Die ersten Lehrstunden im Trigonometrieunterricht.

Eine Lehrprobe.

Von **Erwin Dintzl.**

In der Form einer Lehrprobe will ich in diesem Aufsatze den Versuch unternehmen, eine Behandlung der Winkelfunktionen im Geometrieunterricht der VI. Klasse ungefähr während der ersten drei Monate des Schuljahres zu geben, welche von den üblichen Darstellungen sowie von derjenigen, welche A. Höfler in seiner Didaktik[1]) gibt, in manchen Punkten abweicht, und in welcher ich vor allem Nachdruck auf die völlige Durchdringung des Stoffes mit dem Funktionsbegriffe lege.

Ich nahm den Stoff für diese Lehrprobe absichtlich aus dem vielbearbeiteten Gebiete der Winkelfunktionen, weil gerade hier der Reformgedanke in seiner vollen Wirkung auf die methodische Gestaltung der betreffenden Materie zur Geltung kommt, ohne daß es sich zunächst um Probleme infinitesimaler Natur handelt.

Ich halte für den Anfang das Studium der Sehne als Funktion des zugehörigen Bogens — abgesehen davon, daß hiedurch von allem Anfang an das Argument als im Bogenmaße gemessen erscheint — schon deshalb für methodisch richtiger als die Voranstellung trigonometrischer Aufgaben, weil auf diese Weise die Winkelfunktionen frühzeitig für einen Geltungsbereich definiert werden, welcher über die beiden ersten Quadranten hinausreicht.[2]) Man gelangt auch von der Sehnenfunktion durch einen sehr einfachen Übergang zur Sinusfunktion, welche sodann unter Anwendung des Koordinatenprinzipes für sämtliche reellen Argumentswerte definiert wird. Alle Gründe, welche man für die üblichen Methoden einer nur allmählichen, von Quadrant zu Quadrant fort-

[1]) A. Höfler, „Didaktik des mathematischen Unterrichtes", §§ 27, 28, 29 und 30 (Teubner 1910).

[2]) Das Lehrbuch der Elementarmathematik von J. Schmidt (II. Band, 1911, A. Hölder) stellt zwar die Sehnenrechnung der Alten an die Spitze des Abschnitttes über die Winkelfunktionen, welche in wenigen Worten charakterisiert wird. Im übrigen knüpft jedoch die folgende Entwicklung nicht daran an, sondern schlägt den üblichen Weg ein.

schreitenden Erweiterung des Geltungsbereiches anführt, scheinen mir im vorliegenden Falle nicht anwendbar zu sein. Denn einmal ist den Schülern schon seit mehr als einem Jahre der Koordinatenbegriff geläufig und anderseits besteht infolge der vorläufigen Beschränkung auf eine einzige Winkelfunktion nicht die Gefahr, daß der Schüler durch die auf ihn einstürmenden Definitionen und Beziehungen zwischen den Funktionen untereinander in Verwirrung gerät. Endlich lernt der Schüler den vollen Verlauf der Sinusfunktion und damit die charakteristische Eigenschaft derselben, die Periodizität, kennen. Ich folge damit im Grunde nur einer Anregung, welche schon die Instruktionen[1]) vom Jahre 1884 geben, indem sie fordern: „Den einfachen Zusammenhang zwischen allen Winkeln, welche derselben gegebenen Funktion entsprechen, nachzuweisen und den periodischen Charakter der trigonometrischen Funktionen ins klare Licht zu stellen, darf nicht unterlassen werden. Der Unterricht darf nicht nur die praktische Auflösung eines ebenen Dreieckes im Auge behalten, sondern muß vorsorgen, daß der Schüler bei Anwendung der trigonometrischen Funktionen auf Probleme anderer Natur keinen Schwierigkeiten begegne, die in einer kümmerlichen Behandlung der elementaren Grundbegriffe ihre Quelle haben." Hieher gehören z. B. die Schwierigkeiten, welche selbst heute noch die Wellenlehre den Schülern bereitet und welche nur durch breite Darstellungen dieses Kapitels im physikalischen Unterricht der obersten Klasse gemildert werden.

Daß ich mit meiner Darstellung gegen die didaktische Forderung verstoße, immer von Problemen der angewandten Mathematik auszugehen, fasse ich nicht als Vorwurf auf. Denn um den funktionalen Charakter der Winkelfunktionen ins rechte Licht zu stellen und klar heraus zu arbeiten, eignen sich Aufgaben der praktischen Geometrie, wie z. B. die Aufgabe des Vorwärtseinschneidens sehr schlecht, ebensowenig solche Aufgaben, die zwar scheinbar in das Gewand von „Wirklichkeitsaufgaben" eingekleidet sind, aber im Grunde doch nur ähnlich so manchem Gedankenexperiment des physikalischen Unterrichtes nichts anderes. als eigens zu diesem Zwecke konstruierte „Phantasieaufgaben" sind. Man soll nicht in das entgegengesetzte Extrem verfallen und bei jeder Gelegenheit die Anwendungen an die Spitze stellen. Gerade die Geschichte der Trigonometrie bietet ein in dieser Hinsicht sehr lehrreiches Beispiel. Bei der großen Bedeutung, welche sowohl in Ägypten, als auch im römischen Reiche, insbesondere zu den Zeiten der Kaiser, als die große Ausdehnung des Reiches eine genaue Regelung der Verwaltung verlangte, die Feldmeßkunst besaß, muß es doch wundernehmen, daß nicht diese Kunst den unmittelbaren Anstoß zur Entwick-

[1]) Instruktionen für den Unterricht an den Gymnasien in Österreich. Wien 1884, k. k. Schulbücherverlag (S. 229).

lung einer Trigonometrie gegeben hat. Hankel[1]) gibt hiefür in seinen Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik die folgenden bemerkenswerten Erklärungen:

„Wenn wir uns davon überzeugen werden, daß diese Kunst (die Feldmeßkunst der römischen Feldmesser) niemals über die roheste Empirie hinausgekommen ist, während sich die Geometrie in derselben Zeit bei ihren Nachbarn, den Griechen, ohne solchen Antrieb auf das Glänzendste entwickelte, so können wir daraus die allgemeine Folgerung ziehen, daß äußere Not und praktisches Bedürfnis allein die Völker nicht zu einer Erweiterung ihres Wissens und zur Vervollkommnung ihrer Künste treibt, wenn nicht, davon unabhängig, ein ideales Bedürfnis dazu vorhanden ist. Ein solches Bedürfnis des Intellektes aber fehlte den Römern gänzlich, die nur auf den Gebieten menschlicher Kultur, die den Willen direkt ergreifen und von ihm ausgehen, Großes geleistet haben.

Die Astronomie, deren hohes Alter bei allen Kulturvölkern ebenfalls jenen allgemeinen Satz bestätigt — denn sie verdankt ihren Ursprung sicherlich mehr dem idealen Interesse, welches den Menschen ahnungsvoll zur Sternenwelt emporzieht, als dem praktischen, eine sichere Chronologie zu gewinnen — muß ebenfalls von bedeutendem Einflusse auf die Entwicklung geometrischer Begriffe gewesen sein."

Ein Vorschlag aber, entsprechend dem historischen Entwicklungsgange die sphärische Trigonometrie und ihre Anwendung in der Astronomie als Ausgangspunkt der Lehre von den Winkelfunktionen zu wählen, dürfte nicht viele Anhänger finden.

Das historische Moment kommt in dieser Lehrprobe weniger in bibliographischen Notizen, als vielmehr in einer detaillierten Schilderung des Ptolemäischen Verfahrens zur Aufstellung einer Sehnentafel zur Geltung. Gerade der sogenannte Ptolemäische Lehrsatz ist, wie selten ein anderer, dazu geschaffen, vor den Augen des Schülers die zur Formulierung und zum Beweise des Satzes führende mathematische Schlußweise zu analysieren, während das von Ptolemäus zur näherungsweisen Berechnung der Sehne von 1^0 aus den Sehnen von $1^1/_2{}^0$ und $^3/_4{}^0$ angewendete Verfahren zu einem interessanten Vergleiche der Methoden der griechischen Mathematik mit den heutigen auf dem Funktionsbegriff fußenden Methoden der Wissenschaft anregt.

I.

Die Kreissehne als Funktion des zugehörigen Kreisbogens.

Wir schlossen den Unterricht in der Planimetrie der IV. Klasse mit dem Kapitel der Kreismessung, in dessen Mittelpunkt das Problem

[1]) Dr. H. Hankel, „Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter." B. G. Teubner 1874, S. 78—79.

der Rektifikation des Kreisumfanges oder, arithmetisch gesprochen, die Aufgabe stand, das Verhältnis von Kreisumfang und Durchmesser zu bestimmen. Der Lösung dieses Problems dienten alle anderen besonderen Aufgaben, dienten in letzter Folge alle die Sätze, welche wir über die einem Kreise ein- beziehungsweise umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke entwickelt haben. Auf diese Weise lernten wir die Seiten (s_n) einiger solcher dem Kreise mit dem Radius r eingeschriebener regelmäßiger Vielecke kennen, z. B.: $s_3 = r\sqrt{3}$, $s_4 = r\,.\sqrt{2}$, $s_5 = r\,.\,\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $s_6 = r$, $s_8 = r\,.\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $s_{10} = r\,.\,\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, $s_{12} = r\,.\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Und jedem dieser durch Quadratwurzeln darstellbaren algebraischen Ausdrücke konnten wir eine einfache geometrische Konstruktion mittels Zirkel und Lineal zur Seite stellen. Wir gaben auch ein Verfahren an, um allgemein für ein beliebiges positives ganzzahliges n die Größe von s_{2^n} oder $s_{3\,.\,2^n}$ zu bestimmen.

Heute knüpfen wir an die soeben erwähnten speziellen Aufgaben an und wollen sie verallgemeinern — aber nach einer anderen Richtung als wir es damals getan haben. Jetzt, wo wir im funktionalen Denken bereits eine größere Übung besitzen, ja, wo wir gerade die Fragen nach dem Zusammenhange mehrerer Größen in den Vordergrund stellen, muß sich uns doch unwillkürlich die Frage aufdrängen: Welcher Zusammenhang besteht zwischen Bogen und zugehöriger Sehne? Von diesem Standpunkte aus betrachtet, sind die früher genannten Aufgaben ganz spezielle Sonderfälle; so ist z. B. s_5 die Sehne, welche zum Bogen $\frac{2r\pi}{5}$ in einem Kreise mit dem Radius r gehört.

Wir müssen die Frage noch präziser gestalten. Der Bogen b hängt bekanntlich mit zwei Größen aufs engste zusammen, mit dem Radius des Kreises und mit dem zum Bogen gehörigen Zentriwinkel α[1]), was wir durch die Formel ausdrücken:

$$b = \alpha\,.\,r.$$

Demnach ist auch die Sehne von diesen beiden Größen α und r abhängig. Kennen wir diese Abhängigkeiten, dann macht auch der Zusammenhang zwischen Sehne und Bogen keine Schwierigkeit, um so weniger als ja die Abhängigkeit der Sehne vom Radius eine sehr einfache ist. Wissen wir doch von der Planimetrie her noch, daß bei konstantem

---

[1]) Wir bezeichnen in Hinkunft in der üblichen Weise mit α den im Bogenmaße (d. i. am Einheitskreise) gemessenen mit α^0 den im Gradmaße gemessenen Winkel, so daß zwischen beiden die bekannte Relation besteht:

$$\alpha = \frac{\alpha^0}{180^0}\,.\,\pi \text{ oder } \alpha^0 = \frac{\alpha}{\pi}\,.\,180^0.$$

α die Sehne eine lineare Funktion des Radius r, und daß demnach der Quotient $\frac{s}{r}$, wo s die zum Winkel α gehörige Sehne s und r den Radius bedeutet, eine bloße Funktion des Winkels α ist.

Wir studieren also die Funktion:

$$\frac{s}{r} = f(\alpha). \tag{1}$$

Hiebei mache ich nur noch auf folgendes aufmerksam:

1. α ist der im Bogenmaße gemessene Zentriwinkel, zu dem im Kreise mit dem Radius r die Sehne s gehört.

2. Die Funktion $f(\alpha)$ ist geometrisch durch ein Streckenverhältnis definiert (also eine im geometrischen Sinne dimensionslose Größe).

Setzen wir $r = 1$, betrachten wir also den Einheitskreis, dann gibt $f(\alpha)$ die Maßzahl für die Größe der zum Bogen α gehörigen Sehne im Einheitskreise an, und zwar in dem Maßstabe mit der Einheit $r = 1$.

Wie ist diese Funktion $f(\alpha)$ beschaffen? Ist sie etwa mit einer der bisher besprochenen Funktionen identisch? Ich habe manchmal hören müssen, zum 2-, 3 fachen Bogen gehört die doppelte, dreifache Sehne und wir haben dann an den einfachsten besonderen Fällen uns überzeugt, daß diese Behauptung falsch ist. $f(\alpha)$ kann demnach keine lineare Funktion sein. Ebenso können Sie sich überzeugen, daß sie auch von jeder anderen Ihnen bekannten Funktion verschieden ist.

Wir wollen, ehe wir zur graphischen Darstellung von $f(\alpha)$ übergehen, die Funktion $f(\alpha)$ für eine Reihe von Werten des Argumentes bestimmen, indem wir folgendermaßen verfahren:

Wir zeichnen auf Millimeterpapier den Einheitskreis, wobei wir als Einheit 10 *cm* wählen und konstruieren mittels Zirkel und Lineal die Zentriwinkel $\frac{\pi}{12}$ $(= 15^0)$, $2\frac{\pi}{12}$, $3\frac{\pi}{12}$, ... Sodann teilen wir den Winkel $\frac{\pi}{12}$ näherungsweise in drei gleiche Teile[1]) und erhalten auf diese Weise Winkel, welche von 5^0 zu 5^0 fortschreiten. Durch Abmessung gewinnen wir die Längen der zugehörigen Sehnen in Millimetern und können daraus die entsprechenden Werte von $f(\alpha)$ auf zwei Dezimalen berechnen, welche wir zu folgender Tafel vereinigen:

---

[1]) Es genügt hier diese Konstruktion mit Hilfe der Dreiteilung der zugehörigen Sehne durchzuführen. Nur muß man ausdrücklich darauf hinweisen, daß durch dieses Verfahren die Dreiteilung nicht präzise, sondern bloß approximativ vorgenommen wurde.

α	$f(\alpha)$	α	$f(\alpha)$	α	$f(\alpha)$	α	$f(\alpha)$
5^0	0·09	50^0	$0{\cdot}84_5$	95^0	1·47	140^0	1·88
10^0	0·17	55^0	0·92	100^0	1·53	145^0	1·91
15^0	0·26	60^0	1·00	105^0	1·59	150^0	1·93
20^0	0·35	65^0	1·07	110^0	1·64	155^0	1·95
25^0	0·43	70^0	1·15	115^0	1·69	160^0	1·97
30^0	0·52	75^0	1·22	120^0	1·73	165^0	1·98
35^0	0·60	80^0	$1{\cdot}28_5$	125^0	1·77	170^0	1·99
40^0	0·68	85^0	1·35	130^0	1·81	175^0	2·00
45^0	$0{\cdot}76_5$	90^0	1·41	135^0	1·85	180^0	2·00

Man kann diese Tabelle auf Grund der leicht zu beweisenden Relation:

$$f(\pi+\alpha)=f(\pi-\alpha) \qquad o\leqq\alpha\leqq\pi$$

in das Intervall $\pi\leqq\alpha\leqq 2\pi$ fortsetzen.

Diese Tabelle soll uns als Grundlage für die graphische Darstellung der Funktion $f(\alpha)$ dienen, indem wir als Abszissen die im Bogenmaße gemessenen Winkelgrößen und als Ordinaten die zugehörigen Werte von $f(\alpha)$ auftragen. Als Längeneinheit wählen wir sowohl für die Abszissen wie für die Ordinaten $2\,cm$; daher entspricht z. B. dem Werte $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ der Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten $\frac{\pi}{4}.2\,cm=1{\cdot}5\underline{7}\,cm$ und $0{\cdot}76_5\times 2\,cm=1{\cdot}53\,cm$.

Eine kleine Schwierigkeit tritt nur dann auf, wenn man zu einem beliebig vorgegebenen Winkel den zugehörigen Funktionswert bestimmen und darstellen soll; es handelt sich nämlich in diesem Falle darum, einen Bogen (das Maß des Winkels am Einheitskreise) auf der Abszissenachse sozusagen gerade zu strecken. Doch gibt es ein sehr instruktives Näherungsverfahren zur Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe von Zirkel und Lineal[1]).

Wir erhalten auf diese Weise für das Intervall $o\leqq\alpha\leqq 2\pi$ das in Fig. 2 gezeichnete Bild der Funktion:

[1]) Dasselbe besteht im folgenden: Man gehe von dem Kreise K mit dem Radius r und dem Mittelpunkt in O zu dem Kreise K_1 mit dem Radius $2r$ und dem Mittelpunkt in O_1 über und bringe die Verlängerung von $O_1\,B$ mit K_1 zum Schnitt (B_1). Es sind dann wegen $\alpha_1=\frac{\alpha}{2}$ die beiden Bögen $\widehat{AB}=r.\alpha$ und $\widehat{AB_1}=2\,r.\alpha_1$ einander gleich. Man erhält den Punkt B_1 auch dadurch, daß man die in B auf AB errichtete Normale mit der Symmetrale des Winkels $\sphericalangle\,BAx$ zum Schnitt bringt. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens, wobei es also nicht nötig ist, die Bögen der Kreise K_1, K_2, . . . zu konstruieren,

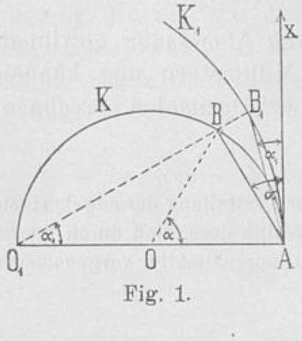

Fig. 1.

Bevor wir aber nach den weiteren Eigenschaften dieser Funktion forschen, müssen wir uns doch fragen: was leistet dieselbe überhaupt? Es handelt sich in diesem Falle um eine Funktion, welche eine Beziehung zwischen Kreisbogen und Sehne, also zwischen Winkelgrößen und Strecken vermittelt. Und solche Funktionen helfen eine Lücke in unseren bisherigen planimetrischen Kenntnissen über Dreiecksberechnungen ausfüllen. Wir können zwar die verschiedensten Dreiecksprobleme konstruktiv lösen, wenn wir hiebei aber rechnerisch verfahren sollten, versagen die uns bekannten Verfahren schon in ganz einfachen Fällen (z. B. in dem Falle: in einem gleichschenkligen Dreieck aus den beiden Schenkeln und dem Winkel am Scheitel $\gamma = 10^0$ die Grundlinie zu berechnen). Der Grund für dieses Versagen liegt zweifellos darin, daß wir zu wenig über die Beziehungen zwischen Winkeln und Strecken wissen.

Nun haben wir aber in $f(\alpha)$ eine solche Funktion. Was leistet dieselbe mit Rücksicht auf Dreiecksberechnungen?

Ein Blick auf die Fig. 3 zeigt uns sofort, daß mit der Kenntnis von $f(\alpha)$ auch gleichzeitig die Aufgabe gelöst ist, in einem gleichschenkligen Dreiecke $\Delta\ ABC$ aus den beiden Schenkeln b und dem

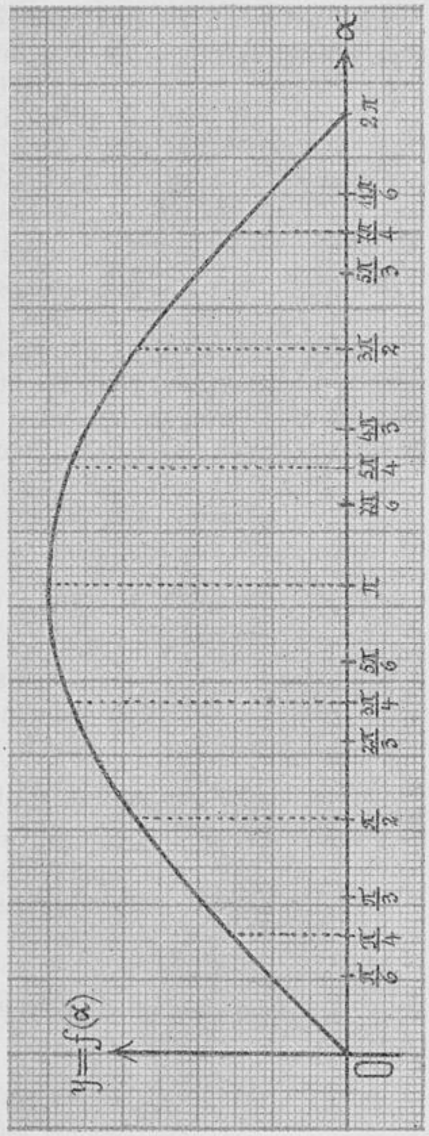

Fig. 2.

kommt man, indem man die Sehnen für die Bögen nimmt, zu immer genaueren Näherungswerten für den zu bestimmenden Bogen AB. Diese Methode verdiente, wie Wellstein (Enzyklopädie der Elementarmathematik, Weber-Wellstein, Band II, S. 276 bis 277) mit Recht hervorhebt, im Schulunterricht häufiger verwendet zu werden, weil sie in geometrisch sehr einfacher Weise sowohl die allmähliche Streckung eines Bogens lehrt, als auch, angewendet etwa auf den besonderen Fall des Halbkreises, eine lehrreiche Veranschaulichung eines ins Unendliche verlaufenden Prozesses liefert, welcher die Zahl π zum Grenzwerte hat.

Winkel am Scheitel α die Grundlinie a zu bestimmen. Man mache nämlich den Scheitel des Dreiecks zum Mittelpunkt eines Kreises, dessen Radius die Größe des Schenkels besitzt; dann ist die Grundlinie durch:

$$a = b \,.\, f(\alpha)$$

gegeben.

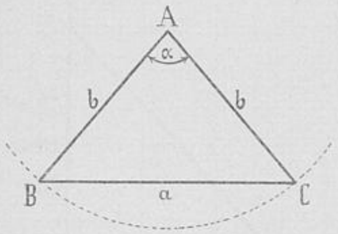

Fig. 3.

Nun sind aber nicht die gleichschenkligen Dreiecke, sondern die rechtwinkligen Dreiecke für uns die einfachsten Dreiecke, aus denen sich jede geradlinig begrenzte ebene Figur zusammensetzen läßt. Wollen wir zu deren Auflösung die Funktion $f(\alpha)$ verwenden, dann müssen wir eine kleine Überlegung anstellen, die darin besteht, daß wir das rechtwinklige Dreieck $\varDelta\, ABC$ zu einem gleichschenkligen Dreieck $\varDelta\, ABD$ (s. Fig. 4) ergänzen. Wir erhalten dann sofort für die eine Kathete a des Dreieckes $\varDelta\, ABC$

$$a = c \,.\, \frac{1}{2} \,.\, f(2\alpha),$$

welche Formel jedoch weniger einfach als die frühere ist.

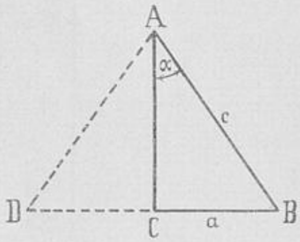

Fig. 4.

Darin liegt aber ein Nachteil in der Verwendung von $f(\alpha)$. Wir sollten also, wenn wir in dieser Richtung die Forderung der Ökonomie befriedigen wollen, statt $f(\alpha)$ die Funktion $\frac{1}{2} f(2\alpha)$ als Funktion von α studieren; d. i. das Verhältnis der Hälfte der Sehne, welche zum Winkel 2α gehört, zum Radius des Kreises, also gemäß der Fig. 5:

$$\frac{MP}{r} = s(\alpha). \tag{2}$$

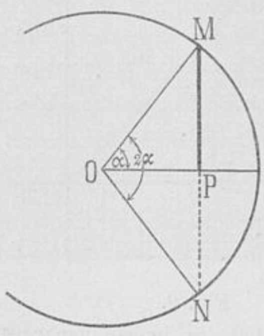

Fig. 5.

Denn nun ergibt sich in der Tat:

$$\frac{1}{2} f(2\alpha) = s(\alpha). \tag{2a}$$

Aufgabe: Stelle die Funktion $s(\alpha)$ graphisch dar. Beachte, daß nunmehr nur das Intervall

$$o \leq \alpha \leq \pi$$

in Betracht gezogen werden kann! Warum?

2. Untersuche die Funktion $\frac{s(\alpha)}{\alpha}$.

II.

Die Sinusfunktion und ihre Definition für das Intervall o bis 2π.

Der im ersten Abschnitte definierten Funktion $s(\alpha)$ haften aber noch immer gewisse Mängel an. Einer derselben ist, daß die Funktion nur für ein sehr beschränktes Intervall des Argumentes, nämlich für $o \leqq \alpha \leqq \pi$ definiert ist. Dies ist zwar für die Anwendungen auf Dreiecksberechnungen kein Übelstand. Aber schon bei Vielecken können wir gelegentlich in die Lage kommen, auch überstumpfe Winkel in Rechnung zu ziehen. Vor allem ist es aber mathematisch ein ganz selbstverständliches Streben, den Geltungsbereich einer Funktion möglichst zu erweitern. Wir haben ja auch bisher fast alle Funktionen für sämtliche reellen Werte des Argumentes definiert und wenn man uns als Gegenbeispiel die Funktionen $y = \sqrt{x}$ und $y = {}^{10}log\, x$ entgegenhält, so darf man nicht vergessen, daß diese Funktionen durch einen besonderen Prozeß, nämlich durch Umkehrung der Funktionen $x = y^2$ und $x = 10^y$ definiert worden sind.

Dies ist aber bei der Definition der Funktion $s(\alpha)$ nicht der Fall und wir werden daher trachten, die Definition so zu geben, daß wir die Funktion über das Intervall $o \leqq \alpha \leqq \pi$ hinaus fortsetzen können.

Wir nehmen zu diesem Zwecke das Koordinatenprinzip zu Hilfe und orientieren sämtliche Punkte eines Kreises K vom Radius r in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Ursprung in den Mittelpunkt des Kreises fällt. Dann ist jeder Punkt des Kreises durch seine beiden Koordinaten völlig eindeutig bestimmt und es gehört auch zu jedem Bogen AM, beziehungsweise zu jedem Zentriwinkel α, welchen wir von Ox aus im positiven Sinne (d. i. entgegen dem Uhrzeigersinne) zählen, eine bestimmte Ordinate MP. Wir definieren nun das Verhältnis der Ordinate zum Radius, welches eine eindeutige Funktion von α ist, als den Sinus des Winkels α und drücken dies in der Form aus:

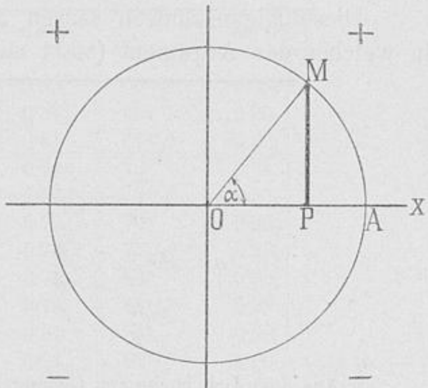

Fig. 6.

$$\frac{MP}{r} = sin\, \alpha. \qquad (3)$$

Hiebei ist der Radius stets seinem absoluten Betrage nach zu nehmen, während die Ordinate je nach dem Quadranten, in welchem der Winkel liegt, positiv oder negativ sein kann. In der Fig. 6 geben die 4 Zeichen die Vorzeichen der Sinusfunktion in den betreffenden Quadranten an.

Ist insbesondere der Kreis K der Einheitskreis, dann kann man der Definition der Sinusfunktion auch die Form geben: „Der Sinus des Winkels α ist gleich der mit dem entsprechenden Vorzeichen versehenen Maßzahl der Ordinate des Punktes M, in dem der bewegliche Schenkel den Einheitskreis schneidet"[1]).

Nun ist sofort klar, daß der Geltungsbereich dieser Funktion sicherlich über π und mindestens bis 2π reicht. Vorläufig wollen wir uns mit diesem Intervalle ($o \leqq \alpha \leqq 2\pi$) begnügen, obwohl es natürlich jetzt nicht mehr schwer fallen würde, die Definition auf alle reellen Werte von α auszudehnen.

Eine einfache Überlegung und ein Vergleich der beiden Figuren 5 und 6 zeigt uns, daß in dem Intervalle $o \leqq \alpha \leqq \pi$ die Sinusfunktion mit der im ersten Abschnitte besprochenen Funktion $s(\alpha)$ identisch ist[2]). Die Definition der Sinusfunktion reicht aber über dieses Intervall hinaus und ist daher allgemeiner, so daß wir nun diese Funktion und deren Eigenschaften näher studieren wollen.

1. Im ersten Quadranten ist das Verhalten ein sehr einfaches. Wenn der Winkel wächst, wächst auch die Funktion, sie ist also eine monoton zunehmende Funktion, welche jeden Wert zwischen o und 1 annimmt. Für $\alpha = o$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ legen wir ihr die Werte O und 1 bei.

Diese Eigenschaften lassen sich in folgender Tabelle vereinigen, in welcher das Argument (statt mit α) mit x bezeichnet wird:

$o \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	
x	$\sin x$
o	o
$o < x' < x'' < \frac{\pi}{2}$	$o < \sin x' < \sin x'' < 1$
$\frac{\pi}{2}$	1

[1]) Aus dem Lehrbuche der Geometrie von R. Suppantschitsch (für die VI. bis VII. Klasse der Gymnasien und Realgymnasien; Tempsky — 1912).

[2]) „Die Entstehung des Namens Sinus ist höchst eigentümlicher Art, zugleich eine Andeutung des Entwicklungsganges der Mathematik und des Kulturzusammenhanges verschiedener Völker und Zeiten. Griechische Mathematiker hatten zu astronomischen Zwecken die Größe der zu beliebigen Zentriwinkeln gehörigen Sehnen berechnet; die unter Anregung griechischer Wissenschaft vielfach selbsttätigen Inder (etwa 500 n. Chr.) hatten die ganze Sehne durch die betreffende Halbsehne ersetzt, nützten aber den hierin liegenden Vorteil nicht aus. Erst die für die Entwicklung der Mathematik so bedeutsamen Araber taten dies; sie übernahmen auch den indischen Namen für Sehne, jiva, und schrieben denselben, wie sie ihn verstanden, dschiba. Die Konsonanten dieses Wortes lassen aber auch die Lesung dschaib zu, welches ein wirkliches arabisches Wort ist und „Einschnitt oder Busen" bedeutet. Nach des Orientalisten Munk Hypothese ist nun das eigentliche Wort verloren gegangen und nur das letztere erhalten geblieben. Jedenfalls gaben die ersten Übersetzer arabischer Werke jenes Wort durch das lateinische sinus wieder, und dieses blieb erhalten." (Entnommen aus dem Lehrbuch der Elementargeometrie von J. Henrici und P. Treutlein, II. Teil, S. 124, Anmerkg. — 3. Auflage — Teubner — 1907.

Aus der Tatsache, daß in diesem Intervalle die Sinusfunktion mit der im ersten Abschnitte besprochenen s-Funktion identisch ist, können wir aus dem ersten Abschnitte eine Reihe weiterer Werte der Sinusfunktion entnehmen. So können wir in allen Fällen, in welchen $s(\alpha)$ algebraisch bestimmbar ist, auch für $\sin\alpha$ einen algebraischen Ausdruck finden.

Aufgabe: Bestimme auf algebraischem Wege die folgenden Sinuswerte:

$$\sin\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{4},\ \sin\frac{\pi}{5},\ \sin\frac{\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{10}.$$

Wollen wir für irgendeinen beliebigen Winkel den zugehörigen Wert der Sinusfunktion berechnen, dann können wir dies ähnlich wie für $f(\alpha)$ und $s(\alpha)$ vorläufig nur an der Zeichnung und näherungsweise tun. Im jetzigen Falle ist sogar die Ablesung der Funktionswerte aus den Ordinatenlängen eine bei weitem einfachere als für die Funktionen $f(\alpha)$ und $s(\alpha)$. Aus der Tabelle für $f(\alpha)$ leiten wir auf Grund von (2^a) sehr leicht die folgende Sinustabelle ab, in welcher die Sinuswerte bis zur zweiten Dezimalstelle angegeben sind[1]):

α^0	$\sin\alpha$	α^0	$\sin\alpha$	α^0	$\sin\alpha$
$2^1/_2{}^0$	$0{\cdot}04_5$	$32^1/_2{}^0$	$0{\cdot}53_5$	$62^1/_2{}^0$	$0{\cdot}88_5$
5^0	$0{\cdot}08_5$	35^0	$0{\cdot}57_5$	65^0	$0{\cdot}90_5$
$7^1/_2{}^0$	$0{\cdot}13$	$37^1/_2{}^0$	$0{\cdot}61$	$67^1/_2{}^0$	$0{\cdot}92_5$
10^0	$0{\cdot}17_5$	40^0	$0{\cdot}64$	70^0	$0{\cdot}94$
$12^1/_2{}^0$	$0{\cdot}21_5$	$42^1/_2{}^0$	$0{\cdot}67_5$	$72^1/_2{}^0$	$0{\cdot}95_5$
15^0	$0{\cdot}26$	45^0	$0{\cdot}70_5$	75^0	$0{\cdot}96_5$
$17^1/_2{}^0$	$0{\cdot}30$	$47^1/_2{}^0$	$0{\cdot}73_5$	$77^1/_2{}^0$	$0{\cdot}97_5$
20^0	$0{\cdot}34$	50^0	$0{\cdot}76_5$	80^0	$0{\cdot}98_5$
$22^1/_2{}^0$	$0{\cdot}38$	$52^1/_2{}^0$	$0{\cdot}79_5$	$82^1/_2{}^0$	$0{\cdot}99$
25^0	$0{\cdot}42$	55^0	$0{\cdot}82$	85^0	$0{\cdot}99_5$
$27^1/_2{}^0$	$0{\cdot}46$	$57^1/_2{}^0$	$0{\cdot}84_5$	$87^1/_2{}^0$	$1{\cdot}00$
30^0	$0{\cdot}50$	60^0	$0{\cdot}86_5$	90^0	$1{\cdot}00$

Das Verhalten der Sinusfunktion in den anderen Quadranten läßt sich, wie man unmittelbar aus der Definition und mit Hilfe einfacher planimetrischer Betrachtungen an der Figur ersehen kann, auf dasjenige im ersten Quadranten zurückführen und folgendermaßen charakterisieren:

2. $$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \qquad o<x<\frac{\pi}{2}$$

oder $\sin(\pi-x)=\sin x$,

$$\sin\pi=o.$$

3. $$\sin(\pi+x)=-\sin(\pi-x)=-\sin x \qquad o<x<\pi$$

$$\sin\frac{3\pi}{2}=-1, \qquad \sin 2\pi=o.$$

[1]) Genauere Tabellen enthält jedes Logarithmenbuch. Natürlich sind die dort auf 4 oder 5 Dezimalen angegebenen Werte auf anderem Wege gefunden worden.

Noch deutlicher zeigt Fig. 7, welche die Sinusfunktion im Intervalle $o \leq x \leq 2\pi$ graphisch darstellt[1]), die eben entwickelten Eigenschaften und den Gesamtverlauf der Funktion in dem betrachteten Intervalle.

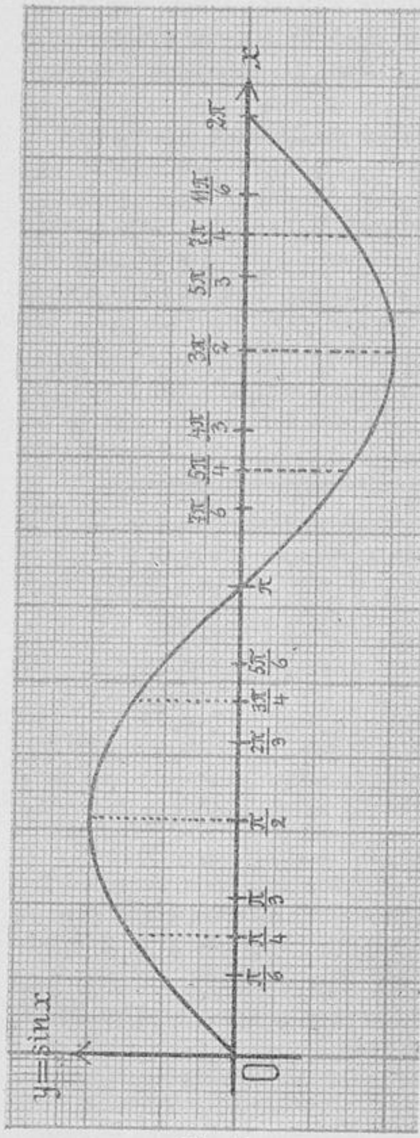

Fig. 7.

Die bisher entwickelten Eigenschaften der Sinusfunktion können wir bereits zur Lösung einer großen Menge von Aufgaben benützen, nämlich aller derjenigen, welche auf die Auflösung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke zurückführbar sind[2]). Hier sei nur erwähnt, daß mittels der Sinusfunktion die in einem Kreise zwischen Sehne (s) und zugehörigem Peripheriewinkel (φ) bestehende Abhängigkeit die folgende sehr einfache Deutung erhält:

$$s = 2r \cdot \sin\varphi \text{ oder } \frac{s}{\sin\varphi} = 2r, \qquad (4)$$

wobei r den Radius des Kreises bedeutet.

III.

Die Periodizität der Sinusfunktion.

Nun hat es keine Schwierigkeit, die Sinusfunktion über das Intervall $o - 2\pi$ hinaus fortzusetzen. Wir müssen uns nur klar machen, was für eine Bedeutung einem Winkel zukommt, welcher größer als 2π ist. Würden wir Winkel ausschließlich im Winkelmaße messen, dann hätte es allerdings wenig Sinn, z. B. von einem Winkel von 370⁰ zu sprechen; oder man würde denselben mit einem

[1]) Ihre Erzeugung erfolgt in ähnlicher Weise wie diejenige der Fig. 1 und bedarf wohl keiner näheren Erläuterung.

[2]) Ich verweise kurz auf die zahlreichen in den Lehrbüchern und Aufgabensammlungen enthaltenen Aufgaben über die Anwendungen der Trigonometrie auf die Auflösung von rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecken, für welche ja die Kenntnis der anderen Winkelfunktionen nicht unbedingt erforderlich ist.

Winkel von 10^0 identifizieren. Wenn wir aber im Bogenmaße messen und an die Erzeugungsweise eines Winkels mittels Drehung eines beweglichen Schenkels denken, können wir uns wohl vorstellen, daß wir den beweglichen Schenkel mehr als eine volle Drehung machen lassen und auf diese Weise Winkel erhalten, welche größer als 2π sind.

Dies legt uns den Gedanken nahe — ähnlich wie wir es bei Besprechung der linearen und quadratischen Funktion getan haben — Bewegungsvorgänge zur Veranschaulichung heranzuziehen. Die Bewegung, welche hier in Betracht kommt, ist die Drehung eines Punktes. Wir nehmen an, ein Punkt M bewege sich auf der Peripherie des Einheitskreises (vergl. Fig. 6); die Drehung erfolge im positiven Sinne und sei eine gleichförmige; zur Zeit $t = o$ befinde sich der Punkt in A, für eine Umdrehung brauche er 1 Sekunde. Dann folgt in einfacher Weise, daß der vom Radius OM in der Zeit t beschriebene Winkel

$$\alpha = 2\pi t$$

ist.

Wo ist nun der bewegliche Punkt zu einer beliebigen Zeit t? Seine Lage kann man am bequemsten durch seine Koordinaten in bezug auf ein festes Koordinatensystem (die positive Richtung der Abszissenachse falle mit der Richtung von OA zusammen) bestimmen und da sich der Punkt stets auf der Peripherie des Kreises bewegt, hiemit also eine Bedingung für die Lage von M bereits gegeben ist, so genügt zur eindeutigen Bestimmung seines jeweiligen Ortes die Angabe einer Koordinate. Aus leicht begreiflichen Gründen wählen wir die Ordinate MP und erhalten, da der Kreis den Radius 1 besitzt:

$$\frac{MP}{1} = \sin \alpha = \sin 2\pi t \qquad (r = 1).$$

Jetzt ist es für uns nicht mehr sonderbar, von Werten der Funktion $\sin 2\pi t$, beziehungsweise $\sin \alpha$ zu sprechen, welche zu beliebigen (allerdings vorläufig nicht negativen) Werten von t, beziehungsweise von α gehören, und wir definieren in naturgemäßer Erweiterung der in II gegebenen Definition die Fortsetzung der Sinusfunktion für Werte des Argumentes, welche größer als 2π sind, folgendermaßen:

$$\sin (x + 2\pi n) = \sin x \qquad o \leq x \leq 2\pi \qquad (5)$$

(n positive ganze Zahl).

Da auch die Bedeutung negativer Werte des Argumentes — man denke an eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers von A an — keine Schwierigkeiten bereitet, so fällt es uns auch nicht schwer, die Funktion für negative Werte des Argumentes durch die Beziehung

$$\sin (-x) = -\sin x \qquad x > o \qquad (6)$$

festzusetzen und wir erhalten als Bild der Sinusfunktion eine nach beiden Seiten ins Unendliche verlaufende Kurve, von welcher Fig. 8 das im Intervalle $-\pi \leqq x \leqq +4\pi$ gelegene Stück zur Darstellung bringt.

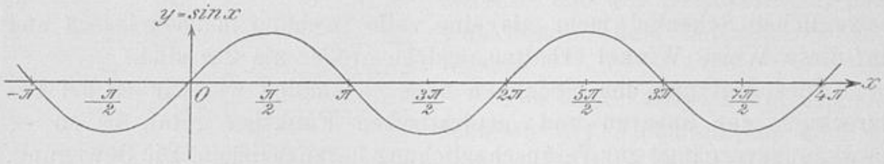

Fig. 8.

Die in (5) angegebene Eigenschaft der Sinusfunktion können wir nun auch auf das Negative ausdehnen und in den Satz kleiden:

Die Sinusfunktion ist eine periodische Funktion mit der Periode 2π.

Gerade durch diese Eigenschaft der Periodizität erhält aber die Sinusfunktion gegenüber allen bisher von uns untersuchten Funktionen eine ganz besondere Bedeutung. Sie steht, wie wir gesehen haben, im engen Zusammenhange mit einer Bewegung, welche zu einer wichtigen Gruppe von Bewegungsformen gehört, nämlich zu den periodischen Vorgängen. Ich will hier nur einige solcher Erscheinungen aufzählen. So sind z. B. die scheinbare Bewegung der Sonne am Fixsternhimmel oder die des Mondes periodische Bewegungen mit den Perioden von 1 Jahr, beziehungsweise von rund $27^1/_3$ Tagen. Im Zusammenhange damit steht der periodische Wechsel der Jahreszeiten, die verschiedenen Phasen des Mondes und ähnliche astronomische Erscheinungen.

Von den meteorologischen Erscheinungen gehören z. B. die täglichen Temperatur- und Barometerschwankungen hieher, welche, wie die Fig. 9

Fig. 9.

zeigt[1]), an manchen Orten einen durch Tage hindurch andauernden, so regelmäßigen Gang aufweisen, daß man deutlich die Periodizität verfolgen kann.

[1]) Diese Figur ist aus der Meteorologie von Trabert (Sammlung Göschen, Bd. 54) entnommen.

Von periodisch-mechanischen Vorgängen erwähne ich die Pendelschwingungen, die Schwingungen einer gezupften Saite, einer angeschlagenen Stimmgabel.

Bekannt ist Ihnen, daß auch die Schallwellen, die im Äther als Licht oder elektrische Wellen sich fortpflanzenden Schwingungen periodischer Natur sind. Wollen Sie ferner den Verlauf der Intensität eines elektrischen Stromes, welcher von einer Wechselstrommaschine geliefert wird, graphisch darstellen, so erhalten Sie eine Kurve, welche eine auffallende Ähnlichkeit mit der Sinusfunktion besitzt. Und so können Sie selbst die Zahl der angeführten Beispiele beliebig vermehren.

Wenn auch zur Beschreibung aller dieser angeführten und ähnlichen Vorgänge die Sinusfunktion allein nicht ausreicht (z. B. in dem Beispiele der der Fig. 9 zugrundeliegenden Erscheinung), wenn es also außer der Sinusfunktion noch andere periodische Funktionen gibt — von denen Sie in Bälde einige kennen lernen werden — so ersehen Sie doch daraus, welch' wichtige Rolle die periodischen Funktionen überhaupt, und die Sinusfunktion im besonderen, gerade vermöge der Periodizität in ihren Anwendungen zur Beschreibung von Naturerscheinungen spielen.

Aufgaben:[1])

1. Zeige, daß die in II für ein Intervall abgeleiteten Eigenschaften des Sinusfunktion: $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$ allgemein gelten:

2. Zeige, daß für ein beliebiges x die folgenden Beziehungen gelten:
$$\sin\left(n\,.\,\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(n\,.\,\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ für } n = 1, 3, 5, 7 \ldots \qquad \text{und } \sin(-x) = -\sin x.$$
Leite daraus geometrische Eigenschaften der Sinuskurve ab.

3. Welche Perioden besitzen die Funktionen:
$$\sin 2x,\ \sin\frac{x}{2},\quad \sin \pi x,\ \sin\frac{2\pi}{3}x,\quad \sin a x$$
in bezug auf die Veränderliche x?

4. Bilde Funktionen der Veränderlichen t, welche die Perioden 1, beziehungsweise T besitzen.

5. Stelle die Funktionen:
$$a)\ \sin 2x,\quad b)\ \sin 3x,\quad c)\ \sin\frac{x}{3}$$
graphisch dar und wähle als Einheiten für die Abszissen und Ordinaten die folgenden Längen: *a)* 2 *cm*, 2 *cm*; *b)* 4 *cm*, 2 *cm*; *c)* 1 *cm*, 2 *cm*.

6. Stelle die Funktion $y = \sin x + \sin 2x$ graphisch dar. Welche Periode besitzt diese Funktion? (Längeneinheiten: Absz. 5 *cm*, Ord. 2 *cm*).

7. Stelle die beiden Funktionen $y = \sin x$ und $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ graphisch dar und vergleiche ihre Eigenschaften. (Längeneinheiten: Absz. 5 *cm*, Ord. 5 *cm*).

---

[1]) Eine Reihe hieher gehöriger Beispiele enthält das oben zitierte Lehrbuch der Geometrie von R. Suppantschitsch in seinen „Fragen und Aufgaben" (§ 7) und unter den Aufgaben für Vorgeschrittene (I und II). Sehr instruktiv sind unter ihnen insbesondere diejenigen, welche die elementarsten Fälle von Fourrierschen Reihenentwicklungen behandeln.

8. Stelle die Funktion

$$y = \sin x + \sin (x + \pi)$$

graphisch durch Zusammensetzung der beiden Kurven $y = \sin x$ und $y = \sin (x + \pi)$ dar. Kann man nicht das auf diesem Wege erhaltene Resultat unmittelbar aus einer Eigenschaft der Sinusfunktion gewinnen?

9. Welche Lösungen besitzen die transzendenten Gleichungen:

$$\sin x = 1, \quad \sin x = \frac{1}{2}, \quad \sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,?$$

10. Löse die Gleichung auf:

$$\sin m x = 1 \qquad (m \text{ eine positive ganze Zahl}).$$

Bestimme (zunächst etwa für besondere Werte von m) die Wurzeln dieser Gleichung innerhalb des Intervalles $o \leq x < 2\pi$.

11. Stelle eine periodische Funktion auf, welche die Periode 2π besitzt und welche für $x = \frac{\pi}{2}$ den größten Wert a, für $x = -\frac{\pi}{2}$ den kleinsten Wert b $(b < a)$ annimmt.

IV.

Anwendungen der Sinusfunktion auf einige Aufgaben der Trigonometrie, Mechanik, Physik und Meteorologie.[1]

1. Der Sinussatz der Trigonometrie.

Da sich jedem Dreiecke (ΔABC) ein Kreis (mit dem Radius R) umschreiben läßt, so kann man die Dreiecksseiten a, b, c als Sehnen und die Dreieckswinkel α, β, γ als zugehörige Peripheriewinkel in diesem Kreise auffassen. Wendet man nun auf jede der Dreiecksseiten die am Ende des zweiten Abschnittes abgeleitete Formel (4) an, so erhält man folgenden Satz:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

welchen wir als den Sinussatz der Trigonometrie bezeichnen und in folgender Form aussprechen können:

Der Quotient aus der Maßzahl einer Seite eines schiefwinkligen Dreieckes durch den Sinus des der Seite gegenüberliegenden Winkels ist eine für sämtliche Seiten des Dreieckes unveränderliche Größe, welche gleich der Maßzahl des Durchmessers des dem Dreiecke umgeschriebenen Kreises ist.

Dieser Satz läßt sich sofort zur Lösung folgender Aufgabe verwenden:

[1]) Ich führe hier nur einige wenige Beispiele an, die aber dem Zwecke genügen dürften, den Schülern schon auf dieser Stufe die vielseitige Anwendbarkeit der Winkelfunktionen vor Augen zu führen. Eine ausführlichere Behandlung von Aufgaben der praktischen Geometrie erfolgt ohnehin im eigentlichen Trigonometrieunterrichte, während das weite Gebiet der Wellenlehre im physikalischen Unterrichte der obersten Klassen seinen besten Platz findet.

Gegeben sind folgende Stücke eines schiefwinkligen Dreieckes: R, α^0, β^0. Berechne die übrigen Stücke des Dreieckes.

Auflösung:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)^0,$$
$$a = 2\,R\,.\,sin\,\alpha,\quad b = 2\,R\,.\,sin\,\beta,\quad c = 2\,R\,sin\,\gamma.$$

Vergleiche hiemit die konstruktive Lösung der Aufgabe. Von Wichtigkeit sind die Anwendungen des Sinussatzes auf die folgenden Grundaufgaben der Trigonometrie:

2. In einem schiefwinkligen Dreiecke $\varDelta\,ABC$ sind gegeben: a, β, γ; berechne α, b, c!

Auflösung:

$$\alpha^0 = 180^0 - (\beta + \gamma)^0,$$
$$b = \frac{a}{sin\,\alpha}\,.\,sin\,\beta,\qquad c = \frac{a}{sin\,\alpha}\,.\,sin\,\gamma.$$

3. In einem schiefwinkligen Dreiecke $\varDelta\,ABC$ sind gegeben: a, b, α; berechne β, γ, c!

$$sin\,\beta = \frac{b}{a}\,sin\,\alpha.$$

(Beachte die Zahl der Lösungen im Falle $a < b$!)

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)^0;\qquad c = \frac{sin\,\gamma}{sin\,\alpha}\,.\,a.$$

4. In einem schiefwinkligen Dreiecke sind gegeben: a, b, c; berechne die Winkel!

Auflösung:

$$f = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}\qquad (2\,s = a + b + c),$$
$$R = \frac{a\,b\,c}{4\,f},$$
$$sin\,\alpha = \frac{a}{2\,R},\quad sin\,\beta = \frac{b}{2\,R},\quad sin\,\gamma = \frac{c}{2\,R}.$$

5. Vergleich konstruktiver und rechnerischer Lösungen von Dreiecksaufgaben.

Wir führen diesen Vergleich an der Aufgabe durch, aus der Seite a und den beiden anliegenden Winkeln β und γ die beiden anderen Seiten des Dreieckes $\varDelta\,ABC$ zu bestimmen.

Je nachdem wir die Aufgabe konstruktiv oder rechnerisch lösen, müssen wir schon bei der Angabe der Stücke a, β, γ verschieden verfahren. Würden wir etwa für die Konstruktion die Winkel im Gradmaße angeben, z. B. $\beta = 40^0$ und $\gamma = 70^0$, so kämen wir schon bei der Konstruktion der Winkel mit Zirkel und Lineal in Verlegenheit, falls es uns nicht um ein näherungsweises, sondern um ein exaktes Konstruktionsverfahren handelt. In diesem Falle ist es das Beste, die Winkel durch die zugehörigen Bögen im Einheitskreise zu bestimmen. Dagegen müssen wir für die rechnerische Behandlung die Sinusfunktion zu Hilfe nehmen, welche als eindeutige Funktion des Winkels in diesem Falle sozusagen als „Stellvertreter des Winkels" fungiert. Das folgende Schema bringt die beiden Formulierungen in übersichtlicher Form und fügt eine kurze Gegenüberstellung der einzelnen Prozesse hinzu, welche in beiden Fällen zur Lösung der besonderen Aufgabe führen:

	Konstruktive Lösung	Trigonometrische Lösung
Bestimmungsstücke: eine Seite, zwei Winkel	Gegeben durch: eine Strecke, zwei Bögen am Einheitskreise[1])	Gegeben durch: die Maßzahl einer Länge in einem bestimmten Maßstabe, zwei Werte der Sinusfunktion.
Lösung	Übertragung der Strecke und der beiden Winkel auf Grund von Konstruktionsmethoden, welche auf der Ähnlichkeit (bzw. Kongruenz) fußen.	Anwendung des Sinussatzes: $\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, $\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ Berechnung lediglich auf Grund von Multiplikationen und Divisionen.

Es bleibt nur noch eine Unvollkommenheit bestehen, welche mancher von Ihnen fühlen wird, d. i. die rein geometrische Definition der Sinusfunktion. Wir können zwar in einzelnen Fällen wie für $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}$ u. a., einfache algebraische Ausdrücke zur Bestimmung der zugehörigen Sinuswerte angeben, aber im allgemeinen sind wir einstweilen nicht imstande für einen beliebig vorgegebenen Wert des Winkels die zugehörige Sinusfunktion arithmetisch zu definieren. Dagegen werden wir in nächster Zeit ein Verfahren kennen lernen, welches wenigstens zum Teil diese Lücke ausfüllen hilft und bei der näherungsweisen Berechnung von Sinuswerten uns von jeglicher geometrischen Konstruktion unabhängig macht.

6. Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$f = \frac{ab}{2}\sin\gamma = \frac{bc}{2}\sin\alpha = \frac{ca}{2}\sin\beta.$$

Die Ableitung erfolgt auf Grund der bekannten Formel $f = \frac{a\,h_a}{2}$, wo h_a die Höhe auf a bedeutet und mittels der leicht zu beweisenden Beziehungen:

$$h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta.$$

[1]) Natürlich kann ein beliebiger Radius benützt werden.

7. Untersuche den Zusammenhang der beiden Formelgruppen:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

und

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta = f.$$

So folgt z. B. aus:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

mittels beiderseitiger Multiplikation mit $\frac{c}{2}\sin\alpha\sin\beta$:

$$\frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Wenn man ferner

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

in die Formel

$$4Rf = abc$$

einsetzt, erhält man:

$$2f.\frac{c}{\sin\gamma} = abc \text{ oder } f = \frac{ab}{2}\sin\gamma.$$

8. Leite die Formel für den Flächeninhalt

$$f = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

mittels des Sinussatzes und der in 6 abgeleiteten Flächeninhaltsformel ab.

9. Ein Punkt M bewege sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\frac{2r\pi}{T}$ im positiven Sinne (d. i. entgegen der Uhrzeigerrichtung) auf der Peripherie eines Kreises vom Radius r. Zur Zeit $t = o$ sei der bewegliche Punkt in A, zur Zeit t in M. Zeige, daß die Projektion M' des Punktes M auf den Durchmesser CD (siehe Figur 10) eine periodische Bewegung macht, welche in folgender Weise charakterisiert ist:

$$y = r\sin\frac{2\pi}{T}t.$$

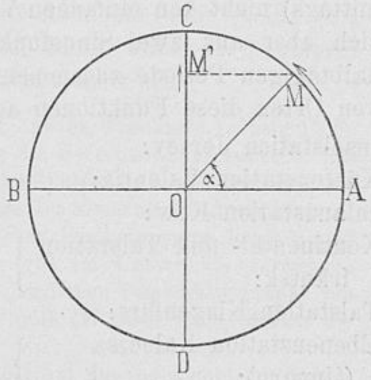

Fig. 10.

Strenge genommen fehlt zwar noch die Angabe der Geschwindigkeit der Projektion im Punkte M'. Diese Bestimmung sei jedoch einer späteren Gelegenheit vorbehalten. Hier sei nur so viel erwähnt, daß für kleine

Elongationen näherungsweise die Pendelbewegung eine solche soeben beschriebene sogenannte harmonische Bewegung ist.

10. Eine Dreiphasen-Wechselstromdynamo erzeugt in den drei von ihr ausgehenden Leitungen I, II, III Ströme, deren elektromotorische Kräfte e_1, e_2, e_3 durch folgende Sinusfunktionen gekennzeichnet sind:

$$\text{I} \ldots e_1 = e \,.\, sin \frac{2\pi}{T} t, \quad \text{II} \ldots e_2 = e \, sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{1}{3}T\right),$$

$$\text{III} \ldots e_3 = e \, sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{2}{3}T\right),$$

wo die Veränderliche t die Zeit bedeutet und e und T konstante Größen sind, nämlich die Maßzahlen für die maximale Spannung der Wechselströme, beziehungsweise für die Periode der Ströme (d. i. für die Umlaufzeit der Maschine). Wenn man nun von einem bestimmten Punkte an sämtliche drei Leiter zu einem einzigen vereinigt und denselben sozusagen als Rückleitung benützt, so fließt in diesem gemeinsamen Leiter ein Strom von der elektromotorischen Kraft $E = O$; denn derselbe setzt sich aus den drei Spannungen e_1, e_2, e_3 durch einfache Summation zusammen: $E = e_1 + e_2 + e_3$, welche Summe für jeden beliebigen Wert von t verschwindet. Prüfe die Richtigkeit dieser Behauptung, für welche ein strenger Beweis erst auf Grund des Additionstheorems der Sinusfunktion gegeben werden kann, auf graphischem Wege.

11. Es wurde schon im dritten Abschnitte gelegentlich erwähnt, daß die täglichen Barometerschwankungen periodischer Natur sind, deren Kurve mit ihren zwei Maxima (in der Fig. 9 ein größeres ungefähr um 9 Uhr früh, ein kleineres ungefähr um 9 Uhr abends) und den zwei Minima (in Fig. 9 ungefähr um 3 Uhr nachts und 3 Uhr nachmittags) nicht den einfachen Verlauf einer Sinuskurve aufweist. Sie läßt sich aber aus zwei Sinusfunktionen mit einer ganztägigen und einer halbtägigen Periode zusammensetzen. Im folgenden sind für eine Reihe von Orten diese Funktionen angegeben:

Inselstation Jersey:	$S = 0{\cdot}04\, sin\,(262 + t) + 0{\cdot}27\, sin\,(144 + 2\,t)$,
Küstenstation Valentia:	$S = 0{\cdot}22\, sin\,(190 + t) + 0{\cdot}20\, sin\,(146 + 2\,t)$,
Inlandstation Kew:	$S = 0{\cdot}21\, sin\,(\ 20 + t) + 0{\cdot}24\, sin\,(144 + 2\,t)$,
Kontinental- und Talstation Irkutsk:	$S = 0{\cdot}76\, sin\,(\ \ 5 + t) + 0{\cdot}26\, sin\,(157 + 2\,t)$,
Talstation Klagenfurt:	$S = 0{\cdot}58\, sin\,(\ 23 + t) + 0{\cdot}27\, sin\,(156 + 2\,t)$,
Ebenenstation Kaloczsa (Ungarn):	$S = 0{\cdot}22\, sin\,(357 + t) + 0{\cdot}25\, sin\,(137 + 2\,t)$,
Gipfelstation Sonnblick:	$S = 0{\cdot}32\, sin\,(182 + t) + 0{\cdot}18\, sin\,(110 + 2\,t)$.

Hiebei bedeutet S die Barometerschwankung und t die Zeit. Das Argument der Sinusfunktion ist in Graden gemessen, es entsprechen also einem Tage ($t = 24$ Stunden) als der Maßzahl der Periode 360^0, daher einer Stunde 15^0.

Durch Konstruktion der zugehörigen Kurven (es genügt zunächst, die Funktionswerte bloß für ganze oder halbe Stunden zu konstruieren, beachte den zu verwendenden Maßstab) erhält man interessante Gegenüberstellungen der Luftdruckverhältnisse an verschiedenen Orten.[1])

V.

Historische Bemerkungen.

Es gilt nun eine Lücke auszufüllen und ein Verfahren anzugeben, mit welchem man zu einem beliebigen Werte des Winkels den zugehörigen Sinuswert näherungsweise berechnen kann und welches uns in den Stand setzt, eine Sinustafel zu entwerfen. Wir bedienen uns hiezu einer Methode, welche ein historisches Interesse für sich in Anspruch nimmt, da sie der Berechnung einer der ersten Sehnentafeln zugrunde liegt. Ursprünglich kannte man nämlich keine Trigonometrie in unserem Sinne, sondern nur eine Sehnenrechnung und auch diese stand ausschließlich im Dienste der Astronomie. Ihr widmete der alexandrinische Astronom Ptolemäus[2]) (um 121 bis 151 n. Chr.) das erste Kapitel des Almagest, wie die Araber kurz das berühmte astronomische Hauptwerk des Ptolemäus, die *μεγάλη σύνταξις*, nannten und stellte in den Mittelpunkt dieses Kapitels die Berechnung einer von $1/2^0$ zu $1/2^0$ fortschreitenden Sehnentafel. Die folgenden Entwicklungen stimmen zwar nicht in allen Details mit dem Ptolemäischen Verfahren überein, geben aber im Kleide der modernen Zeichensprache die wesentlichsten Gedanken dieser Methode wieder.

Aus der Kreisteilung kann man unmittelbar für eine Reihe von Winkeln α die zugehörigen Sehnen s_α und damit auch die entsprechenden Werte der Sehnenfunktion $f(\alpha)$ bestimmen, z. B.

[1]) Siehe J. Hann, Lehrbuch der Meteorologie (2. Auflage, Tauchnitz, Leipzig 1906). Hann gibt daselbst (V. Buch, VI. Kapitel, II. Über die Berechnung periodischer Erscheinungen, S. 565 bis 576), ehe er auf die harmonische Analyse im allgemeinen und auf die Bestimmung der Koeffizienten mittels der Methode der kleinsten Quadrate eingeht, eine erste Einführung in die Darstellung periodischer Erscheinungen durch Sinusreihen, welche so elementar ist, daß man sie sehr gut im Unterrichte verwenden kann und führt diese Methode an dem Beispiele des jährlichen Temperaturganges von Graz durch. Siehe auch: S. Arrhenius, Kosmische Physik (II. Band 1903), woraus die obigen Daten entnommen sind.

[2]) Will man bei dieser Gelegenheit ausführlicher auf die Geschichte der Trigonometrie, insbesondere auf die Leistungen der Astronomen und Mathematiker vor Ptolemäus eingehen, so bietet außer den grundlegenden Werken von M. Cantor (Geschichte der Mathematik) und A. v. Braunmühl (Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie) die Geschichte der Elementarmathematik von J. Tropfke (Veit Leipzig, II. Band, 5. Teil) eine Fülle von Material.

α (α^0)	s_α	$f(\alpha)$
π	$2r$	2
$\frac{2\pi}{3}$	$r\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$ (90^0)	$r\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$ (60^0)	r	1
$\frac{\pi}{4}$ (45^0)	$r.\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{5}$ (36^0)	$r.\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$
$\frac{\pi}{6}$ (30^0)	$r.\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Diese Werte würden aber eine noch sehr unvollkommene Tafel liefern. Soll doch eine Tafel vor allem derart eingerichtet sein, daß sie in gleichen Intervallen von α^0 zu α^0 (etwa von 1^0 zu 1^0) fortschreitet. Um aber dieser Forderung zu genügen, müssen wir ein Verfahren kennen, welches gestattet, aus dem Werte von s_α den Wert von $s_{2\alpha}$, aus s_α und $s_{2\alpha}$ den Wert von $s_{3\alpha}$ usf. zu berechnen. Dies führt zu der Sonderaufgabe, aus den zu den Winkeln α und β gehörigen Sehnen s_α und s_β die zum Winkel $\gamma = \alpha + \beta$ gehörige Sehne $s_\gamma = s_{\alpha+\beta}$ zu bestimmen. Hat die Aufgabe in dieser Formulierung überhaupt Aussicht auf eine Lösung? Gewiß. Denn bisher konnten wir in allen Fällen, in welchen die konstruktive Lösung einer Aufgabe mittels Zirkel und Lineal möglich war, derselben eine algebraische Lösung (und zwar eine solche, welche bloß Quadratwurzeln verwendet) zur Seite stellen und umgekehrt. In unserem Falle ist nun in der Tat die Konstruktion von s_γ aus s_α und s_β sehr einfach und es ist wahrscheinlich, daß auch dieses Problem eine algebraische Lösung zuläßt.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Sonderfall daß nicht bloß α und β, sondern auch $\gamma = \alpha + \beta$ kleiner als π sind Zunächst erkennen wir, daß mit der Sehne s_α eine andere Sehne in einfacher Weise mit bestimmt ist, nämlich die zum Supplementwinkel gehörige Sehne

$$s_{\pi-\alpha} = \sqrt{4r^2 - s^2_\alpha}. \qquad (7)$$

Ebenso ist auch $s_{\pi-\beta}$ gegeben. Wir können daher die Aufgabe auch so formulieren:

Zwischen den vier gegebenen Größen s_α und $s_{\pi-\alpha}$, s_β und $s_{\pi-\beta}$ und der Größe s_γ ist eine algebraische Beziehung aufzusuchen.

Ein Blick auf die Fig. 11 führt uns dahin, dem Problem noch folgende Fassung zu geben:

Man suche die metrische Beziehung, welche zwischen den vier Seiten eines Sehnenviereckes (s_α, $s_{\pi-\alpha}$, s_β, $s_{\pi-\beta}$) und den beiden Diagonalen desselben (s_γ und $2r$) besteht.

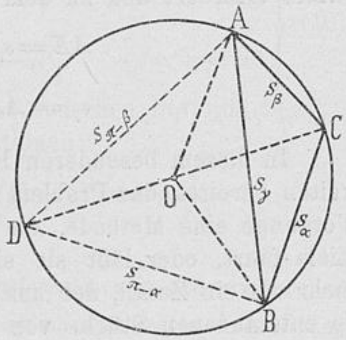

Fig. 11.

Um der Lösung näher zu kommen, betrachten wir einmal besondere Fälle. Ein solcher wäre z. B. $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ (90°). Dieser Fall ist aber zu trivial, als daß man aus ihm irgendeine Handhabe für die Lösung des allgemeinen Problems finden könnte. Ebenso wenig eignet sich der Fall $\alpha = \beta$ dazu (warum?). Wählen wir aber etwa

$$\alpha = \frac{\pi}{2}\,(90^0) \text{ und } \beta = \frac{\pi}{3}\,(60^0)$$

und bestimmen zunächst die sämtlichen Winkel des Sehnenviereckes. (Siehe Fig. 12*a*). Es käme also unser Problem darauf hinaus, in dem Dreiecke

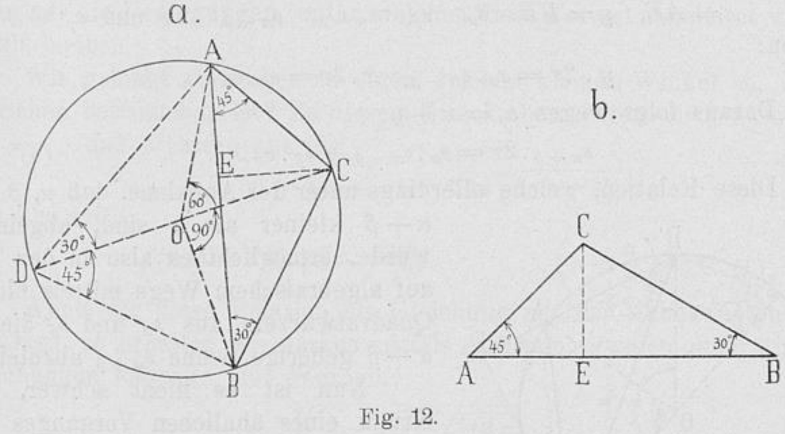

Fig. 12.

ΔABC, in welchem den Seiten s_α und s_β die Winkel 45° und 30° entsprechen, die dritte Seite zu berechnen. Dies legt uns aber doch sofort den Gedanken nahe, die Berechnung von s_γ stückweise durchzuführen, indem wir in dem genannten Dreieck (in Fig. 12*b* für sich allein gezeichnet) die Höhe auf AB fällen und nun die beiden Teildreiecke, das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck ΔAEC und das rechtwinklige Dreieck ΔBEC mit den beiden spitzen Winkeln 30^0 und 60^0 betrachten, deren Auflösung lediglich die Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes erfordert und zu dem Ergebnis führt:

$$AE = s_\beta \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad BE = s_\alpha \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3},$$
$$s_\gamma = AB = s_\alpha \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + s_\beta \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

In diesem besonderen Falle hat es uns also keinerlei Schwierigkeiten bereitet, das Problem zu lösen. Liegt nun in dem soeben befolgten Vorgange eine Methode, die nur ganz speziell in diesem Falle zum Ziele führt, oder läßt sie sich am Ende verallgemeinern? Ist es also mehr als ein Zufall, der uns erlaubte, durch Fällung der Höhe CE die so entstandenen Stücke von AB zu berechnen? Nun werden freilich im allgemeinen Falle die beiden Teildreiecke nicht mehr von der obigen einfachen Form sein, da nun die Winkel beliebige sind.

Aber eines bleibt erhalten, d. i.:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = \frac{\alpha}{2} \text{ und } \sphericalangle CBA = \sphericalangle CDA = \frac{\beta}{2};$$

daraus ist für ein geometrisch nur einigermaßen geschultes Auge sofort erkennbar, daß folgende Ähnlichkeiten zwischen je zwei rechtwinkligen Dreiecken bestehen:

$$\Delta AEC \sim \Delta BCD \text{ und } \Delta BEC \sim \Delta ACD,$$

Ähnlichkeiten, welche zu den beiden Relationen zwischen den Größen

$$x = AE, \quad y = BE, \quad s_\alpha, \quad s_\beta, \quad s_{\pi-\alpha}, \quad s_{\pi-\beta}, \quad 2r \text{ und } s_\gamma$$

führen:

$$y \,.\, 2r = s_\alpha \,.\, s_{\pi-\beta}, \quad x \,.\, 2r = s_\beta \,.\, s_{\pi-\alpha}.$$

Daraus folgt wegen $s_\gamma = x + y$:

$$s_{\alpha+\beta} \,.\, 2r = s_\alpha \,.\, s_{\pi-\beta} + s_\beta \,.\, s_{\pi-\alpha}. \tag{8}$$

Diese Relation, welche allerdings unter der Annahme, daß α, β und $\alpha+\beta$ kleiner als π sind, abgeleitet wurde, ermöglicht es also in der Tat, auf algebraischem Wege mittels bloßer Quadratwurzeln aus s_α und s_β die zu $\alpha+\beta$ gehörige Sehne $s_{\alpha+\beta}$ abzuleiten.

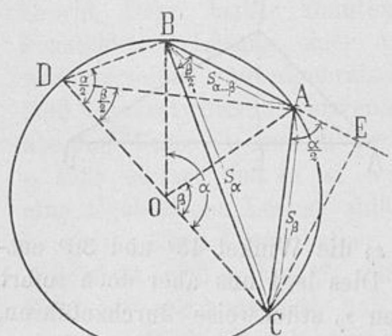

Fig. 13.

Nun ist es nicht schwer, auf Grund eines ähnlichen Vorganges aus der Fig. 13 die folgende Relation herzuleiten:

$$s_{\alpha-\beta} \,.\, 2r = s_\alpha \,.\, s_{\pi-\beta} - s_\beta \,.\, s_{\pi-\alpha}, \tag{9}$$

welche zunächst unter der Voraussetzung $\beta < \alpha < \pi$ gilt.

Daraus erhält man für die Funktion $f(\alpha)$ des ersten Abschnittes die folgenden einfachen Relationen:

$$\left.\begin{aligned} f(\alpha+\beta) &= \frac{1}{2}\left\{f(\alpha)f(\pi-\beta)+f(\beta)f(\pi-\alpha)\right\} \qquad (\alpha+\beta<\pi) \\ f(\alpha-\beta) &= \frac{1}{2}\left\{f(\alpha).f(\pi-\beta)-f(\beta)f(\pi-\alpha)\right\} \qquad (\beta<\alpha<\pi) \end{aligned}\right\} (10);$$

zwischen $f(\alpha)$ und $f(\pi-\alpha)$, beziehungsweise zwischen $f(\beta)$ und $f(\pi-\beta)$ bestehen ferner vermöge (7) folgende Relationen:

$$\frac{1}{4}\Big(f^2(\alpha)+f^2(\pi-\alpha)\Big)=1, \quad \frac{1}{4}\Big(f^2(\beta)+f^2(\pi-\beta)\Big)=1.$$

Aufgabe:

Wandle diese beiden Formeln in solche für Sinusfunktionen um und setze zu diesem Zwecke $\frac{\alpha}{2}=\varphi$, $\frac{\beta}{2}=\psi$. Beachte die Beziehungen zwischen Zentriwinkel, beziehungsweise Peripheriewinkel, der zugehörigen Sehne und dem Sinus.

Mit Hilfe dieser Relationen läßt sich die Tabelle der bereits gefundenen Sehnenwerte wesentlich vervollständigen. So kann man, um nur ein Beispiel zu nennen, aus dem Werte von $s_{\frac{\pi}{5}}$, indem man in (8) $\alpha=\beta$ setzt, den Wert $s_{\frac{2\pi}{5}}$ oder aus $s_{\frac{2\pi}{5}}$ und $s_{\frac{\pi}{3}}$ mittels (9) den Wert von $s_{\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{3}} = s_{\frac{\pi}{15}}$ bestimmen. Man kann aber auch, wenn man von einem Sehnenwerte für einen bestimmten Winkel φ_0 ausgeht, daraus unter steter Anwendung von (8) die Sehnenwerte für $2\varphi_0$, $3\varphi_0$, $4\varphi_0 \ldots$ berechnen, wenn nur die Bedingungen, unter welchen diese Formel abgeleitet wurde, erfüllt bleiben.

Wie gelangt man aber zu einem solchen kleinen Winkel φ_0, wofür die Sehne bestimmbar ist? Zu diesem Zwecke betrachten wir den Sonderfall $\alpha=\beta$ und erhalten aus (8)

$$s_{2\alpha}\,.\,2r = 2s_\alpha\, s_{\pi-\alpha} = 2\, s_\alpha \sqrt{4r^2-s_\alpha^2}$$

oder aus (10):

$$f(2\alpha)=f(\alpha)\sqrt{4-f^2(\alpha)} \qquad \left(\alpha<\frac{\pi}{2}\right) \qquad (11)$$

Wenn wir diese Relation als Gleichung mit der Unbekannten $f(\alpha)$ auffassen, so erhalten wir daraus mittels Auflösung zweier quadratischer Gleichungen folgende vier Wurzeln:

$$\pm\sqrt{2-\sqrt{4-f^2(2\alpha)}}.$$

Welcher von diesen vier Werten ist nun der gesuchte Wert für $f(\alpha)$? Da der Annahme nach $\alpha<\frac{\pi}{2}$, daher

$$o<f(\alpha)<\sqrt{2}$$

ist, so muß notwendig

$$f(\alpha) = +\sqrt{2 - \sqrt{4 - f^2(2\alpha)}}$$

sein.

Auf diese Weise ist es also möglich z. B. aus

$$f\left(\frac{\pi}{15}\right) = f(12^0) = \frac{1}{4}\left\{\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}\right\} = 0{\cdot}209057\ldots$$

der Reihe nach $f(6^0)$, $f(3^0)$, $f\left(1\frac{1^0}{2}\right)$, $f\left(\frac{3^0}{4}\right)$ usf. zu berechnen. Allgemein kann man nun aus den ursprünglich bekannten Sehnenwerten für $\frac{\pi}{2^n}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$ diejenigen für eine beliebige Vielfachsumme dieser Winkel, also für Winkel von der Form

$$a \,.\, \frac{\pi}{2^n} + b \,.\, \frac{\pi}{3} + c\, \frac{\pi}{5}$$

(a, b, c positive oder negative ganze Zahlen) berechnen.

Nun wollen wir aber nicht eine nach $1\frac{1^0}{2}$ oder $\frac{3^0}{4}$ fortschreitende, sondern eine nach Graden, beziehungsweise halben Graden fortschreitende Tafel konstruieren. Dazu brauchen wir die zu 1^0 gehörige Sehne. Das obige Verfahren reicht aber dazu nicht aus; denn es ist nicht möglich, für a, b und c ganze Zahlen zu finden, so daß die Gleichung besteht:

$$\frac{\pi}{180} = a \,.\, \frac{\pi}{2^n} + b\, \frac{\pi}{3} + c \,.\, \frac{\pi}{5}.$$

Daraus würde nämlich folgen:

$$1 = 45\,a + 60 \,.\, b + 36 \,.\, c = 3\,(15\,a + 20\,b + 12\,c),$$

was bekanntlich einen Widerspruch enthält.

Um aber doch die zu 1^0 gehörige Sehne zu bestimmen, wendete Ptolemäus ein sehr geistreiches Verfahren an, welches wir im folgenden kurz entwickeln.

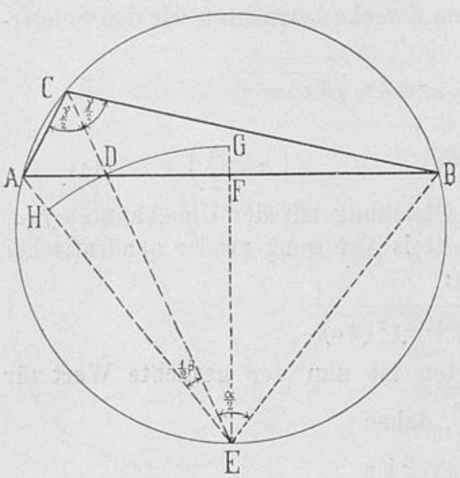

Fig. 14.

Man konstruiere die zu den Peripheriewinkeln $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ $(\alpha > \beta)$ gehörigen Kreissehnen $BC = s_\alpha$ und $AC = s_\beta$ $(s_\alpha > s_\beta)$. Sodann halbiere man den Winkel $\sphericalangle C$, welcher von s_α und s_β eingeschlossen ist, wodurch man die Punkte D und E erhält.

Nach einem bekannten planimetrischen Satze folgt aus dem Dreiecke: $\Delta\, ABC$, in welchem $BD = a'$, $AD = b'$ gesetzt wird:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{s_\alpha}{s_\beta}. \tag{12}$$

Es ist daher

$$AD < BD.$$

Da der Winkel $\sphericalangle C$ halbiert wurde, so sind die beiden Sehnen AE und EB als zu gleichen Peripheriewinkeln gehörig, einander gleich; das Dreieck ΔABE ist demnach gleichschenklig. Zieht man nun in demselben die Höhe EF, so liegt F zwischen D und B und man erhält nun folgende Seiten und Winkel:

$$AF = BF = \frac{a' + b'}{2}, \quad DF = \frac{a' - b'}{2},$$

$$\sphericalangle AEF = \sphericalangle BEF = \frac{\alpha + \beta}{4}, \quad \sphericalangle DEF = \frac{\alpha - \beta}{4}.$$

Wir konstruieren endlich mit ED als Radius von E als Mittelpunkt aus einen Kreis, welcher AE im Punkte H und EF im Punkte G schneidet. Es ist daher $EH = ED = EG$ und da $AE > ED > EF$ ist, so folgt daraus, daß H zwischen A und E, G aber in der Verlängerung von EF liegen muß. Es ist also das Dreieck ΔAED größer als der Sektor HED und das Dreieck ΔEFG kleiner als der Sektor EDG, was zur Ungleichung führt:

$$\frac{\Delta DFE}{\Delta ADE} < \frac{\text{Sektor } EDG}{\text{Sektor } EDH}. \tag{13}$$

Nun gelten, wie man sich leicht überzeugen kann:

$$\frac{\Delta DFE}{\Delta ADE} = \frac{\frac{1}{2}(a' - b')}{b'}, \quad \frac{\text{Sektor } EDG}{\text{Sektor } EDH} = \frac{\frac{1}{4}(\alpha - \beta)}{\frac{1}{2}\beta}.$$

Dies in (13) eingesetzt, gibt folgende Ungleichung:

$$\frac{\frac{1}{2}(a' - b')}{b'} < \frac{\frac{1}{4}(\alpha - \beta)}{\frac{1}{2}\beta} \text{ oder } \frac{a'}{b'} - 1 < \frac{\alpha}{\beta} - 1,$$

woraus

$$\frac{a'}{b'} < \frac{\alpha}{\beta}$$

und nach (12):

$$\frac{s_\alpha}{s_\beta} < \frac{\alpha}{\beta} \text{ oder } \frac{s_\alpha}{\alpha} < \frac{s_\beta}{\beta} \qquad (\alpha > \beta) \tag{14}$$

folgt. Diese Ungleichung wandte Ptolemäus auf folgende Fälle an: 1. $\alpha = 1\frac{1^0}{2}$, $\beta = 1^0$ und 2. $\alpha = 1^0$, $\beta = \frac{3^0}{4}$. Durch Kombination beider Fälle entsteht folgende Ungleichung:

$$\frac{s_{1\frac{1^0}{2}}}{1\frac{1}{2}} < \frac{s_{1^0}}{1^0} < \frac{s_{\frac{3^0}{4}}}{\frac{3^0}{4}}$$

oder

$$\frac{2}{3} s_{1\frac{1^0}{2}} < s_{1^0} < \frac{4}{3} s_{\frac{3^0}{4}},$$

welche Ungleichung man auch in der Form schreiben kann:

$$\frac{2}{3} f\left(1\frac{1^0}{2}\right) < f(1^0) < \frac{4}{3} f\left(\frac{3^0}{4}\right).$$

Nun ist:

$$\frac{2}{3} f\left(1\frac{1^0}{2}\right) = 0{\cdot}01745\ldots, \quad \frac{4}{3} f\left(\frac{3^0}{4}\right) = 0{\cdot}01745\ldots;$$

daher ist auch $f\,(1^0)$ bis zur 5. Dezimalstelle bestimmt, und zwar:

$$f(1^0) = 0{\cdot}01745\ldots$$

Indem man daraus noch $f\left(\frac{1^0}{2}\right)$ berechnet, kann man in der Tat eine Sehnentafel und damit eine ebensolche Sinustafel aufstellen, welche von $\frac{1^0}{2}$ zu $\frac{1^0}{2}$ fortschreitet.

Ich habe dieses Verfahren zunächst deshalb erwähnt, weil es die Möglichkeit bietet, auf Grund unserer bisherigen Kenntnisse die Berechnung durchzuführen und nicht ein ad hoc von uns konstruiertes Verfahren darstellt, sondern in der Geschichte der Trigonometrie eine wichtige Rolle spielt.

Außerdem kann man an diesem Verfahren einen Vergleich zwischen der Schlußweise der griechischen Mathematik, welcher der Funktionsbegriff noch völlig fremd war und den heutigen, auf dem Funktionsbegriff fußenden Anschauungen ziehen.

Dies kommt am deutlichsten in der Ableitung des der Formel (14) zugrunde liegenden Satzes zur Geltung. Unter Zuhilfenahme funktionaler Vorstellungen sagt nämlich (14) nichts anderes aus, als daß die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ in dem Intervalle $o < x < \frac{\pi}{2}$ eine monoton abnehmende Funktion ist, d. h. es ist:

$$\frac{\sin x''}{x''} < \frac{\sin x'}{x'} \text{ für } \frac{\pi}{2} > x'' > x' > o.$$

Dementsprechend ist auch der Beweis, den wir heute hiefür geben, ein von dem Ptolemäischen Beweise verschiedener[1]). Eine weitere Ausführung desselben muß jedoch auf später verschoben werden, da hiezu ein näheres Studium der Eigenschaften der Sinusfunktion und anderer mit ihr verwandter Winkelfunktionen nötig ist[2]).

[1]) Siehe z. B. Weber-Wellstein, Enzyklopädie d. Elementarmathem. Bd. II, S. 338.

[2]) Daran würde sich die Besprechung einiger Aufgaben schließeu (z. B. Bestimmung der Projektion einer Strecke auf eine Gerade, Berechnung des Radius des Inkreises eines Dreiecks aus den Umfangsstücken u. ä.), welche zu den anderen Winkelfunktionen überleiten und nun würde ein Studium dieser Winkelfunktionen und Anwendungen insbesondere auf Trigonometrie in der üblichen Weise folgen.