Über einige Eigenschaften der Bernoullischen und analoger Zahlen.

Man gelangt zu den Bernoullischen Zahlen auf zweierlei Weise. Der erste Weg nimmt seinen Ausgangspunkt von der Aufgabe, die Summe der ganzen positiven n^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen zu finden, und führt zu folgender Definition der Bernoullischen Zahlen (B_n):

$$1^n + 2^n + 3^n \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \binom{n}{1}\frac{B_1}{2}x^{n-1} - \binom{n}{3}\frac{B_2}{4}x^{n+3} + \ldots \text{ [1]}$$

Der zweiten Definition liegt der Zusammenhang der Bernoullischen Zahlen mit den Entwicklungskoeffizienten der Kreisfunktionen, insbesondere von:

$$\cot u = \frac{1}{u} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{2n} \cdot \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

zugrunde, woraus:

$$B_n = \frac{(2_n)!}{2^{2n} \cdot \pi^{2n}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{m^{2n}} \qquad (m = o \text{ ausgeschlossen})$$

folgt.

Die meisten Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen werden in der Regel mittels der ersten Definition abgeleitet, darunter auch einer der schönsten Sätze, nämlich der v. Staudt-Clausensche Satz, die Partialbruchzerlegung der Bernoullischen Zahlen betreffend. Doch deutete schon manche der Untersuchungen, welche die zweite Definition benützten[2]) darauf hin, daß auch dieser Definition eine wichtige Bedeutung beizumessen ist, wenn man nicht etwa noch weiter geht und in derselben die dem Wesen der Bernoullischen Zahlen entsprechendere Definition erblickt. Man wird in dieser letzten Ansicht noch mehr durch die interessanten Untersuchungen bestärkt, welche Hurwitz über die Ent-

[1]) Siehe L. Saalschütz, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, § 1.
[2]) Z. B. von Lipschitz, Journal für Math., Bd. 96.

wicklungskoeffizienten der lemniskatischen Funktionen angestellt hat[1]. Hurwitz zeigt u. a., daß die Entwicklungskoeffizienten der Weierstraßschen Funktion $\wp(u; 4, 0)$ zu Zahlen führen, welche im Gebiete des *Körpers* $k(\sqrt{-1})$ eine ähnliche Rolle spielen, und ähnliche Eigenschaften besitzen, wie die Bernoullischen Zahlen im Körper der natürlichen Zahlen. Hierbei operiert Hurwitz ausschließlich mit Funktionaleigenschaften der elleptischen Funktionen und stützt sich vor allem auf die komplexe Multiplikation. Die Weiterführung des Hurwitzschen Gedankens weist zwar in erster Linie dahin, für allgemeinere quadratische Körper ähnliche Zahlen zu suchen, doch führt dessen Anwendung auch im Falle der Bernoullischen Zahlen zu einem einfachen Beweise des v. Staudt-Clausenschen Satzes, den ich im ersten Teile dieser Arbeit mitteilen will.

Im zweiten Abschnitte beschäftige ich mich mit einer Frage, welche von Matter in einer ein ähnliches Problem betreffenden Arbeit[2]) offengelassen wurde. Matter untersuchte nämlich die Entwicklungskoeffizienten der Weierstraßschen Funktion:

$$\wp(u; 0, 4) = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{6n} F_n}{6_n} \cdot \frac{u^{6n-2}}{(6n-2)!}$$

und gelangt zu dem Ergebnisse, daß die Zahlen F_n eine Partialbruchzerlegung von der Gestalt

$$F_n = G_n + \frac{(-1)^n}{4} + \Sigma \frac{(2\mathfrak{A})^{\frac{2n}{p-1}}}{p}$$

besitzen, wobei G_n eine ganze Zahl bezeichnet und sich die Summe über diejenigen Primzahlen p von der Form $6k+1$ erstreckt, für welche $p-1$ ein Teiler von $6n$ ist. Die der einzelnen Primzahl p entsprechende Zahl $\mathfrak{A}$ ist die Basis des einfach auftretenden Quadrates in der Zerlegung

$$p = \mathfrak{A}^2 + 3\mathfrak{B}^2,$$

und zwar mit solchem Vorzeichen genommen, daß die Kongruenz:

$$\mathfrak{A} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{6}} \pmod 3$$

erfüllt wird.

---

1) A. Hurwitz, Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Funktionen, Math. Annalen, Bd. 51, Seite 196. Dieser Arbeit entnehme ich auch im folgenden die Begriffe, wie ganzzahlige Potenzreihen für Reihen von der Gestalt:

$$P(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{u^{2n}}{(2_n)!} \qquad (a_n \text{ ganzzahlig})$$

oder Einheitswerte [$P(u)$, wenn darin $a_0 = 1$ ist] und einige Sätze über dieselben.

2) K. Matter, Die den Bernoullischen Zahlen analogen Zahlen im Körper der dritten Einheitswurzeln. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 45. Jahrg. 1900, Seite 238.

Hinsichtlich des Verhaltens der Zahlen F_n in bezug auf die Primzahl 2 vermochte Matter jedoch nur die im Obigen enthaltene Vermutung auszusprechen, daß

$$4 F_n \equiv (-1)^n \pmod 4$$

ist. Einen strengen Beweis hiefür gab er nicht. Ich versuchte nun die hierbei auftretenden Schwierigkeiten dadurch zu umgehen, daß ich statt der Funktion $\wp(u; 0, 4)$ die analoge Funktion $\wp(u; 0, 2^8)$ in Betracht zog. Die Entwicklungskoeffizienten dieser Funktion zeigen bis auf ihr Verhalten in bezug auf die Primzahl 2 genau dieselben Eigenschaften; dagegen fehlt der Primfaktor 2 im Nenner dieser Zahlen gänzlich. Dadurch verliert auch die Primzahl 2 jene auffallende Sonderstellung, welche sie in den von Matter betrachteten Zahlen besitzt, in deren Nennern sie nämlich in der zweiten Potenz auftritt. Schließlich weise ich noch auf eine einfache Zählereigenschaft dieser Zahlen hin.

I.

Der v. Staudt-Clausensche Satz für die Bernoullischen Zahlen.

1. Den Ausgangspunkt dieser Untersuchung bildet die Reihe:

$$\cot u = \frac{1}{u} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{2n} \cdot \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wobei B_n die n^{te} Bernoullische Zahl bedeutet.

Aus der Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{du} = -(1 + x^2),$$

welcher $x = \cot u$ genügt, folgt die bekannte Rekursionsformel:

$$(2n+1) B_n = \sum_{\mu=1}^{n-1} B_\mu . B_{n-\mu} . \binom{2n}{2\mu} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots) \quad (2)$$

welche in Verbindung mit $B_1 = \frac{1}{6}$ zur sukzessiven Berechnung der Bernoullischen Zahlen dienen kann. Gleichzeitig ergibt sich daraus, daß diese Zahlen sämtlich positive rationale Zahlen sind; so sind z. B.:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \; B_2 = \frac{1}{30}, \; B_3 = \frac{1}{42}, \; B_4 = \frac{1}{30}, \; B_5 = \frac{5}{66} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$ [1]

2. Aus den Multiplikationstheoremen der Kreisfunktionen folgt bekanntlich für ein ungerades (ganzzahliges) m; wenn man

$$y = \cot mu, \quad x = \cot u$$

setzt:

[1] Vgl. Saalschütz, Anhang

$$\left.\begin{aligned} y &= (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot x \cdot \frac{G(x)}{x^{m-1}\, G\left(\frac{1}{x}\right)}, \\ \text{wo}\quad & \\ G(x) &= (-1)^{\frac{m-1}{2}} m + a_1 x^2 + \ldots + a_{\frac{m-3}{2}} x^{m-3} + x^{m-1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

eine ganze Funktion von x mit ganzzahligen Koeffizienten bedeutet.

Nun betrachte man die Funktion:

$$F(u) = m \cdot \cot m u - \cot u = m y - x.$$

Einerseits erhält man nach (1):

$$F(u) = \sum_{n-1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{2n} (m^{2n} - 1) \cdot \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Anderseits ist wegen (3):

$$F(u) = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} m x G(x) - x^m G\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{m-1} G\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{(m^2-1)x + \left((-1)^{\frac{m-1}{2}} a_1 m - a_{\frac{m-3}{2}}\right) x^3 + \ldots + \left((-1)^{\frac{m-1}{2}} m\, a_{\frac{m-3}{2}} - a_1\right) x^{m-2}}{1 + a_{\frac{m-3}{2}} \cdot x^2 + \ldots + m x^{m-1}}$$

Führt man statt $x = \cot u$ die ganzzahlige Reihe

$$x' = \frac{1}{x} = \operatorname{tang} u$$

ein, so nimmt $F(u)$ die Gestalt an:

$$F u = \frac{\left(\pm m\, a_{\frac{m-3}{2}} - a_1\right) x' + \ldots\ldots + (m^2 - 1)\, x'^{m-2}}{m + a_1 x'^2 + \ldots\ldots + x'^{m-1}}.$$

Setzt man darin statt u mu, so werden Zähler und Nenner durch m teilbare ganzzahlige Reihen; kürzt man den Bruch durch m, so stellt der Nenner eine Einheitsreihe dar. $F(mu)$ ist daher eine ganzzahlige Reihe, d. h.

$$\frac{2^{2n} m^{2n-1} \cdot B_n}{2n} (m^{2n} - 1) = G_{m,n}$$

ganzzahlig.

Bringt man B_n auf die einfachste Form:

$$\frac{Z_n}{N_n},$$

wo Z_n und N_n zueinander teilerfremde ganze Zahlen bedeuten, so erhält man

$$(2m)^{2n-1} \cdot Z_n (m^{2n} - 1) = n \cdot G_{m,n} \cdot N_n \quad \ldots \quad (4)$$

Es sei nun p irgendeine im Nenner N_n enthaltene ungerade Primzahl und p^α die höchste Potenz, welche in N_n enthalten ist ($\alpha \geqq 1$); ferner sei p^β die höchste in n aufgehende Potenz von $p\,(\beta \geqq 0)$. Dann setze man für m eine ungerade primitive $p^{\alpha+\beta}$te Kongruenzwurzel, welche die Eigenschaft hat, daß die $\varphi(p^{\alpha+\beta}) = p^{\alpha+\beta-1}(p-1)$te und keine niedrigere Potenz von m modulo $p^{\alpha+\beta}$ kongruent 1 ist.

Mithin kann man aus (4) den Schluß ziehen, daß

$$2\,n \equiv o\;[\mathrm{mod}\;\varphi\,(p^{\alpha+\beta})]$$

oder $2\,n$ durch $p^{\alpha+\beta-1}.(p-1)$ teilbar sein muß. Dies ist nach der über β getroffenen Annahme nur so möglich, daß

$$\alpha = 1$$

ist.

Der Nenner der n^{ten} Bernoullischen Zahl enthält daher ungerade Primzahlen nur in der ersten Potenz, und zwar bloß solche Primzahlen p, welche die Eigenschaft besitzen, daß $2\,n$ durch $p-1$ teilbar ist.

Man kann demnach für B_n folgende Partialbruchzerlegung angeben:

$$B_n = G_n + \frac{\sigma_0}{2^\alpha} + \sum_p \frac{\sigma_p}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wobei G_n eine ganze Zahl bedeutet und sich die Summe über alle genannten p erstrekt; σp ist der echte Rest der Kongruenz:

$$p\,B_n \equiv \sigma_p\,(\mathrm{mod}\,p)$$

σ_0 und α sind hierbei noch unbestimmt gelassen.

3. Die Werte von σ_0 und α lassen sich aus (2) und mit Anwendung des Schlusses von n auf $n+1$ sehr einfach bestimmen.

Für die ersten Bernoullischen Zahlen gilt, wie man unmittelbar aus $(2\,a)$ ersieht:

$$2\,B_i \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Nun folgt aus (2), wenn man $n-1 = 2\,\nu + \varepsilon\,(\varepsilon = 0$ oder $1)$ setzt;

$$2\,(2\,n+1)\,B_n = \sum_{\mu=1}^{\nu} 2\,B^\mu \,.\, 2\,B_{n-\mu}\binom{2\,n}{2\,\mu} + \varepsilon\binom{2\,n}{n}.$$

Gilt die Kongruenz (6) für alle $i < n$, so erhellt daraus:

$$\begin{aligned} 2\,B_n &\equiv \sum_{\mu=1}^{\nu}\binom{2\,n}{2\,\mu} + \varepsilon\binom{2\,n}{n} \\ &\equiv \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n-1}\binom{2\,n}{2\,\mu} \quad (\mathrm{mod}\;2) \end{aligned}$$

oder, weil

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} + (1-1)^{2n} = 2\,.\,(1 + \sum_{\mu=0}^{n-1}\binom{2\,n}{2\,\mu} + 1)$$

ist:

$$2\,B_n \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2),$$

womit die Behauptung auch für $i = n$ bewiesen ist und daher für jede beliebige Bernoullische Zahl

$$\sigma_0 = 1, \quad \alpha = 1$$

sind.

Zum Zwecke der Bestimmung der Zähler σ_p untersuche man die Funktion:

$$\frac{\sin p u}{\sin u}.$$

Mit Hilfe der Reihenentwicklung für $\sin p u$ und $\frac{1}{\sin u}$ [1]) erhält man:

$$\frac{\sin p u}{\sin u} = \frac{\sin p u}{p \ u} \cdot \frac{p u}{\sin u} =$$

$$= \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n p^{2n}}{2n+1} \cdot \frac{u^{2n}}{(2n)!}\right\} \left\{p + \sum_{n=1}^{\infty} p B_n \cdot (2^{2n} - 2) \frac{u^{2n}}{(2n)!}\right\}$$

$$\equiv \sum_{n=1}^{\infty} p B_n (2^{2n} - 2) \cdot \frac{u^{2n}}{(2n)!} \quad (\mathrm{mod}\, p) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Anderseits folgt aus dem Additionstheoreme für die Sinusfunktion:

$$\frac{\sin p u}{\sin u} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} 2^{p-1} . \sin^{p-1}(u) + A_1 \sin^{p-3}(u) + \ldots + p,$$

worin A_1, $A_2 \ldots$ ganze, durch p teilbare Zahlen bezeichnen:

$$\frac{\sin p u}{\sin u} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} . 2^{p-1} \sin^{p-1}(u) \quad (\mathrm{mod}\, p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Um in der Entwicklung der rechten Seite von (8) den Koeffizienten α_{2n} von $\frac{u^{2n}}{2n!}$ zu bestimmen, gehe man von

$$\sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}$$

beziehungsweise der daraus folgenden Beziehung:

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} 2^{p-1} \sin^{p-1} u = (e^{iu} - e^{-iu})^{p-1}$$

aus und erhält durch eine einfache Rechnung, daß:

$$\alpha_{2n} \equiv . (-1)^n (-1)^{\frac{p-1}{2}} . \frac{(p-1)!}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!^2} \equiv -(-1)^n \quad (\mathrm{mod}\, p)$$

---

[1])

$$\frac{u}{\sin u} = \frac{u}{2} \operatorname{tang} \frac{u}{2} + \frac{u}{2} . \cot \frac{u}{2}$$

$$\frac{u}{2} \operatorname{tang} \frac{u}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n (2^{2n} - 1) . \frac{u^{2n}}{2_n!}.$$

$$\frac{u}{2} \cot \frac{u}{2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n . \frac{u^{2n}}{(2n)!}$$

(Vgl. Saalschütz, § 2, Formeln 7 und 19.)

ist; daher in Verbindung mit (7):

$$p\,B_n(2^{2n}-2) \equiv -(-1)^n \pmod{p}$$

oder weil $2n$ durch $p-1$ teilbar ist:

$$p\,B_n \equiv (-1)^n \pmod{p}.$$

Mithin sind in der Partialbruchzerlegung (5) auch die Zähler σ_p bestimmt und man erhält für dieselbe die endgiltige Form:

$$B_n = g_n + \frac{1}{2} + \sum_{(p)} \frac{(-1)^n}{p},$$

wobei p alle ungeraden Primzahlen durchläuft, für welche $p-1$ ein Teiler von $2n$ ist, und g_n eine ganze Zahl bedeutet.

II.

Bemerkungen über die Entwicklungskoeffizienten von $\wp(u; 0, 4)$ und $\wp(u; 0, 2^8)$.

1. Betrachtet man statt der von Matter untersuchten Funktion:

$$\wp(u; 0, 4) = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{6n}.F_n}{6n} \cdot \frac{u^{6n-2}}{(6n-2)!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die folgende:

$$\wp(u; 0, 2^8) = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{6n}.F'_n}{6n} \cdot \frac{u^{6n-2}}{(6n-2)!} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

so folgt aus der bekannten Relation:

$$\wp(u; 0, 4) = \frac{1}{4}\,\wp\left(\frac{u}{2}; 0, 4.2^6\right)$$

für die beiderseitigen Entwicklungskoeffizienten:

$$F'_n = 2^{6n}.F_n.$$

In bezug auf die ungeraden Primfaktoren (p) des Nenners verhält sich F'_n genau so wie F_n, da ja wegen der Teilbarkeit von $6n$ durch $p-1$:

$$2^{6n} \equiv 1 \pmod{p},$$

daher:

$$p\,F'_n \equiv p\,F_n \pmod{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ist.

Um das Verhalten der Zahlen F'_n in bezug auf die Primzahl 2 zu untersuchen, bilde man die Funktion:

$$F(u) = 4\,\wp(2u) - \wp(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{6n}.F_n}{6n}.(2^{6n}-1).\frac{u^{6n-2}}{(6n-2)!} \quad . \quad (4)$$

Aus der bekannten Relation für $\gamma(2u)$:

$$\wp(2u) = \frac{\wp^3(u)+8}{4\wp^3(u)-4}.\wp(u)$$

folgt:

$$F(u) = \frac{9\,\wp(u)}{\wp^3(u) - 1} = \frac{9 \cdot \left(\frac{1}{\wp(u)}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{\wp(u)}\right)^3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Da $\frac{1}{\wp(u)}$ eine ganzzahlige Potenzreihe ist, welche für $u = 0$ verschwindet, so ist der Zähler in (5) eine ganzzahlige Reihe, der Nenner eine Einheitsreihe, daher auch $F(u)$ eine ganzzahlige Reihe, d. h. die Koeffizienten:

$$\frac{2^{6n} F_n}{6n}(2^{6n} - 1)$$

sind ganze Zahlen, und es gilt die Kongruenz:

$$F'_n \equiv 0 \pmod 2.$$

Die Koeffizienten F'_n in der Entwicklung von:

$$\wp(u; 0, 2^8) = \frac{1}{u^2} + \Sigma \frac{2^{6n} F'_n}{6n} \cdot \frac{u^{6n-2}}{(6n-2)!}$$

enthalten demnach im Nenner nur ungerade Primfaktoren p von der früher erwähnten Eigenschaft, während die Zähler mindestens durch 2 teilbar sind, und lassen folgende Partialbruchzerlegung zu:

$$F'_n = g_n + \sum_{(p)} \frac{(2\mathfrak{A})^{\frac{6n}{p-1}}}{p}$$

wo die einzelnen Größen g_n, p und $\mathfrak{A}$ die in der Einleitung angegebene Bedeutung haben.

2. Für die Zahlen F_n (beziehungsweise F'_n) läßt sich noch eine andere Zählereigenschaft auf einfachem Wege herleiten, nämlich deren Verhalten in bezug auf die Primzahl 3.

Die Funktion:

$$\psi(u) = \frac{1}{\wp(u) - 1}$$

genügt bekanntlich die Differentialgleichung:

$$\left.\begin{aligned} \psi'^2(u) &= 4\,\psi(u) - 12\,\psi^2(u) + 12\,\psi^3(u) \\ \text{oder} \quad \psi''(u) &= 2 - 12\,\psi(u) + 18\,\psi^2(u). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Setzt man:

$$\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \frac{u^{2n}}{(2n)!},$$

so ergeben sich aus (6) für die α folgende Bestimmungen:

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_{n+1} = -12\,\alpha_n + 18 \sum_{i+k=n} \alpha_i\, \alpha_k \binom{2n}{2i} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Daraus folgt:

$$\alpha_n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3^{n-1}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Aus der Identität in u:

$$\psi(u)\ [\wp(u) - 1] = 1$$

folgt ferner:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} - \alpha_n + \sum_{i+3k-1=n} \alpha_i \frac{2^{6k} \,.\, F_k}{6k} \binom{2n}{2i} = 0 \quad (n = 1, 2 \ldots)$$

oder, wenn man darin statt n $3n$ und statt $i-1$ $3i$ setzt:

$$2^{6n} F_n (6n-1)(6n+1)(6n+2) = \alpha_{3n}(6n+1)(6n+2) - \alpha_{3n+1} -$$

$$- \sum_{i+k=n} \alpha_{3i+1} \,.\, 2^{6k} F_k (6k-1) \binom{6n+2}{6i+2}.$$

Da $F_1 = \frac{3^2}{2^2 \,.\, 7}$ ist, so ergibt sich daraus mittels des Schlusses von n auf $n+1$ und mithilfe von (7), daß für jedes beliebige n:

$$F_n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 3^{3n-1})$$

ist.

E. Dintzl