Einführung in die Funktionenlehre.

Für Schüler der oberen Klassen an Mittelschulen

dargestellt von Dr. **Erwin Dintzl.**

Vorwort.

Als ich in den beiden verflossenen Schuljahren daran ging, im Unterrichte in der fünften und sechsten Gymnasialklasse gemäß den modernen Reformbestrebungen den Funktionsbegriff zu erläutern, faßte ich den Plan, den von mir in der Schule beobachteten Vorgang in einer kleinen Schrift darzulegen, um dadurch insbesondere meinen eigenen Schülern einen Behelf in die Hand zu geben, worin sie daheim nachlesen können, was in der Unterrichtsstunde vorgetragen wurde. Als der beste Platz hiefür erschien mir der Jahresbericht unserer Anstalt.

Die Literatur[1]) über diesen Gegenstand ist allerdings heute schon eine recht ansehnliche geworden. Wenn ich daher mit meinem Lehrversuche in die Öffentlichkeit trete, so möchte ich diesen Schritt nicht ohne eine kurze Rechtfertigung tun.

Ich beschränke mich in diesem Aufsatze auf die Behandlung der linearen und quadratischen Funktion. Zuerst werden ihre wichtigsten Eigenschaften auf rein algebraischem Wege, soweit dies möglich ist, entwickelt. Es wird gezeigt, welche Werte die Funktion überhaupt annehmen kann. Hiebei muß natürlich hervorgehoben werden, daß das Gebiet der Veränderlichen nur die reellen Zahlen sind. Darauf folgt

---

[1]) Ein ausführliches Literaturverzeichnis enthält der im Auftrage der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte von A. Gutzmer herausgegebene Gesamtbericht: „Die Tätigkeit der Unterrichtskommission . . .", B. G. Teubner, Leipzig 1908. Ferner verweise ich auf F. Kleins „Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen", bearbeitet von R. Schimmack. Teil I: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. B. G. Teubner, Leipzig 1907. In der letzten Zeit sind überdies noch folgende Broschüren erschienen, welche in dem obgenannten Literaturverzeichnis noch nicht enthalten sind:

H. Leschanowsky, Gemeinverständliche erste Einführung in die höhere Mathematik und deren Anwendung. C. Fromme, Wien 1907.

K. Bruno, Die Grundlehren der Integral- und Differentialrechnung. A. Hölder, Wien 1908.

H. Hartl, Erste Einführung in die Elemente der Differential- und Integralrechnung und deren Anwendung zur Lösung praktischer Aufgaben. F. Deuticke, Wien 1908.

eine Untersuchung über die Zu- beziehungsweise Abnahme der Funktion. Die quadratische Funktion bietet bereits ein Beispiel einer Funktion, welche nicht in ihrem ganzen Verlaufe, sondern nur in einzelnen Intervallen „monoton" ist. Den Schluß dieses Kapitels bildet eine kurze Bemerkung über die Umkehrung der genannten Funktionen; bei der quadratischen Funktion führt die Umkehrung zu einer neuen Funktion, deren wichtigste Eigenschaft die Mehrdeutigkeit ist.

In der darauf folgenden geometrischen Interpretation ist es mir nicht darum zu tun, analytische Geometrie zu treiben, ich will lediglich die auf algebraischem Wege gewonnenen Resultate geometrisch veranschaulichen. Soweit lehne ich mich an den Gedankengang an, den Borel[1]) in seinem ausgezeichneten Lehrbuche eingeschlagen hat.

Der geometrischen Veranschaulichung stelle ich als gleichberechtigt die mechanische Interpretation zur Seite. Daher werden auch in besonderen Abschnitten die Gesetze der gleichförmigen und gleichförmig beschleunigten Bewegung besprochen.

Die genauere Untersuchung der Zu- beziehungsweise Abnahme der quadratischen Funktion führt unwillkürlich zu infinitesimalen Betrachtungen. Der Differentialquotient ist als Grenzwert des Quotienten aus der Änderung der Funktion in die entsprechende Änderung des Argumentes definiert. Durch eine scharfe Hervorhebung dieses Grenzprozesses werden nach meiner Meinung ohne viel Schwierigkeiten unklare und falsche Vorstellungen über das Wesen des Differentialquotienten, wie man sie heute in manchen sogenannten populären Darstellungen findet, vom Schüler ferngehalten. Ebenso leicht folgt aus der analytischen Definition, daß der Differentialquotient wiederum eine Funktion des Argumentes ist. Selbstverständlich bespreche ich auch die geometrische Bedeutung des Differentialquotienten als Richtungskoeffizient der Tangente. In manchen Lehrbüchern und Broschüren wird diese Eigenschaft des Differentialquotienten geradezu zur Definition gemacht und unmittelbar auf die Art des Wachstums der Funktion, auf das Eintreten eines Extremums usf. scheinbar mit großer Allgemeinheit angewendet. Ich halte diese Methode für nicht ganz zweckmäßig. Der Differentialquotient ist doch seinem Wesen nach ein rein analytischer Begriff. Wer aber denselben geometrisch einführt, verläßt diesen Weg sofort, wenn er zeigen soll, was für eine Funktion der Abszisse der Richtungskoeffizient ist, daß also z. B. der Richtungskoeffizient der Tangente an die Parabel eine lineare Funktion der Abszisse ist. Ich will damit nicht behaupten, daß die geometrische Ableitung dieser Abhängigkeit unmöglich ist, aber man vermeidet sie aus dem leicht begreiflichen Grunde, weil sie zu langwierig ist.

Das zehnte Kapitel behandelt eine wichtige Eigenschaft des Differentialquotienten, durch welche nach meiner Meinung die Bedeutung dieses Begriffes erst recht verständlich wird. Ich bin mir vollkommen der Schwierigkeiten bewußt, welche gerade diese Ausführungen den Schülern bieten. Indem ich aber auch hier bestrebt bin, Exaktheit mit Anschaulichkeit zu vereinigen, hoffe ich die Schwierigkeiten

---

[1]) Émile Borel, Algèbre, second cycle. Colin, Paris 1904. Auf die Bedeutung dieses Buches hat bereits E. Czuber in seinem gelegentlich der 77. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran am 25. September 1905 gehaltenen Vortrage (abgedruckt im 15. Bande des Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1906) hingewiesen.

zu vermindern. Eine Besprechung der Ordnung unendlich kleiner Größen halte ich schon deshalb für notwendig, weil daraus der Unterricht in der mathematischen Physik Nutzen ziehen kann. Wodurch sind denn manche mathematischen Ableitungen physikalischer Gesetze in Verruf gekommen? Dadurch, daß man sich über die Ordnung der vernachlässigten Größen keine Rechenschaft ablegt. (Vgl. z. B. die Ableitungen der Hohlspiegelgleichung und der Linsenformel.) Das einemal behält man eine unendlich kleine Größe bei, das anderemal vernachlässigt man sie wieder. Wenn man aber darauf aufmerksam macht, daß die beibehaltenen Größen z. B. von der ersten Ordnung, die weggelassenen dagegen von der zweiten Ordnung sind, dann wird auch der Schüler den Wert dieser Ableitung besser verstehen.

Ebenso wie ich bei der Behandlung der linearen Funktion den ersten Differentialquotienten noch nicht besprochen habe, so verzichte ich auch bei der Behandlung der quadratischen Funktion auf die Einführung des zweiten Differentialquotienten. Ich halte mich in dieser Beziehung an den bekannten Grundsatz, im Unterrichte die Begriffe erst an der Stelle einzuführen, wo sie wirklich nötig sind.

Die Beispiele, welche ich einigen Kapiteln hinzugefügt habe, erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit, ich wollte bloß einige Typen von Aufgaben insbesondere dort erwähnen, wo die bisher erschienenen Aufgabensammlungen Lücken aufweisen.

Ich hätte gerne noch die linear gebrochenen Funktionen und ihre wichtigsten Eigenschaften entwickelt. Aus Raummangel muß dies jedoch unterbleiben. An dessen Stelle füge ich im Anhange eine kurze zahlentheoretische Skizze hinzu. Die Diophantischen Gleichungen sind im jetzigen Lehrplane für Gymnasien an verhältnismäßig später Stelle (siebente Klasse) eingefügt[1]). Als Grund hiefür dürfte wahrscheinlich der Umstand maßgebend gewesen sein, daß man es hier zum ersten Male mit einer unendlichen Menge von Lösungen zu tun hat und daß anderseits das Eulersche Reduktionsverfahren formale Schwierigkeiten bietet, wenn man — wie es ja streng genommen geschehen soll — zeigen will, daß die Methode auch immer zu einer Lösung führen muß. Die von mir benützte Methode vermeidet diese Schwierigkeit. Dieselbe knüpft an eine Eigenschaft des größten gemeinsamen Teilers an, welche bekanntlich für die Lehre von der Teilbarkeit von fundamentaler Wichtigkeit ist und leider im Unterrichte noch immer zu wenig gewürdigt wird. Entsprechend dem skizzenhaften Charakter dieses Abschnittes sind nur ein paar besondere Beispiele ausgeführt; die allgemeine Methode kann man daraus ohne viel Mühe ableiten. Im neuen Lehrplan könnte man nach meiner Meinung die Auflösung der Diophantischen Gleichungen am besten im Anschlusse an die lineare Funktion behandeln.

Zum Schlusse will ich noch kurz erwähnen, in welcher Weise ich die neue Materie in den gegenwärtigen Lehrstoff eingefügt habe. In der fünften Klasse besprach ich nach der Auflösung der linearen Gleichungen den Funktionsbegriff, die graphische Darstellung tabellarischer Übersichten und die lineare Funktion mit ihrer geometrischen und mechanischen Veranschaulichung. In der sechsten Klasse folgte auf

[1]) Im Lehrplan der Realschulen sind sie bemerkenswerterweise bereits der fünften Klasse zugewiesen.

die Auflösung der quadratischen Gleichungen am Ende des zweiten Semesters die Besprechung der quadratischen Funktion und ihrer wichtigsten Eigenschaften, soweit sie im siebenten und achten Kapitel dieses Aufsatzes enthalten sind. Die übrigen Abschnitte wies ich dem Lehrstoffe der siebenten Klasse zu.

Wien, im Juli 1908.

E. Dintzl.

I. Der Funktionsbegriff.

Eine lineare Gleichung, z. B.

$$4x + 3 = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

drückt bekanntlich die Forderung aus, jenen Wert von x zu bestimmen, für welchen der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung gerade den Wert Null annimmt. Ebensogut könnten wir natürlich nach jenen Werten von x fragen, für welche $4x + 3$ gleich -9 oder -1 oder 4 usf. wird. Im folgenden sind eine Reihe solcher besonderer Aufgaben gelöst und die Resultate in einer Tabelle zusammengestellt. In der ersten Zeile stehen die Werte des Ausdruckes $4x + 3$, in der zweiten die entsprechenden Werte von x.

$4x + 3$	-9	-7	-1	0	2	3	4	11
x	-3	$-2\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	2

Um einen dieser Werte von x zu finden oder allgemeiner gesprochen, um die Wurzel irgend einer linearen Gleichung zu berechnen, formen wir die Gleichung so lange um, bis die linke Seite bloß x und die rechte Seite die übrigen bekannten Größen enthält. Hiebei behalten aber alle Größen, welche in der Aufgabe vorkommen, während einer und derselben Rechnung ihren bestimmten Wert bei. Auch mit der Wurzel x verbinden wir die Vorstellung einer zwar anfangs noch unbekannten, aber völlig unveränderlichen Größe.

Ich will nun umgekehrt zuerst dem x bestimmte Werte beilegen. Was geschieht dann mit dem Ausdrucke $4x + 3$? Für ein paar Einzelwerte legen wir wieder eine kleine Tabelle an.

x	-10	-5	-2	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3
$4x + 3$	-37	-17	-5	-1	0	1	3	7	11	15

Die in einer Spalte stehenden Zahlen bedeuten die zu einander gehörigen Werte von x und $4x + 3$. Nur ist jetzt der Wert von x

vorgegeben. Aus diesen angeführten Beispielen können wir u. a. schließen, daß jedem Werte von x ein ganz bestimmter Wert von $4x + 3$ entspricht; ferner daß sich mit dem Werte von x auch der Wert des Ausdruckes $4x + 3$ ändert.

Und nun gehe ich noch einen Schritt weiter und frage: Wie ändert sich der Wert des Ausdruckes $4x + 3$, wenn ich dem x alle möglichen Werte beilege? Diese Frage wird manchem für den ersten Augenblick fremdartig klingen, insbesondere wenn er nur an das denkt, was in Arithmetik und Geometrie bisher gelehrt wurde. Aber erinnern Sie sich einmal an die Mechanik, an die Lehre von den Bewegungen. Wie hatten wir z. B. das Fallen der Körper untersucht? Zuerst fragten wir: Wo befindet sich der Körper am Ende der ersten, zweiten, dritten Sekunde usf.? Darauf gaben uns die Versuche Antwort. Wir schlossen daraus, daß die Wege von der Zeit abhängig sind und fragten weiter: In welcher Weise ändern sich die Wege oder Fallräume mit der Zeit? Die Versuche ergaben das Resultat: „Die Fallräume, gerechnet vom Anfangspunkte der Fallbewegung, verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten oder der Fallraum ist dem Quadrate der Fallzeit direkt proportional. In die mathematische Zeichensprache übersetzt, heißt dies:

$$s = \frac{g}{2} t^2;$$

hiebei bedeuten t die Zeit, s den während dieser Zeit zurückgelegten Weg oder Fallraum und g eine für denselben Beobachtungsort unveränderliche, konstante Größe, die man als Beschleunigung bezeichnet.

Hier haben wir es also mit zwei veränderlichen Größen, Zeit und Weg, zu tun, von denen die zweite von der ersten in bestimmter Weise abhängt. Analoges gilt nun auch von dem erst erwähnten Beispiele. Die beiden Veränderlichen sind dort x und $4x + 3$. Während aber x in beliebiger Weise variiert werden kann, ist der Ausdruck $4x + 3$ nur bedingt veränderlich; sein Wert hängt in bestimmter Weise von der Wahl des jeweiligen Wertes von x ab. Man bezeichnet deshalb x als unabhängige Veränderliche (Variable) und den Ausdruck $4x + 3$ als abhängige Veränderliche oder als Funktion von x und drückt dies kurz in der Form aus:

$$y = 4x + 3 \quad \ldots \quad (2)$$

Um anzudeuten, daß die zweite Veränderliche y von x abhängig ist, bedient man sich auch häufig des Zeichens $f(x)$ (lies: „Funktion von x").

Die Einführung des Buchstabens y oder des Symbols $f(x)$ hat bloß den Zweck, die Bezeichnungsweise abzukürzen. In dem obigen Beispiel gibt (2) eigentlich nur die Vorschrift an, wie aus einem Werte der unabhängigen Veränderlichen x der zugehörige Wert der abhängigen Veränderlichen y gefunden wird. Man multipliziert nämlich den Wert der unabhängigen Veränderlichen mit 4 und addiert 3. Es kommen nur algebraische Operationen zur Anwendung. Die Funktion heißt deshalb eine algebraische. Da ferner in dem genannten Beispiel oder in dem allgemeineren Falle

$$y = ax + b$$

(a und b konstant, $a \gtrless o$) die unabhängige Veränderliche nur in der ersten Potenz vorkommt, so nennt man diese Funktion eine ganze

Funktion ersten Grades. Die allgemeinste ganze Funktion zweiten Grades von x hat die Form

$$y = a x^2 + b x + c.$$

Andere Beispiele von Funktionen sind:

$$y = \frac{1}{z}, \; u = \sqrt{v}, \; y = \sqrt{a x + b}$$

usf. Manchmal wird der funktionale Zusammenhang zwischen zwei Veränderlichen auch in der Form einer Gleichung ausgedrückt, z. B.:

$$y z - 1 = 0, \; u^2 - v = 0, \; y^2 - a x - b = 0.$$

Diese Gleichungen besagen dasselbe, wie die unmittelbar vorher erwähnten Funktionen. Immer ist eine der beiden Veränderlichen (in den angeführten Beispielen x, z, v) als die unabhängige —, die andere als die abhängige Veränderliche anzusehen.

Es braucht jedoch zwischen den beiden Veränderlichen nicht immer wie bisher ein algebraischer Zusammenhang zu bestehen. So beobachtet man z. B. an einem Barometer, daß der Luftdruck am selben Orte bald zu — bald abnimmt, dann wieder eine Zeitlang unverändert bleibt. Der Barometerstand ist also von der Tageszeit abhängig, er ist im Sommer im allgemeinen niedriger als im Winter, kurz der Luftdruck ist eine Funktion der Zeit. Steigt man auf einen Berg und stellt in kürzeren Abständen an einem mitgebrachten Barometer Beobachtungen an, so wird man ein unausgesetztes Sinken des Luftdruckes beobachten, während gleichzeitig im Tale oder auf der Spitze des Berges keine Änderung wahrgenommen werden kann. Der Luftdruck ist in diesem Falle eine Funktion der absoluten Höhe des Beobachtungsortes. Ebenso ist die Temperatur eine Funktion der Zeit, der Druck eines Gases bei konstanter Temperatur eine Funktion des Volumens usf.

II. Graphische Darstellung von Funktionen.

Um die Änderungen der Lufttemperatur während eines Tages zu untersuchen, stellen wir ein Thermometer im Freien so auf, daß es sowohl gegen die direkte Bestrahlung durch die Sonne als auch gegen die Beeinflussung der Bodenwärme möglichst geschützt ist. Der Beobachtungsort wird also im Schatten eines Baumes oder Hauses und ungefähr 2 *m* über dem Boden sich befinden müssen. Die Ablesungen nehmen wir immer nach je zwei Stunden vor und notieren jedesmal das Ergebnis. Die auf diese Weise erhaltenen Daten liefern z. B. folgende Tabelle:

XII^h Mitternacht	12^0	XII^h Mittag	20^0
2^h	11^0	2^h	$24{\cdot}5^0$
4^h	11^0	4^h	24^0
6^h	$10{\cdot}8^0$	6^h	$20{\cdot}2^0$
8^h	12^0	8^h	$18{\cdot}2^0$
10^h	13^0	10^h	18^0

Aus dieser Beobachtungsreihe entnehmen wir u. a., daß die niedrigste Temperatur ungefähr um 6^h früh, die höchste um 2^h nachm.

eintrat. Von Mitternacht bis 6^h früh nahm die Temperatur ab, von 6^h früh bis 2^h nachm. zu usf. Auch bezüglich der Art der Änderung können wir aussagen, daß z. B. zwischen 8^h und 10^h früh die Temperatur nur um 1^0 zunahm, während sie in den darauffolgenden zwei Stunden um 7^0 zunahm.

Anschaulicher wird der Verlauf dieser Temperaturänderungen, wenn wir uns folgender graphischer Darstellung bedienen. Wir tragen auf einer horizontalen Geraden von einem Punkte O aus in der Richtung Ox (nach rechts) gleiche Strecken auf, indem wir eine bestimmte Strecke z. B. 4 *mm* als Längeneinheit wählen. Diese so erhaltenen Punkte bezeichnen wir mit O, 2, 4, 6, . . , sie mögen der Reihe nach den angebenen Zeiten XII^h, 2^h, 4^h, 6^h, . . entsprechen. (Fig. 1 a.) In jedem

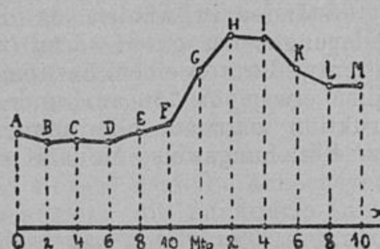

Fig. 1 a.

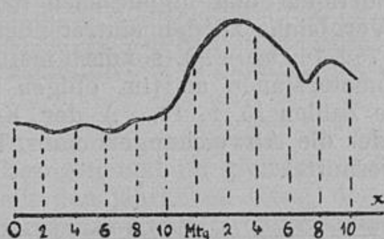

Fig. 1 b.

Punkte errichten wir ein Lot, wählen abermals eine Längeneinheit, z. B. 1 *mm* und tragen auf diesen Loten Strecken auf, welche der Größe nach den zu der betreffenden Stunde abgelesenen Temperaturgraden proportional sind, also in O . . . $12 \times 1\,mm$, in 2 . . . $11 \times 1\,mm$ usf. Dadurch erhalten wir die Punkte A, B, C, . . Verbinden wir je zwei aufeinanderfolgende Punkte durch Gerade, so entsteht ein gebrochener Linienzug. Jetzt können wir mit einem Blicke den Verlauf der Temperaturschwankungen in der genannten Zeit überschauen. So erkennen wir z. B. aus der verschiedenen Steilheit der einzelnen Strecken (Neigung gegen die Horizontale), daß zwischen 10^h und 12^h vorm. die Temperatur viel rascher zunahm als im gleichen Zeitintervall 12^h bis 2^h nachm. u. a. m.

Während also die Tabelle sich mehr dazu eignet, die zu einer bestimmten Zeit herrschende Temperatur, mithin Einzelwerte der Funktion anzugeben, kann man aus dem graphischen Bilde den Gesamtverlauf der Temperatur leichter überblicken. Man kann auch sofort angeben, wann die höchste (das Maximum) und wann die niederste Temperatur (das Minimum) herrschte.

Freilich weiß man noch nichts von den Temperaturen in den zwischen je zwei Beobachtungen liegenden Zeiten. Um genauere Ergebnisse zu erhalten, hätten wir die Ablesungen etwa von Stunde zu Stunde oder von Viertel- zu Viertelstunde wiederholen müssen. Man hat gegenwärtig vielfach selbst registrierende Thermometer, die sogenannten Thermographen, in Gebrauch, welche für jede Tageszeit die Temperaturen aufzeichnen. Fig. 1 b enthält eine solche Temperaturkurve, welche für den gleichen Tag und denselben Ort wie Fig. 1 a die Temperaturänderungen darstellt. Natürlich kommen hier manche Details zum Vorschein, welche in Fig. 1 a nicht ersichtlich sind. An Stelle des gebrochenen Linienzuges ist jetzt eine kontinuierliche, stetig verlaufende Linie, die Temperaturkurve für den genannten Tag getreten.

Faßt man also die Temperatur als Funktion der Zeit auf, so kann man die oben erhaltene Temperaturkurve als die graphische Veranschaulichung dieser Funktion ansehen. Die horizontale Gerade Ox bezeichnet man kurz als Abszissenachse, die auf ihr von O aus aufgetragenen Stücke heißen die Abszissen und die Lote die Ordinaten.

Ebenso stellt man die Änderungen des Luftdruckes, als Funktion der Zeit betrachtet, dar. Die Abszissen sind den Zeiten, die Ordinaten den Barometerständen proportional. Infolge der technischen Konstruktion der Barographen erscheinen die Ordinaten nicht als gerade Strecken, sondern als Bögen. Auch empfiehlt es sich hier die Ordinaten nicht proportional den abgelesenen Barometerständen zu wählen, da diese im Vergleiche zu den eintretenden Änderungen zu groß wären (z. B. 755, 759, 760 *mm* . . .), sondern man zählt entweder von einem bestimmten Barometerstande an (im obigen Beispiel etwa von 750 an) und legt diese Zahlen (5, 9, 10, . .) der Konstruktion zugrunde oder man verwendet die Abweichungen vom Tages- beziehungsweise Monats- oder Jahresmittel.

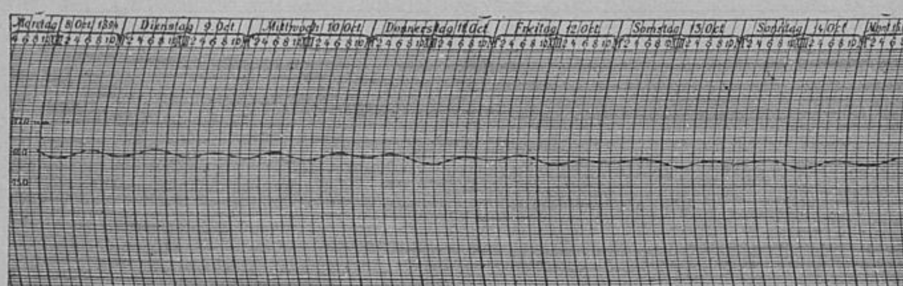

Fig. 2.

Die in Fig. 2 dargestellte Kurve[1]) ist ein schönes Beispiel für das täglich zweimalige Auftreten eines Maximum (ein größeres ungefähr um 9^h früh, ein kleineres ungefähr um 9^h abends) und eines Minimums (ungefähr um 3^h nachts und 3^h nachmittags).

Endlich möge noch als drittes Beispiel einer graphischen Veranschaulichung das folgende behandelt werden. Aus vieljährigen Beobachtungen haben für eine Reihe von Orten die Meteorologen die mittleren Monatstemperaturen berechnet. Für Valentia in West-Irland und für Jakutsk in Ost-Sibirien sind dieselben im folgenden angegeben:

	Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Valentia	7·3	7·3	7·5	9	11·2	13·6	14·7	15	13·6	10·9	8·8	7·2
Jakutsk	—42·9	—37·2	—13·7	—9·4	4·6	14·7	18·8	15·4	5·7	—9	—29·6	—40·6

[1]) Die Figur ist aus der Meteorologie von Trabert (Sammlung Göschen, Bd. 54) entnommen.

Um daraus die Jahreskurve für die Temperaturmittel beider Orte zu ermitteln, trägt man wie in den früheren Beispielen auf der Abszissenachse Ox von O aus 12 gleiche Stücke (Einheit . . 5 *mm*) auf, welche den Monaten entsprechen. Als Lote werden wieder Strecken aufgetragen, welche den Temperaturen proportional sind (1^0 . . $^1/_2$ *mm*). Hier kommen auch Temperaturen unter Null zur Darstellung. Da dieselben in üblicher Weise durch negative Zahlen bezeichnet werden, so kommt dies im graphischen Bilde dadurch zum Ausdrucke, daß die Lote bei positiven Temperaturen nach aufwärts, bei negativen Temperaturen nach abwärts gerichtet sind. Um beide Kurven miteinander vergleichen zu können, sind sie auf dasselbe Achsensystem bezogen und im gleichen Maßstabe gezeichnet; die punktierte Linie stellt den jährlichen Gang der Lufttemperatur für Jakutsk dar. Die Kurven bedürfen wohl keiner ausführlichen Erläuterung. Mit voller Klarheit tritt in ihnen der Unterschied zwischen ozeanischem und kontinentalem Klima zutage.

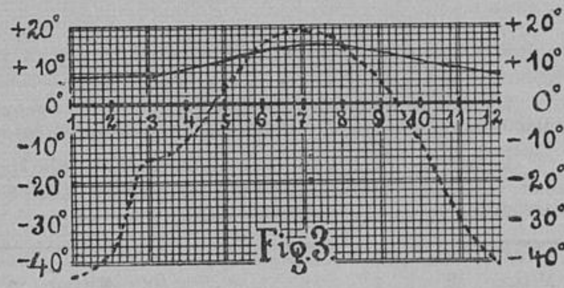

Fig. 3

Beispiele[1]).

1. Für eine Reihe von Orten sind im folgenden die mittleren Monatstemperaturen angegeben[2]).

	Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Wien	—1·7	0·2	3·9	9·4	14·0	17·7	19·6	18·8	15·2	9·8	3·5	—0·6
Salzburg	—2·4	—0·4	3	8·3	12·6	16·1	17·8	17·1	13·8	8·5	2·6	—1·8
Sonnblick	—13	—13·6	—12·1	—8·5	—4·2	—1·5	1·3	0·9	—1·4	—5	—8·7	—12·2
Klagenfurt	—6·4	—3·4	1·8	8·4	13·2	17·1	18·8	17·7	13·8	8·3	1·4	—4·6
Lesina	8·6	9	11·1	14·3	18·3	22·3	25·1	24·6	21·7	18·1	13·2	9·7
Krakau	—3·3	—2	2	8	13·5	17·2	18·8	17·9	14·1	8·9	2·3	—2·2
Prag	—1·6	—0·1	3·1	8·4	13·4	17·2	18·8	18·2	14·6	9·2	3·1	—0·5
NowajaSemla	—15·3	—17·6	—14·7	—12·1	—4·1	1·5	4·8	4·7	0·2	—4·6	—13·3	—14·5
Werchojansk	—51	—45·3	—32·5	—13·7	2	12·3	15·5	10·1	2·5	—15	—37·8	—47
Kamerun	26·3	26·6	26·2	26	25·7	24·9	23·7	23·6	24·2	24·4	25·5	25·9
Kapstadt	20·9	20·7	19·2	17·3	14·6	13	12·5	13·2	14·2	16·2	18·1	20
Mexiko	12·2	13·8	15·8	17·8	18·1	17·6	16·9	16·7	16·2	14·8	13·5	12
Batavia	25·3	25·4	25·8	26·3	26·4	26	25·7	25·9	26·3	26·4	26·2	25·6
Honolulu	21·3	21·4	21·6	22·6	23·4	24·5	25·1	25·4	25·2	24·6	23·2	22·1

a) Man stelle den jährlichen Gang der Lufttemperatur für Wien, Prag, Salzburg und Klagenfurt graphisch dar. (Längeneinheit: Abszissen . . $^1/_2$ *cm*, Ordinaten . . $^1/_4$ *cm*). Wann erreicht die Temperatur eines und desselben Ortes ihr Maximum, wann ihr Minimum? Vergleiche die Kurven untereinander. Wodurch ist insbesondere Klagenfurts Klima gekennzeichnet?

b) Als Beispiel für den kontinentalen und ozeanischen Typus des Klimas stelle man in einer Figur den jährlichen Gang der Lufttemperatur für Werchojansk (einfache Linie) und Batavia (punktierte Linie) dar. (Längeneinheit: Abszissen . . $^1/_2$ *cm*, Ordinaten 1 *mm*.)

---

1) Eine reiche Auswahl tabellarischer Übersichten, die sich zur graphischen Darstellung eignen, enthält O. Lesser's „Graphische Darstellungen im Mathematikunterricht". Freytag und Tempsky, Leipzig—Wien 1908.

2) Die Tabelle ist der „Meteorologie" von Hann (2. Aufl. 1905) entnommen.

c) Stelle ebenso den jährlichen Gang der Lufttemperatur für Honolulu (21⁰ 18′ s. Br.; tropisches Klima) und für Nowaja-Semla (72⁰ 30′ n. Br. polares Klima) graphisch dar. (Längeneinheiten wie in *b.*)

2. Nach Spitaler sind die mittleren Temperaturen der einzelnen Breitegrade:

Geogr. Br.	N. P.	80	70	60	50	40	30	20	10	0	10	20	30	40	50	60	70	80 s. Br.
Temp.	—20	—16·5	—9·9	—0·8	5·8	14	20·3	25·6	26·4	25·9	25	22·7	18·5	11·8	5·9	—2	—11·5	—19·8

Die Änderungen der Temperatur mit der geogr. Breite sind graphisch darzustellen. (Längeneinheiten: Abszissen . . 5 *mm*, Ordinaten . . 1 *mm*.)

3. Die täglichen Barometerschwankungen für eine äquatoriale Region im Großen Ozean ($4^1/_2{}^0$ Br.) sind graphisch darzustellen. Die Barometerstände sind in ihren Abweichungen vom Tagesmittel angegeben:

Mittn.	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h	Mittag	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h
+ 0·42	— 0·27	— 0·74	— 0·05	+ 0·94	+ 1·07	— 0·23	— 1·00	— 1·3	— 0·55	+ 0·27	+ 0·89

(Abszissen: 2^h . . . 1 *cm*, Ordinaten: 0·01 . . . $^1/_4$ *mm*.)

4. Mittlere Pegelstände[1]) in Zentimeter für die Donau (Wien), Enns (Groß-Reifling), Mur (Bruck a. d. M.), Oder (Frankfurt a. d. O.).

	Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Donau	—70	—50	—10	30	70	90	70	30	10	—40	—50	—60
Enns	—42	—37	—17	15	84	57	18	15	3	—21	—39	—40
Mur	—48	—47	—25	9	66	55	24	19	4	0	—19	—40
Oder	14	40	64	60	10	—16	—28	—33	—41	—43	—27	—4

(Längeneinheit: Abszissen . . . 5 *mm*, Ordinaten . . . 1 *mm*).
Wie kommt in der graphischen Darstellung der Unterschied zwischen Flachlands- und Alpenfluß zum Ausdruck?

5. Graphische Darstellung der jährlichen Änderung des Regenfalles in Wien (mittlere Regenmengen in Millimeter, 50jährige Mittel).

Jänn.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
36	34	44	49	66	74	68	70	43	49	43	42

Längeneinheiten: Abszissen . . . $^1/_2$ *cm*, Ordinaten . . . 0·5 *mm*).

6. Graphischer Eisenbahnfahrplan für die Strecke Passau—Wels; Winter 1907/8. Die Abszissen stellen die Zeiten von 12^h nachts bis 8^h früh dar, als Ordinaten sind die Entfernungen der einzelnen Stationen im Kilometermaßstabe aufgetragen.

[1]) Die Daten sind für die Donau dem Aufsatze A. Spigls: Die Wasserführung der Donau bei Wien (Jahresbericht d. Gymn. d. k. k. Theresianischen Akademie in Wien, 1907), für die Enns und Mur der Arbeit von N. Krebs: Die nördlichen Alpen zwischen Enns, Traisen und Mürz (Geogr. Abhdl. Bd. VIII, 1903) und für die Oder der Arbeit von A. Penck: Der Oderstrom (Geogr. Zeitschr. 5. Jhrg. 1899) entnommen und behufs leichterer Darstellung auf den mittleren Pegelstand des betreffenden Flusses reduziert.

Jeder Zug, der in der genannten Zeit auf dieser Strecke verkehrt, ist durch einen Linienzug dargestellt. Je nach ihrer Dicke bedeuten die Linien Schnellzüge (stärkste Linien), Personenzüge und Güterzüge (punktierte Linien). Welche Zeit braucht z. B. der Schnellzug 702 für die ganze Strecke? Wann fährt er durch Neumarkt? Wie lange hat

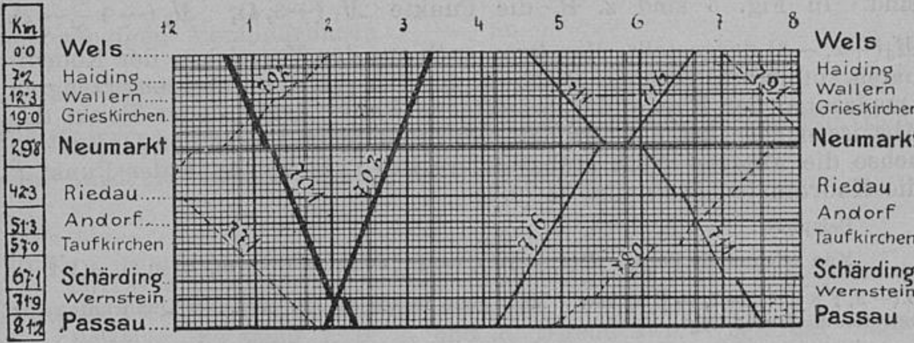

Fig. 4.

der Personenzug 716 in Neumarkt Aufenthalt? Beachte die verschiedene Steilheit der Linien. Woran erkennt man, daß die Strecke eine eingeleisige ist? usf. Diese graphischen Fahrpläne spielen im Dienste der Eisenbahnen eine große Rolle. Die erste Herstellung eines Fahrplanes erfolgt in graphischer Form und auch in den einzelnen Stationen stehen diese graphischen Fahrpläne immer in Verwendung.

III. Das rechtwinklige Koordinatensystem.

Um algebraische Funktionen graphisch darzustellen, ist es notwendig, den im vorigen Abschnitt eingeführten Koordinatenbegriff präziser zu gestalten. Man zeichnet (Fig. 5) zwei zueinander normale Gerade $(-x \ldots +x)$ und $(-y \ldots +y)$, die beiden Koordinatenachsen genannt; der Schnittpunkt O heißt der Ursprung des Koordinatensystems. Von irgend einem Punkte M der Ebene fällt man Normale auf beide Achsen MP und MQ. Mißt man diese Strecken in irgend einem Maßstabe (z. B. Längeneinheit ... $^1/_2\,cm$), so erhält man z. B.

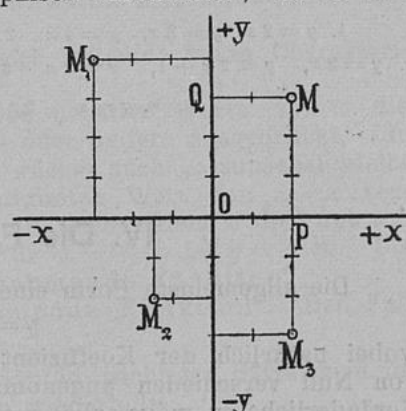

Fig. 5.

$$OP = MQ = 2\,L.\,E.,$$
$$MP = OQ = 3\,L.\,E.$$

OP heißt die **Abszisse**, OQ die **Ordinate** des Punktes M; beide zusammen nennt man die **Koordinaten** des Punktes und drückt dies häufig in der kurzen Schreibweise aus:

$$M(2, 3);$$

die erste Zahl bedeutet stets den Abszissen-, die zweite den Ordinatenwert. Damit aber auch umgekehrt jeder Punkt der Ebene durch die

Angabe seiner Abszissen- und Ordinatenwerte eindeutig bestimmt ist, so muß man noch festsetzen, daß die Abszissen rechts vom Ursprung als positiv, links dagegen als negativ und ebenso die Ordinaten oberhalb des Ursprungs als positiv, unterhalb als negativ zu bezeichnen sind. In Fig. 5 sind z. B. die Punkte $M_1(-3, 4)$, $M_2(-1\frac{1}{2}, -2)$, $M_3(+2, -3)$ dargestellt. Man kann auch aus den Vorzeichen der Koordinaten sofort schließen, in welchem der vier durch die Achsen erzeugten Quadranten der Ebene der betreffende Punkt liegt. Jeder Punkt der Abszissenachse hat die Ordinate Null und jeder Punkt der Ordinatenachse die Abszisse Null. Insbesondere hat z. B. in Fig. 5 der Punkt P die Koordinaten $(2, 0)$ und Q $(0, 3)$.

Beispiele:

Man zeichne die Punkte $P(4, -5)$, $Q(-2\frac{1}{3}, -1)$, $M_1(-8, 0)$, $M_2(0, 3)$, $A(\sqrt{2}, 1)$, $B(-3, \sqrt{3})$, $C(-2, -\sqrt{5})$ usw. Man gebe ferner an, in welchem Quadranten der betreffende Punkt liegt.

Ist nun eine algebraische Funktion einer Veränderlichen vorgegeben und macht man unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems die Werte der unabhängigen Veränderlichen x zu Abszissen, die entsprechenden Werte der Funktion zu den zugehörigen Ordinaten, so erhält man das graphische Bild der Funktion. Freilich können wir vorläufig diese Kurven nur punktweise konstruieren. Wir können auch daraus nicht ohne weiteres die geometrischen Eigenschaften dieser Kurven erkennen. Dazu ist es notwendig, jede Funktion besonders zu studieren.

Beispiele:

Man stelle folgende Funktionen graphisch dar, indem man möglichst nahe aneinander gelegene Werte der Veränderlichen wählt. Die unter derselben Nummer angeführten Beispiele sind in die gleiche Figur einzuzeichnen:

1. $y = 2x$, $y = 3x$, $y = 4x$; 2. $y = 2x$, $y = -2x$; 3. $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$, 4. $y = 2x$, $y = 2x + 1$, $y = 2x - 3$; 5. $y = x^2$; 6. $y = -x^2$; 7. $y = x^2 + 2$; 8. $y = x^2 - 2$; 9. $y = \frac{1}{x}$; 10. $y = \sqrt{x}$.

IV. Die Funktion $ax + b$.

Die allgemeinste Form einer ganzen Funktion ersten Grades ist:

$$y = ax + b,$$

wobei natürlich der Koeffizient a der unabhängigen Veränderlichen von Null verschieden angenommen werden muß. Die unabhängige Veränderliche x möge alle reellen Zahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durchlaufen.

Die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktion sind:

I. Die Funktion $ax + b$ nimmt jeden beliebigen reellen Wert ein und nur einmal an.

Ist nämlich m irgend ein willkürlich vorgegebener Wert der Funktion, so folgt aus der Auflösung der Gleichung

$$ax + b = m \qquad (a \gtrless o)$$

für die unabhängige Veränderliche

$$x = \frac{m - b}{a}$$

d. h. die Funktion nimmt den Wert m nur für den einzigen Wert der unabhängigen Veränderlichen $\frac{m-b}{a}$ an.

Insbesondere verschwindet sie an einer einzigen Stelle, nämlich für $x = -\frac{b}{a}$. Man kann diese Nullstelle in der Darstellung der Funktion zum Ausdruck bringen, indem man sie in der Form schreibt:

$$y = a\left(x + \frac{b}{a}\right) = a(x - x') \;\ldots.\; \left(x' = -\frac{b}{a}\right).$$

II. Ist a positiv, so nimmt die Funktion mit wachsendem x zu, mit abnehmendem x ab.

Beweis: Es seien z. B. x_1 und x_2 irgend zwei Werte der unabhängigen Veränderlichen; die entsprechenden Werte der Funktion seien y_1 und y_2. Daher ist:

$$y_1 = a x_1 + b$$
$$y_2 = a x_2 + b$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen folgt:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad \ldots. \quad (1)$$

Weil a positiv ist, so folgt daraus, daß die Differenz $y_2 - y_1$ dasselbe Zeichen wie $x_2 - x_1$ hat; d. h. wenn $x_2 > x_1$ ist, so muß auch $y_2 > y_1$ sein; ist dagegen $x_2 < x_1$, also $x_2 - x_1 < 0$, so muß auch $y_2 - y_1 < 0$ oder $y_2 < y_1$ sein.

Ebenso läßt sich zeigen:

Ist a negativ, so nimmt die Funktion mit wachsendem x ab, mit fallendem x zu.

Aus diesen beiden Sätzen ergibt sich folgende kurze Charakterisierung der Funktion $ax + b$.

Ist $\boldsymbol{a > 0}$, so hat für sehr große negative Werte von x die Funktion y sehr große negative Werte oder anders ausgedrückt, für $x = -\infty$ ist $y = -\infty$. Nimmt x zu, so wächst auch y; zunächst bleibt y noch negativ, bis es für einen bestimmten Wert von $x = x'$ verschwindet. Von dieser Stelle an nimmt mit wachsendem x die Funktion weiter zu und bleibt stets positiv. Für $x = +\infty$ ist $y = +\infty$. Die Funktion ist in diesem Falle eine „zunehmende Funktion".

Ist $\boldsymbol{a < 0}$, so ist y eine „abnehmende Funktion". Den Fall $a < 0$ führe der Schüler näher aus.

III. Für die beiden zuletzt erwähnten wichtigen Sätze wird im folgenden der Beweis in anderer Form wiederholt.

Es sei x_0 ein willkürlich vorgegebener Wert der unabhängigen Veränderlichen x und y_0 der entsprechende Wert von y. Wir ändern den Wert von x um die beliebige, aber von Null verschiedene Größe h, gehen also vom Werte x_0 zum Werte $x_0 + h$ über. Die zugehörigen Werte der Funktion wollen wir mit $f(x_0)$ und $f(x_0 + h)$ bezeichnen. Es ist also:

$$f(x_0) = a x_0 + b, \quad f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + b,$$

daher

$$f(x_0+h)-f(x_0)=a.h \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

oder wenn man beide Seiten von (2) durch h dividiert:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=a \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

Bezeichnet man h als die Änderung der unabhängigen Veränderlichen, $f(x_0+h)-f(x_0)$ als die zugehörige Änderung der Funktion, so kann man aus (3) folgenden Satz ableiten:

Der Quotient aus der Änderung der Funktion in die entsprechende Änderung der Veränderlichen x ist konstant, und zwar: gleich dem Koeffizienten a von x.

Dieser Quotient führt die Bezeichnung „Differenzenquotient". Daraus folgt unmittelbar der Satz 2. Denn für positives a müssen beide Änderungen das gleiche Zeichen haben; wenn sich daher die unabhängige Veränderliche um irgend einen positiven Betrag h ändert, so nimmt auch die Funktion zu und umgekehrt, wenn x abnimmt ($h<O$), nimmt auch y ab. Analoge Schlüsse gelten für negatives a. Von Wichtigkeit ist es, daß die Werte von h an gar keine Grenze gebunden sind.

IV. Ist y eine ganze Funktion ersten Grades von x, so ist auch umgekehrt x eine ebensolche Funktion von y.

Aus

$$y=ax+b \qquad (a \gtrless O)$$

folgt nämlich

$$x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}.$$

Die wichtigsten Resultate dieses Kapitels sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

$f(x)=ax+b=a(x-x') \quad . \; . \; . \quad x'=-\frac{b}{a}$
$x=\frac{m-b}{a} \; . \; . \; . \; f(x)=m; \quad x=x' \; . \; . \; . \; f(x')=O.$ Die Funktion nimmt jeden Wert an einer einzigen Stelle an.
$f(x_0+h)-f(x_0)=ah, \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=a$ $a>O: f(x)$ zunehmend; $a<O: f(x)$ abnehmend.

Beispiele:

1. Die einander entsprechenden Werte zweier Veränderlichen t und s, von denen s die abhängige Veränderliche bedeutet, sind:

$$t=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$s=5\tfrac{1}{2},\ 6,\ 6\tfrac{1}{2},\ 7,\ 7\tfrac{1}{2}, \; . \; . \; . \; . \; .$$

Welche ganze Funktion ersten Grades von t stimmt in den angegebenen Werten mit s überein?

2. Von der Funktion $y = ax + b$ sind gegeben: $a = -3$ und die Nullstelle $x' = -\frac{1}{3}$. Wie lautet die Funktion? Ist sie eine zu- oder abnehmende Funktion?

3. Zeige, daß sich jede lineare Funktion in der Form darstellen läßt:

$$f(x) = a(x - x_0) + f(x_0).$$

4. Man kennt je zwei zueinander gehörige Werte der unabhängigen Veränderlichen x und der Funktion $y = ax + b$:

$$x_1 = 3, \quad y_1 = 4; \qquad x_2 = -1, \quad y_2 = 8;$$

bestimme die Funktion. Wie viel Bestimmungsstücke sind also notwendig, um eine ganze Funktion ersten Grades aufzustellen?

5. Beweise: Jede Funktion $y = ax + b$ läßt sich, wenn (x_1, y_1) und (x_2, y_2) je 2 einander entsprechende Werte der beiden Veränderlichen bedeuten, auf die Form bringen:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{oder} \quad y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

6. Zwischen zwei Veränderlichen u und v besteht folgender Zusammenhang:

$au + bv = c$ (a, b, c Konstante, a und b von Null verschieden).

Man bestimme daraus das einemal u als Funktion von v, das anderemal umgekehrt v als Funktion von u. Was würde eintreten, wenn einer der beiden Konstanten a oder b Null wäre?

V. Graphische Darstellung der Funktion $ax + b$.

Es sei z. B. die Funktion $y = \frac{1}{2}x$ graphisch darzustellen. Zu diesem Zwecke legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem fest, tragen die Werte der unabhängigen Veränderlichen als Abszissen, die entsprechenden Werte von y als Ordinaten auf. Für $x = 0$ ist $y = 0$, für $x = 2 : y = 1$, für $x = 4 : y = 2$, für $x = -2 : y = -1$ usw. Geometrisch liefern diese Wertepaare die Punkte mit den Koordinaten:

$$O(0, 0),\ A(2, 1),\ B(4, 2),\ C(-2, -1), \ldots$$

Zunächst kann man zeigen, daß diese Punkte auf einer und derselben Geraden liegen, welche durch den Ursprung geht.

Verbindet man nämlich (Fig. 6) die Punkte A, B, C mit O und

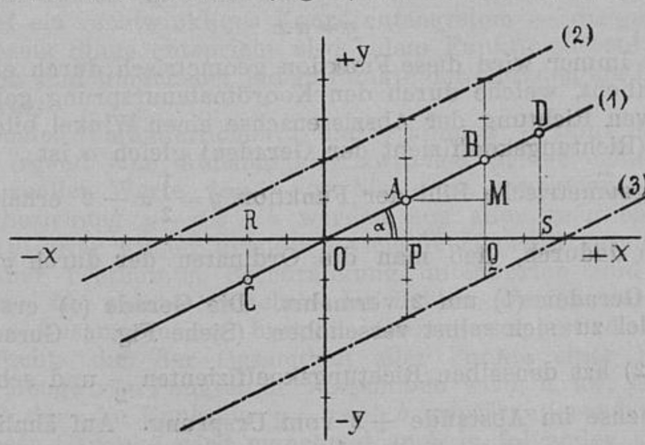

Fig. 6.

bezeichnet die Fußpunkte ihrer Ordinaten der Reihe nach mit P, Q, R, so folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken $\varDelta OAP$, $\varDelta OBQ$, $\varDelta OCR$

$$\frac{AP}{OP}=\frac{BQ}{OQ}=\frac{CR}{OR}=\ldots=\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$$

Diese Dreiecke sind daher nach den bekannten Ähnlichkeitssätzen untereinander ähnlich. Infolgedessen sind die Winkel paarweise gleich und die Strecken OA, OB, OC, ... fallen in dieselbe Richtung. Der Winkel α, den diese Gerade mit der positiven Richtung der Abszissenachse einschließt, ist durch den Koeffizienten von $x : \frac{1}{2}$ völlig bestimmt. Dieser Koeffizient stellt nämlich das Verhältnis der gegenüberliegenden — zur anliegenden Kathete dar und heißt deshalb der **Richtungskoeffizient** der Geraden.

In der Trigonometrie wird dieses Verhältnis die Tangente des Winkels α genannt und mit dem besonderen Zeichen $tg\,\alpha$ bezeichnet.

Man kann auch umgekehrt zeigen, daß jeder Punkt der Geraden, welche den Richtungskoeffizienten $\frac{1}{2}$ besitzt und durch den Ursprung geht, Koordinaten hat, welche, in irgend einem vorgeschriebenen Maßstabe gemessen, einander entsprechende Werte der unabhängigen Veränderlichen x und der Funktion $y=\frac{1}{2}x$ liefern.

Es sei nämlich D irgend ein Punkt dieser Geraden und $OS=x'$, $DS=y'$ seien dessen Koordinaten. Dann folgt aus dem $\varDelta OSD$:

$$\frac{DS}{OS}=\frac{y'}{x'}=\frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad y'=\frac{1}{2}x'$$

w. z. bew. w.

Der Schüler behandle analog die Fälle $y=2x$, $y=3x$, ferner $y=-2x$, $y=-3x$ und zeige an ihnen wie an dem oben ausgeführten Beispiele, wie sich die im vierten Kapitel entwickelten Eigenschaften solcher Funktionen geometrisch veranschaulichen lassen.

Dieselben Schlüsse lassen sich auf den allgemeinen Fall

$$y=ax$$

anwenden. Immer wird diese Funktion geometrisch durch eine Gerade veranschaulicht, welche durch den Koordinatenursprung geht und mit der positiven Richtung der Abszissenachse einen Winkel bildet, dessen Tangente (Richtungskoeffizient der Geraden) gleich a ist.

Das geometrische Bild der Funktion $y=\frac{1}{2}x+2$ erhält man am einfachsten dadurch, daß man die Ordinaten der durch $y=\frac{1}{2}x$ dargestellten Geraden (1) um 2 vermehrt. Die Gerade (1) erscheint also bloß parallel zu sich selbst verschoben. (Siehe Fig. 6 Gerade (2.) Die Parallele (2) hat denselben Richtungskoeffizienten $\frac{1}{2}$ und schneidet die Ordinatenachse im Abstande $+2$ vom Ursprung. Auf ähnliche Weise ist in Fig. 6 die Funktion $y=\frac{1}{2}x-3$ durch (3) dargestellt.

Fig. 7. enthält die geometrischen Bilder der drei Funktionen

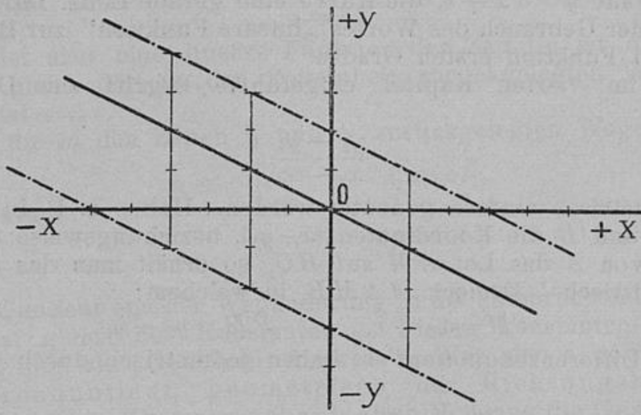

Fig. 7.

$y = -\frac{1}{2}x, \quad y = -\frac{1}{2}x + 2$ und $y = -\frac{1}{2}x - 3.$

Bei der Behandlung der allgemeinsten Funktion ersten Grades

$$y = ax + b$$

bleiben dieselben Schlüsse erhalten, welche wir in den genannten Fällen anwendeten. Es tritt bloß an die Stelle der besonderen Richtungskoeffizienten a und statt der Größen 2, — 3 die Größe b, welche als Strecke auf der Ordinatenachse von O aus aufgetragen denjenigen Punkt bestimmt, in welchem die Gerade die Ordinatenachse schneidet.

Wir kommen daher zu dem Satze:

Das geometrische Bild einer ganzen Funktion ersten Grades von der Form $y = ax + b$ ist eine Gerade, welche den Richtungskoeffizienten a besitzt und die Ordinatenachse im Abstande b vom Ursprunge schneidet. Zwei zueinander gehörige Werte der unabhängigen und abhängigen Veränderlichen werden geometrisch durch die Koordinaten eines Punktes der Geraden — bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem — dargestellt.

In diesem Sinne entspricht also jedem Funktionswerte ein Punkt der Geraden und umgekehrt jedem Punkte der Geraden ein bestimmter Funktionswert.

Die beiden Veränderlichen x und y können — ohne daß wir zunächst an irgend eine Abhängigkeit zwischen beiden denken — alle möglichen reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen. Durch die Funktionalbeziehung $y = ax + b$ werden aus allen möglichen Wertepaaren (x, y) zwar wieder unendlich viele Wertepaare herausgegriffen, die aber einer bestimmten Beschränkung unterworfen sind; es sind nämlich jene, für welche zwischen den beiden Werten der genannte algebraische Zusammenhang besteht. Geometrisch ist dies dadurch veranschaulicht, daß der Gesamtheit aller Punkte einer Ebene eine bestimmte Menge von Punkten herausgehoben wird, u. zw. jene Punkte, welche auf der die Funktion $y = ax + b$ repräsentierenden Geraden liegen. Dieser Gedanke wird manchmal auch in folgenden kurzen Satz eingekleidet: „Die Kurve stellt geometrisch die Gleichung dar, die

Gleichung stellt algebraisch die Kurve dar." Die Gleichung ist in unserem Falle $y = ax + b$, die Kurve eine gerade Linie. Daraus erklärt sich auch der Gebrauch des Wortes „lineare Funktion" zur Bezeichnung der ganzen Funktion ersten Grades.

Der im vierten Kapitel eingeführte Begriff des Differenzenquotienten:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

kann geometrisch einfach gedeutet werden. Haben z. B. in Fig. 6 die Punkte A und B die Koordinaten (x_1, y_1), beziehungsweise (x_2, y_2) und fällt man von A das Lot AM auf BQ, so erhält man das sogenannte „charakteristische" Dreieck ΔAMB, in welchem:

$$AM = x_2 - x_1, \qquad BM = y_2 - y_1$$

sind. Der Differenzenquotient ist daher geometrisch durch das Seitenverhältnis

$$\frac{BM}{AM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a = tg\,\alpha$$

oder durch den Richtungskoeffizienten der Geraden dargestellt.

Beispiele:

1. Konstruiere die Geraden: $a)\ y = \pm x$, $b)\ y = 5x \pm 2$, $c)\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $d)\ y = \sqrt{3}\,x$. Vergleiche die Beispiele 1—4 im dritten Kapitel.

2. Gegeben ist der Richtungskoeffizient $a = tg\,\alpha$ und ein Punkt der Geraden (x_0, y_0). Wie lautet die Gleichung derselben? (Vergleiche Beispiel 2 und 3 des vierten Kapitels.) Besondere Fälle: $a = 2$, $(-1, 3)$; $\alpha = 30^0$, $(4, 4)$.

3. Eine Gerade geht durch die Punkte $(3, 4)$ und $(-1, 8)$. Wie lautet ihre Gleichung? (Vergleiche Beispiel 4 des vierten Kapitels.).

4. In welchem Punkte schneiden sich die beiden Geraden?

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{8}, \qquad y = 2x - \frac{1}{4}$$

(Längeneinheit . . . 2 *cm*.)

5. Dieselbe Aufgabe allgemein gelöst:

$$y = ax + b, \qquad y = a'x + b'.$$

Diskutiere das Resultat, insbesondere den Fall $a = a'$.

6. Stelle folgende lineare Gleichungen:

$$4x + 3y = 7, \qquad 3x - y - 2 = 0$$

graphisch dar. Was bedeuten die gemeinsamen Wurzeln dieser beiden Gleichungen?

7. Wie lautet der Richtungskoeffizient der Geraden $ax - by = c$ $(a, b \gtrless o)$?

8. Wann sind die beiden Geraden:

$$ax + by = c \quad \text{und} \quad a'x + b'y = c'$$

parallel?

VI. Anwendung auf ein Beispiel der Mechanik.

Wenn ein Körper in gleichen Zeitintervallen gleiche Wege, in der doppelten, dreifachen . . . . Zeit den doppelten, dreifachen . . . . Weg zurücklegt, dann heißt eine solche Bewegung eine „gleichförmige". Die Wege sind den entsprechenden Zeiten direkt proportional. Bezeichnet man die Maßzahl der Weglänge, vom Beginn der Bewegung an gerechnet, mit s, die der zugehörigen Zeit mit t, so ist der Quotient $\frac{s}{t}$ eine Konstante c oder

$$s = c\,t.$$

Der Weg ist also eine lineare Funktion der Zeit. c ist der Maßzahl nach auch gleich dem in der Zeiteinheit zurückgelegten Wege; denn für $t = 1$ ist $s = c$.

Sind die in den Zeiten t_1 und t_2 zurückgelegten Wege s_1 und s_2, also:

$$s_1 = c\,t_1, \qquad s_2 = c\,t_2,$$

so folgt daraus:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = c,$$

d. h. der Quotient aus der Wegänderung in die entsprechende Änderung der Zeit ist gleich der Konstanten c. Diesen konstanten Quotienten bezeichnet man als „Geschwindigkeit". Was also algebraisch der Differenzenquotient, geometrisch der Richtungskoeffizient ist, stellt in dem erwähnten mechanischen Vorgang die Geschwindigkeit dar.

Die Physik bietet noch eine Menge anderer Beispiele für lineare Abhängigkeiten, von denen im folgenden einige angeführt werden:

1. Ist l_t die Länge eines stabförmigen festen Körpers bei einer Temperatur von t^0 C, l_0 die Länge desselben bei 0^0 C, so gilt das Gesetz:

$$l_t = l_0\,(1 + \beta\,t),$$

wo β den linearen Ausdehnungskoeffizienten bedeutet.

2. Zieht man die Änderung des Volumens (v) eines festen oder flüssigen Körpers durch die Wärme in Betracht, so ist

$$v_t = v_0\,(1 + \alpha\,t),$$

α bezeichnet den kubischen Ausdehnungskoeffizienten.

3. Bei gasförmigen Körpern ist zu unterscheiden, ob der Druck (p) oder das Volumen (v) während der Temperaturänderung konstant ist, im ersten Falle gilt das Gesetz:

$$v_t = v_0\,(1 + \alpha\,t)$$

im zweiten Falle:

$$p_t = p_0\,(1 + \alpha\,t)$$

α bedeutet den Ausdehnungs-, beziehungsweise Spannungskoeffizienten.

4. Wird ein geschlossener Leiter von einem elektrischen Strom von der Stärke i durchflossen, so ist die an den Enden irgend eines Leiterstückes herrschende Potentialdifferenz v eine lineare Funktion des Widerstandes w dieses Leiterstückes:

$$v = i\,.\,w$$

usw.

Wer spezielle Aufgaben lösen will, in denen diese Funktionen zur Anwendung kommen, findet in den Beispielsammlungen unserer Lehrbücher für Physik eine reiche Auswahl.

VII. Die Funktion $ax^2 + bx + c$.

Die allgemeinste Form einer ganzen Funktion zweiten Grades einer reellen Veränderlichen x ist:

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c,$$

wobei a, b, c Konstante bedeuten und a von Null verschieden angenommen werden muß. Um die Änderungen dieser Funktion zu untersuchen, ist es von Vorteil, folgende Umformung vorzunehmen:

$$y = a\left\{(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\} \quad . . . \quad (1)$$

Diese Form erhält man leicht, indem man aus dem ursprünglichen Trinom a heraushebt und nachher die beiden ersten Glieder zu einem Quadrat ergänzt.

Der Klammerausdruck in (1) ist das Quadrat einer linearen Funktion, vermehrt, beziehungsweise vermindert um eine Konstante.

Bei den folgenden Untersuchungen spielt die Zahl $b^2 - 4ac$ eine wichtige Rolle. Man nennt sie die „Diskriminante der quadratischen Funktion $ax^2 + bx + c$". Dieselbe hängt, wie man aus ihrem Bau ersieht, nur von den Koeffizienten der Funktion ab. Wir bezeichnen sie von nun ab mit:

$$D = b^2 - 4ac$$

und müssen drei Fälle unterscheiden:

I. $D < 0$:

Es läßt sich stets eine reelle Zahl d finden, derart, daß:

$$d^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2} \qquad (d = +\sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a^2}})$$

ist. Dann wird:

$$f(x) = a\left\{(x + \frac{b}{2a})^2 + d^2\right\} \quad . . . \quad (2)$$

Der Klammerausdruck ist eine Summe zweier Quadrate und daher für jeden reellen Wert von x positiv.

Ist also die Diskriminante einer quadratischen Funktion negativ, so hat die Funktion stets das Zeichen von a.

Bei den weiteren Schlüssen trennen wir die beiden Fälle eines positiven und negativen a.

1. $a > 0$: Für $x = -\frac{b}{2a}$ wird $f(x) = a\,d^2 > 0$, für jeden anderen Wert von x ist $f(x) > a\,d^2$. Die Funktion ist daher nur solcher Werte fähig, welche $\geqq a\,d^2$ sind. Den kleinsten Wert $a\,d^2$ nimmt die Funktion bloß an der einzigen Stelle $x = -\frac{b}{2a}$ an. Man nennt diesen Funktionswert: $a\,d^2$ das „Minimum der Funktion". Ist dagegen m irgend ein Wert, welcher größer als $a\,d^2$ ist, dann folgt aus:

$$a\left\{(x + \frac{b}{2a})^2 + d^2\right\} = m$$

für x:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{m - a\,d^2}{a}},$$

d. h.: Die Funktion nimmt jeden Wert, welcher $> a\,d^2$ ist, genau zweimal an.

2. $a < 0$: In diesem Falle ist $a\,d^2$ der größte Wert oder das „Maximum" der Funktion. Jeden anderen Wert, welcher $< a\,d^2$ ist, nimmt die Funktion an zwei verschiedenen Stellen, d. h. für zwei verschiedene Werte von x an.

Insbesondere kann die Funktion sowohl für positives als auch für negatives a nirgends verschwinden.

II. $D = O$:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_1)^2 \qquad \left(x_1 = -\frac{b}{2a}\right) \quad \ldots (3)$$

Die Funktion ist gleich dem Produkte aus einer Konstanten und dem Quadrat einer linearen Funktion.

Analog wie im Falle I schließt man auch hier: Ist $a > O$, so hat die Funktion für $x = -\frac{b}{2a}$ ihren kleinsten Wert, und zwar wird sie an dieser Stelle Null; im übrigen nimmt sie jeden positiven Wert m an zwei Stellen an, nämlich für $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{m}{a}}$. Ist $a < O$, so hat die Funktion für $x = -\frac{b}{2a}$ ihren größten Wert: Null und nimmt jeden negativen Wert zweimal an.

III. $D > O$:

In diesem Falle ist: $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{D}{4a^2}$

positiv und kann daher dem Quadrate einer (positiven) reellen Zahl d^2 gleich gesetzt werden.

$$f(x) = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - d^2\right\} = -a d^2 + a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \ldots (4)$$

Für positives a ist $x = -\frac{b}{2a}$ jener Wert von x, für welchen die Funktion ihren kleinsten Wert $-a d^2$ erhält. Jeden anderen Wert $m > -a d^2$ nimmt die Funktion an zwei verschiedenen Stellen an, und zwar für:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{m + a d^2}{a}}$$

Zu diesen letzteren Funktionswerten gehört auch die Null. Für $a < O$ ist $-a d^2$ das Maximum der Funktion und jeder andere Wert, welcher kleiner als $-a d^2$ ist, wird zweimal von der Funktion angenommen. Darunter muß auch die Null enthalten sein.

Der dritte Fall ist also von dem ersten insbesondere dadurch ausgezeichnet, daß es bei positiver Diskriminante zwei verschiedene Werte der unabhängigen Veränderlichen gibt, für welche die Funktion verschwindet. Von dem zweiten Falle unterscheidet er sich dadurch, daß die Funktion zwei verschiedene Nullstellen besitzt. Diese beiden Nullstellen lassen sich durch Zerlegung von (4) auf folgende Weise finden:

$$f(x) = a\left\{x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right\}\left\{x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right\}$$

oder, wenn man

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \ldots\ldots (5)$$

setzt:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \ldots\ldots (6)$$

Dieses Resultat diskutieren wir im Falle $a > O$ näher. Es sei ferner $x_1 < x_2$.

1. $x < x_1$: Es ist sowohl $x - x_1$ als auch $x - x_2$ negativ, daher:

$$f(x) > O.$$

Je mehr die Werte von x gegen x_1 zunehmen, desto kleiner werden die entsprechenden Funktionswerte.

2. Für $x = x_1$ wird die Funktion Null:

$$f(x_1) = O.$$

3. Ist $x_1 < x < x_2$, so ist die Differenz $x - x_1$ positiv, $x - x_2$ dagegen negativ, daher:

$$f(x) < O.$$

4. Für $x = x_2$ ist:

$$f(x_2) = O.$$

5. $x > x_2$. In diesem Falle sind beide Differenzen positiv, daher:

$$f(x) > O.$$

Mit zunehmendem x nimmt auch die Funktion zu.

Aus dem allgemeinen Ausdrucke (5) für die Nullstellen x_1 und x_2 folgt umittelbar, daß der Wert von x, für welchen die Funktion $f(x)$ ein Minimum wird, in der Form geschrieben werden kann:

$$-\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

und daß derselbe zwischen x_1 und x_2 liegt.

Den Fall $a < O$ führe der Schüler aus. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle übersichtlich zusammengestellt:

$f(x) = a x^2 + b x + c$			
Diskriminante	Kanonische Form	$a > O$	$a < O$
$D = b^2 - 4ac < O$	$a\left\{(x + \frac{b}{2a})^2 + d^2\right\}$ $d^2 = -\frac{D}{4a^2}$	$x = -\frac{b}{2a} \ldots f(x) = a d^2$ (Minimum) $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{m - a d^2}{a}} \ldots$ $\ldots f(x) = m > a d^2$. Die Funktion kann niemals Null werden.	$x = -\frac{b}{2a} \ldots f(x) = a d^2$ (Maximum) $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{m - a d^2}{a}} \ldots$ $\ldots f(x) = m < a d^2$. Die Funktion kann niemals Null werden.
$D = b^2 - 4ac = O$	$a(x + \frac{b}{2a})^2 =$ $= a(x - x_1)^2$, $x_1 = -\frac{b}{2a}$	$x = x_1 \ldots f(x_1) = O$ (Minimum) $x = x_1 \pm \sqrt{\frac{m}{a}} \ldots$ $\ldots f(x) = m > O$. Die Funktion verschwindet an der einzigen Stelle $x = x_1$.	$x = x_1 \ldots f(x_1) = O$ (Maximum) $x = x_1 \pm \sqrt{\frac{m}{a}} \ldots$ $\ldots f(x) = m < O$. Die Funktion verschwindet an der einzigen Stelle $x = x_1$.
$D = b^2 - 4ac > O$	$a\left\{(x + \frac{b}{2a})^2 - d^2\right\}$ $d^2 = \frac{D}{4a^2}$ $a(x - x_1)(x - x_2)$ $x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}$ $x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}$	$x = -\frac{b}{2a} \ldots f(x) = -a d^2$ (Minimum) $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{m + a d^2}{a}} \ldots$ $\ldots f(x) = m > -a d^2$. Die Funktion verschwindet an den beiden Stellen x_1 und x_2. $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ $x_1 < -\frac{b}{2a} < x_2$	$x = -\frac{b}{2a} \ldots f(x) = --a d^2$ (Maximum) $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{m + a d^2}{a}} \ldots$ $\ldots f(x) = m < -a d^2$. Die Funktion verschwindet an den beiden Stellen x_1 und x_2. $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ $x_2 < -\frac{b}{2a} < x_1$

Zum Schlusse dieses Kapitels sei noch kurz auf die Umkehrung der quadratischen Funktion hingewiesen.

Faßt man in

$$y = a x^2 + b x + c$$

y als die unabhängige, x als die abhängige Veränderliche auf, so erhält man:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{4ay + D}$$

Wir kommen auf diese Weise zu einer neuen Funktion:

$$\pm\sqrt{4ay + D}$$

Von einer genauen Untersuchung derselben wollen wir hier Abstand nehmen. Es sei nur erwähnt, daß dieselbe zum Unterschiede von den bisher untersuchten Funktionen nicht mehr eindeutig, sondern zweideutig ist, d. h. jedem Werte der unabhängigen Veränderlichen entsprechen im allgemeinen zwei verschiedene Werte der Funktion x. Am besten erkennt man dies z. B. an dem besonderen Falle:

$$y = \pm\sqrt{x}$$

Beispiele:

1. Berechne die Diskriminanten folgender quadratischer Funktionen und beachte ihr Zeichen: $x^2 + x + 1$, $-2x^2 + 3x + 2$, $2x^2 - 1$, $3x^2 + 2x$, ax^2, $ax^2 + (b - m)x + c - p$.

2. Bringe folgende quadratische Funktion auf die kanonische Form: $x^2 + 1$, $-x^2 - x - 1$, $2x^2 - 4x + 10$, $2x^2 - 20x + 50$, $3x^2 + 2x + \frac{1}{3}$, $x^2 - 3x + 2$, $x^2 - 1$, $4x^2 - 4x - 3$, $3x^2 - 6$, $x^2 - 2x - 2$.

3. Welche Werte können die in den vorhergehenden Beispielen angeführten Funktionen annehmen? Welches sind ihre größten und kleinsten Werte?

4. Kann die quadratische Funktion $5x^2 + 7x - 24$ die Werte 28, 0, -26, -24, 10 für reelle Werte von x annehmen und wenn dies der Fall ist, an welchen Stellen?

5. Untersuche in derselben Weise die Funktion $x^2 + 2x + 4$ und bestimme jene Stellen x, an denen die Funktion die Werte -1, 0, 3, 5 besitzt.

6. Betrachte ebenso die Funktion $2x^2 - 12x + 18$. Für welche Werte von x nimmt die Funktion die Werte 8, 32, 0, $-m$ an.

7. Berechne die größten und kleinsten Werte der folgenden Funktionen: $3x - x^2$, $x^2 - 3x$, $x(a - x)$, $x(x - a)$, $ct - \frac{g}{2}t^2$ (t unabhängige Veränderliche), $x^2 + (a - x)^2$.

8. Gegeben sind: $a = \frac{1}{2}$ und die beiden Nullstellen $x_1 = -7$, $x_2 = 3$; wie lautet die quadratische Funktion?

9. Dasselbe Beispiel für $a = -1$, $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

10. Die Werte einer quadratischen Funktion für $x = -1$, $\frac{1}{2}$, 1 sind beziehungsweise 9, $\frac{3}{2}$, 3. Berechne die Koeffizienten a, b, c.

VIII. Graphische Darstellung der Funktion $ax^2 + bx + c$.

Um zunächst die besondere quadratische Funktion $y = ax^2$ (z. B. $y = \frac{1}{2}x^2$) graphisch darzustellen, legen wir — wie in den früher behandelten Fällen — ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde

(Fig. 8), wählen eine bestimmte Längeneinheit (1 *cm*) und tragen die Werte der unabhängigen Veränderlichen als Abszissen, die der abhängigen Veränderlichen als Ordinaten auf. Dadurch entsteht eine krumme Linie, welche durch den Ursprung geht und bezüglich der Ordinatenachse symmetrisch ist, denn für $x = O$ ist auch $y = O$ und zwei absolut gleiche, aber entgegengesetzte Werte der unabhängigen Veränderlichen x liefern denselben Funktionswert (M und M'). Jeder dieser Punkte besitzt die Eigenschaft, daß er von einem bestimmten Punkte und einer gegebenen Geraden gleichen Abstand hat. Um diesen Nachweis führen zu können, fixieren wir den Punkt

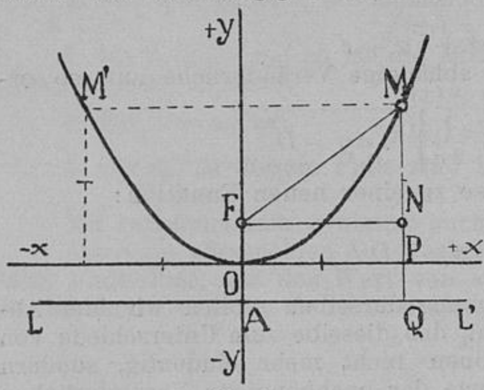

Fig. 8.

$F\left(o, \frac{p}{2}\right)$, wo $p = \frac{1}{2a}$ (= 1) zu setzen ist, und die Gerade LL', welche im Abstande $-\frac{p}{2}$ $\left(= -\frac{1}{2}\right)$ parallel zur Abszissenachse zu ziehen ist. Fällt man von irgend einem der gefundenen Punkte M (x_0, $y_0 = a x_0^2$) das Lot MQ auf LL', ebenso von F aus das Lot FN auf MQ, so folgt unmittelbar:

$$MN = MP - PN = y_0 - \frac{p}{2}; \quad FN = x_0.$$

Die Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks ΔFMN ergibt:

$$FM^2 = \left(y_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + x_0^2 = \left(y_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + 2py_0 = \left(y_0 + \frac{p}{2}\right)^2;$$

daher:

$$FM = y_0 + \frac{p}{2}.$$

Denselben Wert hat auch MQ, womit die Behauptung erwiesen ist.

Man definiert in der Lehre von den Kegelschnitten die Parabel als den geometrischen Ort aller Punkte, welche von einem gegebenen Punkte, dem Brennpunkte, und einer gegebenen Geraden, der Leitlinie, gleichen Abstand haben. Der Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie wird Parameter genannt. In unserem Falle liegen daher alle Punkte (x, ax^2) auf der Parabel, welche F zum Brennpunkte, LL' zur Leitlinie hat und deren Parameter $AF = p$ ist.

Aber auch umgekehrt entspricht jedem Punkte dieser Parabel ein bestimmter Funktionswert:

$$y = ax^2 = \frac{1}{2p} x^2.$$

Denn aus der Eigenschaft:

$$MF = MQ \text{ oder } MF^2 = MQ^2,$$

wo jetzt M irgend einen Parabelpunkt (x, y) bedeutet, sowie aus dem rechtwinkligen Dreieck ΔMFN folgt:

$$\left(y - \frac{p}{2}\right)^2 + x^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Die Vereinfachung dieser Gleichung führt zu dem Ergebnis:

$$x^2 = 2py \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{2p} x^2 = a x^2$$

w. z. bew. w.

Um nun z. B. die Funktion

$$y = \frac{1}{2}(x-1)^2$$

graphisch zu veranschaulichen, vergleichen wir dieselbe mit:

$$\eta = \frac{1}{2} x^2$$

Wenn die Werte von $x-1$ und x übereinstimmen, d. h. also wenn im ersteren Falle immer die Werte von x um 1 größer gewählt werden als im zweiten Falle, so erhalten wir dieselben Funktionswerte y und η. Folgende kleine Tabelle von einander entsprechenden Werten der drei Veränderlichen macht dies deutlicher:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$
η	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	8

Geometrisch wird dieser Zusammenhang dadurch ausgedrückt, daß die Kurve $y = \frac{1}{2} x^2$ parallel zur x Achse im positiven Sinne um die Strecke 1 verschoben erscheint (siehe Fig. 9):

Die neue Kurve ist daher wieder eine Parabel, deren Parameter und Leitlinie die gleichen geblieben sind; dagegen erscheinen Scheitel und Brennpunkt in neuer Lage:

$$A(1, 0), \qquad F(1, \frac{p}{2}).$$

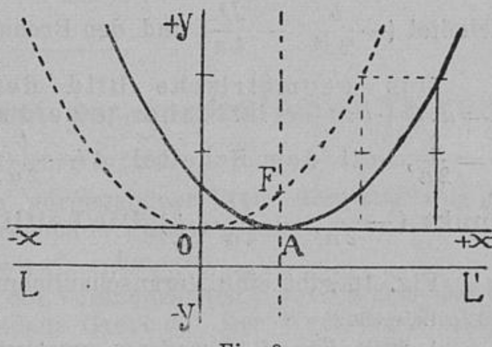

Fig. 9.

Dasselbe gilt von den allgemeinen Funktionen:

$$y = a x^2 \text{ und } y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_1)^2.$$

Die Kurve, welche die zweite Funktion darstellt, kann man in der Weise erhalten, daß man die Parabel $y = a x^2$ parallel zur x Achse um das Stück $x_1 = -\frac{b}{2a}$ im Sinne des Zeichens von x_1 verschiebt.

Ebenso einfach ist der Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen:

$$y = a x^2 \text{ und } y = a x^2 \pm m \qquad (m > 0)$$

geometrisch nachzuweisen. In diesem Falle braucht man bloß die Ordinaten der Parabel $y = a x^2$ um m zu vermehren, beziehungsweise zu vermindern und erhält die neue Kurve $y = a x^2 \pm m$. Dieselbe stellt natürlich abermals eine Parabel mit demselben Parameter dar. Die Leitlinie erscheint um $\pm m$ parallel zu sich selbst verschoben. Scheitel und Brennpunkt der neuen Kurve haben die Koordinaten $(O, \pm m)$ und $(O, \pm m + \frac{p}{2})$.

Will man endlich die allgemeinste quadratische Funktion:

$$y = a x^2 + b x + c = a \left\{ (x + \frac{b}{2 a})^2 - \frac{D}{4 a^2} \right\}$$

geometrisch veranschaulichen, so kann man derart verfahren, daß man von der Kurve

$$Y = a x^2$$

ausgeht und dieselbe zuerst parallel zu sich selbst längs der x Achse um $-\frac{b}{2 a}$ verschiebt. Dadurch erhält man die Kurve:

$$\eta = a (x + \frac{b}{2 a})^2.$$

Mit dieser Parabel nimmt man endlich eine neue Verschiebung längs der y Achse um $-\frac{D}{4 a}$ vor und erhält auf diese Weise die Kurve, welche die Funktion:

$$y = a (x + \frac{b}{2 a})^2 - \frac{D}{4 a} = a x^2 + b x + c$$

darstellt. Diese neue Parabel hat denselben Parameter p, ferner den Scheitel $(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4 a})$ und den Brennpunkt $(-\frac{b}{2 a}, -\frac{D}{4 a} + \frac{p}{2})$.

Das geometrische Bild der quadratischen Funktion $y = a x^2 + b x + c$ ist daher eine Parabel mit dem Parameter $p = \frac{1}{2 a}$, mit dem Scheitel $A(-\frac{b}{2 a}, -\frac{D}{4 a})$ und mit dem Brennpunkt $(-\frac{b}{2 a}, -\frac{D}{4 a} + \frac{p}{2})$. Die Leitlinie ist parallel zur x Achse.

Fig. 10 gibt eine Veranschaulichung aller 6 möglichen Fälle.

Beispiele:

1. Stelle folgende Funktionen graphisch dar und bestimme die Lage des Scheitels und des Brennpunktes (Längeneinheit . . 1 *cm*):
$y = -\frac{1}{3} x^2$, $y = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{8} x$, $y = -\frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4}$, $y = x^2 + 2 x + 3$, $y = -x^2 + x - \frac{1}{4}$,
$$y = \frac{2}{5} x^2 - 4 x + 10.$$

2. Konstruiere die Parabel $y = 100 x^2$ (Längeneinheit . . 2 *m*).

3. Dieselbe Aufgabe für $y = 0{\cdot}01 x^2$ (Längeneinheit $^1/_2$ *mm*).

4. Man konstruiere die Parabel $y = x^2$, indem man der Reihe nach als Längeneinheit 1 *cm*, 2 *cm*, 4 *cm* wähle.

5. Bestimme die Schnittpunkte der beiden Kurven $y = \frac{3}{4} x^2$ und $y = \frac{1}{2} x + 4$.

6. Dieselbe Aufgabe für $y = x^2 + 2x - 7$ und $y = -3x + 7$.

7. Gib die Bedingung an, unter welcher die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ und die Gerade $y = mx + p$ reelle Schnittpunkte besitzen.

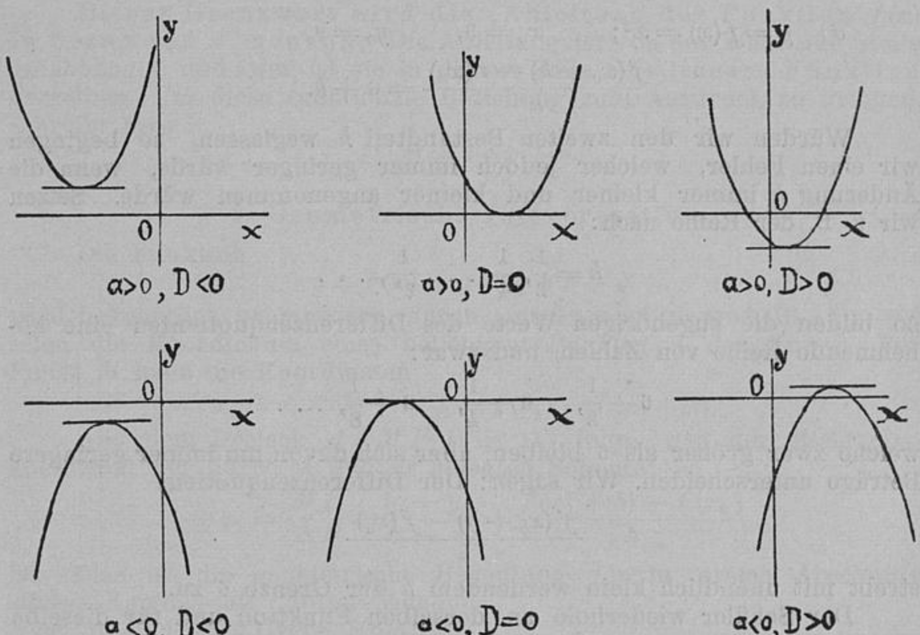

Fig. 10.

8. Wo schneiden sich die beiden Parabeln $y = -2x^2$ und $y = 3x^2 - 5$?
9. Dieselbe Aufgabe für $y = x^2 + 3$ und $y = -x^2 + 11$.

IX. Der Differentialquotient der quadratischen Funktion.

1. Definition.

Es sei x_0 ein willkürlich vorgegebener Wert der unabhängigen Veränderlichen und der entsprechende Funktionswert:

$$f(x_0) = a x_0^2 + b x_0 + c.$$

Wir ändern nun den Wert der Veränderlichen x um die zunächst beliebige, aber von Null verschiedene Größe h. Der Wert der Funktion geht dadurch in

$$f(x_0 + h) = a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c$$

über. Durch Subtraktion erhält man die Änderung der Funktion:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (2 a x_0 + b) h + a h^2 \quad \ldots \quad (1)$$

oder, wenn man durch h dividiert, den „Differenzenquotienten":

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = (2 a x_0 + b) + a h \quad \ldots \quad (2)$$

Bei der linearen Funktion ist dieser Quotient von h unabhängig, also eine Funktion 0^{ten} Grades in bezug auf h, bei der quadratischen Funktion ist er eine Funktion ersten Grades in bezug auf h. Hier kommt also zu einem von h unabhängigem Gliede $2ax_0 + b$ noch ein von h abhängiger Bestandteil ah hinzu. Die Bedeutung dessen wollen wir zunächst an einigen Beispielen klar machen:

a) $y = f(x) = x^2; \qquad x_0 = 3, \qquad y_0 = 9,$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 6 + h.$$

Würden wir den zweiten Bestandteil h weglassen, so begingen wir einen Fehler, welcher jedoch immer geringer würde, wenn die Änderung h immer kleiner und kleiner angenommen würde. Setzen wir z. B. der Reihe nach:

$$h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots$$

so bilden die zugehörigen Werte des Differenzenquotienten eine abnehmende Reihe von Zahlen, und zwar:

$$6 + \frac{1}{2}, \quad 6 + \frac{1}{4}, \quad 6 + \frac{1}{8}, \ldots$$

welche zwar größer als 6 bleiben, aber sich davon um immer geringere Beträge unterscheiden. Wir sagen: Der Differenzenquotient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

strebt mit unendlich klein werdendem h der Grenze 6 zu.

Der Schüler wiederhole an derselben Funktion und für dieselbe Stelle $x_0 = 3$ die obigen Schlüsse, indem er der Reihe nach $h = -\frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ setze. Dasselbe führe er für eine andere Stelle z. B. $x_0 = 4, 5, \ldots$ durch.

b) $y = f(x) = 2x^2 - 3; \qquad x_0 = 2, \qquad y_0 = 5,$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 8 + 2h.$$

Läßt man h beliebig klein werden, indem man z. B. $h = 10^{-n}$ oder -10^{-n} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ setzt, so kommt man zu dem Resultate, daß in diesem Falle der Differenzenquotient mit unendlich klein werdenden h der Grenze 8 zustrebt.

Man beachte ferner, daß dieser Grenzwert für eine andere Stelle (z. B. für $x_0 = 3$) zwar wieder ein bestimmter, aber ein von dem ersteren verschiedener Wert (12) ist.

c) $y = f(x) = -2x^2 + 3x + 1; \qquad x_0 = -\frac{1}{2}, \qquad y_0 = -1,$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h} = 5 - 2h.$$

Der Grenzwert dieses Quotienten ist daher 5.

Analog verfährt man im allgemeinen Fall. Läßt man die veränderliche Größe h immer kleiner und kleiner werden, so nähert sich der Quotient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

wie man unmittelbar aus (2) erkennt, der Grenze

$$2\,a\,x_0 + b.$$

Dieser Grenzwert wird die „Ableitung der Funktion $f(x)$ in bezug auf x" genannt. Die Ableitung ist von der Wahl der Stelle x_0 abhängig, und zwar ist sie in diesem Falle eine lineare Funktion derselben. Um diese funktionale Beziehung zum Ausdruck zu bringen, schreibt man:

$$f'(x) = 2\,a\,x + b.$$

2. Geometrische Interpretation.

Die Funktion

$$y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

wird bekanntlich geometrisch durch eine Parabel dargestellt. (x_0, y_0) seien die Koordinaten eines beliebigen Punktes A der Kurve. Der Punkt M habe die Koordinaten

$$x_1 = x_0 + h, \qquad y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h).$$

Aus dem Dreieck $\Delta\,A\,M\,P$ (Fig. 11) folgt, daß der Richtungskoeffizient der durch A und M gelegten Sekante:

$$tg\,\varphi_1 = \frac{M\,P}{A\,P} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ist. Dies ist die geometrische Bedeutung der im ersten Abschnitte dieses Kapitels als „Differenzenquotient" bezeichneten Größe. Vom Differenzenquotient gingen wir, indem wir h immer kleiner und kleiner werden ließen, zum Grenzwerte desselben: $f'(x_0)$ über. Geometrisch kann dieser Vorgang in der Weise versinnbildlicht werden, daß der Punkt M immer näher und näher gegen A rückt; dabei muß M aber stets auf der Kurve bleiben. Die Sekante $A\,M$ ändert zwar fortwährend ihre Richtung, nähert sich jedoch einer bestimmten Grenzlage, und zwar der Tangente im Punkte (x_0, y_0). Der Richtungskoeffizient der Tangente ist daher der Wert der Ableitung an der Stelle x_0. Daraus folgt der Satz:

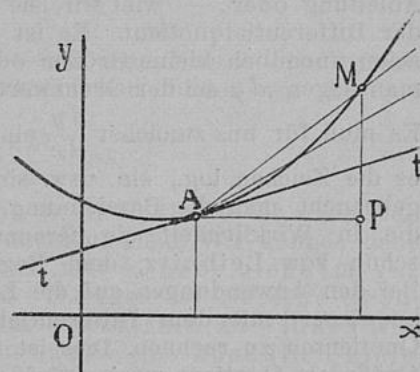

Fig. 11.

Geometrisch wird die Ableitung der quadratischen Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 durch den Richtungskoeffizienten der Tangente dargestellt, welche im Punkte (x_0, y_0) an die Kurve $y = f(x)$ gezogen werden kann.

Sehr oft bezeichnet man die Änderungen der Veränderlichen in folgender Form:

$$x_1 - x_0 = \Delta\,x \quad \text{und} \quad y_1 - y_0 = \Delta\,y$$

(lies „Delta x" und „Delta y" oder „Differenz x" und „Differenz y").

Der Differenzenquotient ist dann:

$$\frac{\Delta\,y}{\Delta\,x}$$

Der Grenzwert, dem diese Größe zustrebt, wenn Δx immer kleiner und kleiner wird — in der bisherigen Ausdrucksweise die Ableitung der Funktion — wird mit dem Symbol

$$\frac{dy}{dx}$$

(lies: dy nach dx) bezeichnet und führt den Namen „Differentialquotient". Es ist also im Falle der quadratischen Funktion:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=(2ax_0+b)+ah,$$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=2ax+b.$$

Es muß hier ausdrücklich betont werden, daß nach dieser Definition $\frac{dy}{dx}$ keineswegs als wirklicher Quotient aufgefaßt werden darf. Dies geht aus unserem Verfahren ganz klar hervor. Wir machten anfangs Δx immer kleiner und kleiner, dasselbe geschah infolgedessen mit Δy. Nun stellten wir freilich den Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ auf, führten aber die Division $\Delta y : \Delta x$ wirklich aus und bekamen endliche Werte, die sich von einem bestimmten Grenzwerte um immer weniger und weniger unterschieden, je kleiner wir Δx wählten. Erst diese Grenze ist die Ableitung oder — wie wir sie von nun ab häufig nennen wollen — der Differentialquotient. Es ist daher falsch, zu glauben, dy und dx seien unendlich kleine Größen oder gar gleich Null. Ebensowenig kann man sagen, dy sei der Grenzwert von Δy, dx der Grenzwert von Δx. Es muß für uns zunächst $\frac{dy}{dx}$ ein bloßes Symbol bleiben, ähnlich wie es die Zeichen log., sin. usw. sind. Man wird freilich fragen, warum gebraucht man die Bezeichnung „Differentialquotient" für eine Größe, die in Wirklichkeit ein Grenzwert ist? Diese Bezeichnung rührt schon von Leibnitz, dem Begründer der Differentialrechnung, her. Bei den Anwendungen auf die Lehre von den Kurven erschien es ihm bequemer, mit dem Differentialquotienten wie mit einem wirklichen Quotienten zu rechnen. Dies ist so zu verstehen: Man kann doch jede Größe als Quotient zweier Größen auffassen, man kann z. B. schreiben $3=\frac{p}{q}$, hiebei bedeuten p und q zwei Größen, deren Quotient den bestimmten Wert 3 hat. Ebensogut können wir die Ableitung $f'(x)$ — also den nach dem angegebenen Verfahren völlig bestimmten Grenzwert — als Quotient zweier beliebiger Größen dy und dx, Differentiale genannt, auffassen, deren Verhältnis $dy : dx$ dem Werte $f'(x)$ gleich ist oder welche miteinander durch die Gleichung

$$dy=f'(x)\,dx$$

verbunden sind. Auf die geometrische Interpretation der Differentiale wollen wir hier nicht eingehen, so wie wir auch in der Folge an der Untrennbarkeit der Zeichen im Symbol $\frac{dy}{dx}$ festhalten werden.

X. Eigenschaften des Differentialquotienten.

Wir betrachten wieder einen beliebig vorgegebenen Wert der unabhängigen Veränderlichen x_0 und gehen zu einem zweiten Werte $x = x_0 + h$ über, indem wir eine beliebige positive Größe h hinzufügen. Für eine solche Stelle gilt die Entwicklung:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h f'(x_0) + a h^2 \quad \ldots . \quad (1)$$

Die beiden Bestandteile der rechten Seite haben die Eigenschaft, daß sie beide mit h unendlich klein werden. Ein wesentlicher Unterschied besteht jedoch in der Art, wie sie unendlich klein werden. Das folgende Beispiel wird dies klar machen:

Es sei die Funktion $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ gegeben und für $x_0 = 1$ die Entwicklung:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = 7h + 2h^2$$

vorgenommen. Man setze nun der Reihe nach $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \ldots$ und berechne die zugehörigen Werte von $7h$ und $2h^2$.

h	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	...
$7h$	7.10^{-1}	7.10^{-2}	7.10^{-3}	7.10^{-4}	7.10^{-5}	...
$2h^2$	2.10^{-2}	2.10^{-4}	2.10^{-6}	2.10^{-8}	2.10^{-10}	...

Der zweite Bestandteil nimmt — wie man sieht — viel rascher ab als der erste. Um uns präziser auszudrücken, bilden wir die Quotienten:

$$\frac{7h}{h} = 7 \quad \text{und} \quad \frac{2h^2}{h} = 2h.$$

Während der erste Quotient eine endliche Größe ist, wird der zweite noch immer mit h gleichzeitig unendlich klein. Wir können daher sagen: $7h$ ist eine Größe, die zwar mit h, aber nicht im Verhältnis zu h unendlich klein wird. Dagegen ist $2h^2$ eine Größe, welche sowohl mit h als auch im Verhältnis zu h unendlich klein wird. $7h$ nennt man in bezug auf h eine unendlich kleine Größe erster Ordnung, $2h^2$ eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung.

Der Quotient $\frac{7h + 2h^2}{h} = 7 + 2h$ bleibt sicher endlich, wie klein auch h gewählt werden kann (für $0 < h < \frac{1}{2}$ ist $7 < 7 + 2h < 8$); daher kann nach der obigen Definition auch $7h + 2h^2$ als eine unendlich kleine Größe erster Ordnung bezeichnet werden.

Ebenso ist $hf'(x_0)$, wo $f'(x_0)$ von Null verschieden angenommen wird und von h unabhängig ist, in bezug auf h unendlich klein von der ersten Ordnung, ah^2 dagegen unendlich klein von der zweiten Ordnung.

Wir betrachten nunmehr alle jene Stellen $x = x^0 + h$, für welche h unter einer bestimmten Grenze liegt; wir nennen die Gesamtheit dieser Stellen eine „**Umgebung der Stelle** x_0". Jeder Funktionswert, welcher zu einem Werte einer gewissen Umgebung der Stelle x_0 gehört, läßt sich in der Form darstellen:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \,.\, f'(x_0) + a\, h^2 \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Er zerfällt also in drei Bestandteile: 1. in ein konstantes Glied $f(x_0)$, 2. in ein Glied, welches in bezug auf h von der ersten Ordnung unendlich klein wird, $h f'(x_0)$ und 3. in ein Glied, welches von der zweiten Ordnung unendlich klein wird, $a h^2$.

Setzt man $\quad x_0 + h = x$, also $h = x - x_0$,

so erhält man aus (2):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a(x - x_0)^2 \quad . \; . \; . \quad (3)$$

Man nennt diese Darstellung die „**Entwicklung der Funktion** $f(x)$ **in der Umgebung von** x_0". Bricht man diese Entwicklung beim zweiten Gliede ab, zieht also bloß

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad . \; . \; . \quad (4)$$

in Betracht, so stellt dieser Ausdruck eine lineare Funktion von x dar, welche folgende Eigenschaften hat:

1. Für $x = x_0$ nimmt sie den Wert $f(x_0)$ an, weil für $x = x_0$ das zweite Glied verschwindet.

2. Bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung $a(x - x_0)^2$ stellt sie die quadratische Funktion $f(x)$ in einer gewissen Umgebung von x_0 genau dar.

Zur näheren Erläuterung dieser zweiten Eigenschaft mögen folgende besondere Beispiele angeführt werden.

a) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

in einer gewissen — vorläufig noch nicht näher angegebenen — Umgebung der Stelle $x_0 = 1$; die Entwicklung lautet:

$$f(x) = 6 + 7(x - 1) + 2(x - 1)^2, \qquad h = x - 1.$$

Wir beschränken uns auf jene Stellen x in der Nähe von $x_0 = 1$, welche sich davon um weniger als 0·1 unterscheiden, also auf die Umgebung $h < 0{\cdot}1$. h wird stets als positiv vorausgesetzt. Das zweite Glied $7(x - 1)$ ist daher kleiner als 0·7, das dritte Glied dagegen kleiner als 0·02. Daraus folgt: Wenn man die Entwicklung von $f(x)$ beim zweiten Gliede abbricht, so stellt der lineare Ausdruck

$$6 + 7(x - 1)$$

die Funktion $f(x)$ in der Umgebung $0 < h < 0{\cdot}1$ der Stelle $x_0 = 1$ auf Zehntel genau dar. Der Fehler, den man begeht, wenn man das letzte Glied $2(x - 1)^2$ wegläßt, ist sicher kleiner als 0·05.

Will man die Genauigkeit weiter treiben, also z. B. die genannte Funktion auf Tausendstel genau darstellen, so kann man auch hier die quadratische Funktion durch die lineare Funktion

$$6 + 7(x - 1)$$

ersetzen. Man braucht bloß die Umgebung $0 < h < 10^{-3}$ zu wählen, das weggelassene Glied ist von der Ordnung 2.10^{-6}. Nur ist jetzt die Umgebung der Stelle $x_0 = 1$, in welcher diese Ersetzung gemacht werden kann, eine kleinere geworden. Die Giltigkeit der Behauptung beschränkt sich nur auf die Umgebung $h < 10^{-3}$.

Betrachtet man die Funktion:

$$100\,x^2 - 202\,x + 110$$

in der Nähe der Stelle $x_0 = 1$, so lautet die Entwicklung für diese Stelle:

$$8 - 2\,(x - 1) + 100\,(x - 1)^2.$$

Setzt man z. B. $h < 10^{-1}$, so ist die Ordnung des dritten Gliedes:

$$10^2 . 10^{-2} \quad . \; . \; . \quad \text{Einer},$$

d. h. dieses Glied kann noch Zehntel enthalten. Wollen wir also die Werte der quadratischen Funktion auf Zehntel genau ausgedrückt haben, so dürften wir in der angegebenen Umgebung die quadratische Funktion nicht ohne weiteres durch die lineare Funktion

$$8 - 2\,(x - 1)$$

ersetzen, weil das weggelassene dritte Glied eventuell noch auf die Zehntel einen Einfluß nehmen kann. Wenn wir aber eine kleinere Umgebung z. B. $h < 10^{-2}$ wählen, so ist das letzte Glied nur mehr von der Ordnung:

$$10^2 . 10^{-4} = 10^{-2},$$

kann also die Zehntel nicht mehr beeinflussen. In dieser Umgebung stellt die lineare Funktion

$$8 - 2\,(x - 1)$$

die quadratische Funktion auf Zehntel genau dar.

Auf diese Weise kann man durch geeignete Wahl der Umgebung einen beliebigen Grad der Genauigkeit erzielen, mit welcher die lineare Funktion:

$$f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

die quadratische Funktion darstellt. In diesem Sinne ist auch die als zweite bezeichnete Eigenschaft der linearen Funktion zu verstehen.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, daß der Begriff „Umgebung einer Stelle x_0" auch auf solche Werte x ausgedehnt werden kann, die kleiner als x_0 sind, wofür $h = x - x_0$ einen negativen Wert hat und seinem absoluten Werte nach unter einer gewissen Grenze bleibt. Es bleiben auch alle weiteren Schlüsse aufrecht, denn bei der Ordnung einer Größe kommt es nicht auf das Zeichen, sondern bloß auf ihren absoluten Wert an.

Wir betrachten nun irgend eine lineare Funktion von x, welche mit

$$f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

nur die eine Eigenschaft gemein hat, daß sie für $x = x_0$ den Wert $f(x_0)$ annimmt. Bekanntlich läßt sich eine solche Funktion immer in der Form darstellen:

$$\eta = f(x_0) + A\,(x - x_0), \qquad . \; . \; . \; . \qquad (5)$$

wo A irgend eine von $f'(x_0)$ verschiedene konstante Größe vorstellen möge. (Vgl. Kap. IV, Beispiel 3.) Es bedeute ferner x in (5) denselben Wert einer gewissen Umgebung von x_0 wie in (3); dann erhält man durch Subtraktion von (3) und (5):

$$f(x) - \eta = (x - x_0)\left\{f'(x_0) - A\right\} + a\,(x - x_0)^2 \quad . \; . \; . \quad (6)$$

Da

$$f'(x_0) - A$$

der Voraussetzung nach eine bestimmte von Null verschiedene Größe ist, so können in dieser Entwicklung die Glieder erster Ordnung nicht verschwinden und die Differenz

$$f(x) - \eta$$

wird von der ersten Ordnung unendlich klein, d. h. die Werte der linearen Funktion η unterscheiden sich von den entsprechenden Werten der Funktion $f(x)$ um Glieder erster Ordnung. Jede andere von (4) verschiedene lineare Funktion, welche für $x=x_0$ den Wert $f(x_0)$ annimmt, stellt also die Funktion bloß bis auf Glieder erster Ordnung genau dar. Die für die lineare Funktion:

$$f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$$

entwickelten zwei Eigenschaften sind daher für dieselbe charakteristisch und wir können folgenden wichtigen Satz aufstellen:

Der Differentialquotient liefert eine lineare Funktion von x von der Form:

$$f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0),$$

welche die vorgelegte quadratische Funktion in einer gewissen Umgebung der Stelle x_0 genauer darstellt als jede andere lineare Funktion, welche für $x=x_0$ denselben Wert wie die Funktion annimmt.

Diese Eigenschaft des Differentialquotienten läßt auch eine sehr einfache geometrische Deutung zu. $y=f(x)$ ist die Gleichung einer Parabel. Die Funktionswerte (3), die sich nur auf eine gewisse Umgebung von x_0 beziehen, werden geometrisch durch ein Stück dieser Parabel charakterisiert, das nämlich den Punkt $A(x_0, y_0)$ und alle Punkte der genannten Umgebung enthält. Die durch den Differentialquotienten bestimmte lineare Funktion:

$$Y=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0) \quad . \; . \; . \quad (7)$$

wird geometrisch durch die Tangente an die Kurve im Punkte $A(x_0, y_0)$ dargestellt; denn diese Gerade geht durch den Punkt $A(x_0, y_0)$, weil sie für $x=x_0$ den Wert $y_0=f(x_0)$ annimmt und ausserdem hat sie den Richtungskoeffizienten $f'(x_0)$. Die zweite lineare Funktion:

$$\eta=f(x_0)+A(x-x_0) \quad . \; . \; . \quad (8)$$

wird durch irgend eine andere Gerade veranschaulicht, welche durch den Punkt $A(x_0, y_0)$ geht. Ihr Richtungskoeffizient ist jedoch von dem der Tangente $f'(x_0)$ verschieden (siehe Fig. 12).

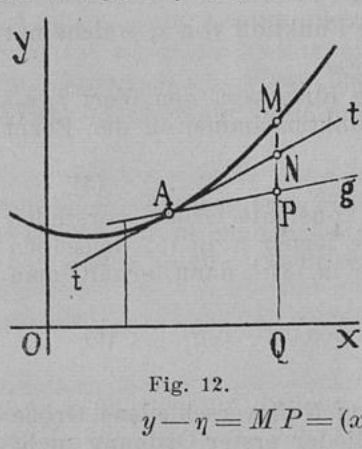

Fig. 12.

Es sei nun x irgend ein Wert in der genannten Umgebung der Stelle x_0. Die Punkte der Kurve, Tangente (t) und Gerade (g), welche denselben Abszissenwert besitzen, haben beziehungsweise die Ordinaten:

$$y=MQ=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+a(x-x_0)^2,$$
$$Y=NQ=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0),$$
$$\eta=PQ=f(x_0)+(x-x_0)A.$$

Durch Subtraktion folgt:

$$y-Y=MN=a(x-x_0)^2,$$
$$y-\eta=MP=(x-x_0)\{f'(x_0)-A\}+a(x-x_0)^2.$$

Die Differenz $y-Y$ stellt den Abstand des Kurvenpunktes vom zugehörigen Tangentenpunkte dar und ist eine Größe zweiter Ordnung;

$y - \eta$ ist analog der Abstand des Kurvenpunktes vom zugehörigen Punkt der Geraden und nach dem Obigen, da $f'(x_0) - A$ von Null verschieden ist, bloß eine Größe erster Ordnung. Daher kann man die Umgebung der Stelle x_0 immer so wählen, daß für alle x dieser Umgebung $y - Y$ dem absoluten Werte nach stets kleiner als $y - \eta$ ist, d. h. daß innerhalb dieser Umgebung dem Kurvenpunkt der zugehörige Tangentenpunkt näher liegt als der entsprechende Punkt irgend einer anderen durch (x_0, y_0) gehenden Geraden. Dieses Ergebnis kann man auch in der Form ausdrücken:

In einer gewissen Umgebung der Stelle (x_0, y_0) stellt die Tangente, welche in diesem Punkte an die Kurve gelegt werden kann, die Kurve genauer dar wie jede andere durch denselben Punkt gezogene Gerade.

Darauf beruht u. a. der Wert der Konstruktion einer Kurve aus ihren Tangenten. Im folgenden sei kurz eine solche Konstruktionsmethode beschrieben und in Fig. 13 angewendet. Man bewege den Scheitel eines rechten Winkels auf einer Geraden derart, daß der eine Schenkel immer durch einen bestimmten Punkt F geht. Der zweite Schenkel ist stets eine Tangente an die Parabel, welche F zum Brennpunkte und A zum Scheitel hat. Auf diese Weise wird die Parabel ausschattiert. Die Konstruktion kann man mit dem Winkeldreieck leicht ausführen. Je dichter die Lote aneinander gelegt werden, desto deutlicher kommt die Gestalt der Parabel zum Vorschein.

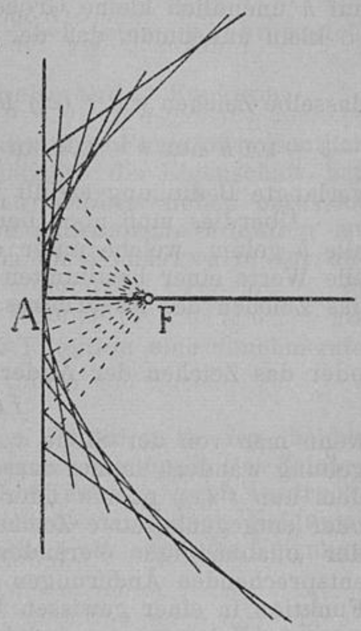

Fig. 13.

XI. Weitere Eigenschaften der quadratischen Funktion.

Mit Hilfe des in den vorigen Kapiteln eingeführten Begriffes des Differentialquotienten kann die Frage nach dem Wachstum und der Abnahme der quadratischen Funktion eine vollständige Lösung erfahren. Wir gehen wieder von irgend einer vorgegebenen Stelle x_0 zu einer Stelle $x_0 + h$, die in einer gewissen Umgebung von x_0 liegt; wir ändern also den Wert der unabhängigen Veränderlichen um die Größe h. Die zugehörige Änderung der Funktion $f(x)$ ist nach X, (1):

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h f'(x_0) + a h^2.$$

Daraus folgt zunächst, daß mit der Änderung der unabhängigen Veränderlichen auch die der Funktion beliebig klein gemacht werden kann. Die Änderung der Funktion ist ja in bezug auf h eine Größe von mindestens der ersten Ordnung.

In den weiteren Untersuchungen müssen wir die beiden Fälle $f'(x_0) \gtrless 0$ und $f'(x_0) = 0$ trennen.

1. $f'(x_0) \gtrless O$.

Man kann h immer so klein wählen, daß das Glied $a h^2$ — mag es positiv oder negativ sein — das Zeichen des ersten Gliedes $h f'(x_0)$ nicht beeinträchtigt. Setzen wir nämlich:

$$h f'(x_0) + a h^2 = h\,(f'(x_0) + a h),$$

so ist in dem Klammernausdrucke das erste Glied eine von Null verschiedene endliche Größe, das zweite Glied $a h$ dagegen eine in bezug auf h unendlich kleine Größe erster Ordnung, d. h. man kann h immer so klein annehmen, daß der Wert des ganzen Ausdruckes

$$f'(x_0) + a h$$

dasselbe Zeichen wie $f'(x_0)$ hat. So braucht man z. B. in dem Ausdrucke $-3 + 100 h$ nur $h < 0{\cdot}03$, in $3 - 25 h \ldots . h < \frac{3}{25}$ zu wählen, damit die verlangte Bedingung erfüllt ist.

Überdies muß noch bemerkt werden, daß diese Eigenschaften für alle h gelten, welche unter der angegebenen Grenze liegen, oder für alle Werte einer bestimmten Umgebung der Stelle x_0. Daher ist auch das Zeichen des Ausdruckes:

$$h f'(x_0) + a h^2$$

oder das Zeichen der Änderung der Funktion:

$$f(x_0 + h) - f(x_0),$$

wenn man von der Stelle x_0 zu der Stelle $x_0 + h$ der bestimmten Umgebung wandert, immer dasselbe wie das Zeichen von $h f'(x_0)$. Je nachdem nun $f'(x_0)$ positiv oder negativ ist, hat dieser Ausdruck dasselbe oder entgegengesetzte Zeichen von h. Weil h die Änderung des Wertes der unabhängigen Veränderlichen vorstellt, so haben die einander entsprechenden Änderungen der unabhängigen Veränderlichen und der Funktion in einer gewissen Umgebung von x_0 dasselbe oder entgegengesetzte Zeichen, je nachdem der Wert der Ableitung von $f(x)$ an dieser Stelle x_0 positiv oder negativ ist. Wenn beide Änderungen dasselbe Zeichen haben, so nimmt mit der unabhängigen Veränderlichen auch der Funktionswert gleichzeitig zu. Im zweiten Falle dagegen, wo beide Änderungen entgegengesetztes Zeichen haben, entspricht einer Zunahme der unabhängigen Veränderlichen eine Abnahme der Funktion. Diese Ergebnisse kann man in folgenden Satz zusammenfassen:

Ist der Wert der Ableitung an der Stelle x_0 positiv ($f'(x_0) > O$), so wächst mit der unabhängigen Veränderlichen gleichzeitig die Funktion. Ist dagegen der Wert der Ableitung an der Stelle x_0 negativ ($f'(x_0) < O$), so nimmt die Funktion ab, wenn die unabhängige Veränderliche zunimmt.

Dieser Satz gilt natürlich nach dem Obigen immer nur für eine bestimmte angebbare Umgebung der Stelle x_0.

Damit ist aber die Frage nach dem Wachstum oder der Abnahme der quadratischen Funktion

$$f(x) = a x^2 + b x + c$$

auf das einfachere Problem zurückgeführt worden, nämlich auf die Untersuchung des Zeichens von

$$f'(x) = 2 a x + b.$$

Daraus folgt unmittelbar, daß im Falle eines positiven a die Ableitung $f'(x)$ für alle Werte $x < -\frac{b}{2a}$ negativ, für alle Werte $x > -\frac{b}{2a}$ positiv ist. Bei negativem a ist das Verhalten von $f'(x)$ gerade umgekehrt.

Mithin ist, wenn $a > 0$ ist, die quadratische Funktion für alle Werte: $-\infty < x < -\frac{b}{2a}$ eine „abnehmende", für alle Werte $-\frac{b}{2a} < x < +\infty$ eine „zunehmende" Funktion von x. Ist dagegen $a < 0$, so ist die Funktion für alle Werte $-\infty < x < -\frac{b}{2a}$ eine „zunehmende", für alle Werte $-\frac{b}{2a} < x < +\infty$ eine „abnehmende" Funktion.

Darin unterscheidet sich also die quadratische Funktion wesentlich von der linearen Funktion. Während die letztere die Eigenschaft hat, daß sie für alle Werte der unabhängigen Veränderlichen entweder immer eine abnehmende oder immer eine zunehmende Funktion ist, müssen wir bei der quadratischen Funktion zwei Intervalle der unabhängigen Veränderlichen unterscheiden, und zwar: $(-\infty \text{ bis } -\frac{b}{2a})$ und $(-\frac{b}{2a} \text{ bis } +\infty)$; in dem einen ist die Funktion eine abnehmende, in dem anderen eine zunehmende.

Geometrisch ist dieses Verhalten der Funktion in den beiden Intervallen sofort aus der Gestalt der Kurven zu erkennen. Das Zeichen der Ableitung kommt in der Richtung der Tangente zum Ausdruck; und zwar entspricht einem positiven Zeichen ein spitzer Neigungswinkel der Tangente, einem negativen Zeichen ein stumpfer Neigungswinkel (siehe Fig. 14).

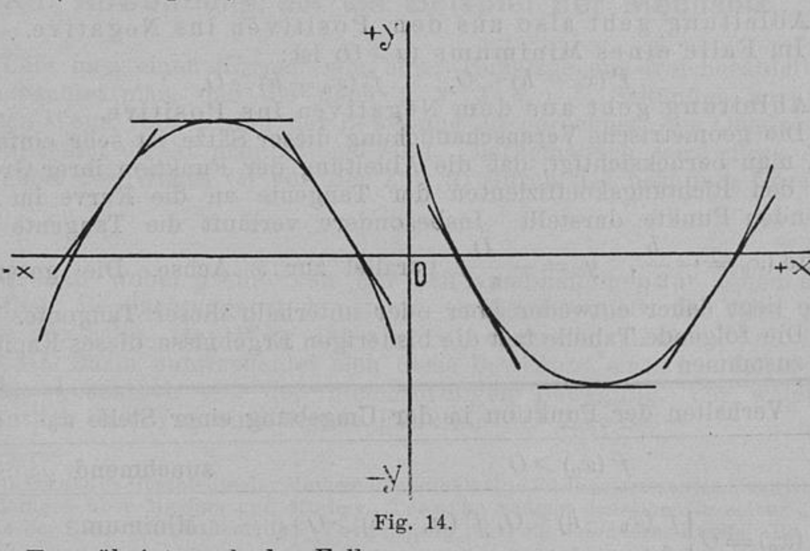

Fig. 14.

Es erübrigt noch der Fall:

2. $f'(x_0) = 0 \quad . \quad . \quad x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Die Entwicklung der Funktion in einer gewissen Umgebung der Stelle x_0 lautet daher:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=a\,h^2.$$

Da h^2 als Quadrat einer reellen Größe positiv ist, so ist das Zeichen der Änderung der Funktion bloß durch das Zeichen von a bestimmt. Ist $a>0$, so ist auch die Änderung der Funktion positiv, gleichgiltig ob $h>0$ oder $h<0$ ist, d. h. geht man von x_0 zu irgend einem benachbarten Werte x_0+h, der größer $(h>0)$ oder kleiner $(h<0)$ als x_0 ist, so wird in jedem Falle der Funktionswert größer:

$$f(x_0+h)>f(x_0)$$

Der Funktionswert $f(x_0)$ ist also unter allen Funktionswerten einer gewissen Umgebung von x_0 der kleinste (Minimum). Analog ist im Falle $a<0$ der Funktionswert $f(x_0)$ innerhalb einer gewissen Umgebung der größte (Maximum).

Wie weit erstreckt sich diese Umgebung? Soweit als die obige Entwicklung gilt und h^2 positiv ist. Dies ist aber für beliebig große und kleine, für positive und negative Werte von h der Fall. Wir können daher von einem für sämtliche Werte der Veränderlichen geltenden Minimum beziehungsweise Maximum der Funktion sprechen.

Wollen wir die beiden Fälle „Maximum" und „Minimum" zusammenfassen, so sprechen wir von einem „Extremum". Das Vorhandensein eines Extremums an einer bestimmten Stelle x_0 ist also notwendig an das Nullwerden der Ableitung (Differentialquotienten) an dieser Stelle geknüpft. Das Zeichen von a gibt näheren Aufschluß über die Art des Extremums.

Es ist für $x_0=-\frac{b}{2a}$:

$$f'(x_0\pm h)=\pm 2ah \qquad \ldots \qquad (h>0)$$

Im Falle eines Maximums $(a<0)$ ist daher:

$$f'(x_0-h)>0, \qquad f'(x_0+h)<0.$$

Die Ableitung geht also aus dem Positiven ins Negative.

Im Falle eines Minimums $(a>0)$ ist:

$$f'(x_0-h)<0, \qquad f'(x_0+h)>0.$$

Die Ableitung geht aus dem Negativen ins Positive.

Die geometrische Veranschaulichung dieser Sätze ist sehr einfach, wenn man berücksichtigt, daß die Ableitung der Funktion ihrer Größe nach den Richtungskoeffizienten der Tangente an die Kurve im betreffenden Punkte darstellt. Insbesondere verläuft die Tangente im Punkte $\left(x_0=-\frac{b}{2a},\ y_0=-\frac{D}{4a}\right)$ parallel zur x Achse. Die gesamte Kurve liegt daher entweder über oder unterhalb dieser Tangente.

Die folgende Tabelle faßt die bisherigen Ergebnisse dieses Kapitels kurz zusammen:

Verhalten der Funktion in der Umgebung einer Stelle x_0	
$f'(x_0)>0$	zunehmend
$f'(x_0)=0 \begin{cases} f'(x_0-h)<0,\ f'(x_0+h)>0 \\ f'(x_0-h)>0,\ f'(x_0+h)<0 \end{cases}$	Minimum Maximum
$f'(x_0)<0$	abnehmend

Beispiele über Maxima und Minima.

1. Bestimme den größten Wert von $x(a-x)$. Deute die Aufgabe geometrisch. Dies ist das erste Beispiel einer Maximum- und Minimum-Aufgabe, welcher man in der Geschichte der Mathematik begegnet.[1]

2. Eine gegebene Strecke a so zu teilen, daß die Summe der Quadrate über den beiden Teilen ein Extremum wird. Entscheide, ob ein Maximum oder Minimum eintritt.

3. Unter allen Dreiecken mit gleicher Grundlinie c und gleichem Umfange $2s = a + b + c$ hat das gleichschenklige den größten Flächeninhalt.

Auflösung: Man setze $a + b = 2s - c = m$, $a = \frac{m}{2} + x$, $b = \frac{m}{2} - x$ und benütze die Heronsche Formel; man beachte ferner, daß, wenn eine Funktion $f(x)$ ein Maximum wird, dasselbe von $f^2(x)$ gilt. Ebenso kann man zur Vereinfachung der Rechnung einen konstanten positiven Faktor in einen Ausdruck, der ein Extremum werden soll, weglassen.

4. Unter allen Dreiecken mit gleicher Grundlinie c und gleichem Flächeninhalte f hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang.

Auflösung: Man setze $a - b = x$, $a + b = \varphi(x)$ und beachte, daß der Umfang ein Minimum wird, wenn $\varphi(x)$ seinen kleinsten Wert erhält. Man benütze die Heronsche Formel und beachte, daß ein Bruch mit positivem konstanten Zähler ein Minimum wird, wenn der Nenner seinen größten Wert erhält.

5. Unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden, welche einer gegebenen Kugel eingeschrieben sind, hat der Würfel den größten Inhalt.

Auflösung: Man fasse zunächst alle Parallelepipede in je eine Gruppe zusammen, welche dieselbe Höhe haben, und beweise, daß unter den genannten Körpern einer und derselben Gruppe das Parallelepiped mit quadratischer Grundfläche den größten Inhalt besitzt. Sodann beschränke man sich auf Körper von dieser Eigenschaft und beweise für diese den Satz. Als unabhängige Veränderliche betrachte man das Quadrat einer Kante, als Funktion das Quadrat des Volumens.

Ich verweise ferner auf die in unseren Lehrbüchern der Mathematik und in den verschiedenen Aufgabensammlungen[2] enthaltenen zahlreichen Beispiele über größte und kleinste Werte.

XII. Anwendung auf ein Beispiel der Mechanik.

Läßt man einen Körper von einer Ruhelage aus frei herabfallen, so beobachtet man, daß die nach 1, 2, 3, 4, . . . Sekunden zurückgelegten Wege, vom Beginn der Bewegung an gerechnet, den Quadraten der Fallzeiten direkt proportional sind. Mathematisch wird diese Abhängigkeit des Weges (s) von der Zeit (t) durch das bekannte Gesetz:

$$s = \frac{g}{2} t^2$$

ausgedrückt, wobei g eine von der Zeit unabhängige, für einen und denselben Beobachtungsort konstante Größe ist (z. B. für Wien $g = 981\,cm$ pro Sek.). **Der Weg ist also eine quadratische Funktion der Zeit.** Darin unterscheidet sich diese Bewegung eines frei fallenden Körpers wesentlich von der gleichförmigen Bewegung, bei welcher bekanntlich der Weg eine lineare Funktion der Zeit ist.

---

[1]) Cantors Geschichte der Mathematik enthält eine Fülle interessanter historischer Bemerkungen über Maxima und Minima. Tropfke widmet denselben in seiner „Geschichte der Elementarmathematik" (Veit, Leipzig 1902) ein besonderes Kapitel (Bd. II., 14. Teil).

[2]) z. B. Schülke, Aufgabensammlung (Teubner, Leipzig 1902); Martus, Mathematische Aufgaben (Koch, Leipzig 1904); Müller und Kutnewsky, Aufgabensammlung (Teubner, Leipzig 1907).

Wir betrachten den Körper in einem bestimmten Zeitmomente, z. B. zur Zeit t_0. Nach t_0 Sekunden hat sich der Körper um die Strecke

$$s_0 = \frac{g}{2} t_0{}^2$$

vom Ausgangspunkte der Bewegung entfernt. Nachher verfolgen wir den Körper eine Zeitlang bis etwa zum Ende der $t_1{}^{\text{ten}}$ Sekunde. Bis dahin hat er sich vom Ausgangspunkt der Bewegung um die Strecke

$$s_1 = \frac{g}{2} t_1{}^2$$

entfernt. Während des Zeitintervalles

$$\tau = t_1 - t_0$$

hat der Körper den Weg

$$s_1 - s_0 = \frac{g}{2} (t_1{}^2 - t_0{}^2)$$

zurückgelegt. Die rechte Seite dieser Gleichung kann man wie im allgemeinen Falle einer quadratischen Funktion auf die Form bringen:

$$s_1 - s_0 = g\, t_0 (t_1 - t_0) + \frac{g}{2} (t_1 - t_0)^2$$

oder, wenn man durch $t_1 - t_0$ dividiert:

$$\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = g\, t_0 + \frac{g}{2} (t_1 - t_0).$$

Dieser Quotient aus der Wegänderung in die entsprechende Änderung der Zeit ist sowohl von t_0 als auch von

$$\tau = t_1 - t_0$$

abhängig. Wir können daher nicht mehr wie bei der gleichförmigen Bewegung von einer während der ganzen Bewegung konstanten Geschwindigkeit sprechen. Wohl aber können wir sagen: Wenn sich in derselben Zeit τ neben dem ersten frei fallenden Körper ein zweiter gleichförmig mit der Geschwindigkeit

$$g\, t_0 + \frac{g}{2} (t_1 - t_0) = g\, t_0 + \frac{g}{2} \tau$$

bewegen würde, so würde dieser Körper den gleichen Weg $s_1 - s_0$ zurücklegen. Es ist daher üblich, diesen Quotienten

$$\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$$

als „mittlere Geschwindigkeit des Körpers in dem Zeitintervall τ" zu bezeichnen.

Je kleiner dieses Zeitintervall τ gemacht wird, umsoweniger wird sich die Bewegung des zweiten Körpers von der des ersten unterscheiden. Ziehen wir nun ein genügend kleines Zeitintervall in Betracht, so ist die mittlere Geschwindigkeit während dieser Zeit:

$$\frac{s_1 - s_0}{\tau} = g\, t_0 + \frac{g}{2} \tau$$

nur um wenig $(\frac{g}{2} \tau)$ von dem bestimmten Werte $g\, t_0$ verschieden. Gehen wir endlich zur Grenze $\tau = O$ über, so erhalten wir als Grenzwert der mittleren Geschwindigkeit zur Zeit t_0 den Wert:

$$g\, t_0$$

welchen wir die „Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit t_0" nennen wollen. Die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers ist von Augenblick zu Augenblick eine andere, sie ist eine lineare Funktion der Zeit. Daher ändert sich dieselbe in gleichen Zeiten immer um denselben Betrag; insbesondere beträgt der Zuwachs pro Sekunde : g. Damit hat auch diese Konstante eine physikalische Bedeutung erlangt: g ist der Zuwachs der Geschwindigkeit pro Sekunde oder die „Beschleunigung". Im absoluten Maßsystem (C.-G.-S.-System) ausgedrückt, hat sie z. B. für Wien den schon im Anfange dieses Kapitels angegebenen Wert. Die Bewegung eines frei fallenden Körpers nennt man daher eine „gleichförmig beschleunigte Bewegung".

Der auf diese Weise definierte Wert der Geschwindigkeit (v) zur Zeit t_0 ist — wie man unmittelbar ersieht — identisch mit dem Werte des Differentialquotienten der Funktion $\frac{g}{2}t^2$ in bezug auf t an der Stelle t_0. Man kann daher auch schreiben:

$$v = \frac{ds}{dt} = gt$$

Was also analytisch der Wert des Differentialquotienten der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$, geometrisch der Richtungskoeffizient der Tangente im Punkte (x_0, y_0) der durch $y = f(x)$ dargestellten Kurve bedeutet, ist in dem geschilderten Naturvorgang der Wert der Geschwindigkeit zur Zeit t_0, wo t_0 an die Stelle von x_0 zu setzen ist.

Eine wichtige Eigenschaft des Differentialquotienten war bekanntlich die folgende:

Durch den Differentialquotienten wird eine lineare Funktion

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

bestimmt, welche in einer gewissen Umgebung der Stelle x_0 die Funktion bis auf Größen zweiter Ordnung genauer darstellt, wie jede andere lineare Funktion, welche an der Stelle x_0 denselben Wert wie die Funktion annimmt. Daraus wurde sodann der Schluß gezogen, daß man bei vorgeschriebenem Genauigkeitsgrad in einer durch denselben bestimmten Umgebung die quadratische Funktion $f(x)$ durch die einfachere lineare Funktion:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ersetzen kann.

Als geometrische Deutung dieses Satzes wurde angegeben:

Die in einem bestimmten Punkte (x_0, y_0) der Kurve

$$y = f(x)$$

an dieselbe gezogene Tangente stellt die Kurve in einer gewissen Umgebung der Stelle — ihre Begrenzung hängt von der verlangten Genauigkeit ab — genauer dar als jede andere durch diesen Punkt gehende Gerade. In dieser Umgebung kann man daher die Kurve beziehungsweise das betreffende Kurvenstück durch ein entsprechendes geradliniges Stück der Tangente ersetzen.

Jetzt können wir endlich auch dieser geometrischen Veranschaulichung wenigstens im Falle der besonderen quadratischen Funktion

$$s = \frac{g}{2}t^2$$

eine mechanische Deutung an die Seite stellen:

Durch das Gesetz

$$s = \frac{g}{2} t^2$$

ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung charakterisiert. Ersetzt man dieselbe in einem genügend kleinen Zeitintervall durch eine gleichförmige, so stellt unter allen diesen diejenige mit der Geschwindigkeit $g t_0$ während des erwähnten kleinen Zeitintervalles die wirkliche Bewegung genauer dar wie jede andere gleichförmige Bewegung.

Man kann daher bei vorgeschriebener Genauigkeit ein Zeitintervall, welches entsprechend klein sein wird, angeben, innerhalb dessen man, ohne die Genauigkeitsgrenze zu überschreiten, die Bewegung als eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit $g t_0$ ansehen kann.

Im folgenden sind die wichtigsten Begriffe, welche in den letzten Kapiteln besprochen wurden, an der Hand einer besonderen quadratischen Funktion kurz zusammengefaßt und miteinander verglichen:

Funktionentheorie	Geometrie	Mechanik
$f(x) = a x^2$, quadratische Funktion.	$y = a x^2$, Gleichung einer Parabel.	$s = \frac{g}{2} t^2$, Weg-Zeit Gesetz der gleichförmig beschleunigten Bewegung.
$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 2 a x_0 + a h$, Differenzenquotient.	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = 2 a x_0 + a (x - x_0)$, Richtungskoeffizient der Sekante, welche durch die Punkte (x_0, y_0) und (x, y) geht.	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = g t_0 + \frac{g}{2} \tau$, mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall τ.
$f'(x) = \frac{d f(x)}{d x} = 2 a x$, Ableitung der Funktion oder Differentialquotient.	$tg\,\alpha = \frac{d y}{d x} = 2 a x$, Richtungskoeffizient der Tangente im Punkte (x, y).	$v = \frac{d s}{d t} = g t$, Geschwindigkeit zur Zeit t.

Andere Beispiele, in welchen die Abhängigkeit physikalischer Größen durch eine quadratische Funktion ausgedrückt wird, sind:

1. Wird ein Körper vertikal nach abwärts mit der Anfangsgeschwindigkeit c geworfen, so ist sein Abstand von dem Ausgangspunkt der Bewegung:

$$s = \frac{g}{2} t^2 + c t.$$

2. Analog lautet das Gesetz des vertikalen Wurfes nach aufwärts:

$$y = -\frac{g}{2} t^2 + c t.$$

3. Wird ein Körper unter dem Neigungswinkel α gegen den Horizont mit der Anfangsgeschwindigkeit c geworfen, so steigt er in der Zeit t bis zur Höhe:

$$y = -\frac{g}{2} t^2 + c t \sin \alpha.$$

4. Die lebendige Kraft E, mit welcher ein Körper von der Masse m beim freien Fall am Boden anlangt, ist eine quadratische Funktion der Endgeschwindigkeit v:

$$E = \frac{m v^2}{2}.$$

5. Die Wärme W, welche ein elektrischer Strom von der Stärke i in einem Leiter vom konstanten Widerstande w erzeugt, ist eine quadratische Funktion der Stromstärke:

$$W = 0{\cdot}239 \,.\, i^2 . w \quad g \text{ Kalorien pro Sekunde.}$$

u. a. m.

Anhang.

Auflösung Diophantischer Gleichungen ersten Grades.

Es ist

$$a x - b y = c, \qquad \ldots \qquad (1)$$

wo a und b von Null verschiedene positive ganze Zahlen sind, in ganzen Zahlen aufzulösen. d. h. es sind jene ganzzahligen Wertepaare zu finden, welche, für die Veränderlichen x und y eingesetzt, die Gleichung befriedigen.

Wenn wir von der Beschränkung der Ganzzahligkeit der Lösungen absehen, so gibt es natürlich unzählig viele Wertepaare. Wir brauchen bloß x als die unabhängige und

$$y = \frac{a}{b} x - \frac{c}{b}$$

als die abhängige Veränderliche anzusehen. Um aus allen unendlich vielen Lösungen der Gleichung (1) die ganzzahligen auszusuchen, müssen wir vorerst die Bedingungen für das Bestehen ganzzahliger Lösungen angeben. Es gilt folgender Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen von mindestens einer ganzzahligen Lösung der Gleichung (1) ist, daß der größte gemeinsame Teiler von a und b auch ein Teiler von c ist.

Zunächst ist ja klar, daß der größte gemeinsame Teiler von a und b Teiler von c sein muß; denn er ist in der ganzen linken Seite von (1) enthalten. Die erwähnte Bedingung ist also notwendig.

Um zu zeigen, daß sie auch hinreichend ist, bedienen wir uns folgender, sehr wichtigen Eigenschaft des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen:

Es lassen sich stets zwei ganze positive oder negative Zahlen α und β derart angeben, daß die Identität besteht:

$$t = a\alpha - b \,.\, \beta \qquad \ldots \qquad (2)$$

Mit t wird der größte gemeinsame Teiler von a und b bezeichnet. Im folgenden ist dies an zwei besonderen Beispielen angeführt. Die Grundlage bildet das Euklidsche Kettenverfahren:

1. $a = 7$, $b = 5$.

$$\begin{aligned} 7 &= 5 . 1 + 2 \\ 5 &= 2 . 2 + 1 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} 2 &= 7 - 5 . 1 \\ 1 &= 5 - 2 . 2 \end{aligned}$$

Daraus folgt, wenn man von der zweiten zur ersten Identität übergeht:

$$1 = 5 - 2 . 2 = 5 - (7 - 5 . 1) . 2 = 5 . 3 - 7 . 2$$

oder:

$$1 = 7 . (-2) - 5 (-3).$$

2. $a = 44$, $b = 34$

$$\begin{aligned} 44 &= 34 . 1 + 10 \\ 34 &= 10 . 3 + 4 \\ 10 &= 4 . 2 + 2 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} 10 &= 44 - 34 . 1 \\ 4 &= 34 - 10 . 3 \\ 2 &= 10 - 4 . 2 \end{aligned}$$

daher:

$$2 = 10 - 4 . 2 = 10 - (34 - 10 . 3) . 2 = 10 . 7 - 34 . 2 = (44 - 34 . 1) . 7 - 34 . 2$$

oder:

$$2 = 44 . 7 - 34 . 9$$

Das Verfahren besteht also darin, daß man aus der letzten Identität den größten gemeinsamen Teiler, d. i. den letzten Rest der Kette, als Vielfachsumme des zweit- und drittletzten Restes, mit Hilfe der zweitletzten Identität als Vielfachsumme des dritt- und viertletzten Restes usw. schließlich als Vielfachsumme der beiden ersten Glieder der Kette, d. i. von a und b darstellt. Die Vielfachen von a und b geben die verlangten Zahlen α und β.

Dieser Weg ist freilich nicht immer der kürzeste. Manchmal kann man vielleicht schon durch Versuche eine Lösung finden. Aber das angegebene Verfahren bietet mehr als eine bloße Methode, wie man die Lösungen berechnen kann, es enthält gleichzeitig auch einen Beweis für die Lösbarkeit des Problems.

Wenn wir zwei Zahlen α und β von der verlangten Eigenschaft gefunden haben und wenn wir überdies

$$c = t . c'$$

setzen, so folgt aus (2) durch Multiplikation mit c'

$$c' t = a . \alpha c' - b . \beta c'$$

oder

$$a . \alpha c' - b . \beta c' = c,$$

d. h. $\alpha c'$ und $\beta c'$ stellen ein ganzzahliges Lösungspaar der Gleichung (1) dar, w. z. bew. w.

Es handelt sich nur noch darum, eine Vorschrift anzugeben, wie man alle übrigen ganzzahligen Lösungen finden kann. Bezeichnet man das eine z. B. mit Hilfe des angegebenen Verfahrens gefundene Lösungspaar mit (x_0, y_0) und mit (x', y') irgend ein anderes davon verschiedenes Lösungspaar (vorausgesetzt, daß es solche überhaupt gibt) und nimmt der Einfachheit halber a und b als teilerfremd an (hätten a und b von vornherein einen gemeinsamen Teiler, so könnten wir die Gleichung von demselben befreien), so folgt:

$$\begin{aligned} a x_0 - b y_0 &= c, \\ a x' - b y' &= c. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion erhält man:

$$a (x' - x_0) - b (y' - y_0) = 0$$

oder

$$a (x' - x_0) = b (y' - y_0).$$

Da a zu b teilerfremd ist, so muß $x' - x_0$ durch b teilbar sein, das heißt:

$$x' - x_0 = b \, . \, m,$$

wo m irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeuten kann. Setzt man diesen Wert in die letzte Identität ein, so folgt:

$$y' - y_0 = a\,m$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} x' = x_0 + b\,m \\ y' = y_0 + a\,m \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Diese Gestalt müssen alle Lösungen der Gleichung (1) haben, sie ist die notwendige Form. Daß sie auch hinreicht, geht aus folgendem hervor:

$$a\left\{x_0 + b\,m\right\} - b\left\{y_0 + a\,m\right\} = a\,x_0 - b\,y_0 = c.$$

Man erhält also aus einem Paar besonderer Lösungen (x_0, y_0) alle anderen, wenn man zu denselben beliebige ganzzahlige Vielfache von b beziehungsweise a hinzufügt.

Man nennt solche Gleichungen „unbestimmte Gleichungen ersten Grades oder Diophantische Gleichungen".

Insbesondere kann man stets eine Lösung angeben, für welche

$$0 \leqq x' < b$$

ist. Wenn nicht bereits x_0 die Bedingung erfüllt, so kann man es durch geeignete Wahl von m leicht erreichen. Man bestimmt nämlich den positiven echten Rest von x_0 in bezug auf b:

$$x_0 = b \, . \, q + x' \quad \ldots \quad 0 \leqq x' < b$$

und setzt $m = -q$.

Das Problem läßt auch eine einfache geometrische Deutung zu.

Wenn man in der Ebene — bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem — sämtliche Punkte mit ganzzahligen Koordinaten (x, y) markiert, so erhält man ein Netz von Punkten, das sogenannte „Zahlengitter" (siehe Fig. 15).

Ferner stellt

$$a\,x - b\,y = c$$

die Gleichung einer Geraden dar (vgl. Kapitel V, Beispiel 7), deren Richtungskoeffizient

$$\frac{a}{b}$$

ist und welche die Ordinatenachse im Abstande

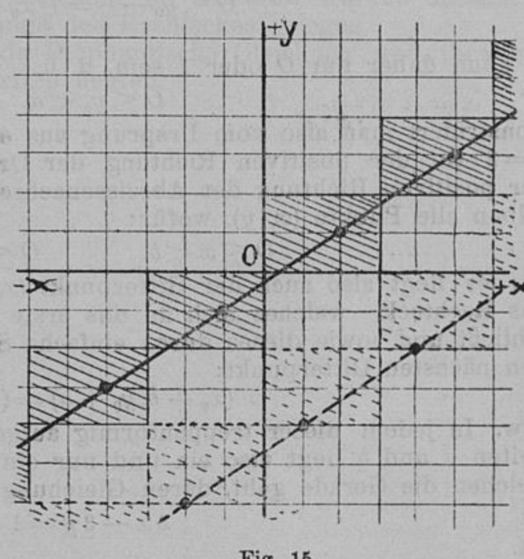

Fig. 15.

$$-\frac{c}{b}$$

vom Koordinatenursprunge schneidet.

Dann stellen die Koordinaten aller jener Punkte des Zahlengitters, durch welche die Gerade geht, die ganzzahligen Lösungen der vorgelegten Diophantischen Gleichung dar.

An den beiden folgenden Beispielen wird überdies gezeigt, in welcher Weise man geometrisch die einzelnen Lösungen voneinander sondern kann.

1. $2x - 3y = 1 \qquad (a = 2,\ b = 3,\ c = 1) \quad \ldots\ldots \quad (4)$

ist die Gleichung der in Fig. 15 durch eine einfache Linie markierten Geraden. Eine besondere Lösung dieser Gleichung ist:

$$x_0 = 2, \qquad y_0 = 1;$$

die allgemeine Lösung lautet:

$$x = 2 + 3m, \qquad y = 1 + 2m.$$

In diesem Falle erfüllt schon (x_0, y_0) die Bedingung

$$0 \leqq x_0 < b \quad \ldots \quad (5)$$

Aus (4) folgt durch eine einfache Umformung:

$$y_0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} x_0.$$

y_0 kann nicht negativ sein; denn schon in dem Falle, wo $y_0 = -1$ wäre, würde, da nur ein echter Bruch $(\frac{1}{3})$ hinzukommt, die ganze linke Seite, mithin auch $\frac{2}{3} x_0$ negativ sein, was der Annahme (5) widerspricht. Es ist daher

$$0 \leqq y_0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} x_0 < 2.$$

y_0 kann daher nur 0 oder 1 sein, d. h.

$$0 \leqq y_0 < a.$$

Konstruiert man also vom Ursprung aus ein Rechteck mit den Seiten $a = 2$ (in der positiven Richtung der Ordinatenachse) und $b = 3$ (in der positiven Richtung der Abszissenachse), so liegen innerhalb desselben alle Punkte (x, y), wofür:

$$0 \leqq x < b, \qquad 0 \leqq y < a$$

ist; es liegt also auch der Gitterpunkt (x_0, y_0) darin. Ebenso enthält das Rechteck, welches sich an das erste unmittelbar nach rechts anschließt und sowie dieses durch einfache Schraffen gekennzeichnet ist, den nächsten Gitterpunkt:

$$(x_0 + b, y_0 + a) = (5, 3)$$

usw. In jedem dieser treppenförmig aufgebauten Rechtecke mit den Seiten a und b liegt also ein und nur ein einziger Gitterpunkt, durch welchen die Gerade geht, deren Gleichung

$$2x - 3y = 1$$

ist.

2. $2x - 3y = 14 \qquad (a = 2,\ b = 3,\ c = 14)$

Eine besondere Lösung ist z. B.

$$x_0 = 2 \,.\, 14 = 28, \qquad y_0 = 1 \,.\, 14 = 14.$$

Daraus folgt jene, wofür

$$0 \leqq x' < b$$

ist, und zwar:

$$x' = 28 - 3 \,.\, 9 = 1.$$

Der entsprechende Wert von y ist:

$$y' = 14 - 2 \,.\, 9 = -4.$$

Aus der ursprünglichen Gleichung folgt:

$$y' + \frac{14}{3} = \frac{2}{3} x'$$

oder

$$y' + 4 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} x';$$

daher

$$0 < y' + 4 + \frac{2}{3} < b.$$

Ähnlich wie im ersten Beispiel kann man auch hier schließen, daß

$$0 \leqq y' + 4 < a$$

sein muß. Die Rechtecke erscheinen jetzt gegenüber denen des ersteren Beispieles um 4 Felder nach abwärts verschoben. (Vgl. in der Figur die durch punktierte Schraffen gekennzeichneten Rechtecke und die durch diese hindurchgehende Gerade). Auch in diesem Falle enthält jedes Rechteck einen und nur einen einzigen Gitterpunkt, welcher geometrisch eine Lösung der Gleichung (4) darstellt. Nur ist diesmal der Gitterpunkt auf dem Umfange des Rechteckes gelegen.

Analog kann man jede Diophantische Gleichung und ihre ganzzahligen Lösungen geometrisch deuten.
