1.

Der Titel dieser kleinen Abhandlung bedarf sehr einer näheren Erläuterung, da es dem Verfasser nicht möglich war, ihn gleichzeitig mit erwünschter Kürze und unzweideutiger Genauigkeit hinzustellen.

Als besonders geeignet zu Dreieckskonstruktionen aus festen Punkten haben sich die in der bekannten Figur des Feuerbachschen Kreises oder Neunpunktekreises auftretenden Punkte erwiesen, und solche Aufgaben sind daher in jeder planimetrischen Aufgabensammlung zu finden. Das Ziel des Verfassers war nun, alle möglichen solchen Aufgaben zusammenzustellen und ihre Lösung zu versuchen. Sollte es ihm gelungen sein, damit eine kleine Bereicherung des geometrischen Aufgabengebietes zu geben, so wäre der Zweck seiner Arbeit erfüllt.

Außer den für gewöhnlich in diesen Aufgaben vorkommenden Punkten — den 3 Ecken, den 4 merkwürdigen Punkten der Eulerschen Gerade, den 9 Punkten des Feuerbachschen Kreises — sind noch die 3 Gegenpunkte des Höhenschnittpunktes in bezug auf die 3 Seiten in die Betrachtung einbezogen worden. Gerade durch sie kommt man zu mancher recht hübschen Aufgabe. Es handelt sich also — jetzt ganz genau gesagt — um die Dreiecksaufgaben, bei denen irgend 3 von den folgenden 19 Punkten gegeben sind:

1) die Ecken A, B, C;
2) der Mittelpunkt M des Umkreises;

3) der Schnittpunkt H der 3 Höhen;
4) der Mittelpunkt F des Feuerbachschen Kreises;
5) der Schwerpunkt S;
6) die Fußpunkte H_a, H_b, H_c der Höhen;
7) die Mittelpunkte S_a, S_b, S_c der Seiten;
8) die Mittelpunkte J_a, J_b, J_c der an den Ecken liegenden Höhenabschnitte;
9) die Gegenpunkte G_a, G_b, G_c des Höhenschnittpunktes in bezug auf die Seiten.

2.

Die Ecken eines Dreiecks können auf 6 verschiedene Weisen mit 3 Buchstaben, etwa A, B, C, bezeichnet werden. Mit der Bezeichnung der Ecken ändert sich auch die der obigen mit den Zeigern a, b, c versehenen Stücke. Zwei Aufgaben nun, die durch eine solche Bezeichnungsänderung in einander übergehen, sind nicht als wesentlich verschiedene Aufgaben zu betrachten. Es gibt im Hinblick auf diesen Umstand 3 verschiedne Arten von Kombinationen zu je drei Punkten:

1) Kombinationen, die durch alle möglichen Bezeichnungsänderungen der Ecken stets in sich selbst übergeführt werden.

Beispiel*: Die Kombinationen A, B, C; H_a, H_b, H_c; M, F, S.

2) Kombinationen, die durch alle möglichen Bezeichnungsänderungen in 2 anders lautende Kombinationen übergeführt werden, so daß es also 3 gleichwertige solche Kombinationen gibt.

Beispiel: Die 3 Kombinationen C, H_a, H_b; A, H_b, H_c; B, H_c, H_a sind gleichwertig.

*) Bei den Beispielen ist keine Rücksicht darauf genommen, ob die 3 betreffenden Punkte zur Bestimmung des Dreiecks genügen.

3) Kombinationen, die durch jede der möglichen Bezeichnungsänderungen in anderslautende Kombinationen übergeführt werden, so daß es also 6 gleichwertige solche Kombinationen gibt.

Beispiel: Die 6 Kombinationen C, H_c, S_a; C, H_c, S_b; A, H_a, S_b; A, H_a, S_c; B, H_b, S_c; B, H_b, S_a sind gleichwertig.

Durch diese Gleichwertigkeit von Kombinationen wird die Zahl der zu betrachtenden Aufgaben stark reduziert. Von den $\frac{19 \,.\, 18 \,.\, 17}{2 \,.\, 3} = 969$ überhaupt möglichen Kombinationen der 19 Punkte zu je dreien bleiben, wie die bald folgende Zusammenstellung zeigt, noch 229 zu besprechen. In dieser Liste, die also nur die 229 wesentlich voneinander verschiedenen Kombinationen behandelt, ist ganz rechts bei jeder Kombination eine der 3 Zahlen 1, 3, 6 angegeben. Diese Ziffer gibt an, welche von den 3 soeben geschilderten Arten von Kombinationen vorliegt, also wieviele verschiedenlautende und doch wesentlich gleiche Aufgaben jedesmal vorhanden sind. Werden die sämtlichen Zahlen 1, 3, 6 addiert, so muß sich 969, die Zahl aller Kombinationen, ergeben, eine Probe darauf, ob auch wirklich alle möglichen Aufgaben in der Liste enthalten sind.

Nicht jede von den 229 übrigbleibenden Kombinationen bestimmt aber ein Dreieck. Ein solches ist je nach Gestalt und Lage durch 6 einfache* Bedingungen festgelegt. Sobald nun durch 2 von den gegebenen Punkten ein Ort für den dritten bekannt ist, sind dem Dreiecke nur 5 einfache Bedingungen auferlegt, und folglich genügen die 3 Punkte nicht. In den meisten Fällen ist das sofort ersichtlich.

*) Eine einfache Bedingung ist z. B., daß eine Ecke des Dreiecks auf einer gegebenen Gerade liegen soll, eine doppelt zählende, daß eine Ecke des Dreiecks gegeben ist.

Die wenigen Ausnahmefälle werden gesondert behandelt werden.

Im Verzeichnis haben wir 5 Vertikalreihen zu unterscheiden. In der dritten stehen die Kombinationen, in den andern gewisse Zahlen, deren Bedeutung jetzt erklärt werden soll. Die erste und letzte der Zahlenreihen sind stets ausgefüllt, die beiden inneren nicht immer. Die erste Vertikalreihe enthält die 229 laufenden Nummern der Kombinationen. Unter dieser ersten Nummer werden die Kombinationen auch später stets zitiert werden. Genügen die betreffenden 3 Punkte zur Bestimmung, so hat die Kombination noch eine zweite Nummer, die in der zweiten Vertikalreihe steht. Diese Nummerierung zeigt, daß unter den 229 wesentlich voneinander verschiedenen Kombinationen nur 170 vorhanden sind, die das Dreieck vollständig bestimmen. Besitzt eine Kombination noch eine Nummer in der vierten — vorletzten — Vertikalreihe, so wird sie aus irgend einem Grunde in den Paragraphen 5 bis 9 gesondert besprochen. Diese Nummer gibt dann an, an wievielter Stelle diese Besprechung stattfindet, und findet sich auch dort rechts von der Kombination wieder. Die Bedeutung der Zahlen 1, 3, 6 in der fünften Vertikalreihe ist oben schon erläutert worden. — Alle Aufgaben, die vorn zwei Nummern, in der vierten Vertikalreihe aber keine Nummer haben, sind leicht lösbar und ohne weiteres zu Schüleraufgaben geeignet. Die Kombinationen, die vorn nur eine Nummer, in der vierten Vertikalreihe aber keine Nummer haben, sind sofort als nicht genügend zur Bestimmung erkennbar. Besonders hübsche, nicht zu schwere Aufgaben sind durch ein † gekennzeichnet. Auch von ihnen gelangen einige später zur Behandlung.

3.

Verzeichnis

der 229 wesentlich von einander verschiedenen Kombinationen der 19 Punkte zur Klasse 3*.

A. Kombinationen mit mehreren Ecken.

1	1	C A	B		1
2			M		3
3	2		H		3
4	3		F †		3
5	4		S		3
6			H_c		6
7			H_b		3
8	5		S_c		6
9			S_b		3
10	6		J_c		6
11	7		J_b †		3
12	8		G_c		6
13	9		G_b		3

B. Kombinationen mit einer Ecke.

14	10	C M	H		3
15	11		F		3
16	12		S		3
17	13		H_c		3
18	14		H_a		6
19	15		S_c		3
20			S_a		6
21	16		J_c		3
22	17		J_a †	30	6

*) Zur Vereinfachung des Satzes sind in dieser Liste alle überflüssigen Zeichen weggelassen worden.

23		C M	G_c		3
24			G_a		6
25	18	C H	F		3
26	19		S		3
27			H_c		3
28			H_a		6
29	20		S_c		3
30	21		S_a		6
31			J_c		3
32	22		J_a		6
33			G_c		3
34			G_a		6
35	23	C F	S		3
36	24		H_c		3
37	25		H_a †		6
38	26		S_c		3
39	27		S_a		6
40	28		J_c		3
41	29		J_a †		6
42	30		G_c †	31	3
43	31		G_a †	32	6
44		C S	H_c		3
45	32		H_a †		6
46			S_c		3
47	33		S_a		6
48	34		J_c		3
49	35		J_a	47	6
50	36		G_c †		3
51	37		G_a †	33	6
52	38	C H_c	H_a		6
53			S_c		3
54			S_a		6
55			J_c		3
56	39		J_a †		6

57		C H_c G_c		3
58	40	C H_c G_a †		6
59	41	C H_a H_b		3
60	42	S_c		6
61		S_a		6
62		S_b		6
63		J_c		6
64		J_a		6
65	43	J_b †		6
66	44	G_c		6
67		G_a		6
68	45	G_b †		6
69	46	C S_c S_a		6
70	47	J_c		3
71	48	J_a	48	6
72	49	G_c		3
73	50	G_a †	34	6
74	51	ℭ S_a S_b		3
75	52	J_c		6
76	53	J_a †		6
77	54	J_b		6
78	55	G_c		6
79	56	G_a †		6
80	57	G_b		6
81	58	ℭ J_c J_a		6
82		G_c		3
83		G_a		6
84	59	ℭ J_a J_b	50	3
85	60	G_c †	19	6
86	61	G_a		6
87	62	G_b	36	6
88	63	ℭ G_c G_a		6
89		ℭ G_a G_b		3

C. Kombinationen ohne Ecken, aber mit den merkwürdigen 4 Punkten der Eulerschen Gerade.

90		M H F		1
91		S		1
92	64	H_c		3
93	65	S_c		3
94	66	J_c		3
95	67	G_c		3
96		M F S		1
97	68	H_c		3
98	69	S_c		3
99	70	J_c		3
100	71	G_c		3
101	72	M S H_c		3
102	73	S_c		3
103	74	J_c		3
104	75	G_c		3
105	76	M H_c H_a	3	3
106		S_c		3
107	77	S_a †	37	6
108	78	J_c		3
109	79	J_a †	38	6
110	80	G_c		3
111	81	G_a	4	6
112	82	M S_c S_a		3
113	83	J_c		3
114	84	J_a	39	6
115	85	G_c		3
116	86	G_a †	40	6
117	87	M J_c J_a	51	3
118	88	G_c		3
119	89	G_a †	20	6
120		M G_c G_a		3

121		H F	S		1
122	90		H_c		3
123	91		S_c		3
124	92		J_c		3
125	93		G_c		3
126	94	H S	H_c		3
127	95		S_c		3
128	96		J_c		3
129	97		G_c		3
130	98	H H_c	H_a		3
131			S_c		3
132	99		S_a		6
133			J_c		3
134			J_a		6
135			G_c		3
136	100		G_a		6
137	101	H S_c	S_a	52	3
138	102		J_c		3
139	103		J_a		6
140			G_c		3
141	104		G_a †		6
142	105	H J_c	J_a		3
143			G_c		3
144			G_a		6
145	106	H G_c	G_a		3
146	107	F S	H_c		3
147	108		S_c		3
148	109		J_c		3
149	110		G_c		3
150		F H_c	H_a		3
151			S_c		3
152			S_a		6
153			J_c		3
154			J_a		6

155	111	F H_c G_c		3
156	112	G_a	5	6
157		F S_c S_a		3
158		J_c		3
159		J_a		6
160	113	G_c		3
161	114	G_a	21	6
162		F J_c J_a		3
163	115	G_c		3
164	116	G_a	22	6
165	117	F G_c G_a	6	3
166	118	S H_c H_a	7	3
167		S_c		3
168	119	S_a		6
169	120	J_c		3
170	121	J_a †	41	6
171	122	G_c		3
172	123	G_a	8	6
173	124	S S_c S_a		3
174	125	J_c		3
175	126	J_a	49	6
176	127	G_c		3
177	128	G_a †	35	6
178	129	S J_c J_a	53	3
179		G_c	1	3
180	130	G_a	9	6
181	131	S G_c G_a	10	3

D. Kombinationen ohne Ecken und ohne merkwürdige Punkte der Eulerschen Gerade.

182	132	H_c H_a H_b	1
183	133	S_c	6
184		S_b	3
185	134	J_c	6

186		H_c H_a J_b		3
187	135	G_c		6
188	136	G_b	11	3
189	137	H_c S_c S_a †	42	6
190		J_c		3
191	138	J_a †		6
192		G_c		3
193	139	G_a	12	6
194	140	H_c S_a S_b		3
195	141	J_c		6
196		J_a		6
197	142	J_b †		6
198	143	G_c		6
199	144	G_a	13	6
200	145	G_b	14	6
201	146	H_c J_c J_a		6
202		G_c		3
203	147	G_a †	24	6
204	148	H_c J_a J_b		3
205		G_c	2	6
206	149	G_a †	43	6
207	150	G_b †	25	6
208	151	H_c G_c G_a		6
209	152	H_c G_a G_b	15	3
210	153	S_c S_a S_b		1
211		J_c		6
212	154	J_b		3
213	155	G_c	16	6
214	156	G_b	54	3
215		S_c J_c J_a		6
216	157	G_c		3
217	158	G_a	23	6
218	159	S_c J_a J_b		3
219	160	G_c	26	6

220	161	$S_c\ J_a\ G_a$	44	6
221	162	G_b	45	6
222	163	$S_c\ G_c\ G_a$	17	6
223	164	$S_c\ G_a\ G_b$	18	3
224	165	$J_c\ J_a\ J_b$		1
225	166	$J_c\ J_a\ G_c$ †	27	6
226	167	$J_c\ J_a\ G_b$	46	3
227	168	$J_c\ G_c\ G_a$ †	28	6
228	169	$J_c\ G_a\ G_b$ †	29	3
229	170	$G_c\ G_a\ G_b$		1

In der letzten Vertikalreihe steht 9 mal die 1, 120 mal die 3, 100 mal die 6. Die Summe aller dieser Zahlen ist daher $9 + 360 + 600 = 969$, und diese Zahl muß ja, wie wir schon in Nr. 2 bemerkten, herauskommen, wenn das Verzeichnis vollständig ist.

4.

Ehe wir zur Besprechung der einzelnen Aufgaben gehen, stellen wir der späteren Kürze wegen alle diejenigen Sätze zusammen, die wir bei den Auflösungen voraussetzen. Treten sie als Gründe auf, so werden sie einfach durch die hier angegebenen römischen Ziffern zitiert.

I. Der Höhenschnittpunkt liegt symmetrisch zum Schnittpunkte jeder Höhe mit dem Umkreise in bezug auf die zu der Höhe gehörende Seite.

II. Der doppelte Abstand des Umkreismittelpunktes von einer Seite ist gleich dem Eckenabschnitte* der zur selben Seite gehörenden Höhe.

III. Die Fußpunkte der Höhen, Mittelpunkte der Seiten, Mittelpunkte der Eckenabschnitte der Höhen liegen auf demselben Kreise, dem Feuerbachschen Kreise oder Neunpunktekreise.

IV. Der Durchmesser dieses Kreises ist gleich dem Radius des Umkreises.

V. Im Mittelpunkte des Feuerbachschen Kreises schneiden sich die 3 Geraden, welche den Mittelpunkt je eines Ecken-

*) Dieses Wort hält der Verfasser für besser als die gebräuchlichere Bezeichnung „obrer Höhenabschnitt".

abschnittes mit dem Mittelpunkte der zugehörigen Seite verbinden.

VI. Der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises und der Mittelpunkt des Umkreises, sowie der Höhenschnittpunkt und der Schwerpunkt liegen in einer geraden Linie, der Eulerschen Gerade, und bilden einen harmonischen Punktwurf. Das zweite Punktepaar teilt nämlich die Strecke des ersten innerlich und äußerlich im Verhältnis 1 : 2.

5.

Daß die nur mit einer vorderen Nummer versehenen Kombinationen nicht zur Bestimmung eines Dreiecks genügen, ist bis auf wenige Fälle sofort klar. Diese letzteren aber — es sind nur zwei — seien sofort erledigt. Bei jeder der im folgenden behandelten Aufgaben steht links eine Nummer, die mit der ersten Nummer des Verzeichnisses identisch ist, und rechts steht eine laufende Nummer, die sich im Verzeichnis in der vierten Vertikalreihe, also gleich rechts von der Kombination, wiederfindet.

179 $S\ J_c\ G_c$ 1

T_c sei der Fußpunkt der Winkelrechten von S auf $J_c\, G_c$. Es finden dann auf $C\, G_c$ die folgenden Streckenbeziehungen statt:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad C\,H = 2\,J_c\,H\\
&2)\quad H\,G_c = 2\,H\,H_c \text{ (Satz I)}\\
&3)\quad C\,T_c = 2\,T_c\,H_c.
\end{aligned}
$$

Sie ermöglichen folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
T_c\,G_c &= C\,H + H\,G_c - C\,T_c\\
&= 2\,J_c\,H + 2\,H\,H_c - 2\,T_c\,H_c\\
&= 2(J_c\,H + H\,H_c - T_c\,H_c)\\
&= 2\,J_c\,T_c.
\end{aligned}
$$

Diese Beziehung läßt sich übrigens auch aus den im Verhältnis 2 : 1 ähnlichen Dreiecken $A\,B\,C$ und $S_b\,S_a\,H_c$ ersehen*, in denen $T_c\ G_c$ und $T_c\ J_c$ entsprechende Strecken sind.

Sind nun G_c und J_c gegeben, so ist T_c bestimmt, und damit ist ein Ort für S bekannt. Unsere Kombination genügt also nicht.

205 $H_c\ J_a\ G_c$ 2

L_c sei der Fußpunkt der Winkelrechten** von J_a auf $H_c\ G_c$. L_c liegt dann erstens auf der Verlängerung von $G_c\ H_c$ ***, zweitens auf dem Kreise um H_c mit $\frac{1}{2} G_c\ H_c$. Durch H_c und G_c ist daher ein Ort für J_a bestimmt, nämlich die Winkelrechte in L_c auf $G_c\ H_c$.

6.

Nach Ausscheidung aller 59 zur Bestimmung nicht genügenden Kombinationen bleiben, wie die zweiten Nummern des Verzeichnisses andeuten, 170 Aufgaben übrig, die aber, wie zu erwarten, nicht alle einer Lösung mit Zirkel und Lineal zugänglich sind. Wir geben daher zunächst ein Verzeichnis derjenigen Aufgaben, deren Lösung uns nicht gelungen ist. Bei allen sind wir auf Gleichungen oder Kurven höheren Grades gelangt, die eine Lösung als unmög-

---

* Vgl. hierzu die Behandlung der Aufgabe 214.

** Der Verfasser vermeidet — auch im Unterrichte — die Worte „Senkrechte“ und „Lot“ und hebt sie für ihre sinngemäße Anwendung auf. Leider kann ja ihre wirkliche Bedeutung augenblicklich nur durch das Fremdwort „Vertikale“ allen verständlich wiedergegeben werden. Eine störende Unklarheit, die sich besonders im physikalischen Unterrichte geltend macht, wird durch den Gebrauch des Wortes „Winkelrechte“ beseitigt. Man vgl. hierzu J. C. V. Hoffmann, Vorschule der Geometrie, Halle a. S. bei Louis Nebert, 1874, S. 16.

***) Unter Verlängerung von AB versteht man wohl jetzt allgemein diejenige über B hinaus, unter der von BA die über A hinaus. Man vermeidet dadurch eine recht schwerfällige veraltete Ausdrucksweise und führt die Schüler auf leichtestem Wege zum Verständnis des Begriffes „Sinn“ auf einer Gerade.

lich erscheinen ließen. Ein Irrtum bei den teilweise recht schwierigen Rechnungen ist nicht ausgeschlossen. Sollte daher die eine oder andre der angegebenen Aufgaben trotzdem sich konstruieren lassen, so wäre der Verfasser für eine diesbezügliche Mitteilung außerordentlich dankbar. Als recht interessant ist hier festzustellen, daß alle Aufgaben, bei denen mindestens eine Ecke gegeben ist, lösbar sind. Nicht gelungen ist uns die Lösung von folgenden 16 Aufgaben:

105	$M\ H_c\ H_a$	3
111	$M\ H_c\ G_a$	4
156	$F\ H_c\ G_a$	5
165	$F\ G_c\ G_a$	6
166	$S\ H_c\ H_a$	7
172	$S\ H_c\ G_a$	8
180	$S\ J_c\ G_a$	9
181	$S\ G_c\ G_a$	10
188	$H_c\ H_a\ G_b$	11
193	$H_c\ S_c\ G_a$	12
199	$H_c\ S_a\ G_a$	13
200	$H_c\ S_a\ G_b$	14
209	$H_c\ G_a\ G_b$	15
213	$S_c\ S_a\ G_c$	16
222	$S_c\ G_c\ G_a$	17
223	$S_c\ G_a\ G_b$	18

7.

Gehen wir nun zu den Kombinationen, die uns lösbare Aufgaben darbieten, so finden wir unter ihnen eine große Anzahl rechte leichte. Hier sollen natürlich nur die schwierigeren oder uns besonders schön erscheinenden behandelt werden. Wir können sie sofort in zwei Gruppen teilen, nämlich in solche mit geometrischer Analysis und in solche, bei denen wir auch die Algebra zur Lösung heranziehen. Aufgaben der letzteren Art finden sich wohl in keiner der bekannten Aufgabensammlungen. Bei den Aufgaben mit bloß geometrischer Analysis kommen hübsche Anwendungen des Apollonischen Ortes vor, die uns auch noch nicht bekannt waren und bei ihrer Einfachheit und Durchsichtigkeit sich gut zur Belebung des Aufgabengebietes in OII eignen. Die Aufgaben, die wir nur wegen ihrer Schönheit behandelt haben, sind im folgenden wieder durch ein † gekennzeichnet. Die übrigen haben sämtlich eine nicht ohne weiteres ersichtliche Lösung. Die Besprechung geschieht stets nur bis zu dem Punkte ausführlich, wo die wirklichen Hindernisse der Lösung überwunden sind. Meist ist auch noch der vom Verfasser für gangbarst gehaltene weitre Weg kurz angedeutet.

8.

Aufgaben mit nur geometrischer Analysis.

Die ersten 11 der folgenden Aufgaben werden unter Benützung des Apollonischen Ortes gelöst.

85 † $C\ J_a\ G_c$ 19

Lösung a). Da $A J_a = H J_a$ ist, so liegt A erstens auf der zu $C G_c$ in bezug auf J_a symmetrischen* Gerade. Ferner ist $A H = A G_c$, also verhält sich

$$A J_a : A G_c = 1 : 2,$$

und folglich liegt A zweitens auf dem Kreise des Apollo-

*) Man ist bestrebt, die Schulgeometrie durch Betrachtungsweisen der geometrischen Verwandtschaftstheorie zu befruchten. Auch in dieser Arbeit ist daher wenigstens die Ausdrucksweise der neueren Geometrie überall wo angängig angewandt worden. So wird nicht mehr gesagt: „Wir verlängern Z Y um sich selbst bis X", sondern: „Wir konstruieren den zu Z in bezug auf Y symmetrischen Punkt." Nicht bloß die Symmetrie nach einem Punkte wird verwertet, sondern auch die nach einer Gerade (axiale Symmetrie). Auch die Ähnlichkeit und die Kongruenz zwischen zwei Dreiecken wird in der Ausdrucksweise der Verwandtschaftstheorie behandelt.

nius, der $J_a\,G_c$ im Verhältnis 1 : 2 teilt.* Nun läßt sich erst H, dann B bestimmen.

Lösung b). Der konstruierbare Fußpunkt der Winkelrechten von J_a auf $C\,G_c$ sei L_c. Dann ist H_z bestimmt als der Punkt, der $L_c\,G_c$ innen im Verhältnis 1 : 2 teilt.

119 $\dagger\ M\ J_c\ G_a$ 20

C liegt erstens auf dem Kreise um M mit $M\,G_a$, zweitens auf dem Apollonischen Kreise, der zu $J_c\,G_a$ und dem Verhältnis 1 : 2 gehört.

161 $F\ S_c\ G_a$ 21

Da $J_c\,S_c$ Durchmesser des Feuerbachschen Kreises ist (V), so ist J_c als symmetrisch zu S_c in bezug auf F gelegener Punkt bestimmt. Nun ist $J_c\,S_c = G_a\,M$, und folglich ist der Kreis um G_a mit $J_c\,S_c$ ein Ort für M. Einen zweiten erhalten wir auf folgende Weise. U sei die vierte Ecke des Parallelogramms, das $J_c\,S_c$ und $J_c\,G_a$ als Seiten hat. U ist konstruierbar. Da die Strecke C M parallel und gleich $J_c\,S_c$ ist, so hat sie diese beiden Eigenschaften auch in bezug auf $G_a\,U$, und das Viereck $M\,C\,G_a\,U$ ist daher ebenfalls ein Parallelogramm. Daraus folgt

$$C\,G_a = M\,U.$$

Ferner ist nach Satz II

$$C\,J_c = M\,S_c$$

Da nun

$$C\,G_a = 2\,C\,J_c,$$

---

*) Eine Strecke X Y wird in Z im Verhältnis 1 : 2 geteilt, soll natürlich bedeuten, daß $X\,Z : Y\,Z = 1 : 2$, nicht etwa, daß $Y\,Z : X\,Z = 1 : 2$. Durch diese Festsetzung wird oft beobachtete Unklarheit vermieden. Wenn wir ferner vom Apollonischen Kreise sagen, daß er zu X Y und dem Verhältnis 1 : 2 gehört, so meinen wir, daß er X Y, nicht etwa Y X, innerlich und äußerlich im Verhältnis 1 : 2 teilt. Damit sind alle Zweifel beseitigt, gegen die man gerade an dieser Stelle in der Schule zu kämpfen hat.

so ist auch

$$MU = 2\,M\,S_c.$$

Als zweiter Ort für M ergibt sich daher der Apollonische Kreis, der zu $S_c\,U$ und dem Verhältnis $1:2$ gehört. C liegt dann auf den Kreisen um J_c mit $M\,S_c$ und um G_a mit MU.

164 $F\ J_c\ G_a$ 22

und

217 $S_c\ J_c\ G_a$ 23

lassen sich sofort auf die vorhergehende Aufgabe zurückführen.

203 $\dagger\ H_c\ J_c\ G_a$ 24

C liegt auf $H_c\ J_c$ und auf dem Kreise des Apollonius, der zu $J_c\ G_a$ und dem Verhältnis $1:2$ gehört. Die weitre Lösung ergibt sich sehr elegant, wenn zunächst H bestimmt wird.

207 $\dagger\ H_c\ J_a\ G_b$ 25

Da $J_a\ H_c = J_a\ A$ ist, so ergibt sich folgende hübsche Lösung: A liegt erstens auf dem Kreise um J_a mit $J_a\ H_c$ und zweitens auf dem zu $J_a\ G_b$ und dem Verhältnis $1:2$ gehörenden Apollonischen Kreise. Nun ist auch H, hierdurch B und endlich C bestimmt.

219 $S_c\ J_a\ G_c$ 26

E sei der Schnittpunkt von $J_a\ G_c$ mit $A\,B$. Da $A\,E$ die Winkelhalbierende des Winkels $J_a\ A\ G_c$ ist, so verhält sich

$$\begin{aligned} J_a\,E : G_c\,E &= J_a\,A : G_c\,A \\ &= 1:2 \end{aligned}$$

E ist also bestimmt als der Punkt, der $J_a\ G_c$ innen im Verhältnis $1:2$ teilt.

A liegt nun erstens auf $S_c\ E$ und zweitens auf dem Kreise des Apollonius, der $J_a\ G_c$ im Verhältnis $1:2$ teilt.

Dieser Kreis geht übrigens durch E, sodaß die Konstruktion recht einfach wird. Es lassen sich nun der Reihe nach B, H, C bestimmen.

225 † J_c J_a G_c 27

Da $J_a A = J_a H$ ist, so liegt A erstens auf der zu $J_c G_c$ in bezug auf J_a symmetrischen Gerade und zweitens auf dem Kreise des Apollonius, der zu $J_a G_c$ und dem Verhältnis 1 : 2 gehört. Dann werden der Reihe nach H, C, B bestimmt.

227 † J_c G_c G_a 28

und

228 † J_c G_a G_b 29

enthalten beide ebenfalls recht hübsche Anwendungen des Apollonischen Ortes.

---

22 † C M J_a 30

Nach Satz IV und V ist $J_a S_a$ gleich dem Radius des Umkreises, also gleich C M. Punkt S_a liegt daher erstens auf dem Kreise um J_a mit C M, zweitens auf dem Kreise, der C M als Durchmesser hat. Hierauf sind B, H_a, A konstruierbar.

42 † C F G_c 31

M liegt erstens auf der Mittelrechten* von C G_c. Da nach VI M F gleich H F ist, so ergibt sich als zweiter Ort von M die Gerade, die zu C G_c symmetrisch ist in bezug auf F. Weiter sind bestimmt der Umkreis, H, H_c, A, B.

43 † C F G_a 32

Da C H gleich C G_a ist, so ist für H als erster Ort der Kreis um C mit C G_a bekannt. Punkt M liegt auf der Mittelrechten von C G_a. Nun ist nach VI H F gleich M F.

---

*) Dieses Wort wenden wir statt Mittelsenkrechte oder — nach unsrer Ausdrucksweise — statt Mittelwinkelrechte als abkürzende, aber wohl treffende Bezeichnung an.

Folglich ist der zweite Ort für H die Gerade, die zu Mittelrechten von CG_a symmetrisch liegt in bezug auf F.

51 † $C\ S\ G_a$ 33

Zunächst ist S_c bestimmt als Punkt, der C S außen im Verhältnis 3 : 1 teilt. Satz II sagt aus, daß $S_c\, M$ gleich $\frac{1}{2}$ H C, mithin auch gleich $\frac{1}{2}$ $C\, G_a$ ist. M liegt daher einmal auf dem Kreise um S_c mit $\frac{1}{2}$ $C\, G_a$, das andremal auf der Mittelrechten von $C\, G_a$. Umkreis, A, B sind nun sofort bestimmt.

73 † $C\ S_c\ G_a$ 34

und

177 † $S\ S_c\ G_a$ 35

sind von der soeben gegebenen Aufgabe nur unwesentlich verschieden.

87 $C\ J_a\ G_b$ 36

Ist L_b der Fußpunkt der Winkelrechten von J_a auf $B\, G_b$, so halbiert L_b die Strecke $H\, H_b$. Folglich verhält sich

$$H\, L_b : G_b\, L_b = 1 : 3.$$

Denken wir noch durch L_b zu H C die Parallele gezogen, die $C\, G_b$ in V trifft, so ist V der Punkt, der $C\, G_b$ innen im Verhältnis 1 : 3 teilt. V ist daher bekannt. Das Dreieck $G_b\, V\, L_b$ ist nun dem gleichschenkligen Dreieck G_b C H ähnlich, und folglich ist es selbst gleichschenklig. — L_b liegt daher erstens auf dem Kreise um V mit $V\, G_b$ und zweitens auf dem Kreise, der $G_b\, J_a$ als Durchmesser hat. Wir erkennen weiterhin die Punkte H, H_b, A, B als konstruierbar.

107 † $M\ H_c\ S_a$ 37

B und C haben als ersten Ort die Winkelrechte auf $S_a\, M$ in S_a errichtet, als zweiten den Kreis, um S_a mit $S_a\, H_c$ geschlagen. Nun sind auch S_c und A bestimmt.

109 † $M\ H_c\ J_a$ 38

Die konstruierbare Mittelrechte von $J_a H_c$ geht durch F. Da nach VI H F gleich M F ist, so liegt H erstens auf der Gerade, die gleichen, aber entgegengesetzten Abstand von der Mittelrechten wie M hat. Zweitens liegt H auf dem Kreise um J_a mit $J_a H_c$. Nun ist sofort A, dann B und C bestimmt.

114 $M\ S_c\ J_a$ 39

Im Dreieck H A C halbiert $J_a S_b$ zwei Seiten. Daher ist

$$1)\ J_a S_b \parallel H C$$
$$2)\ 2 J_a S_b = H C.$$

Ebenso ist aber

$$1)\ S_c M \parallel H C$$
$$2)\ 2 S_c M = H C\ (II).$$

Daraus folgt, daß $J_a S_b$ und $S_c M$ parallel und gleich sind. Mithin ist S_b als vierte Ecke des Parallelogramms bestimmt, das $S_c M$ und $S_c J_a$ zu Seiten hat. Nun sind der Reihe nach konstruierbar F, Umkreis, H, A, B und C.

116 † $M\ S_c\ G_a$ 40

Umkreis, A und B sind sofort bestimmt. C ist der Schnittpunkt des Umkreises und des Kreises um G_a mit $2\ M S_c$ (vgl. Aufg. 51).

170 † $S\ H_c\ J_a$ 41

Die Mittelrechte von $H_c J_a$ ist konstruierbar und geht durch F. Da H F gleich 3 S F ist (VI), so liegt H erstens auf der Parallele zu unsrer Mittelrechten in einem Abstande gezogen, der entgegengesetzt dreimal so groß ist wie der des Punktes S von der Mittelrechten. Zweitens liegt H auf dem Kreise um J_a mit $J_a H_c$. Nun sind auch A, F, J_c, C, S_c, B konstruierbar.

189 † $H_c\ S_c\ S_a$ 42

Zunächst ist F bestimmt als Mittelpunkt des durch die drei gegebenen Punkte gehenden Kreises. J_a liegt auf diesem Kreise und der Verlängerung von S_a F (V). Da nun J_a H_c gleich J_a A ist, so ist A konstruierbar als Schnittpunkt von S_c H_c und dem Kreise um J_a mit J_a H_c. Dann werden B und C bestimmt.

206 $\dagger H_c$ J_a G_a 43

A und H liegen erstens auf der Gerade J_a G_a, zweitens auf dem Kreise um J_a mit J_a H_c. Dadurch, daß man nacheinander jeden von den beiden Schnittpunkten als A wählt, erhält man 2 Lösungen. Es lassen sich der Reihe nach H_a, B, C bestimmen.

220 S_c J_a G_a 44

Die Dreiecke S_b A S_c und C A B sind ähnlich, und zwar ist $1 : 2$ ihr Ähnlichkeitsverhältnis. Da A J_a winkelrecht zu S_b S_c und S_c J_a winkelrecht zu S_b A ist, so ist J_a Höhenschnittpunkt des ersten Dreiecks. K_a sei Schnittpunkt von S_b S_c mit A G_a, also Fußpunkt der zu A gehörenden Höhe des Dreiecks S_b A S_c. Dann sind in den beiden ähnlichen Dreiecken die Strecken K_a J_a und H_a H entsprechende Stücke. Folglich ist

$$2\,K_a\,J_a = H_a\,H,$$

mithin auch nach 1

$$2\,K_a\,J_a = H_a\,G_a.$$

Da S_b S_c winkelrecht zu J_a G_a ist, so ist K_a als Fußpunkt der Winkelrechten von S_c auf J_a G_a bestimmt. H_a ist nun konstruierbar als Schnitt von J_a G_a mit dem Kreise, der G_a als Mittelpunkt und $2\,K_a\,J_a$ als Radius hat. Beide Schnittpunkte führen zu gültigen Lösungen. Nun ist H bestimmt. Als ein Ort von A, B, H_b wird der Kreis um S_c mit S_c H_a benützt. Man bekommt dann durch einfaches Verbinden die drei Punkte hintereinander, endlich auch noch C.

221 S_c J_a G_b 45

L_b sei der Fußpunkt der Winkelrechten von J_a auf $B\,G_b$. Da die Gerade $S_c\,J_a$ die Seiten $A\,B$ und $A\,H$ des Dreiecks $B\,A\,H$ halbiert, so ist sie parallel zu $B\,H$ oder $B\,G_b$. L_b ist also bestimmt als Fußpunkt der Winkelrechten, die von J_a auf die Parallele durch G_b zu $S_c\,J_a$ gefällt ist. In Aufgabe 87 wurde die Proportion

$$H\,L_b : G_b\,L_b = 1:3$$

hergeleitet. Aus ihr folgt

$$G_b\,L_b = 3\,H\,L_b$$

H_b und H sind daher bestimmt als die beiden Schnittpunkte der Gerade $G_b\,L_b$ mit dem Kreise um L_b mit $\frac{1}{3}$ $G_b\,L_b$, und zwar liegt H_b auf $G_b\,L_b$ selbst, H auf der Verlängerung. A, B, C werden nun sofort als konstruierbar erkannt.

226 $J_c\,J_a\,G_b$ 46

$J_c\,J_a$ ist parallel zu $A\,C$, also winkelrecht zu $B\,G_b$. Der Schnittpunkt von $B\,G_b$ und $J_c\,J_a$ sei wieder L_b. Er ist bestimmt als Fußpunkt der Winkelrechten von G_b auf $J_c\,J_a$. Die Punkte H_b und H liegen dann ebenso wie in der vorigen Aufgabe erstens auf $G_b\,L_b$ und zweitens auf dem Kreise um L_b mit $\frac{1}{3}\,G_b\,L_b$. Nun sind auch C, A, B bestimmt.

9.

Aufgaben, die mit Hülfe der Algebra gelöst werden.

49 $C\,S\,J_a$ 47

S_c ist bekannt als Punkt, der $C\,S$ außen im Verhältnis 3:1 teilt. $S_c\,J_a$ ist parallel zu $H\,B$ und also winkelrecht zu $C\,A$ (vgl. 221). D sei der Schnittpunkt von $S_c\,J_a$ und $C\,A$. Er ist konstruierbar. Dann ist $D\,A$ gleich $D\,H_b$, weil $S_c\,A$ gleich $S_c\,B$ ist. Wir versuchen, die Länge x der Strecke D A zu bestimmen. Da die Sehnen A C und B G_b des Umkreises sich in H_b schneiden, so besteht die Produktgleichung

(0) $$A H_b \cdot C H_b = B H_b \cdot G_b H_b$$

Nun ist

(1) $$A H_b = 2 x$$
(2) $$C H_b = C D - x$$
(3) $$B H_b = 2 S_c D$$
(4) $$G_b H_b = H H_b (l) = 2 J_a D.$$

Setzen wir die 4 erhaltenen Werte in (0) ein, so ergibt sich

$$2 x (C D - x) = 2 S_c D \cdot 2 J_a D$$

oder $$x (C D - x) = S_c D \cdot 2 J_a D.$$

Nun ist x nach bekannter Methode konstruierbar. Es ergeben sich zwei Werte der Unbekannten. Mit Hülfe von x ist A und dann auch B bestimmt.

71 $C S_c J_a$ 48

und

175 $S S_c J_a$ 49

sind ohne weiteres auf die vorhergehende Aufgabe zurückführbar.

84 $C J_a J_b$ 50

$J_a J_b$ schneide C H in L_c. L_c ist dann bekannt als Fußpunkt der Winkelrechten von C auf $J_a J_b$. Da $J_a J_b$ und $J_c H_c$ Sehnen des Kreises um F sind und sich in L_c schneiden, so besteht die Gleichung

(0) $$H_c L_c \cdot J_c L_c = J_b L_c \cdot J_a L_c.$$

Wir führen nun die folgenden Bezeichnungen ein:

(1) $$C L_c = s$$
(2) $$J_b L_c = m$$
(3) $$J_a L_c = n$$
(4) $$H_c L_c = x.$$

Das Dreieck $J_a\ J_b\ J_c$ ist dem Dreieck $A\,B\,C$ ähnlich im Verhältnis $1:2$; mithin ist

$$(5) \qquad 2\ J_c\ L_c = C\ H_c$$
$$= x + s.$$

Unsere Gleichung (0) nimmt nun, wenn wir sie noch beiderseits mit 2 multiplizieren, mit Hülfe der Gleichungen (2), (3), (4), (5) die Form an

$$x\,(x + s) = 2\ m\ .\ n,$$

woraus x konstruierbar ist. Es lassen sich nun H, H_c, A, B bestimmen.

117 $\qquad M\ J_c\ J_a \qquad$ 51

Die Gerade $M\ S_b$ schneide $J_c\ J_a$ in P, $S_c\ S_a$ in Q, den Feuerbachschen Kreis in R. Da $J_c\ J_a$ zu $C\ A$ parallel und $M\ S_b$ zu $C\ A$ winkelrecht ist, so ist $M\ S_b$ winkelrecht zu $J_c\ J_a$. P ist daher als Fußpunkt der Winkelrechten von M auf $J_c\ J_a$ bestimmt. Im Dreieck $S_a\ S_b\ S_c$ ist M Höhenschnittpunkt und $S_b\ Q$ eine Höhe, mithin ist nach I

$$M\ Q = R\ Q.$$

Viereck $S_c\ M\ S_a\ J_b$ ist ein Parallelogramm, also ist Dreieck $S_c\ M\ S_a$ kongruent $S_a\ J_b\ S_c$. Zu letzterem liegt das Dreieck $J_a\ S_b\ J_c$ symmetrisch in bezug auf $F(V)$, folglich ist auch Dreieck $S_c\ M\ S_a$ kongruent $J_a\ S_b\ J_c$. Die Strecken $M\ Q$ und $S_b\ P$ sind homologe Höhen in den beiden Dreiecken, also gleich groß. Die unbekannte Länge dieser Strecke setzen wir gleich x, dann ist

$$(1) \qquad S_b\ P = M\ Q = R\ Q = x.$$

Bezeichnen wir noch die bekannte Strecke $M\ P$ durch $2\ d$, so wird

$$R\ P = R\ M + M\ P$$
$$(2) \qquad = 2\ x + 2\ d = 2\ (x + d).$$

Endlich setzen wir noch

$$(3) \qquad J_c\ P = m,$$
$$(4) \qquad J_a\ P = n.$$

Es besteht nun, wenn wir die in P sich schneidenden Sehnen S_b R und J_c J_a des Kreises um F betrachten, die Produktgleichung

(0) $$S_b P \cdot R P = J_c P \cdot J_a P.$$

Wenden wir auf (0) die Gleichungen (1) bis (4) an, so erhalten wir

$$x \cdot 2 (x + d) = m \cdot n$$

oder

$$x (x + d) = \frac{m \cdot n}{2}.$$

Damit ist x als konstruierbar erkannt. Jetzt lassen sich S_b, A, C, B bestimmen.

137 $H \; S_c \; S_a$ 52

a) Die Stücke dieser Aufgabe sind denen der soeben behandelten symmetrisch zugeordnet in bezug auf F. Bezeichnete man sie also bezw. mit M, J_c, J_a, so könnte man aus diesen Punkten nach der gegebenen Lösung ein Dreieck A′ B′ C′ konstruieren, das denselben Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises besitzt wie das gesuchte A B C. Da nun F bestimmt ist, so sind A, B, C konstruierbar als die zu A′, B′, C′ in bezug auf F symmetrischen Punkte.

b) Besser ist es aber, die Lösung selbständig vorzunehmen. Im Grunde bleibt sie dieselbe wie die von 117. Die Gerade H B steht winkelrecht auf S_c S_a; ihre Lage und ihr Schnittpunkt K_b mit S_c S_a sind daher bekannt. Ist $L_b = (J_c J_a, H B)$, so ist wieder $K_b J_b = H L_b = H_b L_b$. K_b tritt an die Stelle von P, L_b an die von Q, H_b an die von R in Aufgabe 117. H K_b gleich 2 d ist bekannt, J_b K_b gleich x wird gesucht. Wir haben wieder

$$J_b K_b \cdot H_b K_b = S_c K_b \cdot S_a K_b$$

oder $$x \,.\, 2 (x + d) = m \,.\, n,$$

folglich $$x (x + d) = \frac{m \,.\, n}{2}.$$

178 $S\ J_c\ J_a$ 53

Da F auf der Mittelrechten von $J_c\ J_a$ liegt und H F gleich 3 F S ist (IV), so liegt H auf der Parallele zu der eben genannten Mittelrechten, in einem Abstande gezogen, der entgegengesetzt dreimal so groß ist wie der des Punktes S von der Mittelrechten. Da diese Gerade winkelrecht zu $J_c\ J_a$, also auch zu C A, steht, so ist sie ihrer Lage nach identisch mit B H. Ist Punkt L_b wieder der Schnitt von B H mit $J_c\ J_a$, so ist er bestimmt. T_b sei der Fußpunkt der Winkelrechten von S auf B H. Er ist konstruierbar. Die bekannte Strecke $L_b\ T_b$ werde gleich k gesetzt. Die Sehnen $J_c\ J_a$ und $J_b\ H_b$ des Kreises um F schneiden sich in L_b, und wir erhalten, wenn wir auf beiden Seiten noch den Faktor 2 hinzufügen, die Gleichung

(0) $H_b\ L_b \cdot 2\ J_b\ L_b = 2\ J_a\ L_b \cdot J_c\ L_b.$

Wir suchen hierin die unbekannte Strecke

(1) $H_b\ L_b = x$

zu bestimmen. Wir setzen noch

(2) $J_b\ L_a = m.$

(3) $J_b\ L_c = n.$

Die Strecke $J_b\ L_b$ ist Höhe im Dreieck $J_a\ J_b\ J_c$, das dem Dreieck A B C im Verhältnis 1 : 2 ähnlich ist. In dieser Ähnlichkeit entspricht der Strecke $J_b\ L_b$ die Höhe $B\ H_b$, und es ist also

$$2\ J_b\ L_b = B\ H_b = 3\ H_b\ T_b$$

Da nun $H_b\ T_b = H_b\ L_b + L_b\ T_b = x + k$

ist, so erhalten wir

(4) $2\ J_b\ L_b = 3\ (x + k).$

Unter Anwendung der Gleichungen (1) bis (4) nimmt (0) die Gestalt an:

$$x\ .\ 3\ (x + k) = 2\ m\ .\ n$$

oder $x\ (x + k) = \frac{2}{3}\ m \cdot n.$

Hiernach ist x konstruierbar. Es lassen sich dann der Reihe nach der Reihe nach H, C, A, B bestimmen.

214 $S_c\ S_a\ G_b$ 54

Die Winkelrechte von G_b auf $S_c\ S_a$ ist identisch mit der Höhe B H. Ihr Schnittpunkt K_b mit $S_c\ S_a$ ist konstruierbar. Es besteht die Produktgleichung

$$(0) \qquad 2\ J_b\ K_b \cdot H_b\ K_b = 2\ S_c\ K_b \cdot S_a\ K_b.$$

Wir setzen

$$G_b\ H_b = x$$
$$G_b\ K_b = l$$

ferner

$$(1) \qquad S_c\ K_b = m$$
$$(2) \qquad S_a\ K_b = n.$$

Die Dreiecke $S_a\ S_b\ S_c$ und $S_c\ H_b\ S_a$ sind kongruent, weil sie symmetrisch liegen in bezug auf die Winkelrechte von F auf A C als Axe. Da nun das erste Dreieck dem Dreieck A B C ähnlich ist, so gilt dies auch für das zweite. Das Ähnlichkeitsverhältnis ist 1 : 2. In der Ähnlichkeit zwischen den Dreiecken $S_c\ H_b\ S_a$ und A B C entspricht der Strecke $J_b\ K_b$ die Strecke $G_b\ H_b$, folglich ist

$$2\ J_b\ K_b = G_b\ H_b$$
$$(3) \qquad = x.$$

Nun ist

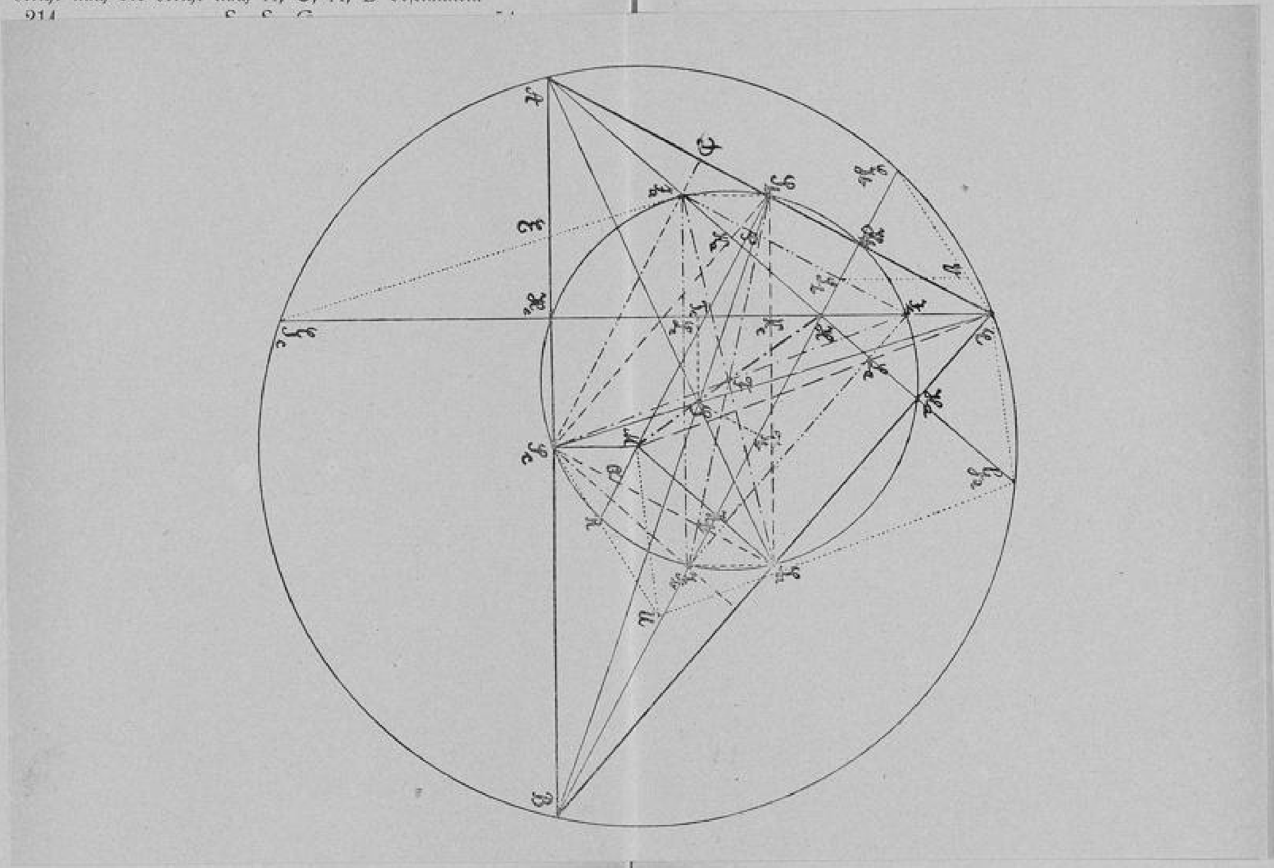
$$H_b\ K_b = G_b\ K_b - G_b\ H_b$$
$$(4) \qquad = l - x.$$

Durch Anwendung der Gleichungen (1) bis (4) bringen wir (0) auf die Form

$$x\ (l - x) = 2\ m\ n.$$

Hieraus finden wir x und erkennen der Reihe nach H_b, B, A, C als konstruierbar.

Hiernach ist x konstruierbar. Es lassen sich dann der Reihe nach der Reihe nach H, C, A, B bestimmen.



Hiernach ist x konstruierbar. Es lassen sich dann der Reihe nach der Reihe nach H, C, A, B bestimmen.

214 S_c S_a G_b 54

Die Winkelrechte von G_b auf S_c S_a ist identisch mit

Hiernach ist x konstruierbar. Es lassen sich dann der Reihe nach der Reihe nach H, C, A, B bestimmen.