sturm rückhaltlos. Über die dritte Art von Winkeln an dem genannten Liniengebilde spricht sich Sturm aus wie folgt: „Die dritten Winkel haben wieder einen dreifachen oder vierfachen Namen: „entgegengesetzte Winkel“, „Ergänzungswinkel“ und leider auch „Gegenwinkel“, sodafs dies Wort mit drei verschiedenen Bedeutungen herumläuft. Ferner heißen diese dritten Winkel auch blofs „innere“ oder „äussere“ Winkel, aber diese Benennung paßt ebenso auf die Wechselwinkel und gibt nicht die charakteristische Lage jener wieder. „Ergänzungswinkel“ sind sie doch nur in dem Fall, dafs die von der dritten geschnittenen Linien parallel sind, und es wird so die dann stattfindende Eigenschaft schon durch die Benennung antizipiert. Es bleibt die beste der bisher gebräuchlichen Benennungen „entgegengesetzte Winkel“.“

Sturm unterscheidet also:

1. Entsprechende Winkel.
2. Wechselwinkel.
3. Entgegengesetzte Winkel.

II 91 äufsert sich zu der von Sturm angeregten Frage J. C. Becker und empfiehlt als Bezeichnungsweise „diejenige, wonach jeder einzelne dieser Winkel als innerer und äufserer gilt, je nachdem er zwischen den geschnittenen Geraden liegt oder nicht, und jedes Paar als Gegen- oder Wechselwinkelpaar, je nachdem beide auf derselben Seite der schneidenden Linie liegen, oder der eine links und der andere rechts“. Becker unterscheidet also: innere, äufsere und gemischte Gegen- und Wechselwinkel; für „gemischte Gegenwinkel“ wünscht er nur noch die Benennung „entsprechende Winkel“, sodafs sich folgende Übersicht ergibt:

Innere	}	Gegenwinkel (die gemischten auch entsprechende Winkel).	Innere	}	Wechselwinkel.
Äufsere			Äufsere		
Gemischte			Gemischte		

In einem von Prof. Sauer (Stettin) auf der Philologen- und Schulmänner-Versammlung in Wien (1893) gehaltenen, XXIV 27 ff. abgedruckten Vortrag findet sich folgende Stelle über die Benennung der betreffenden Winkelpaare: „Immer noch herrscht Verschiedenheit in betreff der Winkelbenennung, wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden. Am glücklichsten gewählt ist der Name Wechselwinkel, und über seine Anwendung sind wohl alle Lehrer einig. Dagegen brauchen einige den Ausdruck Gegenwinkel, wo andere von entgegengesetzten Winkeln sprechen. Besonders aber für zwei Winkel, welche an derselben Seite der schneidenden Linie und an denselben Seiten der geschnittenen Linien liegen, gehen die Bezeichnungen weit auseinander. Ich erwähne die Namen: Korrespondierende Winkel, konjugierte Winkel, innere Winkel, gleichliegende Winkel, Gegenwinkel, endlich das neu gebildete Wort Anwinkel. Die ersten dieser Benennungen sind teils zu lang, teils Fremdwörter und passen deshalb nicht für den ersten Unterricht; Gegenwinkel paßt besser für die anderweitig entgegengesetzt genannten Winkel. Ich stimme deshalb

Kober bei, der meint, es müßte für diesen Begriff ein neues Wort gebildet werden; nur kann mir die Zusammensetzung des Substantivs Winkel mit der Präposition „an“ nicht gefallen. Ich möchte einen andern Vorschlag wagen, den ich allerdings beim Unterrichte noch nicht erprobt habe. Wäre es nicht angebracht, diese Winkel Seitenwinkel zu nennen, weil in der Erklärung sowohl bei den geschnittenen Linien als bei der schneidenden gleiche Seiten genannt werden. Man hätte somit die gleichmäßige Reihe: Seitenwinkel, Wechselwinkel, Gegenwinkel.“

Zur Benennung der Winkel, die an derselben Seite der schneidenden und an entsprechenden Seiten der geschnittenen Geraden liegen, äußert sich schließlicly noch J. St. Schuster. Nach einer kurzen Erörterung über das Wort „Gegenwinkel“, das nach seiner Ansicht seiner natürlichen Bedeutung entfremdet worden ist, regt er an, die von Becker benannten „entsprechenden Winkel“ als Stufenwinkel zu bezeichnen.

Leider herrscht auch heute noch nicht Übereinstimmung in der Benennung der Winkel an zwei Geraden, die von einer dritten geschnitten werden. Im allgemeinen pädagogisch-mathematischen Interesse liegt es aber, hierin Wandel zu schaffen. Es ist doch ein unerträglicher Zustand, daß infolge der dem Unterrichte zu Grunde gelegten verschiedenen Leitfäden und Lehrbücher dem Quartaner der einen Anstalt diese und dem einer andern Anstalt jene Benennungen der in Frage stehenden Winkelpaare eingepägt werden. Der Verein zur Förderung des mathematischen Unterrichtes könnte es sich angelegen sein lassen, einmal endgiltig Klarheit in die besagte Ausdrucksweise zu bringen. Da es wohl fraglich erscheinen darf, ob sich die Benennungen „Seitenwinkel“ und „Stufenwinkel“ in weitere Kreise eingebürgert haben, so ist vielleicht für alle, die sich an das Wort „Gegenwinkel“ nicht stoßen, die Einteilung von Becker zu empfehlen, nach der es innere, äußere und gemischte Gegen- und Wechselwinkel gibt — für die „gemischten Gegenwinkel“ vielleicht noch „entsprechende Winkel“ —. Jedenfalls hat diese Einteilung den Vorzug der Übersichtlichkeit für sich.

II 337 macht K. Zerlang darauf aufmerksam, daß man beim Dreieck beziehentlich Viereck entsprechend der Benennung als „Seiten“ nicht von einer Grundlinie, sondern einer Grundseite zu sprechen hat. Hoffmann pflichtet III 376 dieser Ansicht Zerlangs bei und nimmt das Wort „Grundseite“ in sein Verzeichnis verbesserter Ausdrucksweisen mit auf. Diese Richtigstellung ist unwidersprochen geblieben, hat aber leider nicht in alle Leitfäden und Lehrbücher Aufnahme gefunden, sodaß man auch in den neuesten Auflagen beliebter Leitfäden noch das Wort „Grundlinie“ lesen kann.

XIII 25 weist P. Meutzner auf folgende fehlerhafte — in vielen, sogar den besten Leitfäden gegebene — Fassung des Außenwinkelsatzes hin: „Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkel.“ Meutzner hebt das Sinnlose dieser Fassung hervor, indem er darauf hinweist, daß „dem Außenwinkel doch gar nichts gegenüberliegt“, und empfiehlt als richtige Ausdrucksweise: „Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel.“

Eine Unklarheit in der mathematischen Ausdrucksweise, deren Besprechung auch Erörterungen allgemeiner Art veranlaßte, deckt J. C. Becker II 91 auf. Es handelt sich um das Wort „Kreis“, „das bald zur Bezeichnung der Kreislinie, bald zur Bezeichnung der Kreisfläche dient“. Da „beide, Kreislinie und Kreisfläche, doch heterogene Begriffe sind“, so erscheint Becker eine Klärung des Begriffes „Kreis“ dringend notwendig.

Nicht Grundlinie, sondern Grundseite.

Fehlerhafte Fassung des Außenwinkelsatzes.

Ist „Kreis“ die Kreislinie oder Kreisfläche?



Den ersten Beitrag zu der gewünschten Klarstellung liefert Dr. Wiczorkowitz VII 116. Er wendet sich gegen die (damals noch) in den meisten Lehrbüchern und Leitfäden übliche Erklärung des Kreises als Fläche und spricht sich für die Erklärung des Kreises als Linie aus. Geltend macht er für seine Ansicht: 1. den gewöhnlichen Sprachgebrauch; 2. den mathematisch-wissenschaftlichen Sprachgebrauch, nach dem man „von dem Schneiden und Berühren zweier Kreise spricht, was doch offenbar nur auf die Kreislinie, nicht auf die Kreisfläche bezogen werden kann“; 3. den Umstand, daß man es öfter mit der Kreislinie als mit der Fläche zu tun hat und deshalb für die Linie der kürzere Ausdruck angebracht ist; 4. die Analogie — unter den Benennungen Ellipse, Parabel, Lemniskate, Cykloide usw. versteht niemand die Flächen, sondern die Linien.

Die gegenteilige Ansicht über den Begriff „Kreis“ wird, nachdem dieser Gegenstand in einer Reihe von Bänden der Zeitschrift nur flüchtig berührt worden ist, XXVII 410 von G. Leonhardt nachdrücklich vertreten. Leonhardt nimmt Bezug auf folgenden, von H. Schotten bei der Rezension eines mathematischen Lehrbuchs ausgesprochenen Satz: „Der Kreis oder die Kreisfläche“ ist falsch, unter Kreis ist nur die Linie zu verstehen.“ Diesem Satze stellt Leonhardt die Behauptung entgegen: „Unter Kreis ist sicher die Fläche und nicht die Linie zu verstehen.“ Zum Beweise dieser Behauptung dient ihm zunächst „der Sprachgebrauch“. Leonhardt sagt: „Man spricht von dem Inhalte nicht einer Kreisfläche, sondern schlechthin eines Kreises; was aber einen Inhalt hat, kann keine Linie sein; man läßt bei der elementaren Berechnung des Kreisinhalts „den Kreis“ aus einem regelmäßigen Vieleck entstehen, man läßt „den Kreis“ entstehen durch Umrollung einer Geraden, um einen ihrer Endpunkte.“ Zur Verteidigung seiner Ansicht führt er weiter die Tatsache an, daß in den meisten Lehrbüchern der Kreis als Fläche definiert wird. So bei Euklid, so in den bekannten Lehrbüchern von Hallerstein, Balsam, Kambly. Leonhardt unterläßt aber auch nicht, Definitionen anderer Autoren anzuführen, die nicht für seine Behauptung sprechen. So die Definitionen bei Mehler und bei Rottrock, welche verschweigen, was unter „Kreis“ zu verstehen ist, indem sie die Worte „Kreislinie“ und „Kreisfläche“ gebrauchen. Und anschließend hieran bringt Leonhardt sogar die Definition in den Leitfäden von Lieber- von Lühmann und von Bensemänn, welche keinen Zweifel darüber lassen, daß sie unter Kreis die Linie verstanden wissen wollen. Leonhardt führt die letzteren aber nur deshalb mit an, um aus einigen Inkonssequenzen, die sich diese Autoren bei dem Gebrauche des Wortes „Kreis“ zu Schulden kommen lassen, für seine Ansicht Kapital zu schlagen. Denn, wenn in den genannten Leitfäden der Satz: „Ausschnitte eines Kreises verhalten sich wie ihre Zentriwinkel“ zu lesen ist, so ist den Verfassern doch nur eine Nachlässigkeit vorzuwerfen; es ist klar, daß es nach der Definition der Verfasser dieser Leitfäden an dieser Stelle nicht Kreis, sondern Kreisfläche heißen muß. Und, wenn Leonhardt im Anschluß an den bei Lieber und von Lühmann stehenden Satz: „Zwei Kreise sind ähnliche Figuren“ sagt: „Hier tritt ganz klar zu Tage, daß der Verfasser, trotzdem er den Kreis als Linie definiert hat, ihn doch zu den Figuren zählt, eine *contradictio*, bei der man an den guten Homer erinnert wird,“ so übersieht er ganz, daß der Vorwurf, den er dem Verfasser macht, nur gerechtfertigt ist, wenn dieser unter „Figur“ die Fläche und nicht das Liniengebilde versteht. Hier setzt mit seiner Entgegnung Hoffmann ein, indem er darauf hinweist, daß erst einmal der Begriff „Figur“ geklärt werden muß. Von der Bedeutung des Wortes „Figur“ als „Gestalt“ oder „Form“ ausgehend, kommt Hoffmann zu dem Ergebnis, daß man unter „Figur“ nur die Grenze eines Flächenstückes zu verstehen hat. „Diese Grenze“, sagt Hoffmann, „kann aber nichts anderes sein als eine Linie, entweder eine gebrochene oder eine krumme. Diese Grenze (Form, Figur) ist nur ein notwendiges Attribut der Gebilde. Ohne

Form ist ein Ebenenstück nicht denkbar, wohl aber kann man sich die Fläche wegdenken und nur die Form vor Augen haben, man kann die gebrochene Linie, welche das Flächenstück begrenzt und welche die Form darstellt, als von der Fläche losgelöst und unendlich dünn sich vorstellen (— im Modell durch feinstmöglichen Draht oder das feinste Haar dargestellt —). Diese „reine Form“ tritt am ausgeprägtesten jedem entgegen bei der Parabel, Hyperbel und ganz besonders auch bei Kurven wie der Cissoide, Conchoide, Spirale. Behauptet nun jemand, die völlige Loslösung der Fläche von der Form sei psychisch unmöglich, so wird er doch soviel einräumen müssen, dafs bei der Abstraktion von der Ebene die Vorstellung derselben so sehr verblasst, dafs sie als völlig aus dem Bewußtsein verschwunden betrachtet werden kann. Es ist also offenbar die Form (Figur) die Hauptsache und nicht die Fläche.“ „Ich meine also: die Mathematiker sollten übereinkommen, unter „Kreis“ immer nur die Kreislinie zu verstehen, und wenn die Fläche gemeint ist, Kreisfläche zu sagen. Es wäre dies ein der Diskussion und Beschlufsfassung würdiges Thema für die Vereins- oder Sektionsversammlungen der Mathematiklehrer.“ Dieser Ansicht schließt sich Weber (Wolfenbüttel) XXVII 417 an. In einem Artikel über „Logik und Sprachrichtigkeit im mathematischen Unterricht“ hebt er hervor, dafs das Verständnis der Sätze über den Kreis und überhaupt von diesem ganzen Gebilde erschwert werde, wenn man an der einen Stelle unter Kreis die Fläche, an einer andern die Kreislinie verstehen soll. Weber weist ferner darauf hin, wie „komisch es wirkt, wenn man in einem Lehrbuche liest, wie der Verfasser sich abmüht, mehrere Gründe dafür anzugeben, dafs er unter Kreis eine Linie versteht, nachher aber die Fläche ebenso bezeichnet.“ Gleichgiltig ist ihm, in welcher Weise man sich entscheidet — ob man mit „Kreis“ die Fläche oder die Linie bezeichnet —, nur darauf kommt es ihm an, dafs auf jeden Fall die Zweideutigkeit des Wortes „Kreis“ aus der Welt geschafft wird.

III 376 findet sich der in der Zeitschrift nicht weiter erörterte Vorschlag Hoffmanns: statt „Kreis beschreiben“ oder „schlagen“ besser zu sagen „Kreis ziehen“. Als Begründung dient der Hinweis, dafs diese Ausdrucksweise dem „Linie ziehen“ analog ist.

III 369 stellt J. Kober erstmalig die Frage: „Soll es heißen, der umschriebene oder der umgeschriebene Kreis?“ Zur Beantwortung dieser Frage führt Kober folgendes aus: „Die mit gewissen Präpositionen zusammengesetzten Zeitwörter bilden im Deutschen zwei Gruppen, indem entweder der Akzent auf der Präposition oder auf der Stammsilbe liegt, z. B.: übersetzen und übersetzen. In den Wörtern der ersten Gruppe ist die Präposition vom Zeitworte trennbar und im Partizip des Perfekts muß die Silbe „ge“ zwischen Präposition und Zeitwort eingeschoben werden. Heißt das Wort also umschreiben, so muß gesagt werden: umgeschrieben, heißt es aber umschreiben, so muß man auch sagen: umschrieben. Liegt nun der Ton auf dem Präfix, so steht das Einschließende, Umgebende im Akkusativ, z. B. ein Tuch umbinden; liegt der Ton aber auf der Stammsilbe, so steht das Eingeschlossene, Umgebene im Akkusativ, z. B. eine Stadt umzingeln. Einige Zeitwörter sind in beiden Formen gebräuchlich, z. B. umgürten, umwinden, umwickeln. Einen Kreis umschreiben heißt also, ihn mit etwas (z. B. mit einem Vielecke) umgeben, umschließen; der umschriebene Kreis müßte also derjenige sein, der von einem Vieleck umschlossen ist. Einen Kreis umschreiben (analog z. B. einen Reifen umlegen) heißt dagegen, um ein Vieleck einen Kreis legen, das Vieleck mit einem Kreis umgeben, umschließen. Es ist also kein Zweifel, dafs es in dem in der Geometrie durch den Sprachgebrauch angenommenen Sinne heißen muß: der umgeschriebene Kreis.“

Kreis „ziehen“, nicht  
„beschreiben“ oder „schlagen“.

Der „umschriebene“ oder  
„umgeschriebene“ Kreis.  
(Umkreis, Inkreis, Ankreis.)

IX 188 stellt sich F. J. Brockmann in einer kurzen Bemerkung ganz auf den Standpunkt Kobers. X 194 kommt Kober selbst wieder auf das von ihm behandelte Kapitel zu sprechen und sagt unter dem Ausdrucke des Bedauerns: „Mein Aufsatz hat wenig Erfolg gehabt, aber niemand hat sich der Mühe unterzogen, eine Widerlegung meiner Beweisführung zu versuchen.“<sup>\*)</sup> Auch Hoffmann beklagt XI 368 die Erfolglosigkeit der Koberschen Ausführungen. Zugleich weist er auf die Titel zweier in der Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlichten Aufsätze hin, deren erster die Überschrift: „Die einem Dreiecke umschriebene Ellipse kleinsten Inhalts“ trägt, während der zweite das Thema: „Das einem Tetraeder umschriebene Ellipsoid kleinsten Volumens“ behandelt.

Neues zur aufgeworfenen Streitfrage bringt M. Simon (Berlin), indem er XXI 341 auf die Ausdrucksweisen: „Der einbeschriebene und der umbeschriebene Kreis“ aufmerksam macht und hierzu etwa folgendes ausführt: „Wie ist man (aber) zu der Einführung dieser seltsamen Wörter gekommen? Gewöhnlich hört man die folgende Begründung: Da allgemein gesagt werde, „einen Kreis in ein Dreieck, um ein Dreieck beschreiben“, so müsse man auch sagen: der „einbeschriebene, umbeschriebene Kreis“. Allein dieser Schluss ist unzutreffend, denn in der ersten Wendung heißen die Verba nicht „einbeschreiben, umbeschreiben“, sondern einfach „beschreiben“; in der Partizipialwendung kann es daher nur heißen: der in oder um das Dreieck beschriebene Kreis. „Beschreiben“ ist ein allen geläufiges Wort, während die Wörter „einbeschreiben, umbeschreiben“ in der Sprache gar nicht existieren. Nun darf ja eine lebende Sprache neue Wörter schaffen, aber diese Neubildungen müssen dem Sprachgeist entsprechen. Die Verba mit den Vorsilben „einbe-“ gehören aber zu den seltensten. Von 14 von Grimm aufgeführten Verben dieser Art sind 9 veraltet. Da sich offenbar die Sprache gegen solche Bildungen sträubt, dürfen sie doch keinesfalls vermehrt werden. Anders verhält es sich mit den Verben „einschreiben“ und „umschreiben“. Bei Anwendung dieser Wörter muß es aber in unsrem Falle heißen: der „eingeschriebene“, der „umgeschriebene“ Kreis und keinesfalls der „umschriebene“ Kreis.“ Simon macht zuletzt den Vorschlag, die Substantiva Inkreis, Umkreis, Ankreis zu gebrauchen.

Auf Grund dieser Ausführungen Simons nahm der Herausgeber der Zeitschrift Veranlassung, in der aufgeworfenen Streitfrage die Entscheidung des Sprachgelehrten Sanders anzurufen. In der Einleitung zu der sprachlichen Studie, die Sanders — der Aufforderung in freundlichster Weise nachkommend — den Lesern der Zeitschrift XXI 467 darbietet, präzisiert er seinen Standpunkt von vorn herein dahin, daß er Herrn M. Simon vollständig zustimmen müsse. Wir wollen deshalb nicht näher auf die gründlichen Ausführungen dieses Sprachgelehrten eingehen, erwähnen nur, daß er im interessantesten Teile seines Aufsatzes zeigt, in welcher Weise die sinnwidrige Ausdrucksweise „umschrieben“ (gebildet von umschreiben) hat in Gebrauch kommen können.

XXIV 529 wendet sich Sauer gegen die von Simon empfohlenen Wortbildungen „Inkreis, Umkreis, Ankreis“. Nach seiner Ansicht sind diese Bildungen unzulässig. Der Rechtfertigung dieser Wörter mit dem allgemeinen Bestreben, sich in der Sprache der Mathematik einer möglichst kurzen Ausdrucksweise zu bedienen, kann er nicht zustimmen. Er wünscht vielmehr, daß die längere Ausdrucksweise: äußerer, innerer Berührungskreis beibehalten wird. Sauer begründet dieses Verlangen, indem er sagt: „Ich halte es nicht für ein Übel, wenn das Wort, das einen schwierigeren Begriff bezeichnet, auch eine gewisse Zeit zum Lesen, Schreiben und Sprechen in Anspruch nimmt; der Lernende ist dadurch gezwungen, einen Augenblick länger bei der Schwierigkeit zu verweilen und sich somit besser daran zu gewöhnen.“

<sup>\*)</sup> Die Schriftleitung fügt hinzu: „Wahrscheinlich, weil sie nicht zu widerlegen ist.“



XXVIII 21 tritt G. Kewitzsch für die von ihm selbst aufgebrachten Namen „Umkreis, Inkreis, Ankreis“ ein und sagt: „Der vielfache Streit in der Zeitschrift über „umbeschrieben, umgeschrieben, umschrieben“ hatte mich mit Widerwillen erfüllt, und so suchte ich und fand Abhilfe. Die sofortige Annahme meines Vorschlags war mir ein Beweis, dafs auch andere den Wortstreit satt hatten.“ Zur Verteidigung der Kürze seiner Namen führt Kewitzsch folgendes aus: „Ein Name ist doch nichts weiter als der Ausdruck für einen Begriff. Wollte man in jedem Namen die Entstehung, Sein und Werden des Begriffs zur Anschauung bringen, so würde das viel Umstand und Weitläufigkeit geben, ohne zu nützen. Man will vorwärts, und die Namen sind die besten, welche schnell und ohne Aufenthalt den Gedanken vermitteln.“

Dieser Ansicht von Kewitzsch hält Sauer XXVIII 22 folgendes entgegen: „Ist denn blofs Kürze das Ziel des mathematischen Unterrichts? Haben wir denn an den Formeln nicht schon Kürzungen genug? Hat nicht schon jeder Lehrer die Erfahrung gemacht, dafs sich hinter blofsen Buchstaben und Namen gerade das verbirgt, was der Todfeind des mathematischen Unterrichts ist — die Gedankenlosigkeit und der Gedächtniskram? Für den Lernenden sind die mathematischen Gedanken oft recht schwer, daher ziehe ich selbst einen etwas langen Satz bei den Beweisführungen vor, wenn er volle Klarheit zu Wege bringt, als eine Kürze, die sich auf inhaltlose, der Sprache aufgezwungene Wörter stützt. Besser wäre es, wenn aus dem mathematischen Unterrichte eine Menge Redensarten stufenweise verschwänden, die allmählich zu Gedankenlosigkeiten sich abschwächen.“

II 335 beschäftigt sich Zerlang mit dem Ausdruck „Kreisring“ und sagt: „Der Name „Ring“ für die Differenz zweier konzentrischer Kreise scheint unzweckmäfsig, da durch denselben der Rotationskörper eines Kreises um eine feste Achse aufser ihm bezeichnet wird. „Reif“ ist der Rotationskörper eines Kreissegments um eine feste Achse aufser ihm. — „Kreiszone“ wäre für den ersten Begriff passender.“

„Kreiszone“ für „Kreisring“.

X 193 spricht sich J. Kober über die Anwendung des Wortes „Stück“ in der Planimetrie aus. Er sagt a. a. O.: „Das Wort „Stück“ verwendet der Sprachgebrauch aufser für einzelne getrennte Gegenstände derselben Art (z. B. Eier) für die Teile, in welche ein Ganzes durch Zerbrechen, Zerschneiden etc. geteilt werden kann; stets ist im Worte „Stück“ der Begriff der Gleichartigkeit des Teiles mit dem Ganzen enthalten. Man sagt: ein Stück Holz, Papier, Eisen etc. Kein Mensch wird aber den Einband eines Buches ein Stück desselben nennen, oder den Dachziegel ein Stück des Hauses etc. Hiernach bleibt es nicht zweifelhaft, was man unter „Stück“ einer Linie, eines Dreiecks, eines Prismas, eines Kegels zu verstehen hat. Es fällt ja auch niemanden ein, die Kante des Prismas oder den Mantel des Kegels ein „Stück“ desselben zu nennen. Dagegen sagt man allgemein: das Dreieck besteht aus sechs Stücken, nämlich drei Seiten und drei Winkeln. Sollte es nicht besser sein, so wie von Blütenteilen, Maschinenteilen, Körperteilen zu sprechen von Bestandteilen oder, um neue Bedenken auszuschliessen, von Elementen des Dreiecks?“

Das Wort „Stück“ in der Planimetrie.