Bemerkungen zu einem Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes.

1. A. Höfler teilt in seiner „Didaktik des mathematischen Unterrichtes“ einen Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes mit, welchen er den ungedruckten Schriften Bolzanos entnahm[1]).

Der Gedankengang dieses Beweises ist kurz der folgende: Man erweitert zunächst die übliche flächengeometrische Formulierung des phythagoreischen Lehrsatzes für das rechtwinklige Dreieck in dem Sinne, daß man statt der Quadrate irgendwelche andere, untereinander ähnliche und ähnlich liegende Figuren (über den Dreieckseiten) wählt; dann ist der Beweis für den in dieser erweiterten Fassung formulierten Satzes einfach in der Tatsache gelegen, daß das rechtwinklige Dreieck durch die auf die Hypotenuse gefällte Höhe in zwei Teildreiecke zerfällt, welche sowohl untereinander als auch dem ganzen Dreieck ähnlich sind und deren Summe die gesamte Dreiecksfläche geben.

2. Höfler knüpft daran eine Reihe von Bemerkungen, welche nach meiner Ansicht noch folgender Ergänzungen bedürfen.

Zunächst will ich darauf hinweisen, daß sich das diesem Beweise zugrunde liegende Prinzip, nämlich die Verallgemeinerung auf ähnliche und ähnlich liegende Figuren, bereits in Euklids Elementen (VI. Buch, 31. Satz) vorfindet. Proklus schreibt nämlich in seinem Kommentar (ed. Basil. p. 110 — Baroc. p. 268): „Ich bewundere zwar auch die,

[1]) „Didaktische Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen“, herausgegeben von Dr. A. Höfler und Dr. Fr. Poske; Bd. I, Mathematik; Seite 364—366 (Teubner-Leipzig, 1910). Höfler schreibt daselbst u. a.: „Ich habe diesen Beweis aus den ungedruckten Schriften Bernhard Bolzanos. Als 1903 Robert v. Sterneck (damals noch in Wien Schriftführer der Philosophischen Gesellschaft) das von dieser wieder aufgefundene Konvolut ungedruckter Manuskripte Bolzanos (gestorben 1848) aufschnürte, war das erste, worauf sein Blick fiel, jener Beweis. Ich habe ihn seither vielen Mathematikern mitgeteilt und von allen gehört, er sei ihnen neu, und von den meisten daß sie ihn für den das Wesen der Beziehung am unverhülltesten treffenden halten. Nur wenige beanstandeten den Mangel an Stileinheit. Ob ein solcher vorliegt, möchte ich hiermit der Diskussion unterbreiten.“

welche zuerst der Wahrheit dieses Problems[1]) nachgeforscht haben mehr aber noch schätze ich den Verfasser der Elemente (Euklid) nicht nur, weil er das Theorem mit dem bündigsten Beweise versah, sondern auch, weil er das im sechsten Buche enthaltene, noch allgemeinere Problem durch die unwiderlegbarsten Gründe der Wissenschaft feststellte[2])."

Wenn ferner Höfler die Bemerkung macht, daß der Beweis in der von ihm mitgeteilten Form heute vielfach als neu, beziehungsweise als unbekannt bezeichnet wird, so ist diese Behauptung jedenfalls dahin zu ergänzen, daß bereits Kunze in seinem seinerzeit sehr verbreiteten Lehrbuche der Geometrie[3]) den Beweis genau in der oben erwähnten Form ausführlich durchgeführt und daran zum Schlusse die Bemerkung knüpft: „Übrigens deckt der hier geführte Beweis den eigentlichen Grund des pythagoreischen Lehrsatzes auf, und zwar nicht bloß für Quadrate sondern allgemeiner für alle ähnlichen geradlinigen Figuren." Auch Wiegand[4]) beweist in fast gleicher Weise wie Kunze den erweiterten pythagoreischen Lehrsatz unabhängig von dem pythagoreischen Lehrsatze im engeren Sinne.

3. Bei einer näheren Beschäftigung mit dem genannten Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes drängt sich unwillkürlich die Frage auf, ob sich die hierbei benützte Methode auch auf ein beliebiges Dreieck anwenden läßt und wenn ja, wohin dieselbe führt.

Der Einfachheit halber beschränke ich mich auf ein spitzwinkliges Dreieck. (Vgl. Figur Seite 14.)

---

[1]) Unter diesem Problem ist der pythagoreische Lehrsatz im engeren Sinne verstanden.

[2]) Siehe: C. A. Bretschneider: „Die Geometrie und die Geometer vor Euklides" Seite 81, § 64. Der Verfasser fügt weiter hinzu (Seite 82): „Die Erweiterung des letzteren (pythagoreischen Lehrsatzes) aber auf ähnliche Figuren, welche auf den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks als homologen Geraden konstruiert sind (Euklid. VI, 31) scheint nach den Worten des Proklus ganz bestimmt eine Leistung des Euklides zu sein." Interessant sind auch die darauffolgenden Bemerkungen, insbesonders das im § 67 angeführte Zitat aus Plutarchs Symposion VIII, c. 4. Man vergleiche überdies H. G. Zeuthen: „Geschichte der Mathematik im Altertume und Mittelalter", Vorlesungen, (Kopenhagen; Verlag Höst u. Sön, 1896) Seite 153 und endlich J. Tropfke „Geschichte der Elementar-Mathematik", Bd. II, Seite 74—76.

[3]) A. Kunze: „Lehrbuch der Geometrie" (3. Auflage, Verlag Frommann-Jena, 1873) I. Bd., Kap. VIII, § 161 (Seite 196 und 197). Die 1. Auflage ist im Jahre 1841 erschienen.

[4]) A. Wiegand: „Zweiter Kursus der Planimetrie", 9. verbesserte Auflage (Halle, 1877), Seite 44 und 45, § 61. Die meisten der übrigen Lehrbücher der Planimetrie enthalten zwar den pythagoreischen Lehrsatz in seiner allgemeineren Fassung (z. B. Močnik, „Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Mittelschulen", 22. Auflage, 1894. In den späteren Auflagen des Lehrbuches sind nur die Erweiterungen auf ähnliche Vielecke und Kreise [lunulae Hippokratis] erwähnt), beweisen denselben jedoch nicht unabhängig von dem besonderen pythagoreischen Lehrsatz.

Hier scheint sich die Sache zunächst dadurch zu komplizieren, daß man drei verschiedenen Höhen zu berücksichtigen hat, deren Schnittpunkt im Innern des Dreiecks liegt. Demnach zerfällt das Dreieck $\triangle ABC$ nicht in zwei Teildreiecke, sondern in drei Paare von solchen Dreiecken, welche in der Figur mit:

$$\triangle ACD \text{ und } \triangle BCD, \quad \triangle ABE \text{ und } \triangle ACE,$$
$$\triangle BCF \text{ und } \triangle ABF$$

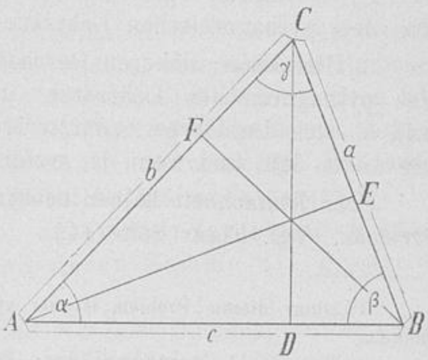
bezeichnet sind. Die Flächeninhalte dieser Dreiecke seien der Reihe nach $f_1, f_2, \ldots f_6$; f bedeute den Flächeninhalt des ganzen Dreiecks $\triangle ABC$.

Zwischen diesen Dreiecken bestehen nun — wenn man genau so vorgeht, wie im besonderen Falle des rechtwinkligen Dreiecks — die folgenden Beziehungen:

$$f = f_1 + f_2 = f_3 + f_4 = f_5 + f_6 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$f_1 = \lambda_1 b^2, \quad f_2 = \lambda_2 a^2, \quad f_3 = \lambda_2 c^2, \quad f_4 = \lambda_3 b^2, \quad f_5 = \lambda_3 a^2, \quad f_6 = \lambda_1, c^2 . \quad (2)$$

Für die drei Proportionalitätsfaktoren λ_1, λ_2, λ_3 lassen sich auf trigonometrischem Wege die Werte leicht bestimmen, und zwar:



$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \sin 2\alpha, \lambda_2 = \frac{1}{4} \sin 2\beta,$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4} \sin 2\gamma \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Was sagen nun diese Beziehungen, z. B.

$$f = f_1 + f_2$$

aus? Setzt man aus (2) und (3) die Werte für f_1 und f_2, sowie für f einen der beiden Ausdrücke:

$$\frac{a \, . \, c}{2} \sin \beta \quad \text{oder} \quad \frac{b\,c}{2} \sin \alpha$$

ein, so erhält man:

$$\frac{a\,c}{2} \sin \beta = \frac{b\,c}{2} \sin \alpha = \frac{b}{2} \sin \alpha \, . \, b \cos \alpha + \frac{a}{2} \sin \beta \, . \, a \cos \beta,$$

welche Formel sich sofort mittels beiderseitiger Division durch:

$$\frac{b}{2} \sin \alpha = \frac{a}{2} \sin \beta$$

auf die einfachere

$$c = b \, . \cos \alpha + a \cos \beta$$

reduziert.

Ebenso erhält man aus den anderen Beziehungen

$$f = f_3 + f_4 \text{ und } f = f_5 + f_6$$

die weiteren Sätze, welche als Projektionssätze in der Trigonometrie wohl bekannt sind.

Daraus geht unmittelbar hervor, daß die Relationen (1) und (2) nichts anderes sind, als die flächengeometrische Interpretation der Projektionssätze:

$$\left.\begin{aligned} a &= b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b &= c\cos\alpha + a\cos\gamma \\ c &= a\cos\beta + b\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

4. Im Anschlusse daran will ich noch einige Bemerkungen über die Stellung und Verwendung der letztgenannten Projektionssätze im Unterrichte hinzufügen. Man benützt dieselben in der Regel, um den verallgemeinerten pythagoreischen Lehrsatz, d. h. den sogenannten Kosinussatz auf trigonometrischem Wege abzuleiten. Die Darstellung dieser Ableitung, wie sie in den Lehrbüchern üblich ist, läßt aber die wahre Bedeutung der Projektionssätze keineswegs deutlich erkennen. Ja, man kann sie geradezu als ein typisches Beispiel für jene Art von Beweisen bezeichnen, bei denen der Schüler zwar Schritt für Schritt die einzelnen Schlüsse auf ihre Richtigkeit prüfen kann, ohne aber das Wesen derselben genau zu erfassen.

Und doch genügte schon der bloße Hinweis, daß die Projektionssätze ein System von Gleichungen zwischen sechs Größen darstellen, welches ermöglicht, aus drei gegebenen Größen die übrigen drei zu bestimmen.

Ich will im folgenden die weitere Ausführung dieses wohlbekannten Gedankens in einer Form andeuten, in welcher sie auch im Unterrichte Anwendung finden kann.

Zu diesem Zwecke füge ich dem Systeme (4) das Folgende hinzu:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma &= \sin\beta\sin\gamma \\ \cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha &= \sin\gamma\sin\alpha \\ \cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta &= \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

welches bekanntlich unmittelbar aus dem Satze über die Winkelsumme in einem Dreieck

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

mit Hilfe der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen folgt[1]).

[1]) Dieses System ist nicht völlig mit der aus (4) folgenden Determinantenbeziehung:

$$\begin{vmatrix} -1, & \cos\gamma, & \cos\beta \\ \cos\gamma, & -1, & \cos\alpha \\ \cos\beta, & \cos\alpha, & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

identisch; denn daraus ergeben sich bloß Formeln von der Gestalt:

$$(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)^2 = \sin^2\beta\sin^2\gamma$$

u. ä. Vgl. hierzu auch H. Weber und J. Wellstein, „Enzyklopädie der Elementar-Mathematik“, Bd. II, Seite 317. (Teubner-Leipzig 1905.)

Nun betrachte man die einfachen Auflösungsfälle:

1. Gegeben: eine Seite (a) und zwei Winkel (β und γ).

Weil dadurch sofort auch der dritte Winkel gegeben ist, so erübrigt nur noch, die beiden anderen Unbekannten b und c zu bestimmen. Hierzu liefert (4) ein passendes System zweier in b und c linearer Gleichungen, nämlich:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\,.\cos\alpha &= a\,.\cos\gamma \\ \boldsymbol{b}\,.\cos\alpha - \boldsymbol{c} &= -a\cos\beta \end{aligned}$$

woraus

$$\boldsymbol{b}\sin^2\alpha = a(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{c}\sin^2\alpha = a(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma)$$

oder mittels (5):

$$\boldsymbol{b}\,.\sin\alpha = a\,.\sin\beta \quad \text{und} \quad \boldsymbol{c}\,.\sin\alpha = a\sin\gamma$$

folgt. (Sinussatz.)

2. Gegeben: Zwei Seiten (a und b) und der von diesen eingeschlossene Winkel (γ).

In bezug auf die drei Unbekannten $\boldsymbol{c}$, $\mathbf{cos}\,\alpha$, $\mathbf{cos}\,\beta$ sind zwei der Gleichungen (1) vom zweiten Grade, und zwar von der besonderen Form, daß die Produkte

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{c}\,.\mathbf{cos}\,\alpha &= b - a\cos\gamma \\ \boldsymbol{c}\,\mathbf{cos}\,\beta &= a - b\,.\cos\gamma \end{aligned}\right\} \dots (6)$$

gegeben sind. Da die letzte Gleichung des Systems (4) in den drei Unbekannten linear homogen ist, so führt dies unmittelbar zu einer rein quadratischen Gleichung in bezug auf $\boldsymbol{c}$, nämlich:

$$\boldsymbol{c}^2 = a\,.\boldsymbol{c}\,\mathbf{cos}\,\beta + b\,.\,\boldsymbol{c}\,\mathbf{cos}\,\alpha$$

oder wegen (6)

$$\boldsymbol{c}^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma.$$

(Kosinussatz.)

3. Gegeben: Zwei Seiten und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel.

Dieser Fall führt zu keiner neuen trigonometrischen Grundformel.

4. Gegeben: die drei Seiten (a, b, c).

Das System (4) ist in bezug auf die drei Unbekannten $\mathbf{cos}\,\alpha$, $\mathbf{cos}\,\beta$ $\mathbf{cos}\,\gamma$ linear:

$$\begin{aligned} c\,.\mathbf{cos}\,\beta + b\,.\mathbf{cos}\,\gamma &= a \\ c\,\mathbf{cos}\,\alpha \qquad\qquad + a\,.\mathbf{cos}\,\gamma &= b \\ b\,\mathbf{cos}\,\alpha + a\,.\mathbf{cos}\,\beta \qquad\qquad &= c \end{aligned}$$

woraus u. a. durch geeignete Verbindung dieser drei Gleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2\,b\,c}$$

und ähnliche Bestimmungen für die beiden anderen Winkel folgen. (Grundformeln, aus denen die Halbwinkelsätze abgeleitet werden.)

Überlegungen von der soeben skizzierten Art haben, wenn man sie im Unterrichte anstellt, einen großen Vorteil; die Schüler erblicken dann in den trigonometrischen Formeln, nicht mehr eine wahllose und zufällige Zusammenstellung von Formeln, die man am Ende gar durch andere einfachere ersetzen könnte, sie erkennen vielmehr, daß eine wohl begründete Systematik mit Notwendigkeit gerade zu diesem Formelsystem führt.

Hiermit will ich jedoch auf keinen Fall einen Vorgang befürworten, welcher etwa eine solche Systematik an die Spitze des Unterrichtes in der Trigonometrie stellt. Für die erste Ableitung der wichtigsten trigonometrischen Formeln halte ich nach wie vor diejenige Methode für die beste, welche dieselben aus bekannten planimetrischen Sätzen gewinnt, wie z. B. den Sinussatz mittels des Radius des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises, den Kosinussatz aus der flächengeometrischen Erweiterung des pythagoreischen Dreiecks für beliebige Dreiecke[1]), die Halbwinkelsätze mittels des Radius des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises[2]) und endlich die Mollweideschen Gleichungen und den Tangentensatz aus den entsprechenden Konstruktionsaufgaben der Planimetrie, zu deren Lösung sich die Planimetrie der Methode der Hilfsfiguren bedient.

---

[1]) Vgl. z. B. H. Müller: „Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen" I. Teil (Unterstufe), Ausgabe B, Seite 57 (Teubner-Leipzig 1904, 3. Auflage); ferner Fr. Hočevar, Lehrbuch der Geometrie für Oberrealschulen) Seite 244, Aufgaben 20 und 21 (Tempsky-Wien 1906, 2. Auflage) u. ä.

[2]) Vgl. K. Rosenberg: „Geometrische Ableitungen für den Tangentensatz und die Halbwinkelsätze der ebenen Geometrie" (Zeitschrift f. d. Realschulwesen, 22 Jahrg., 9. Heft).

E. Dintzl.