„Über fehlerhafte mathematische Ausdrucksweise":

Zusammenstellung und Bearbeitung

der über dieses Gebiet in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Band 1—42) erfolgten Veröffentlichungen.

Von

Oberlehrer Theodor Hoffmann.

Wissenschaftliche Beilage

zum

Programm des Realgymnasiums mit Realschule zu Zwickau.

Ostern 1912.

Zwickau.

Zwickauer Zeitungs-(Amtsblatt-)Druckerei.

1912.

1912. Programm-Nr. 798.

Erst nach langem im 19. Jahrhundert geführtem heifsem Kampfe ist der Mathematik von wackren Vorkämpfern dieser Wissenschaft die Stellung im Unterrichtsplane der höheren Lehranstalten verschafft worden, die sie jetzt einnimmt; unter viel Widerspruch ist ihr endlich das Recht erstritten worden, das dieser „Königin der Wissenschaften" schon längst zukam. Die Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht gibt in ihren ersten Bänden noch ein Bild des Kampfes um die Berechtigung der Mathematik auf Gymnasien.

Dieses Recht, das sich die Mathematik errungen hat, legt ihr aber auch die ernste Pflicht auf, das ihr besonders Eigentümliche eifrig zu pflegen, um zu zeigen, wieviel Gewinn die Schule von ihr haben kann. Besonders eigentümlich ist der Mathematik zweifellos das Streben nach vollständiger Klarheit und Schärfe; mathematische Genauigkeit ist ja sprichwörtlich geworden. Mit diesen Vorzügen kann sie vor allem der Sprachbildung nützen, wenn ihr das Recht nicht versagt wird, fördernd in die Bildung der Sprache einzugreifen. „Die Mathematik ist", sagt J. C. V. Hoffmann in seiner Zeitschrift XVIII 118, „der Sprachbildung eine vorzügliche Stütze, ja oft eine weit gründlichere und strengere Lehrmeisterin als selbst die Grammatik. Der gewissenhafte und geschickte Mathematiklehrer, der nicht blofs Zahlen- und Formelkrämer oder Figurenmaler ist, ist ein nicht zu verachtender Bundesgenosse des Sprachlehrers."

Erfüllt denn aber auch der mathematische Unterricht auf unsren höheren Schulen in bezug auf Genauigkeit und Schärfe, insonderheit auf fehlerlose Ausdrucksweise, seine Aufgabe? Oder mufs etwa die Klage laut werden, dafs die sprichwörtlich gewordene Strenge und Schärfe in der mathematischen Ausdrucksweise nicht geübt wird und so die viel gepriesene Genauigkeit der Mathematik beziehentlich der Ausdrucksweise nur ein Vorurteil ist? Es mufs zugegeben werden, dafs dieser Klage eine gewisse Berechtigung nicht abzusprechen ist. Darum würde es empfehlenswert sein, wenn die Mathematikerwelt die „fehlerlose Ausdrucksweise in der Sprache der Mathematik" zum Gegenstand einer — in einer Zeitschrift zu führenden — ständigen Diskussion machen wollte. Die Versammlungen der Mathematiklehrer müfsten sich regelmäfsig mit der Aufgabe befassen, in die mathematische Ausdrucksweise immer mehr Klarheit und Übereinstimmung zu bringen.

Die ersten Anregungen hierzu sind vor etwa 40 Jahren in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht gegeben worden. Der Begründer dieser Zeitschrift richtete gleich in dem ersten Bande eine ständige Abteilung ein mit der Überschrift: „Über Inkorrektheiten in der mathematischen Ausdrucksweise". Man kann wohl behaupten, dafs dieser Teil der Zeitschrift lange Zeit als der interessanteste von den Lesern erachtet wurde. Kam es doch hier oft auch zu recht scharfen Auseinandersetzungen. Aber gerade dieser ernstliche Meinungsaustausch hat sicher dem mathematischen Unterricht hinsichtlich der Ausdrucksweise viel Gewinn gebracht! Und es ist nur zu bedauern, dafs in den letzten 15 Bänden der Zeitschrift wenig Artikel über mathematische Ausdrucksweise veröffentlicht worden sind und es so an der nötigen Anregung zur Aussprache über dieses wichtige mathematisch-pädagogische Kapitel gefehlt hat.

Um so mehr ist es berechtigt, wenn wieder einmal auf das Thema: „Fehlerhafte Ausdrucksweise im mathematischen Unterricht" hingewiesen wird. Und das kann am wirksamsten wohl dadurch geschehen, dafs einmal alles, was über diesen Gegenstand in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht veröffentlicht worden ist, zu einem Ganzen zusammengefafst wird. Diese zusammenfassende Darbietung dürfte wohl für die Mathematiklehrer von besonderem Werte sein, die auf Grund ihrer Beschäftigung mit mathematischer Ausdrucksweise Veröffentlichungen auf diesem Gebiete vorbereiten.

Meiner Zusammenstellung sollen die 42 abgeschlossenen Bände der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht zu Grunde liegen; sie gliedert sich in einen geometrischen und einen arithmetischen Teil.

Geometrischer Teil.

Bestimmter oder unbestimmter Artikel.
(Eine oder die Parallele ziehen.)

H. Sturm (Bromberg) hat das Verdienst, in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht den Kampf gegen fehlerhafte mathematische Ausdrucksweise eröffnet zu haben. Er macht I 273 aufmerksam auf die falsche Anwendung des unbestimmten Artikels in der Ausdrucksweise: Fälle ein Lot vom Punkte C auf die Gerade AB. Sturm sagt: „Es mufs unter allen Umständen heifsen: das Lot fällen, da doch eben nur ein Lot möglich ist." Zu dieser Richtigstellung hat sich damals in der Zeitschrift niemand in gegnerischem Sinne geäufsert, vielmehr finden wir die Sturmsche Ausdrucksweise in einer von G. Emsmann VI 51 gegebenen Zusammenstellung verbesserter, einwandfreier Ausdrucksweisen mit vor.

XVI 436 — zehn Jahre später — gibt nun der Begründer der Zeitschrift, J. C. V. Hoffmann, da er bei seinem Studium der inzwischen erschienenen Lehrbücher und Leitfäden immer wieder die gerügte Ausdrucksweise (den unbestimmten Artikel) vorgefunden hatte, die Anregung zu einer Aussprache über die in Frage stehende Ausdrucksweise. Dieser Aufforderung kommt als erster A. Häbler (Grimma) nach XVII 433. Häbler bricht für den unbestimmten Artikel eine Lanze. Er weist darauf hin, dafs in der fraglichen Ausdrucksweise der unbestimmte Artikel „allgemeiner Sprachgebrauch" ist und sagt: „Die Sprache wird wahrscheinlich ihre Gründe haben, warum sie sich so und nicht anders ausdrückt." Der Sprachgelehrte Sanders, der von der Redaktion um ein Gutachten ersucht worden war, ergreift in seiner Erörterung XVII 435 im wesentlichen Partei für den unbestimmten Artikel. Rapp (Ulm) meint XVIII 113, dafs in der Ausdrucksweise: „ich fälle eine Senkrechte" der Nachdruck ganz und gar auf dem Worte Senkrechte liegt, „der Schüler soll eben eine Senkrechte und keine andre Art von Linie ziehen". Nach Rapp ist die Ausdrucksweise „eine Senkrechte" vollauf berechtigt. Der Ansicht des Urhebers der ganzen Streitfrage nähert sich etwas wieder F. Wimmenauer, wenn er XVIII 114 sagt: „Man sollte stets den bestimmten Artikel gebrauchen, sofern nur ein Ding gemeint sein kann; den unbestimmten, sofern dies noch nicht entschieden ist. Wimmenauer hebt hierbei den Fall hervor, dafs die Aufgabe: „durch drei gegebene Punkte einen Kreis zu legen" erstmalig gestellt wird und befürwortet für diesen Fall auf das entschiedenste den unbestimmten Artikel, da der Schüler doch durch die der Lösung folgende Determination erst belehrt werden soll, dafs es (in diesem Fall) nur einen Kreis gibt.

Auf diese überaus beachtenswerte Ansicht Wimmenauers geht Hoffmann in seiner XVIII 115 gegebenen Erwiderung leider nicht ein. Hoffmann bringt in dieser Erwiderung neue Beweise für die Richtigkeit der Anwendung des bestimmten Artikels und sucht die von Rapp und Wimmenauer vorgebrachten Argumente für den unbestimmten Artikel zu widerlegen.

Mit viel sprachlichem und philosophischem Gepränge tritt E. Meyer (Herford) als Verteidiger der Berechtigung des unbestimmten Artikels auf XIX 576. Meyer hat bei seinen Erörterungen offenbar immer nur den Fall der erstmaligen Lösung der Aufgabe im Sinne. Das geht deutlich aus mehreren Stellen hervor. So sagt er S. 578: „Übrigens ist es ja auch aus methodischen Gründen nicht einmal wünschenswert, Dinge, welche zu untersuchen der Determination zukommt, bereits in die Aufgabe hineinzutragen.“ S. 579: „Etwas anders liegt die Sache, wenn man sagt: ich ziehe im Dreieck ABC von A die Mittellinie; hier will der Sprechende auf die Mittellinie als auf eine dem Hörer bekannte hinweisen und er tut recht daran; die drei Höhen, die drei Winkelhalbierenden usw. sind festbestimmte und dem Bewufstsein unmittelbar vorschwebende Linien, auf welche man als auf bekannte hinweisen kann“. Nach dieser letzten Bemerkung ist es unbegreiflich, dafs Meyer für keinen Fall beim „Lotfällen“ den bestimmten Artikel angewendet wissen will. Auf diese Inkonsequenz macht ihn in seiner Erwiderung XIX 579 Hoffmann aufmerksam, indem er sagt: „Einen komischen, ja beinahe erheiternden Eindruck hat es auf mich gemacht, dafs Meyer, was er den Senkrechten hartnäckig verweigert, ihren Schwestern, den Höhen, Seiten- und Winkelhalbierenden freundlichst zubilligt“. Gegen die philosophische Art der Beweisführung Meyers sich wendend sagt Hoffmann in dieser Erwiderung weiter: „In einer so anschaulichen, d. h. von der Anschauung getragenen Wissenschaft, wie in der Geometrie hat sich der Lernende und der Sprechende nach dem Objekt, nach dem Realen zu richten und demgemäfs den sprachlichen Ausdruck zu formen. Oder ist es etwa nicht wirklich, will man leugnen, dafs von einem Punkte O auf eine Gerade MN nur eine Senkrechte (OP) möglich ist? Soll man „es der Willkür des Anschauenden“ überlassen, ob er das sehen bezw. einsehen, und dem Sprechenden, ob er das behaupten oder, wie der Herr Verfasser sagt, „entscheiden“ will. Hoffmann schliefst seine Entgegnung mit den Worten: „Ich bin sonach durch des Herrn Verfassers logische Auseinandersetzungen nicht bekehrt und mufs mich aufs neue zu Sturm bekennen.“

Überblicken wir das Ganze, so leuchtet ein, dafs bei der in Rede stehenden Ausdrucksweise nicht scharf genug auseinandergehalten werden kann, ob es sich 1. um die erstmalige Lösung einer Aufgabe handelt, oder ob 2. die Lösung der Aufgabe bereits als eine bekannte vorausgesetzt wird. Der zweite Fall ist im Unterricht offenbar der bei weitem häufigere, während der erste Fall doch nur einmal bei der erstmaligen Behandlung der Fundamentalaufgaben in Quarta oder Tertia vorkommt. Im zweiten Falle mufs unbedingt der bestimmte Artikel angewendet werden. Im ersten Falle aber, d. h. wenn der Lehrer zum ersten Male, nachdem er vielleicht erst einen Punkt mit einer Geraden durch allerhand schräge Linien hat verbinden lassen, zur Aufgabe des „Lotfällens“ kommt, darf er ganz richtig sagen: „Wir wollen nun einmal von dem Punkte P auf die Gerade ein Lot fällen“, um seine Schüler dann erst zur Erkenntnis zu führen: es gibt nur ein Lot.

Der Begriff „Richtung“.
(Lage, Stellung.)

Über die falsche Anwendung des Begriffes „Richtung“ äufsert sich zunächst J. C. Becker, indem er II 94 folgendes ausführt: „Jedem Raumgebilde kommt als solchem aufser der Gestalt und Gröfse noch das der Stellung im Raume zu, welches etwa als dasjenige Merkmal definiert werden könnte, das sich ändert, sobald das Gebilde in Drehung versetzt wird, wenn nicht Drehung und Stellungsänderung ein und dasselbe wäre. Dieses wesentliche Merkmal der Geraden ist nun, wo es in der Planimetrie auftritt, meistens durch das gänzlich unpassende Wort „Richtung“ ausgedrückt, was zu vielfachen Unklarheiten führt. Einer Linie als Raumgebilde kommt eine Stellung, nicht aber eine Richtung zu. Diese ist ein Merkmal der Bewegung oder anderer Tätigkeiten. Das Auge sieht einen Gegenstand in einer bestimmten Richtung, und ein bewegter Punkt, der von einer bestimmten Stelle aus immer in derselben Richtung gesehen wird, bewegt sich mit unveränderter Richtung. Die Bahn aber, welche dabei jeder einzelne seiner Punkte durchläuft, hat eine bestimmte Stellung, und nicht eine Richtung". „Auf jeder Geraden von bestimmter Stellung kann ein Punkt sich nach zwei entgegengesetzten Richtungen bewegen, und diese ändern sich, sobald die Linie ihre Stellung ändert, sind aber darum keineswegs mit ihr identisch."

Zu diesen Erörterungen Beckers nimmt II 333 K. Stammer Stellung. Er betont, dafs man die Begriffe „Lage" und „Richtung" nicht mit einander verwechseln dürfe, und fügt zur Klärung der Begriffe hinzu: „Richtung wird bestimmt durch den Winkel, den die Gerade mit einer festen Geraden bildet oder durch eine andere Gerade, welcher sie parallel sein soll; die Lage dagegen bestimmt den Ort derselben vollständig; sie ist z. B. gegeben durch die Richtung und einen Punkt.

II 516 kommt Becker auf eine Anregung zu sprechen, die J. C. V. Hoffmann in einer Anmerkung zu dem Beckerschen Aufsatz gegeben hatte. Hoffmann hatte gesagt: „Für Stellung wähle man doch das Wort „Lage", denn mit Stellung wird immer stillschweigend der Begriff des Aufrechten (Vertikalen) verbunden". Hierzu bemerkt Becker: „Abgesehen davon, dafs mit dem Worte „Lage" jedenfalls ebenso oft der Begriff des Liegens verbunden wird, welcher der Gegensatz des Stehens ist, habe ich dagegen einzuwenden, dafs das Wort Lage in der Geometrie durch die Geometrie der Lage eine feststehende Bedeutung erlangt hat und auch das Wort Stellung bereits vielfach von Geometern in der Bedeutung genommen wird, in welcher ich es genommen habe." Beziehentlich des Begriffes Richtung fügt dann Becker hinzu: „Richtung kommt (dagegen) keinem einzigen Raumgebilde als solchem zu und nur dann kann man von der Richtung einer Strecke AB sprechen, wenn man darunter die Bewegung eines Punktes von A nach B versteht (oder den dadurch zurückgelegten Weg), und diese ist dann entgegengesetzt derjenigen von B nach A."

Über den Begriff Richtung äufsert sich weiter H. Bolze II 334, indem er unter der Überschrift: „Parallellinien" folgendes ausführt: „Richtung ist nur vorhanden bei Bewegung. Nun sind aber unsere mathematischen Linien so ruhig, dafs bei ihnen unmittelbar an irgendwelche Bewegung gar nicht zu denken ist. Hierbei wird nicht in Abrede gestellt, dafs sie in übertragener Bedeutung das Bild oder Gleichnis einer Richtung angeben können; aber die übertragene Bedeutung ist keineswegs die unmittelbare und ursprüngliche. Man mufs überhaupt mit dem Begriff Richtung vorsichtig umgehen. Dem deutschen Sprachgebrauch ist folgender Satz vollkommen angemessen: „Mein Freund wird von Stettin, ich werde von Kottbus nach Berlin reisen; wir haben ja dieselbe Richtung.""

An dieses Beispiel knüpft III 535 J. Kober an und zeigt, dafs in diesem Beispiel „Ziel" mit „Richtung" vermengt wird. „Dies kommt daher," sagt Kober, „weil allerdings die Richtung einer Linie durch einen (zweiten) Punkt (das Ziel) bestimmt werden kann. Deshalb soll aber das Wort „Richtung" nicht verworfen, sondern der Begriff „Richtung" lieber geklärt werden. Rein erhalten ist ja der Begriff in allen denjenigen praktischen Verhältnissen, in denen die Richtung ihre Hauptrolle spielt: Schiffahrt und Bergbau. Das Hauptinstrument zur Erkennung der Richtung ist die Magnetnadel, und diese weist deutlich die innige Verwandtschaft des Begriffes der Richtung mit dem des Winkels auf." Kober kommt weiter zu sprechen auf das von Becker geforderte Wort „Stellung" und sagt: „Becker fafst die Linie nur als Grenze auf, verwirft aber, wie es scheint, die Auffassung, dafs die Linie durch die Bewegung eines Punktes entsteht. Er meint, jeder bewegte Punkt bewege sich in einer bereits fertigen Bahn. Hierin scheint er mir aber, durch eine dogmatische Ansicht verleitet, die natürliche Wahrheit zu verkennen; die Linie, die der zeichnende Bleistift, die fallende Sternschnuppe beschreibt, hat vorher noch nicht existiert, sie ist erst geworden, ebenso wie die Bahn eines Planeten. Und der werdenden Linie eine Richtung zuzuschreiben, der gewordenen eine Stellung, möchte doch wohl nicht tunlich sein." „Gerade und Richtung sind innig verwandte Begriffe, wie ja schon in der Sprache angedeutet ist. Richtung kommt von „recht" sowie *directio* mit *rectus* zusammenhängt. Darin ist ausgesprochen, dafs man notwendig bei dem Begriffe „gerade" ebenso wie bei „Richtung" an eine Bewegung denkt, dafs es eine gewaltsame Abstraktion ist, wenn man bei dem Begriffe der geraden Linie die „Bewegung oder andere Tätigkeit" ausschliefst." Kober macht schliefslich darauf aufmerksam, dafs sich die praktische Anwendung des Wortes Stellung in den verschiedenen Redensarten recht sonderbar ausnehmen würde und betont die Schwierigkeiten, die diejenigen Fälle bereiten, in denen es zweifelhaft ist, ob man Richtung oder Stellung sagen soll.

Der Kampf um den Begriff „Richtung" wurde dem Begründer der Zeitschrift ein Anlafs, wie über andere geometrische Grundbegriffe, so im besonderen über den Begriff „Richtung" eingehende Studien zu treiben. Die Früchte dieser Studien hat Hoffmann in einem längeren, mehrteiligen Artikel III 413, 523 und IV 103 seinen Lesern dargeboten. Bei der Ausführlichkeit dieser Hoffmannschen Untersuchungen müssen wir uns darauf beschränken, die Ergebnisse seiner Erörterungen hier kurz aufzuführen. Die Ergebnisse des ersten Teils derselben finden sich in folgender Zusammenfassung: „Richtung hat (demnach) sozusagen drei Stadien ihres Seins:

1. Auswahl des Zieles schon vor der Bewegung; die Wahl des Zieles ist das erste Moment (Keim der Richtung).
2. Fixierung des Ziels während der Bewegung; zu „Richtung" gehört notwendigerweise ein Subjekt.
3. Das Streben, das Ziel auf dem kürzesten Wege zu erreichen.

Von diesen drei Stadien ist das zweite, die Fixierung des Ziels, das wesentlichste. Die Verlängerung oder Verkürzung der Geraden ändert die Richtung derselben nicht; die Richtung wird nur geändert durch Wahl und Fixierung eines neuen Ziels."

Auf Grund einer eingehenden Erörterung über Richtungsverschiedenheit zeigt Hoffmann weiter, dafs man sehr wohl berechtigt ist, von einem Richtungsunterschiede zu sprechen, insofern nämlich das Unterscheidende die Lage der Ziele oder die Verschiedenheit in der Wahl des Ziels, von welcher die Lage des Richtungsstrahles abhängt, gemeint ist. Hoffmann stellt weiter fest, dafs Gerade gleichgerichtet sind, wenn sie gegen eine dritte Gerade gleichen Richtungsunterschied haben und betont schliefslich, dafs der Begriff „parallel" als Gattung die Art „gleichgerichtet" einschliefst, und dafs daher der Ausdruck „gleichgerichtet und parallel" ein Pleonasmus ist.

X 416 klagt Hoffmann aufs neue über die Unklarheiten, die bez. des Begriffes „Richtung" herrschen. Zum Beweise führt er eine Stelle aus Tyndalls berühmtem Werke: „Vorlesungen über das Licht" an. In der Übersetzung von Wiedemann heifst es S. 12: „Ein Lichtstrahl wird zunächst auf den Spiegel geleitet und in seiner eignen Richtung zurückgeworfen .... Obgleich die einfallenden und reflektierten Strahlen in entgegengesetzter Richtung gehen, so verschieben oder stören sie sich doch nicht." Hoffmann bemerkt hierzu: „Wenn der Lichtstrahl in „seiner eignen Richtung" zurückgeworfen wird, dann kann das doch nicht zugleich die entgegengesetzte Richtung sein! Und liegt nicht schon in den Worten „in seiner eignen Richtung" und „zurückgeworfen" ein Widerspruch?"

XVI 339 teilt Hoffmann eine Definition des Begriffes „Richtung" in Fiedlers Werk „Die darstellende Geometrie" mit. Dieselbe lautet: „Es ist notwendig anzunehmen, jede Gerade habe einen einzigen und bestimmten unendlich fernen Punkt. Wir nennen denselben in genauer Übereinstimmung mit dem Sprachgebrauch die „Richtung der Geraden" und haben damit zugleich die Erklärung des Begriffs gewonnen." Unter Hinweis auf seine Studien über geometrische Grundbegriffe (III 443, 523; IV 103) macht Hoffmann zu der Fiedlerschen Definition folgende Bemerkungen: „Hier kommt es darauf an, der Verwechslung der Begriffe „Richtung" und „Ziel" entgegenzutreten, einem Fehler, an dem obige Definition zweifellos leidet, da sie „Ziel" (den unendlich fernen Punkt) und „Richtung" identifiziert: „Richtung" setzt stets ein Ziel voraus. Ohne Ziel keine Richtung; das Ziel mufs immer vor der Richtung da sein. „Richtung" und „Ziel" können also nicht identische Begriffe sein, sie können einander nicht ersetzen. Das „Ziel" kann versinnlicht werden durch einen Punkt, die „Richtung" durch eine nach dem Ziele gezogene Gerade. Die Gerade an und für sich ist aber deshalb noch nicht Richtung selbst, denn sie enthält zwei Richtungen in sich. Es bedarf erst eines idealen Aktes der Bewegung nach dem Ziele hin, um Richtung vorstellbar zu machen. Wenn übrigens die obige Definition richtig wäre, so möchten wir doch wissen, wie man den im Sprachgebrauch — und mit diesem soll ja die Definition „in genauer Übereinstimmung" sein — eingebürgerten Ausdruck „in der Richtung nach" durch einen ihm gleichbedeutenden ersetzen sollte (z. B. in der Richtung nach Berlin, nach einem Sterne etc.)."

XXXII 268 nimmt Hoffmann nochmals Gelegenheit, sich über geometrische Grundbegriffe, insonderheit über den Begriff „Richtung" zu verbreiten. Veranlassung hierzu waren ihm gewesen einmal Tötössy's Rezension von Peschka's darstellender Geometrie mit ihrer Richtungsdefinition XIX 353 und sodann folgende Stelle aus einem Schulprogramm: „Für die Lage einer Geraden, genauer eines Strahles im Raume, gibt es das (entbehrliche) Wort „Richtung". Eine analoge Bezeichnung für die Lage einer Ebene gibt es nicht. Diese schon häufig aufgestellte Definition der Richtung genügt vollständig unseren Anforderungen, da sofort eine Richtung vorhanden ist, sobald man irgend einen Strahl hergestellt hat. Ihre Richtigkeit läfst sich wohl schon daraus erkennen, dafs man überall „Richtung" durch „Lage" (eines Strahls) ersetzen kann, ohne dadurch unklar zu werden (?). Da eine Gerade aus zwei Strahlen besteht, so besitzt sie auch zwei Richtungen, d. h. zwei Strahlen von verschiedener Lage." Hierzu bemerkt Hoffmann: „Der Verfasser verwechselt sonach entschieden die Begriffe „Lage" und „Richtung" oder vermengt sie. Es darf uns daher nicht wundern, dafs er „Richtung" als „entbehrliches Wort" bezeichnet." Unter Hinweis auf seine früheren Artikel über geometrische Grundbegriffe führt Hoffmann bez. des Begriffes Richtung noch folgendes aus: „. . . . Eher schon dürfte der Begriff „Richtung" beim Schüler feste Gestalt und Sicherheit gewinnen. Denn sobald er genötigt ist, eine gerade Linie zu ziehen, mufs er schlüssig werden, nach welcher Seite er die Gerade ziehen soll, ob nach rechts oder nach links, ob nach oben oder nach unten. Die Ausführung nötigt ihn, einen Punkt zu wählen, von dem aus er die Linie zieht. Ist ihm nun ein Punkt vorgezeichnet, nach welchem hin er die Gerade ziehen soll, so findet er leicht, dafs er die Linealkante an diese Punkte anlegen mufs; so werden jetzt im Schüler die Begriffe Anfangs- oder Ausgangspunkt (Ursprung) der Geraden und Ziel oder Endpunkt kurz „Ziel" entwickelt und durch fortgesetztes Zeichnen befestigt. Das im Geiste (der inneren Anschauung) des Schülers erweckte beziehentlich erwachte und durch die Hand betätigte Streben, vom Ursprung aus das Ziel zu erreichen ist nun das, was wir mit dem Worte „Richtung" bezeichnen. Richtung ist also —

um es recht kurz und prägnant auszudrücken — das Streben, das Ziel zu erreichen. Das mufs dem Schüler zum Bewufstsein kommen und dieses Erwachen des Bewufstseins ist vom Lehrer in jeder Weise zu fördern. Mit andern Worten: Der Begriff „Richtung", dieses *noli me tangere* von Begriff, ist vom Lehrer zu entwickeln. Nun wird und mufs dem Schüler klar werden, dafs „Richtung" stets ein „Ziel" erfordert. Die Analogie beim Schiefsen wird ihn hierin unterstützen. Der Begriff „Ziel" ist von „Richtung" gar nicht zu trennen, er gehört zum Wesen der Richtung. Es wird und mufs dem Schüler aber auch klar werden, dafs zur Erreichung des Ziels eine Bewegung erforderlich ist, mag diese nun materiell (Lauf der Bleistiftspitze, Sausen der Flintenkugel etc.) oder mag sie ideal (intuitiv) in der Vorstellung der Bewegung eines gedachten Punktes nach einem gedachten Ziel stattfinden. Ist dem Schüler nur der Ursprung gegeben und nicht das Ziel, ist also das Ziel beliebig zu wählen, so wird es ihm schon früher klar geworden sein, dafs von einem Punkte aus viele, sehr viele, unendlich viele Ziele, also auch unendlich viele Richtungen möglich sind, von denen aber immer zwei sozusagen „reziprok" sind (Richtung und Gegenrichtung)."

Definition des Winkels.

In enger Beziehung zum Begriff „Richtung" steht der Begriff „Winkel". Über diesen hat sich zuerst J. C. Becker II 96 ausgesprochen. Er erklärt sich a. a. O. schroff gegen die Definition des Winkels als eines „Richtungsunterschiedes" — das hängt eng zusammen mit seiner im vorigen Kapitel dargelegten Ansicht über den Begriff „Richtung" — und will unter „Winkel" den Drehungsabstand zwischen den Schenkeln verstanden haben. Becker hält auch die Winkelerklärung von Schweins für richtig, nach welcher ein Winkel „das durch zwei in einem Punkte zusammentreffende gerade Linien erzeugte Gebilde" ist. Dieser Ansicht neigt sich im allgemeinen auch Hoffmann zu, wenn er III 532 sagt: „Ein offenes Linien- oder besser „Strahlengebilde", welches aus der allgemeinen Ebene ein Stück, einen Sektor, abgrenzt, aber nicht ein- oder umschliefst, heifst bekanntlich Winkel. Er gibt auch zugleich dem Flächenstück die Form, er gestaltet es; er ist das Urelement der Form." XVI 341 versucht Hoffmann aufs neue den Begriff „Winkel" zu klären und sagt: „Winkel ist nicht der von den Schenkeln abgegrenzte nach einer Seite noch offene (unbegrenzte) Flächen- (resp. Ebenen-) Raum, sondern nur das diesem Flächenstück Form (Gestalt) gebende, durch Drehung erzeugte und daher der Vergröfserung und Verkleinerung fähige Liniengebilde. Dieses Wesentliche des Winkels, die Formgebung, ist in der Geometrie so auffallend und wichtig, dafs man sich verwundert fragt, warum es bei der Definition des Winkels nicht mehr zur Geltung gelangt ist."

XIX 261 kommt T. Wimmenauer auf den Begriff „Winkel" zu sprechen. Er kann sich mit keiner der ihm bekannten Winkeldefinitionen einverstanden erklären. Er gibt zu, dafs es sehr schwierig sei, eine einwandfreie Winkelerklärung zu geben. Ja er geht so weit zu sagen: „Es kann nahe liegen, den Winkel im Unterrichte überhaupt nicht zu definieren." Schliefslich stellt er es aber doch als eine unerläfsliche Forderung hin, eine Winkeldefinition festzustellen und gibt den Lesern der Zeitschrift die Anregung, in eine allgemeine Diskussion über den Begriff „Winkel" eintreten zu wollen.

Dieser Aufforderung ist als erster H. Schotten gefolgt. In klarer und sachlicher Weise stellt er zunächst XX 481 den augenblicklichen Zustand in der Winkelerklärung fest, indem er nach einigen einleitenden Bemerkungen sagt: „Unter den zahlreichen Erklärungen haben sich in der Hauptsache drei, wesentlich von einander verschiedene, Heimatsrecht erworben:

1. Die Definition des Winkels als Richtungsunterschiedes.
2. Die Definition des Winkels als Ebenenstückes.
3. Die Definition des Winkels als Gröfse der Drehung."

Nachdem Schotten aus nicht weniger als 45 Lehrbüchern die Winkeldefinitionen*) aufgeführt, insonderheit die in den „Elementen“ von E. Müller sich vorfindende Winkeldefinition besonders besprochen, aber als zu wissenschaftlich und daher ungeeignet für den Elementarunterricht erklärt hat, wendet er sich der Kritik der drei genannten hauptsächlichsten Definitionen zu. Die erste Definition verwirft Schotten, indem er dreierlei geltend macht. 1. Der Winkel ist eine Quantität, nach dieser Definition aber würden wir es mit einem qualitativen Unterschiede zu tun haben. 2. In diese Definition wird ein neuer Begriff, der Begriff der Richtung, eingeführt, der mindestens dieselben Schwierigkeiten bei der Definition darbietet, wie der Begriff „Winkel“ selbst. 3. Im Begriff „Richtungsunterschied“ liegt kein Moment, was irgend auf Bewegung deutet, im Gegenteil, er leidet an (Euklidischer) Starrheit. Auch die zweite Definition kann Schotten nicht billigen. Er sagt: „Nach dieser Definition würden alle Winkel unendlich grofs, also untereinander gleich sein. Man sieht, dafs man aus diesem Grunde von der Fläche als einem wesentlichen Teil des Winkels ganz absehen mufs, da man auf etwas Widersinniges stöfst.“ Gegen die Auffassung des Winkels als (offene) Figur hat Schotten nichts Wesentliches einzuwenden, er meint nur, dafs diese Definition zu weit sei. An der dritten Definition tadelt Schotten das Wort „Gröfse“ und will dasselbe durch „Mafs“ ersetzt haben, sodafs ihm als richtige Definition gilt:

„Der Winkel ist das Mafs der Drehung“.

Gegen diese Definition Schottens wendet sich Hoffmann XX 581, indem er vorhält, dafs durch das Wort Drehung sich ein Begriff der Mechanik in die Definition einschleiche und dafs „Mafs“ doch nur ein Wort für eine bestimmte Gröfse, „Mafs“ schliefslich nichts anderes als „Gröfse“ sei. Aufserdem könne unter „Mafs der Drehung“ doch leicht der Kreisbogen verstanden werden, sodafs in der gegebenen Definition schliefslich dieser und nicht der Winkel erklärt sei.

XXI 249 kommt Hoffmann in einem Aufsatz über die Lehre vom Winkel auch wieder auf die Winkeldefinition in der Schule zu sprechen und stellt nach längerer Erörterung folgende Definition auf:

„Ein Winkel ist ein Liniengebilde, bestehend aus zwei zu einander geneigten Geraden“

und fügt zur Vervollständigung noch hinzu: „Das Winkelgebilde stellt eine offene Figur dar, welche einem Ebenenstück die Form erteilt.“

XXII 1 stellt H. Gerlach in einer längeren Betrachtung über die Definition des Winkels auf Grund der bis dahin über diesen Gegenstand erfolgten Veröffentlichungen Erörterungen an, die ihn zu folgendem Resultate führen: „Schliefslich bleibt also die ursprünglichste Erklärung des Winkels als eines sich öffnenden Gebildes die zutreffendste. Sie bildet den Stamm, dem die übrigen Vorstellungen von Fläche, Drehung, Richtungsunterschied als einzelne Zweige angehören, und zugleich gestattet sie, je nach Bedürfnis, auch den Teil für das Ganze zu setzen. Wegen ihrer allgemeinen Form kann man sie als Erklärung für die Gattung hinstellen. Bei dem planimetrischen Winkel wäre dann das sich öffnende Gebilde durch die gebrochene Linie zu ersetzen. Mit diesem Endresultat schliefse ich mich der vom Herausgeber vertretenen Ansicht (XX 410) an und schlage folgende Definition vor:

Die gebrochene Linie als Träger für die Vorstellung der Form eines Sektors (oder als formgebendes Gebilde) heifst Winkel.

Eine kürzere Form wäre:

Der Zweistrahl als lineare Gröfse heifst gebrochene Linie, als intensive Gröfse heifst er Winkel.“

*) Beziehentlich Nichtdefinitionen, denn manche Erklärung beginnt mit den Worten: „Ein Winkel entsteht usw.“

XXII 13 äufsert sich weiter A. Schmitz zur Definition des Winkels. Nach seiner Ansicht ist „Winkel“ ein undefinierbarer Grundbegriff. Soll aber dennoch dem Schüler eine Definition gegeben werden, so hält Schmitz auf der Unterstufe die Definition des Winkels als Richtungsunterschiedes für richtig, während er auf der Oberstufe etwa folgende Erklärung abgegeben wissen will: „Bei einer Geraden ist aufser der Länge auch noch die Richtung der Geraden zu beachten. Die Richtung können wir uns aber nicht versinnlichen, sondern nur den Richtungsunterschied zweier Geraden. Ein Mafs für diesen Richtungsunterschied gewinnen wir, wenn wir den möglichen Gesamtrichtungsunterschied aller in einem Punkt sich schneidenden Geraden durch eine Zahl (4 R) bezeichnen. Das Mafs für den Richtungsunterschied heifst Winkel.“

XXIX 93 bringt noch einen kurzen Artikel über die Winkeldefinition. Der Verfasser desselben, P. Hoyer, bekämpft in ihm die Schottensche Definition des Winkels als „Mafs der Drehung“ und redet der Definition des Winkels als „Ebenenstückes“ das Wort, indem er betont, dafs die Auffassung des Winkels als Ebenenstückes keinesfalls die Auffassung desselben als unendliche Gröfse bedingt. Die Definition des Winkels als Ebenenstückes will er nur noch dahin modifiziert haben, dafs man den Winkel als ein Flächengebilde definiert, das entsteht, wenn ein Strahl in der Ebene sich um seinen Anfangspunkt dreht.

Im Anschlufs an diesen Artikel ergreift noch einmal Hoffmann das Wort — es ist das Schlufswort in diesem Meinungskampfe — indem er folgendes ausführt: „Ich stimme mit dem Verfasser des vorstehenden Artikels darin überein, dafs die Auffassung des Winkels als Ebenengebildes keineswegs die unendliche Ausdehnung dieses Ebenenstückes bedingt, oder anders ausgedrückt, gar nichts mit der Unendlichkeit zu tun hat. Daraus, dafs der Winkel ein Ebenengebilde darstellt, das nach einer Seite hin noch offen ist, folgt doch nicht, dafs ich dieses Ebenenstück nach der offenen Seite hin als unendlich ausgedehnt zu denken habe. Es ist nur noch nicht begrenzt. Aber seit wann existiert und von wem stammt das Postulat: Alles noch nicht Begrenzte ist als unendlich ausgedehnt zu denken? Das noch Unbegrenzte läfst nur die Möglichkeit, es noch zu begrenzen, offen, bedingt aber nicht, es als unendlich zu denken.“ „Ich begreife nicht, warum man sich nicht entschliefst, den Begriff Figur dahin zu erweitern, dafs man ihn auch auf nicht geschlossene Gebilde anwendet, während man bei der Arithmetik in der allmählichen Erweiterung der Begriffe das Mögliche geleistet hat.“ Unter Hinweis auf seine früheren Erörterungen betont Hoffmann, dafs er den Winkel als „Eineck“ erkläre, wofür aber auch das schon vielfach gebrauchte Wort „Zweistrahl“ gesetzt werden könne.

Winkelgrad und Bogengrad.

XVIII 344 kommt Hoffmann auf die Begriffe Winkelgrad und Bogengrad zu sprechen und weist auf die grofse Unklarheit hin, die in dem in vielen Lehrbüchern enthaltenen Satze gipfelt: „Der Winkel wird durch den zugehörigen Bogen gemessen.“ Hoffmann tadelt, dafs von vorn herein nicht streng genug zwischen Bogeneinheit und Winkeleinheit unterschieden wird. Diese Nachlässigkeit erklärt er aus dem Umstande, dafs sich die Bogeneinheit leicht, die Winkeleinheit schwerer anschaulich darstellen läfst. Mit allem Nachdrucke hebt Hoffmann hervor, dafs sich so verschiedene Gebilde wie Winkelgrad und Bogengrad nicht durcheinander messen lassen. Um diese beiden Begriffe scharf auseinander halten zu können, schlägt Hoffmann vor, das bisher beiden Begriffen gemeinsame Zeichen „°“ nur für den Bogengrad anzuwenden und bezüglich der Winkeleinheit auf die Bildung eines neuen Wortes zuzukommen. Als solches erscheint ihm das Wort „Off“ als Anfangssilbe des Wortes „offen“ *) empfehlenswert.

*) Weil jeder Winkel eine Öffnung hat, also ein noch offenes Gebilde ist.

Bezüglich der Auseinanderhaltung der Begriffe Winkelgrad und Bogengrad fand Hoffmann bald allgemeine Zustimmung, während man sich mit der Einführung des neuen Wortes „Off“ nicht allenthalben einverstanden erklären konnte. Besonders erfreulich war es für Hoffmann, dafs neu erschienene Lehrbücher und Leitfäden seiner Anregung Folge leisteten. So brachte ein von Hertter herausgegebenes Lehrbuch in dem betreffenden Kapitel folgende Erklärung: „Die Mafseinheit für die Winkelmessung ist der Winkelgrad $= \frac{1}{360}$ des Vollwinkels, diejenige für die Kreisbogenmessung der Bogengrad $= \frac{1}{360}$ der Vollkreislinie, d. h. des Umfangs.“ Und in einer Anmerkung sagt Hertter: „Bogengrad und Winkelgrad sind so wenig ein und dasselbe als Rauminhalt und Gewicht; eins kann daher auch nicht als Mafs des andern dienen.“

Nicht „sich schneiden“, sondern „einander schneiden“.

II 116 lenkt K. Zerlang die Aufmerksamkeit der Leser auf das Pronomen „sich“ mit seiner doppelten Bedeutung als reflexives und reziprokes und gibt die Anregung, in der Sprache der Mathematik „sich“ nur in reflexiver Bedeutung zu gebrauchen und das reziproke jederzeit durch „einander“ zu ersetzen. Es soll also stets gesagt werden: Zwei Gerade schneiden „einander“ (nicht „sich“). Dieser Vorschlag Zerlangs fand bei den Lesern der Zeitschrift zunächst keinen Widerspruch. Vielmehr führen die Zusammenstellungen verbesserter (einwandfreier) mathematischer Ausdrucksweisen III 176 und XXVIII 88 die „einander schneidenden Geraden“ als allgemein anerkannte mathematische Ausdrucksweise mit auf. Erst im 30. Bande — also nach 28 Jahren — wendet sich ein Leser der Zeitschrift gegen diese Ausdrucksweise. Zur Begründung seiner Ansicht führt er lediglich nur das Sprachgefühl, beziehentlich den Sprachgebrauch ins Feld. Ein auf Grund dieser Meinungsäufserung durch den Herausgeber der Zeitschrift von Dr. Lyon (Dresden) eingeholtes Gutachten bestätigt die sprachliche Richtigkeit der Ausdrucksweise: „Die Geraden schneiden sich“, während ein von E. Meyer (Herford) erbetenes Gutachten sagt: „Ich meine, dafs man in der mathematischen Sprache gut daran tut, jetzt wo die deutsche Sprache für das reziproke Verhältnis eine besondere Form gebildet hat, diese nicht zu ignorieren, d. h. „sich“ nur als reflexives Pronomen zu gebrauchen und als reziprokes stets „einander“ zu verlangen.“

Wie beherzigenswert dieser Vorschlag ist, beweist ein Beispiel jenes Lesers der Zeitschrift, das er zum Beweise seiner Behauptung anführt. Er sagt: „Richtig ist doch die Ausdrucksweise: die Jungen schlugen sich“, fügt aber schleunigst hinzu: „d. h. nicht: jeder schlug sich selbst, sondern einer den andern.“ Ist es nicht empfehlenswerter, sich stets so auszudrücken, dafs man es nicht nötig hat, den ausgesprochenen Satz durch ein „das heifst“ — wenn vielleicht auch nur im stillen — zu ergänzen beziehentlich zu erklären. Dafs man die Empfindung hat, mit dem reziproken „sich“ die Sache nicht klar genug ausgedrückt zu haben, das beweist die in vielen Fällen übliche Hinzufügung des Wortes „gegenseitig“; z. B. die Diagonalen (des Vierecks) schneiden sich gegenseitig. Würde man unsrer Sprache nicht einen Dienst erweisen, wenn man darauf dringen würde, jederzeit das wahrlich nicht schön klingende und auch nicht einmal leicht zu sprechende „sich gegenseitig“ durch das so angenehm klingende und tönende „einander“ zu ersetzen? Dabei würden wir Deutschen uns auch noch im Einklang mit dem Sprachgebrauch anderer Völker (z. B. Franzosen, Engländer) befinden!

Benennung der Winkel an zwei Geraden, die von einer dritten geschnitten werden.

Alt ist die Klage über die grofse Unklarheit, die bezüglich „der Benennung der Winkel an Parallelen“*) herrscht. I 278 wendet sich H. Sturm diesem Kapitel der Elementargeometrie zu.

*) Richtiger: Winkel an zwei Geraden einer Ebene, die von einer dritten geschnitten werden.

Sturm unterscheidet drei Arten von Winkelpaaren. Die erste Art dieser Winkel sind die Winkel, die an derselben Seite der schneidenden und an entsprechenden Seiten der geschnittenen Geraden liegen. Als bekannte Benennungen dieser Winkel führt er an:

1. Gegenwinkel. 2. Homologe Winkel. 3. Korrespondierende Winkel.

Die ersten beiden Benennungen verwirft Sturm, weil sie nach seiner Ansicht besser für gewisse Winkel in andern geometrischen Gebilden passen. Für richtig erklärt Sturm die Benennung „korrespondierende Winkel“ oder besser noch „entsprechende Winkel“. Die Benennung der zweiten Art von Winkelpaaren an zwei Geraden, die von einer dritten geschnitten werden, nämlich die Winkel zu verschiedenen Seiten der schneidenden Linie und auf verschiedenen Seiten der geschnittenen Geraden, als Wechselwinkel billigt Sturm rückhaltlos. Über die dritte Art von Winkeln an dem genannten Liniengebilde spricht sich Sturm aus wie folgt: „Die dritten Winkel haben wieder einen dreifachen oder vierfachen Namen: „entgegengesetzte Winkel“, „Ergänzungswinkel“ und leider auch „Gegenwinkel“, sodafs dies Wort mit drei verschiedenen Bedeutungen herumläuft. Ferner heifsen diese dritten Winkel auch blofs „innere“ oder „äussere“ Winkel, aber diese Benennung pafst ebenso auf die Wechselwinkel und gibt nicht die charakteristische Lage jener wieder. „Ergänzungswinkel“ sind sie doch nur in dem Fall, dafs die von der dritten geschnittenen Linien parallel sind, und es wird so die dann stattfindende Eigenschaft schon durch die Benennung antizipiert. Es bleibt die beste der bisher gebräuchlichen Benennungen „entgegengesetzte Winkel“.“

Sturm unterscheidet also:

1. Entsprechende Winkel.
2. Wechselwinkel.
3. Entgegengesetzte Winkel.

II 91 äufsert sich zu der von Sturm angeregten Frage J. C. Becker und empfiehlt als Bezeichnungsweise „diejenige, wonach jeder einzelne dieser Winkel als innerer und äufserer gilt, je nachdem er zwischen den geschnittenen Geraden liegt oder nicht, und jedes Paar als Gegen- oder Wechselwinkelpaar, je nachdem beide auf derselben Seite der schneidenden Linie liegen, oder der eine links und der andere rechts“. Becker unterscheidet also: innere, äufsere und gemischte Gegen- und Wechselwinkel; für „gemischte Gegenwinkel“ wünscht er nur noch die Benennung „entsprechende Winkel“, sodafs sich folgende Übersicht ergibt:

Innere Äufsere Gemischte	Gegenwinkel (die gemischten auch entsprechende Winkel).	Innere Äufsere Gemischte	Wechselwinkel.

In einem von Prof. Sauer (Stettin) auf der Philologen- und Schulmänner-Versammlung in Wien (1893) gehaltenen, XXIV 27 ff. abgedruckten Vortrag findet sich folgende Stelle über die Benennung der betreffenden Winkelpaare: „Immer noch herrscht Verschiedenheit in betreff der Winkelbenennung, wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden. Am glücklichsten gewählt ist der Name Wechselwinkel, und über seine Anwendung sind wohl alle Lehrer einig. Dagegen brauchen einige den Ausdruck Gegenwinkel, wo andere von entgegengesetzten Winkeln sprechen. Besonders aber für zwei Winkel, welche an derselben Seite der schneidenden Linie und an denselben Seiten der geschnittenen Linien liegen, gehen die Bezeichnungen weit auseinander. Ich erwähne die Namen: Korrespondierende Winkel, konjugierte Winkel, innere Winkel, gleichliegende Winkel, Gegenwinkel, endlich das neu gebildete Wort Anwinkel. Die ersten dieser Benennungen sind teils zu lang, teils Fremdwörter und passen deshalb nicht für den ersten Unterricht; Gegenwinkel pafst besser für die anderweitig entgegengesetzt genannten Winkel. Ich stimme deshalb

Kober bei, der meint, es müfste für diesen Begriff ein neues Wort gebildet werden; nur kann mir die Zusammensetzung des Substantivs Winkel mit der Präposition „an“ nicht gefallen. Ich möchte einen andern Vorschlag wagen, den ich allerdings beim Unterrichte noch nicht erprobt habe. Wäre es nicht angebracht, diese Winkel Seitenwinkel zu nennen, weil in der Erklärung sowohl bei den geschnittenen Linien als bei der schneidenden gleiche Seiten genannt werden. Man hätte somit die gleichmäfsige Reihe: Seitenwinkel, Wechselwinkel, Gegenwinkel.“

Zur Benennung der Winkel, die an derselben Seite der schneidenden und an entsprechenden Seiten der geschnittenen Geraden liegen, äufsert sich schliefslich noch J. St. Schuster. Nach einer kurzen Erörterung über das Wort „Gegenwinkel“, das nach seiner Ansicht seiner natürlichen Bedeutung entfremdet worden ist, regt er an, die von Becker benannten „entsprechenden Winkel“ als Stufenwinkel zu bezeichnen.

Leider herrscht auch heute noch nicht Übereinstimmung in der Benennung der Winkel an zwei Geraden, die von einer dritten geschnitten werden. Im allgemeinen pädagogisch-mathematischen Interesse liegt es aber, hierin Wandel zu schaffen. Es ist doch ein unerträglicher Zustand, dafs infolge der dem Unterrichte zu Grunde gelegten verschiedenen Leitfäden und Lehrbücher dem Quartaner der einen Anstalt diese und dem einer andern Anstalt jene Benennungen der in Frage stehenden Winkelpaare eingeprägt werden. Der Verein zur Förderung des mathematischen Unterrichtes könnte es sich angelegen sein lassen, einmal endgiltig Klarheit in die besagte Ausdrucksweise zu bringen. Da es wohl fraglich erscheinen darf, ob sich die Benennungen „Seitenwinkel“ und „Stufenwinkel“ in weitere Kreise eingebürgert haben, so ist vielleicht für alle, die sich an das Wort „Gegenwinkel“ nicht stofsen, die Einteilung von Becker zu empfehlen, nach der es innere, äufsere und gemischte Gegen- und Wechselwinkel gibt — für die „gemischten Gegenwinkel“ vielleicht noch „entsprechende Winkel“ —. Jedenfalls hat diese Einteilung den Vorzug der Übersichtlichkeit für sich.

Nicht Grundlinie, sondern Grundseite.

II 337 macht K. Zerlang darauf aufmerksam, dafs man beim Dreieck beziehentlich Viereck entsprechend der Benennung als „Seiten“ nicht von einer Grundlinie, sondern einer Grundseite zu sprechen hat. Hoffmann pflichtet III 376 dieser Ansicht Zerlangs bei und nimmt das Wort „Grundseite“ in sein Verzeichnis verbesserter Ausdrucksweisen mit auf. Diese Richtigstellung ist unwidersprochen geblieben, hat aber leider nicht in alle Leitfäden und Lehrbücher Aufnahme gefunden, sodafs man auch in den neuesten Auflagen beliebter Leitfäden noch das Wort „Grundlinie“ lesen kann.

Fehlerhafte Fassung des Aufsenwinkelsatzes.

XIII 25 weist P. Meutzner auf folgende fehlerhafte — in vielen, sogar den besten Leitfäden gegebene — Fassung des Aufsenwinkelsatzes hin: „Jeder Aufsenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkel.“ Meutzner hebt das Sinnlose dieser Fassung hervor, indem er darauf hinweist, dafs „dem Aufsenwinkel doch gar nichts gegenüberliegt“, und empfiehlt als richtige Ausdrucksweise: „Jeder Aufsenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel.“

Ist „Kreis“ die Kreislinie oder Kreisfläche?

Eine Unklarheit in der mathematischen Ausdrucksweise, deren Besprechung auch Erörterungen allgemeiner Art veranlafste, deckt J. C. Becker II 91 auf. Es handelt sich um das Wort „Kreis“, „das bald zur Bezeichnung der Kreislinie, bald zur Bezeichnung der Kreisfläche dient“. Da „beide, Kreislinie und Kreisfläche, doch heterogene Begriffe sind“, so erscheint Becker eine Klärung des Begriffes „Kreis“ dringend notwendig.

Den ersten Beitrag zu der gewünschten Klarstellung liefert Dr. Wiczorkowitz VII 116. Er wendet sich gegen die (damals noch) in den meisten Lehrbüchern und Leitfäden übliche Erklärung des Kreises als Fläche und spricht sich für die Erklärung des Kreises als Linie aus. Geltend macht er für seine Ansicht: 1. den gewöhnlichen Sprachgebrauch; 2. den mathematisch-wissenschaftlichen Sprachgebrauch, nach dem man „von dem Schneiden und Berühren zweier Kreise spricht, was doch offenbar nur auf die Kreislinie, nicht auf die Kreisfläche bezogen werden kann"; 3. den Umstand, dafs man es öfter mit der Kreislinie als mit der Fläche zu tun hat und deshalb für die Linie der kürzere Ausdruck angebracht ist; 4. die Analogie — unter den Benennungen Ellipse, Parabel, Lemniskate, Cykloide usw. versteht niemand die Flächen, sondern die Linien.

Die gegenteilige Ansicht über den Begriff „Kreis" wird, nachdem dieser Gegenstand in einer Reihe von Bänden der Zeitschrift nur flüchtig berührt worden ist, XXVII 410 von G. Leonhardt nachdrücklich vertreten. Leonhardt nimmt Bezug auf folgenden, von H. Schotten bei der Rezension eines mathematischen Lehrbuchs ausgesprochenen Satz: „„Der Kreis oder die Kreisfläche" ist falsch, unter Kreis ist nur die Linie zu verstehen." Diesem Satze stellt Leonhardt die Behauptung entgegen: „Unter Kreis ist sicher die Fläche und nicht die Linie zu verstehen." Zum Beweise dieser Behauptung dient ihm zunächst „der Sprachgebrauch". Leonhardt sagt: „Man spricht von dem Inhalte nicht einer Kreisfläche, sondern schlechthin eines Kreises; was aber einen Inhalt hat, kann keine Linie sein; man läfst bei der elementaren Berechnung des Kreisinhalts „den Kreis" aus einem regelmäfsigen Vieleck entstehen, man läfst „den Kreis" entstehen durch Umrollung einer Geraden, um einen ihrer Endpunkte." Zur Verteidigung seiner Ansicht führt er weiter die Tatsache an, dafs in den meisten Lehrbüchern der Kreis als Fläche definiert wird. So bei Euklid, so in den bekannten Lehrbüchern von Hallerstein, Balsam, Kambly. Leonhardt unterläfst aber auch nicht, Definitionen andrer Autoren anzuführen, die nicht für seine Behauptung sprechen. So die Definitionen bei Mehler und bei Rottock, welche verschweigen, was unter „Kreis" zu verstehen ist, indem sie die Worte „Kreislinie" und „Kreisfläche" gebrauchen. Und anschliefsend hieran bringt Leonhardt sogar die Definition in den Leitfäden von Lieber- von Lühmann und von Bensemann, welche keinen Zweifel darüber lassen, dafs sie unter Kreis die Linie verstanden wissen wollen. Leonhardt führt die letzteren aber nur deshalb mit an, um aus einigen Inkonsequenzen, die sich diese Autoren bei dem Gebrauche des Wortes „Kreis" zu Schulden kommen lassen, für seine Ansicht Kapital zu schlagen. Denn, wenn in den genannten Leitfäden der Satz: „Ausschnitte eines Kreises verhalten sich wie ihre Zentriwinkel" zu lesen ist, so ist den Verfassern doch nur eine Nachlässigkeit vorzuwerfen; es ist klar, dafs es nach der Definition der Verfasser dieser Leitfäden an dieser Stelle nicht Kreis, sondern Kreisfläche heifsen mufs. Und, wenn Leonhardt im Anschlufs an den bei Lieber und von Lühmann stehenden Satz: „Zwei Kreise sind ähnliche Figuren" sagt: „Hier tritt ganz klar zu Tage, dafs der Verfasser, trotzdem er den Kreis als Linie definiert hat, ihn doch zu den Figuren zählt, eine *contradictio*, bei der man an den guten Homer erinnert wird," so übersieht er ganz, dafs der Vorwurf, den er dem Verfasser macht, nur gerechtfertigt ist, wenn dieser unter „Figur" die Fläche und nicht das Liniengebilde versteht. Hier setzt mit seiner Entgegnung Hoffmann ein, indem er darauf hinweist, dafs erst einmal der Begriff „Figur" geklärt werden mufs. Von der Bedeutung des Wortes „Figur" als „Gestalt" oder „Form" ausgehend, kommt Hoffmann zu dem Ergebnis, dafs man unter „Figur" nur die Grenze eines Flächenstückes zu verstehen hat. „Diese Grenze", sagt Hoffmann, „kann aber nichts anderes sein als eine Linie, entweder eine gebrochene oder eine krumme. Diese Grenze (Form, Figur) ist nur ein notwendiges Attribut der Gebilde. Ohne

Form ist ein Ebenenstück nicht denkbar, wohl aber kann man sich die Fläche wegdenken und nur die Form vor Augen haben, man kann die gebrochene Linie, welche das Flächenstück begrenzt und welche die Form darstellt, als von der Fläche losgelöst und unendlich dünn sich vorstellen (— im Modell durch feinstmöglichen Draht oder das feinste Haar dargestellt —). Diese „reine Form“ tritt am ausgeprägtesten jedem entgegen bei der Parabel, Hyperbel und ganz besonders auch bei Kurven wie der Cissoide, Conchoide, Spirale. Behauptet nun jemand, die völlige Loslösung der Fläche von der Form sei psychisch unmöglich, so wird er doch soviel einräumen müssen, dafs bei der Abstraktion von der Ebene die Vorstellung derselben so sehr verblafst, dafs sie als völlig aus dem Bewufstsein verschwunden betrachtet werden kann. Es ist also offenbar die Form (Figur) die Hauptsache und nicht die Fläche.“ „Ich meine also: die Mathematiker sollten übereinkommen, unter „Kreis“ immer nur die Kreislinie zu verstehen, und wenn die Fläche gemeint ist, Kreisfläche zu sagen. Es wäre dies ein der Diskussion und Beschlufsfassung würdiges Thema für die Vereins- oder Sektionsversammlungen der Mathematiklehrer.“ Dieser Ansicht schliefst sich Weber (Wolfenbüttel) XXVII 417 an. In einem Artikel über „Logik und Sprachrichtigkeit im mathematischen Unterricht“ hebt er hervor, dafs das Verständnis der Sätze über den Kreis und überhaupt von diesem ganzen Gebilde erschwert werde, wenn man an der einen Stelle unter Kreis die Fläche, an einer andern die Kreislinie verstehen soll. Weber weist ferner darauf hin, wie „komisch es wirkt, wenn man in einem Lehrbuche liest, wie der Verfasser sich abmüht, mehrere Gründe dafür anzugeben, dafs er unter Kreis eine Linie versteht, nachher aber die Fläche ebenso bezeichnet.“ Gleichgiltig ist ihm, in welcher Weise man sich entscheidet — ob man mit „Kreis“ die Fläche oder die Linie bezeichnet —, nur darauf kommt es ihm an, dafs auf jeden Fall die Zweideutigkeit des Wortes „Kreis“ aus der Welt geschafft wird.

Kreis „ziehen“, nicht „beschreiben“ oder „schlagen“.

III 376 findet sich der in der Zeitschrift nicht weiter erörterte Vorschlag Hoffmanns: statt „Kreis beschreiben“ oder „schlagen“ besser zu sagen „Kreis ziehen“. Als Begründung dient der Hinweis, dafs diese Ausdrucksweise dem „Linie ziehen“ analog ist.

Der „umschriebene“ oder „umgeschriebene“ Kreis.
(Umkreis, Inkreis, Ankreis.)

III 369 stellt J. Kober erstmalig die Frage: „Soll es heifsen, der umschriebene oder der umgeschriebene Kreis?“ Zur Beantwortung dieser Frage führt Kober folgendes aus: „Die mit gewissen Präpositionen zusammengesetzten Zeitwörter bilden im Deutschen zwei Gruppen, indem entweder der Akzent auf der Präposition oder auf der Stammsilbe liegt, z. B.: übersetzen und übersetzen. In den Wörtern der ersten Gruppe ist die Präposition vom Zeitworte trennbar und im Partizip des Perfekts mufs die Silbe „ge“ zwischen Präposition und Zeitwort eingeschoben werden. Heifst das Wort also umschreiben, so mufs gesagt werden: umgeschrieben, heifst es aber umschreiben, so mufs man auch sagen: umschrieben. Liegt nun der Ton auf dem Präfix, so steht das Einschliefsende, Umgebende im Akkusativ, z. B. ein Tuch umbinden; liegt der Ton aber auf der Stammsilbe, so steht das Eingeschlossene, Umgebene im Akkusativ, z. B. eine Stadt umzingeln. Einige Zeitwörter sind in beiden Formen gebräuchlich, z. B. umgürten, umwinden, umwickeln. Einen Kreis umschreiben heifst also, ihn mit etwas (z. B. mit einem Vielecke) umgeben, umschliefsen; der umschriebene Kreis müfste also derjenige sein, der von einem Vieleck umschlossen ist. Einen Kreis umschreiben (analog z. B. einen Reifen umlegen) heifst dagegen, um ein Vieleck einen Kreis legen, das Vieleck mit einem Kreis umgeben, umschliefsen. Es ist also kein Zweifel, dafs es in dem in der Geometrie durch den Sprachgebrauch angenommenen Sinne heifsen mufs: der umgeschriebene Kreis.“

IX 188 stellt sich F. J. Brockmann in einer kurzen Bemerkung ganz auf den Standpunkt Kobers. X 194 kommt Kober selbst wieder auf das von ihm behandelte Kapitel zu sprechen und sagt unter dem Ausdrucke des Bedauerns: „Mein Aufsatz hat wenig Erfolg gehabt, aber niemand hat sich der Mühe unterzogen, eine Widerlegung meiner Beweisführung zu versuchen".*) Auch Hoffmann beklagt XI 368 die Erfolglosigkeit der Koberschen Ausführungen. Zugleich weist er auf die Titel zweier in der Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlichten Aufsätze hin, deren erster die Überschrift: „Die einem Dreiecke umschriebene Ellipse kleinsten Inhalts" trägt, während der zweite das Thema: „Das einem Tetraeder umschriebene Ellipsoid kleinsten Volumens" behandelt.

Neues zur aufgeworfenen Streitfrage bringt M. Simon (Berlin), indem er XXI 341 auf die Ausdrucksweisen: „Der einbeschriebene und der umbeschriebene Kreis" aufmerksam macht und hierzu etwa folgendes ausführt: „Wie ist man (aber) zu der Einführung dieser seltsamen Wörter gekommen? Gewöhnlich hört man die folgende Begründung: Da allgemein gesagt werde, „einen Kreis in ein Dreieck, um ein Dreieck beschreiben", so müsse man auch sagen: der „einbeschriebene, umbeschriebene Kreis". Allein dieser Schlufs ist unzutreffend, denn in der ersten Wendung heifsen die Verba nicht „einbeschreiben, umbeschreiben", sondern einfach „beschreiben"; in der Partizipialwendung kann es daher nur heifsen: der in oder um das Dreieck beschriebene Kreis. „Beschreiben" ist ein allen geläufiges Wort, während die Wörter „einbeschreiben, umbeschreiben" in der Sprache gar nicht existieren. Nun darf ja eine lebende Sprache neue Wörter schaffen, aber diese Neubildungen müssen dem Sprachgeist entsprechen. Die Verba mit den Vorsilben „einbe-" gehören aber zu den seltensten. Von 14 von Grimm aufgeführten Verben dieser Art sind 9 veraltet. Da sich offenbar die Sprache gegen solche Bildungen sträubt, dürfen sie doch keinesfalls vermehrt werden. Anders verhält es sich mit den Verben „einschreiben" und „umschreiben". Bei Anwendung dieser Wörter mufs es aber in unsrem Falle heifsen: der „eingeschriebene", der „umgeschriebene" Kreis und keinesfalls der „umschriebene" Kreis." Simon macht zuletzt den Vorschlag, die Substantiva Inkreis, Umkreis, Ankreis zu gebrauchen.

Auf Grund dieser Ausführungen Simons nahm der Herausgeber der Zeitschrift Veranlassung, in der aufgeworfenen Streitfrage die Entscheidung des Sprachgelehrten Sanders anzurufen. In der Einleitung zu der sprachlichen Studie, die Sanders — der Aufforderung in freundlichster Weise nachkommend — den Lesern der Zeitschrift XXI 467 darbietet, präzisiert er seinen Standpunkt von vorn herein dahin, dafs er Herrn M. Simon vollständig zustimmen müsse. Wir wollen deshalb nicht näher auf die gründlichen Ausführungen dieses Sprachgelehrten eingehen, erwähnen nur, dafs er im interessantesten Teile seines Aufsatzes zeigt, in welcher Weise die sinnwidrige Ausdrucksweise „umschrieben" (gebildet von umschreiben) hat in Gebrauch kommen können.

XXIV 529 wendet sich Sauer gegen die von Simon empfohlenen Wortbildungen „Inkreis, Umkreis, Ankreis". Nach seiner Ansicht sind diese Bildungen unzulässig. Der Rechtfertigung dieser Wörter mit dem allgemeinen Bestreben, sich in der Sprache der Mathematik einer möglichst kurzen Ausdrucksweise zu bedienen, kann er nicht zustimmen. Er wünscht vielmehr, dafs die längere Ausdrucksweise: äufserer, innerer Berührungskreis beibehalten wird. Sauer begründet dieses Verlangen, indem er sagt: „Ich halte es nicht für ein Übel, wenn das Wort, das einen schwierigeren Begriff bezeichnet, auch eine gewisse Zeit zum Lesen, Schreiben und Sprechen in Anspruch nimmt; der Lernende ist dadurch gezwungen, einen Augenblick länger bei der Schwierigkeit zu verweilen und sich somit besser daran zu gewöhnen."

*) Die Schriftleitung fügt hinzu: „Wahrscheinlich, weil sie nicht zu widerlegen ist."

XXVIII 21 tritt G. Kewitzsch für die von ihm selbst aufgebrachten Namen „Umkreis, Inkreis, Ankreis" ein und sagt: „Der vielfache Streit in der Zeitschrift über „umbeschrieben, umgeschrieben, umschrieben" hatte mich mit Widerwillen erfüllt, und so suchte ich und fand Abhilfe. Die sofortige Annahme meines Vorschlags war mir ein Beweis, dafs auch andere den Wortstreit satt hatten." Zur Verteidigung der Kürze seiner Namen führt Kewitzsch folgendes aus: „Ein Name ist doch nichts weiter als der Ausdruck für einen Begriff. Wollte man in jedem Namen die Entstehung, Sein und Werden des Begriffs zur Anschauung bringen, so würde das viel Umstand und Weitläufigkeit geben, ohne zu nützen. Man will vorwärts, und die Namen sind die besten, welche schnell und ohne Aufenthalt den Gedanken vermitteln."

Dieser Ansicht von Kewitzsch hält Sauer XXVIII 22 folgendes entgegen: „Ist denn blofs Kürze das Ziel des mathematischen Unterrichts? Haben wir denn an den Formeln nicht schon Kürzungen genug? Hat nicht schon jeder Lehrer die Erfahrung gemacht, dafs sich hinter blofsen Buchstaben und Namen gerade das verbirgt, was der Todfeind des mathematischen Unterrichts ist — die Gedankenlosigkeit und der Gedächtniskram? Für den Lernenden sind die mathematischen Gedanken oft recht schwer, daher ziehe ich selbst einen etwas langen Satz bei den Beweisführungen vor, wenn er volle Klarheit zu Wege bringt, als eine Kürze, die sich auf inhaltlose, der Sprache aufgezwungene Wörter stützt. Besser wäre es, wenn aus dem mathematischen Unterrichte eine Menge Redensarten stufenweise verschwänden, die allmählich zu Gedankenlosigkeiten sich abschwächen."

„Kreiszone" für „Kreisring".

II 335 beschäftigt sich Zerlang mit dem Ausdruck „Kreisring" und sagt: „Der Name „Ring" für die Differenz zweier konzentrischer Kreise scheint unzweckmäfsig, da durch denselben der Rotationskörper eines Kreises um eine feste Achse aufser ihm bezeichnet wird. „Reif" ist der Rotationskörper eines Kreissegments um eine feste Achse aufser ihm. — „Kreiszone" wäre für den ersten Begriff passender."

Das Wort „Stück" in der Planimetrie.

X 193 spricht sich J. Kober über die Anwendung des Wortes „Stück" in der Planimetrie aus. Er sagt a. a. O.: „Das Wort „Stück" verwendet der Sprachgebrauch aufser für einzelne getrennte Gegenstände derselben Art (z. B. Eier) für die Teile, in welche ein Ganzes durch Zerbrechen, Zerschneiden etc. geteilt werden kann; stets ist im Worte „Stück" der Begriff der Gleichartigkeit des Teiles mit dem Ganzen enthalten. Man sagt: ein Stück Holz, Papier, Eisen etc. Kein Mensch wird aber den Einband eines Buches ein Stück desselben nennen, oder den Dachziegel ein Stück des Hauses etc. Hiernach bleibt es nicht zweifelhaft, was man unter „Stück" einer Linie, eines Dreiecks, eines Prismas, eines Kegels zu verstehen hat. Es fällt ja auch niemanden ein, die Kante des Prismas oder den Mantel des Kegels ein „Stück" desselben zu nennen. Dagegen sagt man allgemein: das Dreieck besteht aus sechs Stücken, nämlich drei Seiten und drei Winkeln. Sollte es nicht besser sein, so wie von Blütenteilen, Maschinenteilen, Körperteilen zu sprechen von Bestandteilen oder, um neue Bedenken auszuschliefsen, von Elementen des Dreiecks?"

Arithmetischer Teil.

„Dreimal mehr", „dreimal weniger".

Unter der Überschrift: „Ein unbarmherzig über Bord zu werfender Ausdruck" weist Hoffmann V 369 auf die Ausdrucksweise: 2, 3, 4mal gröfser oder kleiner als .... hin und fordert, dafs dieselbe „doch ganz aus dem mathematischen Unterricht verschwinden" möchte. Als richtige Ausdrucksweise stellt Hoffmann hin: „2, 3, 4mal so grofs, beziehentlich so klein als ....", oder präziser noch: „das 2-, 3-, 4fache von .... und der 2., 3., 4. Teil von ...." und fügt hinzu, dafs strenggenommen „4 ist dreimal kleiner als 12" doch nur heifsen könne: 4 ist dreimal (was denn dreimal? doch wohl nur dreimal 4!) d. h. also 12 kleiner als 12, das wäre aber 0, also 4 = 0!!!

Für die von Hoffmann gerügten Ausdrucksweisen tritt O. Fischer (Stuttgart) in längeren Ausführungen ein. Die Hauptpunkte dieser Erörterungen wollen wir in Verbindung mit der Erwiderung Hoffmanns VI 279 bringen. Fischer behauptet zunächst, dafs die in Frage stehende Ausdrucksweise sehr wohl berechtigt sei, wenn nur „vorher im Unterrichte eine geeignete Definition gegeben worden sei." Als solche Definitionen gelten ihm:

1. Für das Produkt mA, in welchem m eine Zahl, A eine Zahl oder Gröfse bedeutet, kann der Ausdruck „das $m$fache von A", desgleichen der Ausdruck „$m$mal mehr als A" gebraucht werden.
2. Für den Teilungsquotienten $A:m$, d. h. für diejenige Zahl oder Gröfse, welche mit m multipliziert A zum Produkte gibt, kann der Ausdruck „der $m$te Teil von A", desgleichen der Ausdruck „$m$mal weniger als A" gebraucht werden.

Fischer fügt dem noch hinzu: „Hat man diese Definitionen vorausgeschickt, ist in der angegebenen Weise über den Gebrauch der Ausdrücke Verabredung zustande gekommen, sind also die Ausdrücke „der 4. Teil" und „4mal weniger", beziehentlich „das 4fache" und „4mal mehr" für synonym erklärt worden, so ist von Seite der logischen Klarheit und Sicherheit nichts einzuwenden." Gegen diese Ansicht Fischers wendet sich Hoffmann in seiner Erwiderung, indem er ausführt: „Wenn Herr O. Fischer behauptet, in den Sätzen 1 und 2 (siehe oben) können für das Produkt mA und den Quotienten $\frac{A}{m}$ sowohl das „$m$fache", „der $m$te Teil" als auch jene: $m$mal mehr (weniger) als A gebraucht werden, so ist und bleibt das eben eine unberechtigte Behauptung, so lange man unterläfst, sie durch logische und grammatische Analyse dieser Sätze zu begründen. Diese Behauptung kann aber weder vor dem Richterstuhle der Grammatik noch vor dem der Logik bestehen; denn beide Ausdrucksarten sind nicht nur nicht identisch, sondern der von mir gerügte ist auch grammatisch unvollständig und also unklar, folglich auch inkorrekt. Die angebliche Synonymität ist also gar nicht vorhanden, sondern nur eingebildet. Die Verabredung aber, welche ein Lehrer mit seinen Schülern (Zuhörern) oder ein Autor mit seinen Lesern (ausdrücklich oder stillschweigend) trifft, diese Verabredung kann doch wahrlich nicht eine sprachliche oder logische Inkorrektheit aufheben! Oder ist etwa über den zulässigen Gebrauch dieser Ausdrücke von der Gesamtheit der Mathematiklehrer der gebildeten Nationen oder auch nur von einem Bruchteile derselben eine ausdrückliche Vereinbarung zustande gekommen?“ Fischer verteidigt seine Ausdrucksweisen weiter vom Standpunkte der Zweckmäfsigkeit aus. Er behauptet: „Diese Ausdrucksweisen haben sich schon in einem beträchtlichen Teile der Schulklassen Deutschlands eingebürgert und haben auch schon längst internationale Währung erlangt. Die Weltausstellungen 1867 und 1873 haben gezeigt, dafs man in ganz Frankreich, wo Schlufsrechnung getrieben wird, stets schreibt: *trois fois plus, douze fois moins* usw. und ähnlich in England und anderen Ländern.“ Fischer weist auch noch darauf hin, dafs sich die gerügte Ausdrucksweise „sprachlich viel fliefsender abwickele“ als der Ausdruck: das $m$fache, der $m$te Teil. Hoffmann hält dem entgegen: „Die kleine sprachliche Härte in „der $m$te Teil“ wird leicht überwunden und verschwindet gegen den grofsen Vorteil der Sicherheit und Präzision, welche diesen Ausdrücken innewohnt“ und sagt weiter: „Weltausstellungen und internationale Verbreitung unrichtiger, respektive unklarer Ausdrücke dürften doch streng genommen nicht als Beweise für die Richtigkeit von — weder logisch noch grammatisch zu rechtfertigenden — Ausdrücken vorgebracht werden! Sie beweisen eben weiter nichts, als dafs man auch anderwärts dem Schlendrian sich ergeben hat und dafs Althergebrachtes (Eingerostetes) nur schwer auszurotten ist, weil die *vis inertiae* leider auch im geistigen Leben zu sehr zur Herrschaft gelangt ist.“ Zur weiteren Rechtfertigung seiner Ausdrucksweisen sagt Fischer: „Die Gegner des Ausdrucks (mal mehr, mal weniger) fassen „4 dreimal“ zusammen, trotzdem dafs „ist“ dazwischen steht; die Anhänger des Ausdrucks dagegen fassen „dreimal kleiner“ zusammen. Die Gegner fassen „dreimal“ als Attribut zu dem Subjekt 4, was angesichts des dazwischen geschobenen „ist“ doppelt gewagt erscheint; die Anhänger des Ausdrucks aber rechnen „dreimal kleiner“ zum Prädikat, was auch grammatisch durch die Stellung der Kopula geboten ist. Der eine interpretiert: die dreimal genommene Zahl 4 ist kleiner als 12; der andere: die Zahl 4 ist eine kleinere als die Zahl 12 und zwar eine dreimal kleinere.“ „Wird denn aber“ — so erwidert Hoffmann — „dadurch die Sache klarer? Fragt man denn nicht immer wieder: was (oder genauer: wieviel) denn dreimal? Das heifst: den Knoten auf die Seite schieben, nicht aber ihn lösen! Es ist und bleibt in dem Ausdrucke Unklarheit. Denn das Wörtchen „mehr“ drückt eine Vergröfserung aus und der ganze Satz „12 ist dreimal mehr als 4“ eine Vergleichung, welche in die arithmetische Zeichensprache übersetzt, die Gleichung gibt:

$$12 = 4 + 3x.$$

Wie grofs ist nun aber hierin x? Nehmen wir an, x sei $= 4$*), was doch bei der Unbestimmtheit des Ausdrucks am nächsten liegt, so verwandelt sich obige Gleichung in:

$$12 = 4 + 3 \cdot 4 = 16 \text{ (also } 12 = 16).$$

Ebenso gibt der zweite Satz „3 ist viermal weniger als 12“ die Gleichung:

$$3 = 12 - 4x$$

und für $x = 3$ wird

$$3 = 12 - 12 = 0.$$

Wie weit klarer, präziser und einfacher ist doch der Ausdruck „12 ist das dreifache von 4“, in Gleichung: $12 = 3 \cdot 4$, und ebenso der andere „3 ist der vierte Teil von 12“, in Gleichung $3 = \frac{12}{4}$!“

Einen besonders glücklichen Einwand gegen die Hoffmannsche Ausdrucksweise glaubt Fischer zu bringen, indem er den Fall hervorhebt, dafs in $mA = B$ m gleich 1 oder gleich einem Bruche, insbesondere einem echten Bruche wird. Er sagt: „In dem Beispiele „3 ist $\frac{1}{9}$mal mehr als 27“ ist ja die von mir angewendete Ausdrucksweise unzulässig, es versagt aber auch die

*) Obige Gleichung als Bestimmungsgleichung aufgefafst, gäbe $x = \frac{8}{3}$.

gegnerische Ausdrucksweise völlig! Denn die Frage „das Wievielfache ist 9 von 27?“ mufs doch jeder für unsinnig erklären!“ Auf diesen Angriff Fischers antwortet Hoffmann wie folgt: „Woher weifs denn Herr Fischer, dafs ich die Ausdrücke „das $m$fache“, „der $m$te Teil“ auch ausdehne auf die Fälle, wo $m < 1$ ist, dafs ich also z. B. sage: „Das $\frac{1}{3}$fache, oder gar der $\frac{1}{3}$te Teil.“ Ich vermeide vielmehr in diesem Falle diese Ausdrücke, obwohl man bei der heutigen Sucht alle Grenzen und Scheidewände der Begriffe einzureifsen und auch Widersprechendes unter einen Hauptbegriff zu bringen, hierin kaum auf Widerspruch stofsen würde. Hat man denn nicht für „das $\frac{1}{3}$fache“ den weit bezeichnenderen Ausdruck „ein Drittel“ und für „der $\frac{1}{3}$te Teil“ „das Dreifache“? Denn gleichwie in der Zahlenlinie die absoluten Zahlen von der positiven Seite durch Null auf die negative übergehen, so verwandelt sich hier die durch „fache“ ausgedrückte Multiplikation in eine durch „Teil“ ausgedrückte Division, und zwar geschieht der Übergang durch das „Einfache“ (die Einheit) hindurch.“

VI 285 spricht J. J. Oppel, von der Redaktion aufgefordert, seine Ansicht über die fragliche Ausdrucksweise aus. Er hebt zunächst hervor, dafs er selbst die Ausdrucksweisen „mal mehr“ und „mal weniger“ im Unterricht vermeide und sich der klareren Formen „das $m$fache“, „der $m$te Teil“ bediene. Wenn aber „Schüler“ die andern Formen gebrauchen, so beanstande er das nicht ängstlich, nur die Fassung „12 ist um dreimal mehr als 4“ lasse er nicht zu; auch unterlasse er natürlich zu sagen: „9 ist das $\frac{1}{3}$fache von 27“. Oppel fügt dem Gesagten aber sofort hinzu, dafs ihm nur „der gewöhnlich sogenannte mathematische Unterricht“ obliege und er mit dem eigentlichen Rechenunterrichte niemals betraut, also auch nicht in der Lage gewesen sei, im Massenunterrichte Bruchsatzrechnung (Schlufsrechnung) zu lehren. Er könne sich aber recht wohl denken, wie dem Lehrer, welchem letzteres obliegt, in der Tat erwünscht sein könne, für die von ihm bevorzugten Ausdrücke auch noch weitere durch Bequemlichkeit und Leichtigkeit der grammatischen Konstruktion sich empfehlende Ausdrucksweisen zu haben. Im weiteren Verlaufe seiner Erörterung sucht Oppel sogar die gerügte Ausdrucksweise zu verteidigen, indem er erklärt: „Ich erkenne in dem Ausdrucke eine Breviloquenz für den Gedanken: 4 ist kleiner als 12, und zwar so, dafs man es (dieses Kleinere) dreimal haben müfste, um 12 zu erreichen. Ebenso scheint mir „12 ist dreimal gröfser als 4“ sagen zu wollen: „12 ist gröfser als 4, und zwar so, dafs es dreimal diese (kleinere) Zahl erfordern müfste etc.“ Schliefslich stellt aber Oppel doch die Forderung auf: „Der Lehrer drücke sich stets so aus, dafs er in jedem einzelnen Falle das Bewufstsein haben kann, von den Aufmerksamen unter seinen Schülern nicht mifsverstanden zu werden; und, wo ihm für ein und dieselbe Sache eine Anzahl verschiedener Kunstausdrücke zu Gebote stehen, wähle er stets denjenigen, welcher nicht nur *per exclusionem* gegen falsche Deutungen gesichert ist, sondern welcher der **an sich** durchsichtigste und anschaulichste ist.“

VI 289 äufsert sich E. Bardey zu den Ausdrucksweisen: „mal mehr“ und „mal weniger“. Bardey stellt sich durchweg auf den Standpunkt O. Fischers und verteidigt Fischers Ausdrucksweisen nicht nur für den Gebrauch in der Volksschule, sondern auch für die Anwendung bei Textgleichungen in den höheren Schulen. Seine Ausführungen schliefst Bardey mit den Worten: „Die Ausdrücke: „dreimal mehr“ und „dreimal weniger“ sind in den Elementarschulen ganz allgemein, ihre praktische Brauchbarkeit hat sich lange und eingehend bewährt, sie können durch keine anderen Redewendungen nach jeder Richtung hin voll und ganz ersetzt werden. Entsagen wir daher jeglichem Pedantismus und erkennen wir mit ganzer Bereitwilligkeit ihr Bürgerrecht an, das sie ohne unser Zutun längst erworben und wohl verdient haben.“

Gerade entgegengesetzt dieser Ansicht Bardeys ist die Meinungsäufserung K. Stammers VI 382. Stammer erinnert zunächst an die Definition der Potenz, „welche a^n als ein Produkt von n Faktoren a bezeichnet und wo vor dem Fehler gewarnt wird, statt dessen zu sagen: a $n$mal mit sich selbst multipliziert“. „Diese letzte Ausdrucksweise“, sagt Stammer, „stimmt vollständig mit der von O. Fischer empfohlenen überein. Eine im Grunde falsche Ausdrucksweise kann nicht durch eine willkürliche Definition richtig gemacht werden. Und wenn die Wissenschaft das Unrichtige einer Sprachweise erkannt und nachgewiesen hat, so hat sie das Recht und die Pflicht, auf Beseitigung derselben zu dringen, unbekümmert um die Unbequemlichkeiten, welche dadurch entstehen.“ „Es wird im Rechenunterricht von Elementarlehrern noch gar viel gesündigt, weil ihnen nur zu häufig die erst durch Kenntnis der Algebra zu gewinnende Klarheit der Anschauung und höhere Gesichtspunkte fehlen und weil sie sich der lieben Gewohnheit ohne gründliches Nachdenken fügen.“ Ganz besonders verdient Beachtung eine von Stammer auf Grund langjähriger Erfahrung gemachte Beobachtung. Stammer teilt mit: „Ich habe nämlich beobachtet, dafs den Schülern im Anfange die Unterscheidung zwischen Multiplikation und Addition, zwischen Division und Subtraktion entsetzlich schwer wird. Ob daran der getadelte Ausdruck Schuld ist, vermag ich nicht zu entscheiden; dafs er aber die Schwierigkeit vermehren hilft und den Unterricht in der Algebra ganz wesentlich erschwert, ist nicht zu bezweifeln, denn er steht der Klarstellung der Begriffe im Wege. Also fort damit!“

VI 458 tritt auch E. E. Müller den Ausführungen Fischers entgegen. Er bemerkt zunächst zur Richtigstellung: „Die Ausdrucksweise *„trois fois plus“* und *„douze fois moins“* mag sich wohl in Rechenbüchern für niedere Klassen finden, in den für höhere Schulen bestimmten und von wissenschaftlichen Mathematikern, wie z. B. Lacroix, Bourdon verfafsten Lehrbüchern der Arithmetik heifst es aber durchweg: *„trois fois plus grand“* und *„douze fois plus petit“*.“ Was die Anwendung der deutschen Ausdrucksweise „mal mehr“ und „mal weniger“ anbelangt, so präzisiert Müller seinen Standpunkt folgendermafsen: „Um (nun) auch jede Möglichkeit eines Mifsverständnisses zu verhüten, ist es (daher) geraten, die Ausdrücke „dreimal mehr“ und „dreimal weniger“, wie auch „dreimal gröfser“ und „dreimal kleiner“, desgleichen auch „dreimal so grofs“ und „dreimal so klein“ zu vermeiden und dafür immer zu sagen: A ist das Dreifache oder der dritte Teil von B.“

Veranlafst durch den Aufsatz Stammers kommt VII 203 E. Bardey auf die getadelten Ausdrücke zurück. Es liegt ihm, wie er sagt, daran, „die Sache jetzt ganz zum Austrag zu bringen.“ Er will nicht, dafs man „auf halbem Wege“ stehen bleibe, damit man „in späteren Jahren nicht sagen könne, es sei etwas Wesentliches vergessen worden“. Bardey geht zunächst auf Einzelheiten (Äufserlichkeiten) des Stammerschen Aufsatzes ein und wendet sich dann gegen die Beweisführung Hoffmanns, die dieser auf Grund der Gleichung: $12 = 4 + 3x$ gegeben hatte; Bardey hält es nicht für berechtigt, wenn Hoffmann sich vor „einmal, zweimal, dreimal“ stets das Wörtchen „um“ hinzudenkt. Den Hauptinhalt der Bardeyschen Ausführungen bildet eine eingehende sprachliche Studie über die gerügten Ausdrucksweisen; in dieser führt er zwei Punkte an, welche für, und drei Punkte, welche gegen die Anwendung der Ausdrucksweisen „mal mehr“, „mal weniger“ sprechen. Bardey schliefst seine Erörterung mit den Worten: „Damit habe ich den Gegnern die Waffen ins Lager getragen und habe als ein ehrlicher Mensch, dem es um die Sache selbst zu tun ist, die wunden Punkte blofsgelegt, an welchen die Ausdrücke zu fassen sind. Mögen die Gegner das *Contra* mehr betonen und die Anhänger das *Pro*.“ Bardey versichert schliefslich noch, „dafs er in mathematischen Büchern solche Ausdrücke (mal mehr, mal weniger) nicht mehr gebrauchen werde“.

Mit einer humoristisch gefärbten Schlufsbemerkung*) beendet Hoffmann VII 210 den Kampf um die Ausdrucksweisen „mal mehr“ und „mal weniger“. In den Stellen XI 369, XVI 258, XX 577, XXVIII 88 wird nur kurz, und zwar XI 369, XX 577, XXVIII 88 von Hoffmann und XVI 258 von H. Stade auf die Richtigkeit der Ausdrucksweisen „mal soviel“ und „der *n*te Teil“ hingewiesen, der Gebrauch derselben immer aufs neue wieder empfohlen und das Bedauern ausgesprochen, dafs sich diese Ausdrucksweisen noch nicht allerorts eingebürgert haben.

Die „gleichen“ Hälften und die „gröfsere“ Hälfte.

XVII 269 führt Hoffmann aus einem Artikel einer musikalischen Zeitschrift, in dem über eine neue Stiftung Rubinsteins berichtet wird, folgende Stelle an: „Die Zinsen in der Höhe von 10 000 Franks sollen entweder ganz oder an zwei in gleiche Hälften geteilt als Stipendien gegeben werden.“ Hoffmann fügt ironisch hinzu: „Wir möchten gerne wissen, wie etwa die ungleichen Hälften aussehen“, und führt weiter aus: „Da man diesen Ausdruck (ungleiche Hälften) mitunter auch in (sogar mathematischen elementaren) Schulschriften liest, im Alltagsgespräch nicht selten hört, wenn jemand damit zwei nahezu gleiche Teile eines Ganzen bezeichnen will, so dürfte es wohl nicht unnötig sein, wiederholt auf seine Unrichtigkeit aufmerksam zu machen und zu einer Verfolgung und Ausmerzung aufzufordern. Dasselbe gilt für den noch häufiger vorkommenden Ausdruck „die gröfsere Hälfte“.“ Hierauf nimmt H. Fritsch XVII 434 Bezug. Er wendet sich a. a. O. an Hoffmann in folgendem: „Gehen Sie nicht, indem Sie den Ausdruck „gröfsere Hälfte“ beanstanden, in ihren Ansprüchen zu weit? In einem mathematischen Lesebuche dürften Hälften wohl nur gleich genommen werden; in einer für gebildete Leser bestimmten Mitteilung wird aber doch diejenige Sprache gebraucht werden dürfen, die ein gebildeter Mensch dann spricht, wenn er mit einem gebildeten Mann spricht, und die neuere deutsche Sprache setzt nicht ohne weiteres Hälften als gleich voraus; vergleichen Sie vielleicht die hierher gehörigen Abschnitte aus dem Sanderschen Wörterbuch der deutschen Sprache.“

Obwohl vom Herausgeber XVII 434 eine Fortsetzung des Meinungsaustausches über „die gröfsere Hälfte“ bez. „die gleichen Hälften“ angeregt wurde, hat sich doch kein Leser weiter über diesen Gegenstand geäufsert. Dies erklärt sich wohl daraus, dafs den Lesern die Richtigkeit der Hoffmannschen Ansicht aufser allem Zweifel stand. Sicher sind die Ausdrucksweisen „die gröfsere Hälfte“, „die gleichen Hälften“ als fehlerhaft zu bezeichnen. Denn wie sich der Sinn des Wortes „Hälfte“ durch die Anwendung desselben in der Sprache der Mathematik herausgebildet hat, soll man unter „Hälften“ zwei völlig gleiche Teile verstehen.**)

*) Der ganze Streit erinnert mich lebhaft an die Geschichte, welche mir einmal in früheren Jahren passierte. Auf einer kleinen Reise im sächsischen Erzgebirge kam ich auch in ein zu beiden Seiten eines Flüfschens gelegenes Dorf. Ich sah zu meiner Verwunderung, dafs die Bewohner desselben auf hintereinandergelegten Steinen durch das zur Sommerszeit seichte Flufsbett gingen, und einige Vorsicht anwenden mufsten, um nicht durch einen Fehltritt die Füfse ins Wasser zu tauchen, trotzdem dafs daneben (wahrscheinlich aus älterer Zeit) ein Brettersteig (*vulgo:* Stäg) und nicht ferne davon eine (neue) feste steinerne Brücke stand. Auf meine Frage, warum man denn den beschwerlichen Weg über die wankenden Steine gehe, da man ja zwei Brücken habe, entgegnete mir ein Bauer in seinem sächsischen Dialekt: „Ich wefs o nich worum, se gihen alle drübber, mer sin's emul su gewahne!“ Auf meine weitere Frage, wie sie es denn machten, wenn das Flüfschen angeschwollen sei, antwortete der gutmütige Bauer: „Nu, do müfs'n mer übern Stäg, manche gihn o üb'r de Brücke.“ — — Diese Geschichte ist recht geeignet, das Verfahren vieler Lehrer der Mathematik beim Gebrauche der bes. Ausdrücke zu beleuchten. Im Schlendrian gebraucht man gewohnheitsmäfsig die (zu Mifsverständnissen führenden) Ausdrücke „4 ist dreimal weniger als 12“ etc., indem man sich einredet, sie seien bequem und meint, für das Volk (die Volksschule) seien sie gut genug! Wenn aber das Hochwasser der Gründlichkeit und Wissenschaftlichkeit drängt, flüchtet man sich zur schlichten Holzbrücke und sagt: „4 ist dreimal so wenig als 12“. Nur wenige, in dem festen Willen auf sicherem Boden gehn zu wollen, benützen die steinerne Brücke und sprechen: „4 ist der dritte Teil von 12“. *Sapienti sat!*

**) Ist es bei der Ausführung einer Halbierung nicht möglich, zwei völlig gleiche Teile herzustellen, so mufs es doch das Streben des Ausführenden sein, die Differenz der Teile auf die denkbar kleinste Gröfse (unendlich kleine Gröfse) herabzumindern.

Dann aber ist es eine Tautologie zu sagen „gleiche Hälften", und dann widerspricht es dem Wesen des Wortes „Hälfte" ganz und gar, wenn in der Ausdrucksweise „die gröfsere Hälfte" durch „gröfsere" betont wird, dafs die Teile nicht gleich sein sollen. Dazu kommt, dafs gar kein zwingender Grund vorliegt, das Wort „Hälfte" für ungleiche Teile zu mifsbrauchen. Man hat ja die Ausdrucksweise „der gröfsere Teil". Diese besagt doch, dafs die Teile zwar ungleich, aber auch nicht zu sehr von einander verschieden sein sollen. Will man nämlich betonen, dafs der Unterschied der Teile ein beträchtlicher sein soll, so wird man sagen müssen: „der bei weitem gröfsere Teil", oder etwa in Anwendung auf eine Schulklasse „fast die ganze Klasse"." Soll der Unterschied der beiden Teile als möglichst klein hervorgehoben werden, so kann auch die Ausdrucksweise „beinahe die Hälfte" angewendet werden.

Multiplikation entgegengesetzter Gröfsen.

X 194 macht J. Kober Front gegen die Fassung der Regel: „Das Produkt gleichartiger Gröfsen ist positiv, das Produkt entgegengesetzter Gröfsen ist negativ zu nehmen", oder die noch kürzer gefafste: „Gleiche Zeichen geben *plus*, ungleiche *minus*." „Also ist", sagt Kober, „$(-a)(-b)(-a) = a^2b$; denn dafs Produkte aus mehr als zwei Faktoren nicht ausgeschlossen sind, ist vor wie nach dieser Regel zu lesen; bei Bardey geht z. B. obiger Regel voraus der Satz $abc = acb$ etc., auf die Regel folgt: „Produkte aus lauter gleichen Faktoren, z. B. aa, aaa, $aaaa$." Warum spricht man das Gesetz nicht korrekt so aus: „Jeder negative Faktor ändert das Zeichen des Produktes", oder „Ein Produkt wird negativ, wenn die Anzahl der negativen Faktoren ungerade ist"."

Das „in" in der Division.

(Messen, Teilen.)

XIII 274 kommt J. Kober auf das „in" in der Division zu sprechen und bringt zum Ausdruck, dafs man wohl sagen dürfe „3 in 12 geht viermal" und ebenso „3 von 12 bleibt 9", nicht richtig sei es aber, dafür zu schreiben „3 : 12" und beim Subtrahieren „3 — 12". Ein besonderes Zeichen für „in" einzuführen erklärt Kober für eine „entbehrliche Last", genau so, wie es überflüssig sei, in der Subtraktion für „von" ein neues Zeichen erfinden zu wollen. „Man darf eben", sagt Kober, „3 in 12 oder 12 durch 3" nur auf die eine Art schreiben „12 : 3" $\left(\text{oder } \frac{12}{3}\right)$. Die Hauptsache bleibt immer, dafs der Divisor rechts steht.

XX 575 kommt in einem Kampfartikel über „alte aber noch nicht ausgerottete Übel im mathematischen Unterricht" Hoffmann auch auf die von Kober gerügte Schreibweise zu sprechen und sagt: „Durch die ganze Wissenschaft geht der Satz, dafs der Doppelpunkt „:" einzig und allein zu übersetzen ist mit „dividiert durch". Aber wie oft wird dieser selbe Doppelpunkt so benützt, dafs fälschlich der Divisor vor ihm, der Dividend hinter ihm steht. Es ist hohe Zeit, dafs gegen diesen Mifsbrauch mit unerbittlicher Strenge von oben her eingeschritten wird." Die Behauptung, es sei die getadelte Stellung von Dividend und Divisor bequemer, bestreitet Hoffmann auf das entschiedenste und fügt hinzu, dafs, auch wenn diese Stellung wirklich bequemer wäre, damit der Mifsbrauch des Doppelpunktes zu ganz widersprechender Bedeutung wahrlich nicht gerechtfertigt werden könnte. Hoffmann sagt a. a. O. schliefslich: „Es kommt aber noch ein viel wichtigerer Gesichtspunkt hinzu: man mufs so früh wie möglich beim Unterricht die Schüler an die strenge Form gewöhnen; die strenge Form aber kann nur eingehalten werden, wenn geschrieben wird, wie es sich später überall nötig macht,

$$\textit{Dividend} : \textit{Divisor} = \textit{Quotient}.$$

Diese Stellung hat auch noch den Vorteil, dafs Divisor und Quotient bequem zur Probe stehen."

XXII 179 beschäftigt sich Hoffmann noch einmal eingehend mit der Frage bez. der Stellung von Dividend und Divisor. Er führt a. a. O. folgendes aus: „Bekanntlich gibt es zwei Arten des Dividierens: das Enthaltensein (Messen) und das Teilen. Beide Arten werden auch in Volksschul- und Seminar-Rechenbüchern, sowie in den Rechenwerken für die unteren Klassen höherer Schulen auseinandergehalten und getrennt gelehrt. Das Enthaltensein (Messen) ist offenbar das Leichtere, weil Verständlichere, Zugänglichere. Früher sagte man: 3 in 24 geht achtmal; man nannte also das Mafs zuerst und das zu Messende hinterdrein. Das ist aber unlogisch. Denn gerade wie bei der Teilung das zu Teilende (der Dividend) erst da sein mufs, bevor überhaupt von einer Teilung die Rede sein kann, so ist auch beim Messen das zu Messende (der Metiend) das zuerst Vorhandene. Beide, Dividend und Metiend, müssen also denkfolgerichtig (logisch) vorangestellt werden, und dann erst dürfen Teiler und Mafs folgen. Dafs man aber nun die Formel „3 : 24" aussprach: 3 dividiert in 24, wörtlich übersetzt „3 geteilt in 24", oder dafs man sagte: „Man dividiere mit 3 in 24", das kennzeichnet die frühere Seichtigkeit und Gedankenlosigkeit in der sprachlichen Darstellung der Rechnungsoperationen. Eher hätte es Sinn gehabt, umgekehrt zu setzen „24 : 3" und dies zu lesen: „24 dividiert (geteilt) in 3 (nämlich 3 gleiche Teile)".

Abgesehen von der unlogischen Aufeinanderfolge „3 : 24" liegt auch noch darin ein Mifsstand, dafs man für zwei völlig verschiedene Operationen „Messen" und „Teilen" ein und dasselbe Zeichen (:) benützt und das eine Mal liest „gemessen durch", das andere Mal „geteilt durch". Hierdurch entsteht ein logischer Wirrwarr. „Messen" und „Teilen" sind einmal im Wesen nicht dasselbe und werden es nie sein."

Um dieser Verwirrung ein Ende zu machen, schlägt Hoffmann vor, für das Teilen das hergebrachte Zeichen „:" beizubehalten und es zu lesen „geteilt durch", also:

$$24 : 3 = 8,$$

für das „Messen" aber ein neues Zeichen einzuführen, und zwar das Zeichen „$\div$". Man schreibe also:

$$24 \div 3 = 8$$

und lese: „24 gemessen an 3 gibt 8", indem man das zu Messende im Gedanken an das Mafs (hinan) hält und (es) allmählich „so oft es geht" vor demselben vorbeizieht. Hierbei darf der Strich zwischen den Punkten zugleich auf die Subtraktion hindeuten, mit der die Operation des Messens doch verbunden ist. Den Ausdruck „dividieren" will Hoffmann „fortan verbannt" wissen; auch wünscht er, dafs die Ausdrücke „Dividend, Divisor und Quotient" verschwinden möchten. Hoffmann gibt für die Operationen „Messen" und „Teilen" folgende Übersicht:

Messen:	Zu Messendes 24	$\div$	Mafs 3	=	Mafszahl 8
Teilen:	Zu Teilendes 24	:	Teiler 3	=	Teil 8

Hoffmann fügt noch hinzu, dafs es sich empfehlen würde, für „zu Messendes" und „zu Teilendes" kurze deutsche Wörter ausfindig zu machen. Die von ihm angeführten Ausdrücke „Teilerganzes" und „Mafsganzes" erscheinen ihm selbst „zu lang".

XXVIII 89 kommt Hoffmann noch einmal auf den von ihm gemachten Vorschlag, für „das Messen" ein besonderes Zeichen einzuführen, zu sprechen und erweist die Notwendigkeit eines solchen Zeichens an dem Beispiele:

$$36 : \frac{3}{4}.$$

„In diesem Falle", sagt Hoffmann, „wird leider das Zeichen „:" flottweg gelesen: „Geteilt durch", während es doch auf jeden Fall zu lesen ist: „Gemessen durch (an)". Denn immer, wenn der sogenannte Divisor ein Bruch oder eine gemischte Zahl ist, kann nicht vom Teilen, sondern nur vom Messen die Rede sein. Dies nun gleich durch ein besonderes Zeichen anzudeuten, dürfte sicher von Vorteil sein."

Bruchregeln.

XIII 21 wendet sich P. Meutzner gegen die Fassung der Regeln der Bruchrechnung,*) die sich in der Aufgabensammlung von E. Bardey vorfindet. Man liest dort:

1. Brüche mit gleichen Nennern werden addiert, indem man die Zähler addiert.
4. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit derselben multipliziert oder ....
5. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Nenner mit derselben multipliziert oder ....
8. Brüche werden mit einander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Gegen diese Fassung der Regeln bei Bardey erhebt Meutzner den Vorwurf der Unvollständigkeit und schlägt folgende Fassung der Regeln vor:

1. Gleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man die Summe (Differenz) der Zähler durch den gemeinschaftlichen Nenner dividiert.
4. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem das Produkt des Zählers und der ganzen Zahl durch den unveränderten Nenner dividiert wird.
5. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den unveränderten Zähler durch das Produkt des Nenners und der Zahl dividiert.
8. Brüche werden mit einander multipliziert, indem man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert.

In seiner Entgegnung XIII 23 verwahrt sich E. Bardey entschieden gegen den Vorwurf, dafs die von ihm gegebenen Bruchregeln nicht korrekt gefafst seien. Eingangs seiner Erwiderung führt Bardey eine Reihe Autoren von arithmetischen Aufgabensammlungen auf, die in derselben Weise wie Bardey die Bruchregeln aussprechen und gibt seiner Verwunderung Ausdruck, dafs gerade er (Bardey) von Meutzner angegriffen worden sei. Bardey behauptet, dafs die Art, wie er die Sätze ausgedrückt habe, zweckmäfsiger und richtiger sei als die von Meutzner bevorzugte. Zur Begründung dieser Behauptung führt Bardey etwa folgendes aus: „Fast jede arithmetische Formel, wie auch fast jeder Satz in der Geometrie hat ein ruhendes und ein bewegendes Moment, oder ein aufbauendes, synthetisches Moment und ein operatives oder analytisches Moment in sich, d. h. in einer Formel sind meistens zwei Lehrsätze enthalten, ein Lehrsatz, der zur Grundlage für die Beweise später vorgeführter Lehrsätze benützt wird und der daher gleichsam ein Stein zum Aufbau der Wissenschaft ist, und ein zweiter Lehrsatz, der uns Aufschlüsse gibt über Operationen, in der Geometrie über Konstruktionen, die wir zu machen haben. In der Geometrie mufs wegen der ganzen Anlage dieser Wissenschaft der Charakter der Sätze vorzugsweise ein synthetischer sein. In der Arithmetik dagegen sind die analytischen Momente vorherrschend. Die beiden genannten Momente müssen jedoch, wenn man eine Formel richtig in Worte übertragen will, auseinander gehalten werden.

*) Schon I 276 hatte R. Sturm auf die inkorrekte Fassung der Bruchregeln in arithmetischen Aufgabensammlungen aufmerksam gemacht.

Ein Beispiel erklärt dies leicht. Die Formel

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x}=\frac{a+b}{x},$$

synthetisch erfafst, sagt: Die Summe zweier gleichnamiger Brüche ist gleich einem Bruche, dessen Zähler die Summe der Zähler und dessen Nenner der gemeinsame Nenner ist. Analytisch erfafst: Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Zähler addiert. In der Arithmetik handelt es sich in der Hauptsache darum, das operative Element zum Ausdruck zu bringen, und das mufs in einfachster Weise geschehen. Jedes überflüssige Wort ist als Ballast anzusehen, das Wesentliche hat gegen das Unwesentliche hervorzutreten. Worauf hat nun der Schüler sein Augenmerk zu richten bei der Addition der Brüche? Der Schüler hat erstens sein Augenmerk auf die Nenner zu richten und zuzusehen, ob sie auch gleich sind. Deshalb habe ich dem Ausdruck „Brüche mit gleichen Nennern“ den Vorzug gegeben vor „gleichnamige Brüche“. Der Schüler hat zweitens die Zähler zu addieren. Das sind die Hauptsachen, die der Schüler sich einzuprägen hat. Liegen diese Hauptpunkte nicht in dem Satze, so ist der Satz, ohne seine sonstige Fassung zu berücksichtigen, für den Zweck der Rechnung unbrauchbar und fehlerhaft. Es hätte in dem von mir gegebenen Satze, um denselben vollständig zu machen, noch hinzugefügt werden müssen: „und unter das Resultat den gemeinschaftlichen Nenner als Nenner setzt“. Das in diesen Worten angedeutete Verfahren ist aber so selbstverständlich, dafs der Schüler das nicht wieder vergifst, wenn der Lehrer das ein einziges Mal hinzugefügt oder vorgemacht hat.“ Bardey schliefst seine Entgegnung mit folgenden Worten: „Die Fassung der Sätze, wie Meutzner sie gibt, ist nicht nur unzweckmäfsig, sondern auch fehlerhaft. Denn Herr Meutzner hat weder das operative noch das synthetische Moment, das in der Formel liegt, rein festgehalten. Er fängt an: „Gleichnamige Brüche werden addiert“, als ob er eine Regel zu der Operation geben oder das operative Moment der Formel darlegen wollte. Dann spricht er aber wieder von der Summe, wodurch er in die synthetische Übertragung hineingerät. Die Hauptsache aber, dafs die Zähler addiert werden müssen, erwähnt er mit keinem Worte; er tut, als ob das, was für die Schüler gerade das Wesentlichste ist, sich von selbst versteht, und scheint für die Hauptsache zu halten, was gar nicht hierher gehört, dafs nämlich die Summe der Zähler durch den gemeinsamen Nenner dividiert wird.“

In seiner Erwiderung XIII 115 sagt Meutzner nach einigen einleitenden Bemerkungen zunächst: „Der Hauptpunkt, auf den es mir ankommt, ist und bleibt: es ist ungenügend und also fehlerhaft, dafs bei der herkömmlichen und auch von Bardey adoptierten Fassung der Bruchregeln nur dem ersten Teile der vorzunehmenden Operationen Ausdruck gegeben wird, während der zweite Teil verschwiegen wird.“ Weiterhin betont Meutzner: „Erst sehr in zweiter Linie steht für mich die Frage nach der definitiven Fassung der Regeln, denn dies ist doch nur die formelle Seite der ganzen Sache. Gut, wenn Herr Bardey so wünscht, mag die Regel in Zukunft lauten: „Brüche mit gleichen Nennern werden addiert, indem man die Zähler addiert und unter das Resultat den gemeinschaftlichen Nenner als Nenner setzt“ und ähnlich die andern. Eine derartige Vervollständigung würde allerdings „einen grofsen Ballast“ in die Arithmetik bringen. Also haben wir darnach zu trachten, durch andere Fassung diesen Übelstand zu vermeiden, und einen diesbezüglichen Vorschlag habe ich die Vermessenheit gehabt den Herren Kollegen zu unterbreiten.“ Hierauf kommt Meutzner auf die Einwände zu sprechen, die Bardey gegen die Meutznersche Fassung vorgebracht hatte. Er führt hierbei folgendes aus: „Wenn meine Fassung mit „gleichnamige Brüche“ beginnt, so wird doch durch die bevorzugte Stellung dieses Prädikats an der Spitze des ganzen Satzes sicher nicht weniger nachdrücklich darauf hingewiesen, Ein Beispiel erklärt [illegible]

synthetisch erfafst, sagt: I [illegible] ist gleich
einem Bruche, dessen Zähl [illegible] Nenner der
gemeinsame Nenner ist. [illegible] he werden
addiert, indem man die Zä [illegible] lelt es sich
in der Hauptsache darum, [illegible] zu bringen,
und das mufs in einfachste [illegible] Wort ist als
Ballast anzusehen, das We [illegible] vorzutreten.
Worauf hat nun der Schüle [illegible] ddition der
Brüche? Der Schüler hat [illegible] zu richten
und zuzusehen, ob sie auc [illegible] Ausdruck
„Brüche mit gleichen Nenne [illegible] ge Brüche".
Der Schüler hat zweitens d [illegible] auptsachen,
die der Schüler sich einzup [illegible] icht in dem
Satze, so ist der Satz, oh [illegible] htigen, für
den Zweck der Rechnung [illegible] n dem von
mir gegebenen Satze, um d [illegible] hinzugefügt
werden müssen: „und unte [illegible] Nenner als
Nenner setzt". Das in [illegible] st aber so
selbstverständlich, dafs der [illegible] der Lehrer
das ein einziges Mal hinzu [illegible] y schliefst
seine Entgegnung mit fol [illegible] Sätze, wie
Meutzner sie gibt, ist n [illegible] fehlerhaft.
Denn Herr Meutzner hat [illegible] e Moment,
das in der Formel liegt, rei [illegible] ige Brüche
werden addiert", als ob [illegible] oder das
operative Moment der Forn [illegible] ber wieder
von der Summe, wodurch [illegible] hineingerät.
Die Hauptsache aber, dafs [illegible] hnt er mit
keinem Worte; er tut, als o [illegible] esentlichste
ist, sich von selbst versteh [illegible] alten, was
gar nicht hierher gehört, [illegible] durch den
gemeinsamen Nenner divid [illegible]

In seiner Erwiderung [illegible] inleitenden
Bemerkungen zunächst: „I [illegible] t, ist und
bleibt: es ist ungenügend [illegible] ömmlichen
und auch von Bardey ado [illegible] lem ersten
Teile der vorzunehmenden [illegible] ihrend der
zweite Teil verschwiegen w [illegible] rst sehr in
zweiter Linie steht für m [illegible] ssung der
Regeln, denn dies ist doch [illegible] he. Gut,
wenn Herr Bardey so wün [illegible] : „Brüche
mit gleichen Nennern werde [illegible] und unter
das Resultat den gemeinsch [illegible] ähnlich die
andern. Eine derartige V [illegible] n grofsen
Ballast" in die Arithmetik [illegible] trachten,
durch andere Fassung diese [illegible] ezüglichen
Vorschlag habe ich die Ve [illegible] zu unter-
breiten." Hierauf kommt [illegible] echen, die
Bardey gegen die Meutzne [illegible] hrt hierbei
folgendes aus: „Wenn mein [illegible] eginnt, so
wird doch durch die bevo [illegible] er Spitze
des ganzen Satzes sicher [illegible] ngewiesen,

„erstens sein Augenmerk auf die Nenner zu richten“, als wenn sie beginnt: „Brüche mit gleichen Nennern“. Dafs der Schüler zweitens die Zähler zu addieren hat, auf diese zweite „Hauptsache“ weist das Subjekt des folgenden Satzes „die Summe der Zähler“ jeden deutlich genug hin. Wie nun die „Summe der Zähler“ anders als durch Addition zu finden ist, weifs ich wahrlich nicht, und darum erscheint es mir als eine unverständliche Behauptung, wenn Herr Bardey schreibt: „Die Hauptsache, dafs die Zähler addiert werden müssen, erwähnt Meutzner mit keinem Wort“. Ebenso protestiere ich energisch gegen die willkürliche Unterstellung, welche ich in dem von Herrn Bardey, **nicht** von mir veranlafsten gesperrten Druck des Wortes „dividiert“ finden mufs; sucht Bardey doch damit nichts weniger zu beweisen als: „Meutzner scheint das für die „Hauptsache“ zu halten, was gar nicht hierher gehört, dafs nämlich die Summe der Zähler durch den gemeinsamen Nenner dividiert wird.“ Die Schlufsoperation mit den Nennern ist zwar nicht die Hauptsache, aber allerdings meines Erachtens „der ersten Hauptsache“ ganz gleichwertig, wenn sich über sie auch die unantastbare, herkömmliche Fassung völlig ausschweigt.“ Am Schlusse beantwortet Meutzner noch die Frage, warum er sich gerade gegen Herrn Bardey gewendet habe, indem er sagt: „Die Bücher des Herrn Bardey erscheinen mir so hervorragend geeignet für den mathematischen Unterricht, dafs sie eine sehr grofse Verbreitung bereits gefunden haben und noch finden werden. Deshalb hielt ich kein Buch für so geeignet wie dieses, mit einer eingerosteten Inkorrektheit endlich aufzuräumen. Ich wagte also diese Ausstellungen zu machen, zumal am Schlusse des Vorwortes allen der Dank des Herrn Bardey schon im voraus dargebracht wird, die ihn auf Mängel des Buches aufmerksam machen werden.“

XIII 162 wendet sich V. Schlegel der Kontroverse Meutzner - Bardey zu und betont, dafs er im Prinzip auf Herrn Meutzners Seite stehe, dafs aber die alten Fassungen nicht gänzlich zu verwerfen seien. Schlegel sagt u. a.: „So wünschenswert es ist, dafs der Schüler zuerst den präzisen längeren Wortausdruck kennen lernt, so wird er sich, wenn er das Verfahren, welches in dem Satze liegt, sich zu eigen gemacht hat, ohne Schaden der althergebrachten kürzeren, wenn auch mehr mechanischen, Fassung bedienen können.“

Schliefslich nehmen noch XIII 163 ff. Kallius und G. Schubring zu dem Streite Stellung. Während Kallius im vollen Umfange die Ansicht Meutzners vertritt, meint Schubring, dafs man die Bardeysche Form unter gewissen Voraussetzungen sehr wohl als ganz korrekt bezeichnen könne.

Mit der vorstehenden Zusammenstellung soll eine Unterlage geschaffen sein für weitere Betätigung auf dem Gebiete der Verbesserung der mathematischen Ausdrucksweise. Allen Fachkollegen, die sich mit dem genannten Gebiete besonders beschäftigen, wird es sicher von Wert sein, übersichtlich einmal dargeboten zu sehen, was in der einschlägigen Zeitschrift bereits über „fehlerhafte mathematische Ausdrucksweise“ veröffentlicht worden ist. Die Zusammenstellung zeigt, dafs wohl schon fleifsig auf diesem Gebiete gearbeitet, trotzdem aber doch nur ein (vielleicht recht geringer) Teil von dem behandelt worden ist, was in das Kapitel: „Fehlerhafte Ausdrucksweise im mathematischen Unterricht“ gehört. Möge diese Arbeit recht vielen Lehrern der Mathematik eine Anregung sein, zur weiteren Klärung von schon in der Zeitschrift vorgebrachten Ausdrucksweisen beizutragen oder Neues über das genannte Gebiet zu bringen. Alle Mathematiker, die es sich angelegen sein lassen, fördernd für die mathematische Ausdrucksweise zu wirken, erfüllen eine Pflicht, die ihnen ihre Wissenschaft auferlegt, und erweisen dem mathematischen Unterrichte einen grofsen Dienst.

Inhaltsübersicht.

Geometrischer Teil.

Arithmetischer Teil.