Ueber

wechselseitige Perspectivität dreier ebenen Systeme.

Von

Hermann Anton.

I.

Bekanntlich sind zwei collineare ebene Systeme perspectivisch, wenn sie drei und folglich alle Punkte einer Geraden x_1 entsprechend gemein haben. Liegen die Systeme in verschiedenen Ebenen, so ist x_1 die Schnittlinie dieser Ebenen.

Zwei ebene Systeme Σ_1 und Σ_2 können daher collinear und perspectivisch auf einander bezogen werden, indem man (Fig. 1) drei Geraden a_1, b_1, c_1 von Σ_1 drei Gerade a_2, b_2, c_2 von Σ_2 der Reihe nach als entsprechend derart zuweist, daß der Schnittpunkt P_1 von a_1 und a_2, der Schnittpunkt Q_1 von b_1 und b_2 und der Schnittpunkt R_1 von c_1 und c_2 in einer Geraden x_1 liegen. Es bilden dann a_1, b_1, c_1 die Seiten (unter „Seiten" unbegrenzte Gerade verstanden) eines Dreiecks $A_1 B_1 C_1$, a_2, b_2, c_2 die Seiten eines Dreiecks $A_2 B_2 C_2$, und die Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, gehend durch einen Punkt S_1. Zu den Punkten von Σ_1 können dann die entsprechenden Punkte von Σ_2 entweder mit Hilfe zweier Paare projectivischer, weil perspectivischer gerader Gebilde $a_1 \barwedge a_2$ und $b_1 \barwedge b_2$ oder mit Hilfe zweier Paare projectivischer, weil perspektivischer Strahlenbüschel I. Ordnung $A_1 \barwedge A_2$ und $B_1 \barwedge B_2$ gefunden werden. Die Gerade x_1 heißt Collineationsaxe, der Punkt S_1 Collineationscentrum.

Drei ebene Systeme Σ_1, Σ_2, Σ_3 sind **wechselseitig perspectivisch**, wenn Σ_1 und Σ_2, Σ_2 und Σ_3, Σ_3 und Σ_1 collinear und perspectivisch sind.

Dann entspricht einem Dreieck $A_1 B_1 C_1$ oder $\varDelta_1$ von Σ_1 ein Dreieck $A_2 B_2 C_2$ oder $\varDelta_2$ von Σ_2 und ein Dreieck $A_3 B_3 C_3$ oder $\varDelta_3$ von Σ_3 derart, daß **die Eckpunkte und Seiten dieser Dreiecke wechselseitig perspectivisch** sind: es gehen nämlich die Geraden:

$A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ durch einen Punkt S_1,
$A_2 A_3$, $B_2 B_3$, $C_2 C_3$ „ „ „ S_2,
$A_3 A_1$, $B_3 B_1$, $C_3 C_1$ „ „ „ S_3,

und zwischen den Seiten, d. i. den geraden Gebilden, deren Träger sie sind, besteht die Beziehung, daß

a_1 perspectivisch zu a_2, b_1 perspectivisch zu b_2,
a_2 „ „ a_3, b_2 „ „ b_3,
a_3 „ „ a_1, b_3 „ „ b_1,
und c_1 perspectivisch zu c_2,
c_2 „ „ c_3,
c_3 „ „ c_1 ist.

II.

Wechselseitige Perspectivität der Eckpunkte dreier Dreiecke.

Wir setzen voraus, daß kein Eckpunkt eines der Dreiecke $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$, einer Seite eines andern angehöre. Ob die Dreiecke in verschiedenen Ebenen, oder ob zwei derselben oder alle drei in Einer Ebene liegen, bleibe vorläufig dahingestellt. Bekanntlich folgt aus der Perspectivität der Eckpunkte zweier Dreiecke, daß die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Seiten einer Geraden angehören. Demnach liegen

der Schnittpunkt	P_1	von	$B_1 C_1$	und	$B_2 C_2$	in einer Geraden x_1,
" "	Q_1	"	$C_1 A_1$	"	$C_2 A_2$	
" "	R_1	"	$A_1 B_1$	"	$A_2 B_2$	
" "	P_2	"	$B_2 C_2$	"	$B_3 C_3$	in einer Geraden x_2,
" "	Q_2	"	$C_2 A_2$	"	$C_3 A_3$	
" "	R_2	"	$A_2 B_2$	"	$A_3 B_3$	
" "	P_3	"	$B_3 C_3$	"	$B_1 C_1$	in einer Geraden x_3.
" "	Q_3	"	$C_3 A_3$	"	$C_1 A_1$	
" "	R_3	"	$A_3 B_3$	"	$A_1 B_1$	

Fallen S_1 und S_2 in Einen Punkt S zusammen, so ist einleuchtend, daß auch S_3 mit S zusammenfällt. Und bilden x_1 und x_2 Eine Gerade x, so liegt auch x_3 in x, da dann

die Punkte P_1, P_2, P_3 in einen Punkt P,
" " Q_1, R_2, Q_3 " " Q und
" " R_1, R_2, R_3 " " R

der Geraden x zusammenfallen.

Es ergeben sich nun folgende Sätze:

1. *Liegen S_1, S_2 und S_3 in einer Geraden s, welche keinen der Eckpunkte enthält, so fallen x_1, x_2 und x_3 in eine Gerade x zusammen.*

Je zwei der Dreiecke $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$ (Fig. 2) z. B. das erste und zweite, sind nämlich so beschaffen, daß je zwei entsprechende Seiten, z. B. $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ in einem Punkte der Geraden s sich schneiden. Daher sind diese Dreiecke bezüglich ihrer Eckpunkte perspectivisch, d. h. die Geraden $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ und $A_3 B_3$ gehen durch einen Punkt R. Ebenso erkennt man, daß $B_1 C_1$, $B_2 C_2$ und $B_3 C_3$ durch einen Punkt P und $C_1 A_1$, $C_2 A_2$ und $C_3 A_3$ durch einen Punkt Q gehen müßen. Daß P, Q, R in einer Geraden x liegen, folgt aus der Perspectivität der Eckpunkte zweier der gegebenen Dreiecke $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$.

2. *Liegen S_1, S_2 und S_3 in einer Geraden s, und gehören derselben auch drei entsprechende Eckpunkte, etwa C_1, C_2, C_3 an, so gehen die Seiten, welche diesen Eckpunkten gegenüberliegen, durch einen Punkt,* also hier die Seiten $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, durch den Punkt R;

α) *in diesem Punkte schneiden sich die Geraden x_1, x_2, x_3, wenn andere drei entsprechende Seiten nicht durch einen Punkt gehen* (Fig. 3);

β) *gehen aber auch andere drei entsprechende Seiten durch einen Punkt, so fallen x_1, x_2, x_3, in eine Gerade x zusammen* (Fig. 4).

Daß $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ durch R gehen, ergibt sich wie zuvor aus der Betrachtung der Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$.

3. *Fallen S_1, S_2, S_3 in einen Punk S zusammen, und gehen je drei entsprechende Seiten der drei Dreiecke nicht durch einen Punkt, so haben x_1, x_2, und x_3 einen Punkt T gemeinsam.*

Die Schnittpunkte von je drei entsprechenden Seiten bilden ein Dreieck; so geben z. B. $B_1 C_1$, $B_2 C_2$ und $B_3 C_3$ das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ auf diese Weise entstehen drei Dreiecke: $P_1 P_2 P_3$, $Q_1 Q_2 Q_3$, $R_1 R_2 R_3$.

Je zwei derselben sind so beschaffen, daß die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Seiten einer der drei durch S gehenden Geraden $\overline{S A_1 A_2 A_3}$, $\overline{S B_1 B_2 B_3}$, $\overline{S C_1 C_2 C_3}$ angehören. Dies ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Bekanntlich bezeichnet (Fig. 5)
R_1 den Schnittpunkt von $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$,
R_2 " " " $A_2 B_2$ " $A_3 B_3$,
R_3 " " " $A_3 B_3$ " $A_1 B_1$.

Demnach liegen:
in $A_1 B_1$ die Punkte R_3 und R_1,
" $A_2 B_2$ " " R_1 " R_2,
" $A_3 B_3$ " " R_2 " R_3,

oder man kann sagen:

Die Gerade $R_3\,R_1$ enthält die Punkte A_1 und B_1,
„ „ $R_1\,R_2$ „ „ „ A_2 „ B_2,
„ „ $R_2\,R_3$ „ „ „ A_3 „ B_3.

Ebenso erkennt man:

Die Gerade $P_3\,P_1$ enthält die Punkte B_1 und C_1,
„ „ $P_1\,P_2$ „ „ „ B_2 „ C_2,
„ „ $P_2\,P_3$ „ „ „ B_3 „ C_3;

und schließlich:

Die Gerade $Q_3\,Q_1$ enthält die Punkte C_1 und A_1,
„ „ $Q_1\,Q_2$ „ „ „ C_2 „ A_2,
„ „ $Q_2\,Q_3$ „ „ „ C_3 „ A_3.

Demnach schneiden sich die Geraden:

$P_3\,P_1$ und $Q_3\,Q_1$ in C_1	$Q_3\,Q_1$ und $R_3\,R_1$ in A_1
$P_1\,P_2$ „ $Q_1\,Q_2$ „ C_2	$Q_3\,Q_1$ „ $R_1\,R_2$ „ A_2
$P_2\,P_3$ „ $Q_2\,Q_3$ „ C_3	$Q_2\,Q_3$ „ $R_2\,R_3$ „ A_3

$R_3\,R_1$ und $P_3\,P_1$ in B_1
$R_1\,R_2$ „ $P_1\,P_2$ „ B_2
$R_2\,R_3$ „ $P_2\,P_3$ „ B_3

Hieraus aber ergibt sich die Folgerung, daß die Eckpunkte je zweier der Dreiecke $P_1\,P_2\,P_3$, $Q_1\,Q_2\,Q_3$, $R_1\,R_2\,R_3$ perspectivisch sind; die Geraden $P_1\,Q_1$, $P_2\,Q_2$, $P_3\,Q_3$, d. i. die Geraden x_1, x_2, x_3 gehen also durch einen Punkt T.

4. **Fallen S_1, S_2, S_3 in S zusammen und gehen drei entsprechende Seiten durch einen Punkt, etwa $A_1\,B_1$, $A_2\,B_2$, $A_3\,B_3$ durch den Punkt R, andere drei entsprechende Seiten aber nicht durch einen Punkt, so haben x_1, x_2, x_3 jenen Punkt, also hier R, gemein.** (Fig. 6).

5. **Fallen S_1, S_2, S_3 in S zusammen, gehen drei entsprechende Seiten durch einen Punkt und andere drei entsprechende Seiten auch durch einen Punkt, so fallen x_1, x_2, x_3 in eine Gerade x zusammen** (Fig. 7).

Diesen Sätzen stehen folgende gegenüber:

6. **Haben x_1, x_2, x_3, einen Punkt T gemeinsam, welchen keiner der Seiten angehört, so fallen S_1, S_2, S_3 in einen Punkt S zusammen** (Fig. 5).

Da die Eckpunkte je zweier der Dreiecke $P_1\,P_2\,P_3$, $Q_1\,Q_2\,Q_3$, $R_1\,R_2\,R_3$ perspectivisch sind, so müssen die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten je zweier dieser Dreiecke einer Geraden angehören.

Wie die beim 3. Satze vorkommende Betrachtung lehrt, schneiden sich die entsprechenden Seiten

von $Q_3\,Q_1\,Q_2$ und $R_3\,R_1\,R_2$ in A_1, A_2, A_3,
die „ $R_3\,R_1\,R_2$ „ $P_3\,P_1\,P_2$ „ B_1, B_2, B_3,
„ „ $P_3\,P_1\,P_2$ „ $Q_3\,Q_1\,Q_2$ „ C_1, C_2, C_3;

die Geraden $A_1\,A_2$, $B_1\,B_2$, $C_1\,C_2$ enthalten also der Reihe nach die Punkte A_3, B_3, C_3. Es fallen also mit

den durch S_1 gehenden Geraden $A_1\,A_2$, $B_1\,B_2$, $C_1\,C_2$
die „ S_2 „ „ $A_2\,A_3$, $B_2\,B_3$, $C_2\,C_3$
und „ „ S_3 „ „ $A_3\,A_1$, $B_3\,B_1$, $C_3\,C_1$

zusammen, d. h. S_1, S_2, S_3 bilden einen Punkt S.

Zu den Dreiecken $P_1\,P_2\,P_3$, $Q_1\,Q_2\,Q_3$, $R_1\,R_2\,R_3$ stehen der Punkt T und die Geraden $A_1\,A_2\,A_3$, $B_1\,B_2\,B_3$, $C_1\,C_2\,C_3$ in derselben Beziehung wie der Punkt S und die Geraden x_1, x_2, x_3 zu den Dreiecken Δ_1, Δ_2, Δ_3; daher könnte auch der 6. Satz mit Hilfe des 3., und umgekehrt der dritte mit Hilfe des 6. bewiesen werden.

7. **Gehen x_1, x_2, x_3 durch einen Punkt, und ist derselbe auch der Schnittpunkt dreier entsprechenden Seiten**, etwa der Schnittpunkt R der Seiten $A_1\,B_1$, $A_2\,B_2$, $A_3\,B_3$, **so gehören die drei Eckpunkte, welche jenen Seiten gegenüberliegen**, also hier C_1, C_2, C_3, **einer Geraden an;**

α) **diese Gerade enthält die Punkte S_1, S_2, S_3, wenn andere drei entsprechende Eckpunkte nicht in einer Geraden liegen** (Fig. 3);

β) **liegen aber andere drei entsprechende Eckpunkte auch in einer Geraden, so fallen S_1, S_2, S_2 in einen Punkt S zusammen** (Fig. 6).

Daß C_1, C_2, C_3 in einer Geraden liegen, ergibt sich wie zuvor aus der Betrachtung der Dreiecke $P_1\,P_2\,P_3$ und $Q_1\,Q_2\,Q_3$.

8. **Fallen x_1, x_2 und x_3 in eine Gerade x zusammen und liegen je drei entsprechende Eckpunkte nicht in einer Geraden, so liegen S_1, S_2, S_3 in einer Geraden s.** (Fig. 2).

Die Eckpunkte je zweier der Dreiecke $A_1\,A_2\,A_3$, $B_1\,B_2\,B_3$, $C_1\,C_2\,C_3$, z. B. die des ersten und zweiten, sind perspectivisch; die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Seiten, d. i. die Punkte S_1, S_2, S_3 liegen daher in einer Geraden s.

Zu den Dreiecken $A_1\,A_2\,A_3$, $B_1\,B_2\,B_3$, $C_1\,C_2\,C_3$, stehen die Gerade x und die in ihr liegenden Punkte P, Q, R in derselben Beziehung, wie die Gerade s und die in ihr liegenden Punkte S_1, S_2, S_3 zu den Dreiecken Δ_1, Δ_2, Δ_3. Daher könnte auch der 8. Satz mit Hilfe des 1. und umgekehrt der 1. mit Hilfe des 8. bewiesen werden.

9. Fallen x_1, x_2, x_3 in eine Gerade x zusammen und liegen drei entsprechende Eckpunkte in einer Geraden s, andere drei entsprechende Eckpunkte aber nicht in einer Geraden, so enthält s die Punkte S_1, S_2, S_3. (Fig. 4).

10. Fallen x_1, x_2, x_3 in eine Gerade x zusammen, liegen drei entsprechende Eckpunkte in einer Geraden und andere drei entsprechende Eckpunkte auch in einer Geraden, so fallen S_1, S_2, S_3 in einen Punkt S zusammen. (Fig. 7).

Aus diesen zehn Sätzen ergeben sich noch folgende zwei:

11. Wenn S_1, S_2, S_3 weder in einer Geraden liegen, noch in einen Punkt zusammenfallen, so können x_1, x_2, x_3 weder durch einen Punkt gehen, noch in eine Gerade zusammenfallen.

12. Wenn x_1, x_2, x_3 weder durch einen Punkt gehen, noch in eine Gerade zusammenfallen, so können S_1, S_2, S_3 weder in einer Geraden liegen, noch in einen Punkt zusammenfallen.

Diese Sätze behalten ihre Giltigkeit auch dann, wenn einer oder jeder der Punkte S_1, S_2, S_3 unendlich fern ist, oder wenn eine oder jede der Geraden eine unendlich ferne Gerade ist, oder wenn x_1, x_2, x_3 in einen unendlich fernen Punkt sich schneiden.

Sind die Geraden, welche die entsprechenden Eckpunkte der Dreiecke Δ_1 und Δ_2 verbinden, parallel, so liegt S_1 unendlich fern. Sind in diesem Falle S_2 und S_3 wirkliche Punkte, und sollen S_1, S_2, S_3 in einer Geraden s liegen, so muß die Gerade $S_2 S_3$ oder s den Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ parallel sein. Sind die Geraden, welche die entsprechenden Eckpunkte je zweier der Dreiecke Δ_1, Δ_2, Δ_3 verbinden, parallel, so liegen S_1, S_2, S_3 in einer unendlich fernen Geraden s.

Sind die entsprechenden Seiten der Dreiecke Δ_1 und Δ_2 parallel, so ist x_1 eine unendlich ferne Gerade. Sind in diesem Falle x_2 und x_3 wirkliche Gerade, und sollen x_1, x_2, x_3 durch einen Punkt gehen, so müssen x_2 und x_3 einen unendlich fernen Punkt gemein haben, d. h. zu einander parallel sein. Sind die entsprechenden Seiten je zweier der Dreiecke Δ_1, Δ_2, Δ_3 parallel, so fallen x_1, x_2 in eine unendlich ferne Gerade x zusammen.

Sind die Geraden x_1 und x_2 parallel, und sollen x_1, x_2, x_3 einen Punkt gemein haben, so muß x_3 durch den unendlich fernen Punkt von x_1 und x_2 gehen, d. h. zu x_1 und x_2 parallel sein.

III.

1. Gehören die Dreiecke Δ_1, Δ_2, Δ_3, deren Eckpunkte wechselseitig perspectivisch sind, verschiedenen Ebenen an, so fallen die Punkte S_1, S_2, S_3 entweder in einen Punkt S zusammen, oder sie liegen in einer Geraden s.

Aus der Perspectivität der Eckpunkte je zweier der Dreiecke folgt nämlich, daß die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten in einer Geraden liegen, u. z. in derjenigen Geraden, in welchen die Ebenen der zwei Dreiecke sich schneiden. Die Ebenen der Dreiecke Δ_1, Δ_2, Δ_3 schneiden sich in drei Geraden x_1, x_2, x_3, welche entweder durch einen Punkt gehen oder in eine Gerade zusammenfallen. Dann müssen aber, wie die im vorigen Abschnitt aufgestellten Sätze 6 bis 10 lehren, S_1, S_2, S_3 entweder in einen Punkt zusammenfallen oder einer Geraden angehören.

2. Gehören zwei der Dreiecke Δ_1, Δ_2, Δ_3, deren Eckpunkte wechselseitig perspectivisch sind, etwa Δ_1 und Δ_2, einer Ebene ε an, während das dritte, Δ_2, in einer andern Ebene ε' liegt, so müssen S_1, S_2, S_3 in einer Geraden s liegen.

Wie man leicht einsieht, müssen nämlich die Geraden x_1, x_2, x_3 in eine Gerade x, die Schnittlinie der Ebenen ε und ε' (Fig. 8) zusammenfallen; und die Punkte S_2 und S_3 können nicht mit dem der Ebene ε angehörenden Punkte S_1 zusammenfallen, weil die

Geraden $S_1 A_3$, $S_1 B_3$, $S_1 C_3$ nur den Punkt S_1 mit ε gemein haben.

3. Liegen die Dreiecke Δ_1, Δ_2, Δ_3, deren Eckpunkte wechselseitig perspectivisch sind, in Einer Ebene, so können S_1, S_2, S_3 in einen Punkt S zusammenfallen, oder einer Geraden s angehören, oder die Eckpunkte eines Dreiecks bilden. Für letzteren Fall siehe Fig. 9.

IV.

Wechselseitige Perspectivität der Seiten dreier Dreiecke.

1. Sind die Eckpunkte dreier Dreiecke derart wechselseitig perspectivisch, daß S_1, S_2, S_3 in einen Punkt S zusammenfallen, so sind auch die Seiten dieser Dreiecke wechselseitig perspectivisch, die Dreiecke mögen einer Ebene, oder drei verschiedenen Ebenen angehören.

2. Sind die Eckpunkte dreier nicht in einer Ebene liegenden Dreiecke derart wechselseitig perspectivisch, daß S_1, S_2, S_3 einer Geraden s angehören, welche keinen der Eckpunkte enthält, und fallen von den drei, die Gerade s enthaltenden Ebenen $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$ nicht zwei in eine Ebene zusammen, so sind auch die Seiten dieser Dreiecke wechselseitig perspectivisch.

Denn ist zu irgend einem etwa der Seite a_1 angehörenden Punkte M_1 der Punkt M_2 von a_2 perspectivisch, so schneidet die Ebene $\underline{s S_1 M_1 M_2}$ die Seite a_3 in einen Punkte M_3, durch welchen diejenigen Geraden $\underline{S_2 M_2}$ und $\underline{S_3 M_1}$ gehen müssen, in denen die Ebenen $\underline{S_2 a_2 a_3}$ und $\underline{S_3 a_1 a_3}$ von der Ebene $\underline{s S_1 M_1 M_2}$ geschnitten werden. Je zwei zu einander perspectivischen Punkten M_1 von a_1 und M_2 von a_2 entspricht also in a_3 ein Punkt M_3, der sowohl zu M_2 als auch zu M_1 perspectivisch ist.

Dieser Satz gilt sowohl dann, wenn die Dreiecke drei verschiedenen Ebenen angehören, als auch dann, wenn zwei Dreiecke in einer Ebene ε liegen und das dritte einer anderen Ebene ε' angehört. Die Geraden x_1, x_2, x_3 fallen hiebei immer in eine Gerade x zusammen.

3. Liegen die Geraden c_1, c_2, c_3 in einer Ebene, und sind die Punkte

$$\begin{array}{llll} A_1 & \text{und} & B_1 & \text{von } c_1, \\ A_2 & \text{"} & B_2 & \text{"}\ c_2, \\ A_3 & \text{"} & B_3 & \text{"}\ c_3 \end{array}$$

wechselseitig perspectivisch, gehen also die Geraden

$$\begin{array}{llll} A_1 A_2 & \text{und} & B_1 B_2 & \text{durch einen Punkt } S_1, \\ A_2 A_3 & \text{"} & B_2 B_3 & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad S_2, \\ A_3 A_1 & \text{"} & B_3 B_1 & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad S_3, \end{array}$$

so sind im allgemeinen die Geraden c_1, c_2, c_3 nicht wechselseitig perspectivisch; d. h. liegen der Punkt M_1 von c_1 und der Punkt M_2 von c_2 perspectivisch, so schneiden sich die Geraden $S_2 M_2$ und $S_3 M_1$ in einem Punkte M_3, welcher im allgemeinen der Geraden c_3 nicht angehört.

Die Strahlenbüschel I. Ordnung, welche die perspectivischen geraden Gebilde c_2 und c_1 beziehungsweise aus den Punkten S_2 und S_3 projiciren, sind nämlich projectivisch; die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Strahlen gehören daher im Allgemeinen einer Curve II. Ordnung, und nur dann einer Geraden an, wenn die Strahlenbüschel S_2 und S_3 perspectivisch sind, d. h. wenn sie einen Strahl entsprechend gemein haben.

α) Der letztere Fall tritt immer dann ein, wenn S_1, S_2, S_3 in einer Geraden s liegen. Denn sind N_1 und N_2 die Punkte, in welchen beziehungsweise c_1 und c_2 von s geschnitten werden, so haben die Büschel S_2 und S_3 den Strahl $S_2 S_3$, in den die entsprechenden Strahlen $S_2 N_2$ und $S_3 N_1$ zusammenfallen, entsprechend gemein. Die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen dieser Büschel liegen daher in einer Geraden, nämlich in der durch die Punkte A_3 und B_3, in welchen je zwei entsprechende Strahlen sich schneiden, gehenden Geraden c_3. Der Punkt N_3, in dem c_3 von s geschnitten wird, entspricht den Punkten N_1 und N_2. Die Geraden c_1, c_2, c_3 haben einen Punkt R entsprechend gemein, da die Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ der Annahme gemäß so beschaffen sind, daß die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Seiten in einer Geraden s liegen.

Hieraus folgt:

Die Seiten dreier in derselben Ebene liegenden Dreiecke sind wechselseitig perspectivisch, wenn die Eckpunkte dieser Dreiecke derart wechselseitig perspectivisch sind, daß S_1, S_2, S_3 in einer Geraden s liegen und x_1, x_2, x_3 in eine Gerade x zusammenfallen.

Hieher gehört also der im Satze II, 1 und der im Satze II, 2, β behandelte Fall. — Gehören im letzteren Falle die Dreiecke verschiedenen Ebenen an, so sind also nicht nur die Seiten $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ wechselseitig perspectivisch (wie die Betrachtung IV, 2 lehrt), sondern auch, dem Vorigen gemäß, je andere drei entsprechende Seiten. — Hiebei findet ferner der Fall seine Erledigung, daß Δ_1, Δ_2, Δ_3 nicht derselben Ebene und S_1, S_2, S_3 einer Geraden angehören, die keinen der Eckpunkte enthält, aber zwei der Ebenen $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$, etwa die erste und zweite zusammenfallen. Dem Vorigen gemäß sind nämlich in diesem Falle auch die Seiten $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ wechselseitig perspectivisch.

Wenn Δ_1, Δ_2, Δ_3 derselben Ebene und S_1, S_2, S_3 einer Geraden s angehören, x_1, x_2, x_3 aber nur einen Punkt R gemein haben (siehe Satz II, 2, α), so sind wohl die in dem Punkte R sich schneidenden Seiten $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ wechselseitig perspectivisch, nicht aber andere drei entsprechende Seiten. Denn angenommen, die den Seiten $B_1 C_1$, $B_2 C_2$, $B_3 C_3$ beziehungsweise angehörenden Punkte M_1, M_2, M_3 seien wechselseitig perspectivisch d. h.

die Gerade $M_1 M_2$ gehe durch S_1,
" " $M_2 M_3$ " " S_2,
" " $M_3 M_1$ " " S_3,

so hätten je zwei entsprechende Seiten der Dreiecke $B_1 B_2 B_3$, $M_1 M_2 M_3$, ihren Schnittpunkt in der Geraden s, es gingen also die Geraden $B_1 M_1$, $B_2 M_2$, $B_3 M_3$, d. i. die Geraden $B_1 C_1$, $B_2 C_2$, $B_3 C_3$ durch einen Punkt. Dies widerspricht aber der Annahme, daß x_1, x_2, x_3 nur einen Punkt gemein haben. — Dies gilt auch von drei Dreiecken, welche die im Satze II, 2, α vorausgesetzte Lage haben, aber in verschiedenen Ebenen liegen.

β) Die Geraden c_1, c_2, c_3 sind auch dann wechselseitig perspectivisch, wenn S_1, S_2, S_3 die Eckpunkte eines Dreiecks bilden, und c_1 und c_2 in einem Punkte U der Geraden $S_2 S_3$ oder s_1 sich schneiden. (Fig. 10).

In dem Punkte U fallen nämlich der Punkt U_1 von c_1 und der ihm entsprechende Punkt U_2 von c_2 zusammen; die Büschel S_2 und S_3 haben daher den Strahl $S_2 S_3$, in den die entsprechenden Strahlen $S_2 U_2$ und $S_3 U_1$ zusammenfallen, entsprechend gemein, die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen liegen also wie im Falle α in der Geraden c_3. Dem Punkte U entspricht der Punkt U_3, in dem c_3 von $S_2 S_3$ geschnitten wird.

In diesem Falle sind auch die Büschel S_3 und S_1, welche beziehungsweise die perspectivischen geraden Gebilde c_3 und c_2, deren Punkte einander durch die Strahlen des Büschels S_2 zugewiesen werden, projiciren, projectivisch, auf einander bezogen; da sie ferner das gerade Gebilde c_1 erzeugen, so sind sie perspectivisch, und müssen daher den Strahl $S_3 S_1$ entsprechend gemein haben. Der Schnittpunkt V der Geraden c_3 und c_2 muß somit der Geraden $S_3 S_1$ oder s_2 angehören. Ebenso muß der Schnittpunkt W der Geraden c_3 und c_1 in der Geraden $S_1 S_2$ oder s_3 liegen.

Hieraus ergibt sich:

Sind die Eckpunkte dreier Dreiecke, die in einer Ebene liegen, derart wechselseitig perspectivisch, daß die Punkte S_1, S_2, S_3 ein Dreieck Δ bilden und die Geraden x_1, x_2, x_3 der Reihe nach mit den Seiten s_1, s_2, s_3 von Δ zusammenfallen, so sind auch die Seiten der drei Dreiecke wechselseitig perspectivisch. (Fig. 11).

V.

Aus dem Vorigen ergeben sich folgende Sätze:

Es seien Σ_1, Σ_2, Σ_3 drei ebene Systeme, von welchen je zwei ein Collineations-Centrum und eine Collineations-Axe haben, nämlich:

Σ_1 und Σ_2 das Coll.-Centrum S_1 und die Coll.-Axe x_1,
Σ_2 „ Σ_3 „ „ S_2 „ „ „ x_2,
Σ_3 „ Σ_1 „ „ S_3 „ „ „ x_3.

1. Gehören Σ_1, Σ_2, Σ_3 verschiedenen Ebenen an, die nur einen Punkt gemeinsam haben, so fallen S_1, S_2, S_3 in einen Punkt S zusammen.

2. Gehören Σ_1, Σ_2, Σ_3 verschiedenen Ebenen an, welche eine Gerade gemein haben, so liegen die Collineations-Centra S_1, S_2, S_3 in einer Geraden s oder sie fallen in einen Punkt S zusammen.

3. Wenn Σ_1 und Σ_2 in einer Ebene liegen und Σ_3 einer andern Ebene angehört, so liegen S_1, S_2, S_3 in einer Geraden.

4. Liegen Σ_1, Σ_2, Σ_3 in einer Ebene, so sind drei Fälle möglich:

α) Gehen x_1, x_2, x_3 durch einen Punkt, so fallen S_1, S_2, S_3 in einen Punkt S zusammen.

β) Fallen x_1, x_2, x_3 in eine Gerade x zusammen, so liegen die Collineations-Centra S_1, S_2, S_3 in einer Geraden s, oder sie fallen in einen Punkt S zusammen.

γ) Bilden x_1, x_2, x_3 die Seiten eines Dreiecks Δ, so sind S_1, S_2, S_3 die Eckpunkte dieses Dreiecks.

5. Gehen x_1, x_2, x_3 durch einen Punkt, so fallen S_1, S_2, S_3 stets in einen Punkt zusammen.

6. Liegen S_1, S_2, S_3 in einer Geraden, so fallen x_1, x_2, x_3 stets in eine Gerade zusammen.

VI.

Beziehungen zwischen drei Kreisen einer Kugel.

1. Wenn zwei Kreise k_1 und k_2 einer Kugel nicht eine gemeinsame Tangente haben, so können bekanntlich zwei Punkte gefunden werden, welche die Eigenschaft haben, daß aus jedem die beiden Kreise durch Eine Kegelfläche projicirt werden. Es seien T_1 und S_1 diese beiden Projectionscentra, K_1 und K_2 die Mittelpunkte (Spitzen) der Kegelflächen, welche die Kugel beziehungsweise in den Kreisen k_1 und k_2 berühren, und s_1 und s_2 die Kantenlängen dieser Kegel, von der Kegelspitze bis zu einem Punkte des Berührungskreises gerechnet. Dann liegen bekanntlich die vier Punkte K_1, T_1, K_2, S_1 in einer Geraden und die Strecke $K_1 K_2$ wird durch die Punkte T_1 und S_1 in dem Verhältnissen $s_1 : s_2$ harmonisch getheilt. Der durch die sphärischen Centra der Kreise k_1 und k_2 gehende größte Kreis h schneidet k_1 in den Punkten A_1 und B_1, k_2 in den Punkten A_2 und B_2; der Kreis h enthält die sphärischen Diameter $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ von k_1 und k_2, und in seiner Ebene liegt die Gerade $K_1 K_2$. Die sphärischen Diameter schließen sich entweder aus, oder sie decken sich theilweise, oder der eine wird von dem andern eingeschlossen. Bezeichnet man sie so, daß sie in dem Kreise h einerlei Sinn haben, und nennt man dasjenige Projections-Centrum, in dem die Geraden $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ sich schneiden, T_1, und dasjenige, in dem $A_1 B_2$ und $A_2 B_1$ sich schneiden, S_1, so liegt stets T_1 innerhalb, S_1 außerhalb der Punkte K_1 und K_2. (Fig. 12, α, β, γ).

Ist einer der Kreise, etwa k_1, ein größter Kreis, so ist K_1 der unendlich ferne Punkt der Geraden, die durch das Kugelcentrum geht und normal zur Ebene des Kreises k_1 ist; die Gerade $T_1 S_1$ geht somit durch K_2, ist normal zur Ebene von k_1 und die Strecke $T_1 S_1$ wird durch K_2 halbirt.

Ist sowohl k_1 als auch k_2 ein größter Kreis, so liegen K_1, T_1, K_2, S_1 in der unendlich fernen Geraden der Ebene des Kreises h.

Haben die Kreise k_1 und k_2 der Kugel eine gemeinsame Tangente in dem Punkte U, so gibt es nur eine Kegelfläche von der Beschaffenheit, daß beide Kreise ihr angehören. Im Punkte U fält entweder A_1 mit A_2 oder A_1 mit B_2 zusammen; die Strecke $K_1 K_2$ wird im ersten Falle durch T_1 und U, im zweiten Falle durch U und S_1 in dem Verhältnisse $s_1 : s_2$ harmonisch getheilt.

Ist einer der zwei Kreise, die eine gemeinsame Tangente haben, etwa k_1 ein größter Kreis, so liegt K_1 unendlich fern; die Gerade, welche das Projections-Centrum mit U verbindet, ist daher normal zur Ebene von k_1 und K_2 halbirt TU oder US.

2. Es seien nun k_1, k_2, k_3 drei Kreise einer Kugel; keiner derselben sei ein größter Kreis und keiner habe mit einem der beiden andern eine gemeinsame Tangente. In diesen Kreisen wird die Kugel von drei Kegeln berührt, deren Spitzen K_1, K_2, K_3 und deren Kantenlängen s_1, s_2, s_3 heißen sollen. Ferner seien (Fig. 13).

T_1 und S_1 die Projections-Centra von k_1 und k_2,
T_2 „ S_2 „ „ „ k_2 „ k_3,
T_3 „ S_3 „ „ „ k_3 „ k_1.

Da läßt sich zeigen, daß viermal drei der Punkte T_1, T_2, T_3, S_1, S_2, S_3 in einer Geraden liegen, nämlich:

S_1, S_2, S_3 in einer Geraden s,
T_1, T_2, S_3 „ „ „ s_1,
T_2, T_3, S_1 „ „ „ s_2,
T_3, T_1, S_2 „ „ „ s_3.

Man hat nämlich die Gleichungen:

$$\frac{K_1 T_1}{T_1 K_2} = \frac{K_1 S_1}{K_2 S_1} = \frac{s_1}{s_2},$$
$$\frac{K_2 T_2}{T_2 K_3} = \frac{K_2 S_2}{K_3 S_2} = \frac{s_2}{s_3},$$
$$\frac{K_3 T_3}{T_3 K_1} = \frac{K_3 S_3}{K_1 S_3} = \frac{s_3}{s_1},$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{K_1 S_1}{K_2 S_1} \cdot \frac{K_2 S_2}{K_3 S_2} = \frac{s_1}{s_3} = \frac{K_1 S_3}{K_3 S_3},$$
$$\frac{K_1 T_1}{T_1 K_2} \cdot \frac{K_2 T_2}{T_2 K_3} = \frac{s_1}{s_3} = \frac{K_1 S_3}{K_3 S_3},$$
$$\frac{K_2 T_2}{T_2 K_3} \cdot \frac{K_3 T_3}{T_3 K_1} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{K_2 S_1}{K_1 S_1},$$
$$\frac{K_3 T_3}{T_3 K_1} \cdot \frac{K_1 T_1}{T_1 K_2} = \frac{s_3}{s_2} = \frac{K_3 S_2}{K_2 S_2}.$$

Diese vier Gleichungen kann man auch so schreiben:

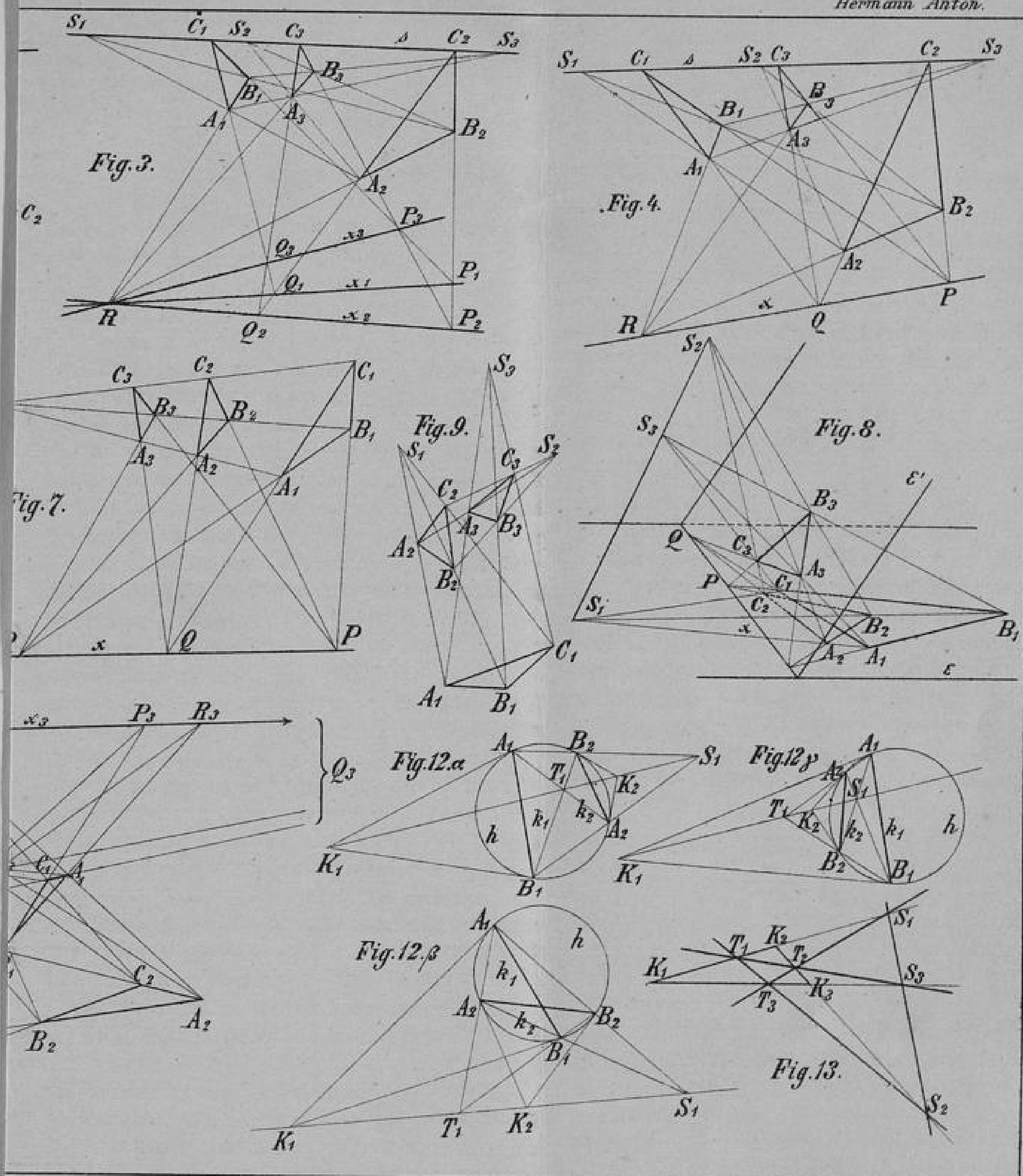
$$K_1 S_1 . K_2 S_2 . K_3 S_3 = K_1 S_3 . K_2 S_1 . K_3 S_2,$$
$$K_1 T_1 . K_2 T_2 . K_3 S_3 = T_1 K_2 . T_2 K_3 . K_1 S_3,$$
$$K_2 T_2 . K_3 T_3 . K_1 S_1 = T_2 K_3 . T_3 K_1 . K_2 S_1,$$
$$K_3 T_3 . K_1 T_1 . K_2 S_2 = T_3 K_1 . T_1 K_2 . K_3 S_2,$$

womit die vorige Behauptung erwiesen ist. Welche Aenderungen sich in speziellen Fällen ergeben, ist aus dem Vorigen leicht zu entnehmen.

3. Haben die Ebenen der Kreise k_1, k_2, k_3 nur einen Punkt gemein, so sind die Kreise nicht wechselseitig perspectivisch. Wäre das der Fall, so müßte die Schnittlinie zweier Kreisebenen die Collineations-Axe der betreffenden Kreise sein; die drei Collineations-Axen giengen also durch einen Punkt und die drei Collineations-Centra lägen in einer Geraden, was nach V, 5 unmöglich ist.

Durch die Strahlen der Kegelfläche, die aus S_1 die Kreise k_1 und k_2 projicirt, werden die Punkte dieser Kreise einander projectivisch, weil perspectivisch zugewiesen; daher sind auch die Strahlen der zwei Kegelflächen, von welchen die eine die Punkte von k_2 aus S_2, die andere die Punkte von k_1 aus S_3 projicirt, einander projectivisch zugewiesen. Die erwähnten drei Kegelflächen sollen der Reihe nach mit (S_1), $(S_2\, k'')$, $(S_3\, k')$ bezeichnet werden. Man kann nun zeigen, daß durch die Strahlen von $(S_2\, k'')$ und $(S_3\, k')$ die Punkte von k_3 involutorisch gepaart werden.

Einem beliebigen Punkte A_1 von k_1 ist durch den Strahl $\overline{S_1 A_1 A_2}$ der Punkt A_2 von k_2 zugewiesen, sodann dem Punkte A_1 durch den Strahl $\overline{S_3 A_1 A'}$ der Punkt A' von k_3 und dem Punkte A_2 durch den Strahl $\overline{S_2 A_2 A''}$ der Punkt A'' von k_3. Die Strahlen $\overline{S_3 A_1 A'}$ und $\overline{S_2 A_2 A''}$ gehören der durch s und $\overline{S_1 A_1 A_2}$ gehenden Ebene σ an, welche die Ebene des Kreises in der Geraden $A' A''$ schneidet. Die Ebene σ schneidet im allgemeinen den Kreis k_1 noch in einem Punkte B_2, Hermann Anton.



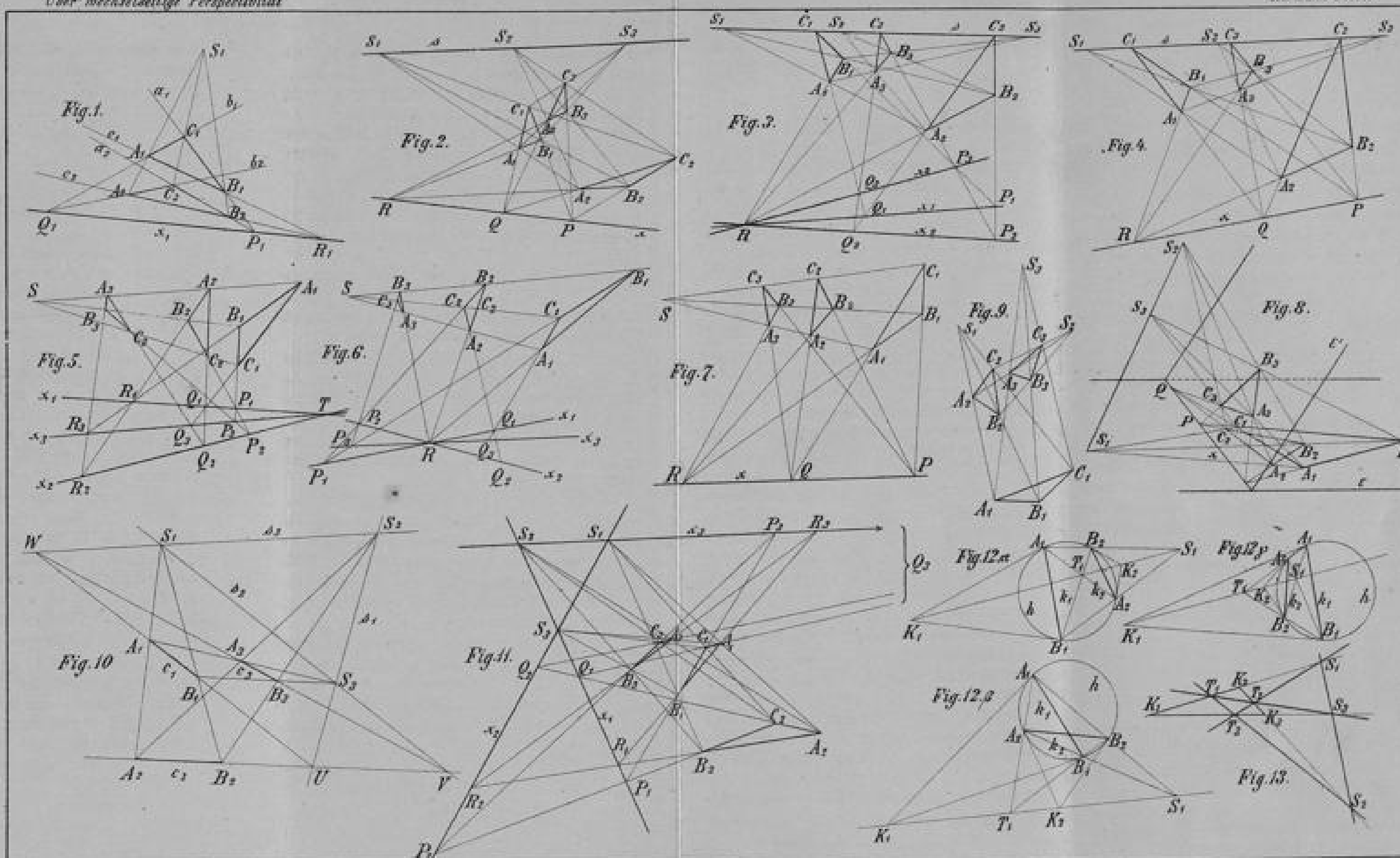


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10
Fig. 11.
Fig. 12 α
Fig. 12 β
Fig. 12 γ
Fig. 13.