IV. Abschnitt.

Auch die Bewegung einer mit dem Begleitdreikante einer Raumkurve fest verbundenen Geraden gibt Anlaß zu ähnlichen Untersuchungen, wie sie in den vorangehenden Abschnitten für eine Ebene bzw. einen Punkt durchgeführt sind.

Es sei die Gerade G fest mit dem Begleitdreikante der Raumkurve C verbunden. Während der Fortbewegung des Dreikantes beschreibt dann G eine Regelfläche R. Nun gibt es zu jeder Lage von G eine Gerade H, welche die Punkte des kürzesten Abstandes der Geraden G von ihrer benachbarten Lage verbindet. Die Gesamtheit dieser Geraden H bildet die zu R konjugierte Regelfläche K, welch letztere die Fläche R längs der den beiden Flächen gemeinsamen Striktionslinie berührt. Gerade H, die G stets senkrecht schneidet, ist aber relativ zum bewegten Raume veränderlich, da in jedem Momente der Bewegung eine andere Gerade H als Gerade des kürzesten Abstandes in Betracht kommt. Die Gesamtheit der der Geraden G zugehörigen Geraden H bildet somit relativ zum fortbewegten Raume ein Konoid (H) mit der Achse G. Jeder Geraden des bewegten Raumes ist ein solches Konoid (H) zugeordnet. Denkt man sich das Konoid (H) fest mit G verbunden, so übernehmen während der Bewegung die einzelnen Erzeugenden des Konoids der Reihe nach die Rolle als Gerade des kürzesten Abstandes der Geraden G von ihrer jeweiligen Nachbarlage. Das Konoid (H) sei im folgenden Gegenstand der Untersuchung.

§ 1. Die Gleichungen des Konoides (H).

Die Gerade G sei in ihrer Lage zum Dreikante bestimmt durch einen festen Punkt P und ihre Richtungskosinus a, b, c gegen die Tangente, Hauptnormale und Binormale der Raumkurve C. P habe inbezug auf das Dreikant die Koordinaten $x_1\, y_1\, z_1$. Sind dann x, y, z die Koordinaten eines Punktes der Raumkurve, ausgedrückt als Funktionen der Bogenlänge s, so hat P gegenüber dem der Raumkurve zugrundeliegenden Koordinatensystem die Koordinaten

$$\begin{aligned} p &= x + x_1\alpha + y_1\xi + z_1\lambda \\ q &= y + x_1\beta + y_1\eta + z_1\mu \\ r &= z + x_1\gamma + y_1\zeta + z_1\nu, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei α, ξ, λ, ... dieselbe Bedeutung haben wie in den vorangehenden Abschnitten.

Die Richtungskosinus der Geraden G gegen das Grundsystem sind dann

$$\begin{aligned} l &= a\alpha + b\xi + c\lambda \\ m &= a\beta + b\eta + c\mu \\ n &= a\gamma + b\zeta + c\nu. \end{aligned} \tag{2}$$

Gleichungen (1) stellen die Direktrix, Gleichungen (2) die sphärische Indikatrix der von G beschriebenen Regelfläche als Funktionen von s dar.

Die Gleichungen der Regelfläche R selbst lauten, wenn u eine von P aus gemessene Strecke bedeutet

$$\begin{aligned} X &= p + u\cdot l \\ Y &= q + u\cdot m \\ Z &= r + u\cdot n. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Differentiation von (1) und (2) ergibt

$$\frac{dp}{ds} = \alpha\left(1 - \frac{y_1}{\varrho}\right) + \xi\left(\frac{x_1}{\varrho} + \frac{z_1}{T}\right) - \lambda\frac{y_1}{T} \tag{4}$$

$$\frac{dl}{ds} = \xi\left(\frac{a}{\varrho} + \frac{c}{T}\right) - \alpha\frac{b}{\varrho} - \lambda\frac{b}{T} \tag{5}$$

nebst analogen Ausdrücken für die übrigen Größen.

Für das Bogenelement der sphärischen Indikatrix (2) erhält man

$$d\sigma^2 = \Sigma(dl)^2 = ds^2\left[\left(\frac{a}{\varrho} + \frac{c}{T}\right)^2 + b^2\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{T^2}\right)\right]. \tag{6}$$

Die Gerade H des kürzesten Abstandes der G von ihrer benachbarten Lage steht nun senkrecht zur Richtung l, m, n, sowie zur Tangente an die sphärische Indikatrix (2). Folglich ist die Richtung $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ von H gegenüber dem Grundsystem bestimmt durch die Gleichungen

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1$$
$$l\alpha_0 + m\beta_0 + n\gamma_0 = 0$$
$$\frac{dl}{d\sigma}\alpha_0 + \frac{dm}{d\sigma}\beta_0 + \frac{dn}{d\sigma}\gamma_0 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man

$$\alpha_0 = m\frac{dn}{d\sigma} - n\frac{dm}{d\sigma}$$
$$\beta_0 = n\frac{dl}{d\sigma} - l\frac{dn}{d\sigma}$$
$$\gamma_0 = l\frac{dm}{d\sigma} - m\frac{dl}{d\sigma}$$

und nach Einsetzen der Werte aus (2), (5) und (6) und Vereinfachung

$$\alpha_0 = \frac{-\alpha\left(\frac{b^2+c^2}{T} + \frac{ac}{\varrho}\right) + \xi\left(\frac{ab}{T} - \frac{cb}{\varrho}\right) + \lambda\left(\frac{a^2+b^2}{\varrho} + \frac{ac}{T}\right)}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{\varrho^2} + \frac{b^2+c^2}{T^2} + \frac{2ac}{\varrho T}}}$$

$$(7) \qquad \beta_0 = \frac{-\beta\left(\frac{b^2+c^2}{T} + \frac{ac}{\varrho}\right) + \eta\left(\frac{ab}{T} - \frac{cb}{\varrho}\right) + \mu\left(\frac{a^2+b^2}{\varrho} + \frac{ac}{T}\right)}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{\varrho^2} + \frac{b^2+c^2}{T^2} + \frac{2ac}{\varrho T}}}$$

$$\gamma_0 = \frac{-\gamma\left(\frac{b^2+c^2}{T} + \frac{ac}{\varrho}\right) + \zeta\left(\frac{ab}{T} - \frac{cb}{\varrho}\right) + \nu\left(\frac{a^2+b^2}{\varrho} + \frac{ac}{T}\right)}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{\varrho^2} + \frac{b^2+c^2}{T^2} + \frac{2ac}{\varrho T}}}$$

Die Richtungskosinus $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ der Geraden H gegenüber den Achsen des Dreikantes sind dann

$$\alpha_1 = \alpha_0\alpha + \beta_0\beta + \gamma_0\gamma$$
$$\beta_1 = \alpha_0\xi + \beta_0\eta + \gamma_0\zeta$$
$$\gamma_1 = \alpha_0\lambda + \beta_0\mu + \gamma_0\nu.$$

Nach Verwendung der Werte in (7) erhält man schließlich

$$\alpha_1 = \frac{-\left(\frac{b^2+c^2}{T}+\frac{ac}{\varrho}\right)}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{\varrho^2}+\frac{b^2+c^2}{T^2}+\frac{2ac}{\varrho T}}},$$

$$(8) \qquad \beta_1 = \frac{\frac{ab}{T}-\frac{bc}{\varrho}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{\varrho^2}+\frac{b^2+c^2}{T^2}+\frac{2ac}{\varrho T}}},$$

$$\gamma_1 = \frac{\frac{a^2+b^2}{\varrho}+\frac{ac}{T}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{\varrho^2}+\frac{b^2+c^2}{T^2}+\frac{2ac}{\varrho T}}}.$$

Der jeweilige Schnittpunkt M von H mit G (Mittelpunkt von G) ist bestimmt durch[1])

$$(9) \qquad u_0 = -\frac{\sum \frac{dl}{ds}\frac{dp}{ds}}{\sum \left(\frac{dl}{ds}\right)^2} = -\frac{\frac{ax_1+by_1}{\varrho^2}+\frac{by_1+cz_1}{T^2}+\frac{az_1+cx_1}{\varrho T}-\frac{b}{\varrho}}{\frac{a^2+b^2}{\varrho^2}+\frac{b^2+c^2}{T^2}+\frac{2ac}{\varrho T}}$$

Die Gleichungen des Konoides (H) lauten daher bezogen auf das Dreikant, wenn v eine von M aus auf H abgetragene Strecke ist,

$$(10) \qquad \begin{aligned} x &= x_1 + au_0 + v\alpha_1 \\ y &= y_1 + bu_0 + v\beta_1 \\ z &= z_1 + cu_0 + v\gamma_1 . \end{aligned}$$

Die unabhängigen Veränderlichen in diesen Gleichungen sind v und das Bogenelement s der Raumkurve C, falls ϱ und T bekannte Funktionen von s sind. Kennt man aber von Kurve C nur ihre Relation zwischen $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$

$$(11) \qquad f\left(\frac{1}{\varrho},\ \frac{1}{T}\right) = 0,$$

[1]) Bianchi, Differentialgeometrie, Leipzig 1899, S. 219.

so ist durch diese und die Gleichungen (10), welche die Veränderlichen v, ϱ und T enthalten, die Fläche (H) ebenfalls bestimmt.

§ 2. Über die momentane Bewegung von Geraden.

Betrachtet man nur eine momentane Bewegung, wobei ϱ und T die zu Beginn des Abschnittes III festgestellte Bedeutung haben, so hat jede Gerade G einen momentanen Mittelpunkt M und eine momentane Gerade H des kürzesten Abstandes von ihrer Nachbarlage. Nun zeigt die Übereinstimmung der Formeln (8) mit den in § 2, I berechneten Richtungskosinus der Momentangeraden G einer Ebene die auch direkt leicht zu erkennende Tatsache:

Die momentane H einer Geraden G ist stets parallel zu den (unter sich parallelen) Charakteristiken (= Momentangeraden G) aller zu G senkrechten Ebenen E.

Daraus folgt weiter:

Die einem Systeme von parallelen Geraden zugeordneten momentanen H sind unter sich parallel.

Bestimmt man auf der Geraden G den Punkt ihres kürzesten Abstandes von der momentanen Schraubenachse, so erhält man eben den Punkt M. Man hat also für jede beliebige Gerade G:

Der Punkt M ihres kleinsten Abstandes von der momentanen Schraubenachse ist gleichzeitig momentaner Mittelpunkt der Geraden[1]).

Bestimmt man die Momentangerade $\overline{H}$ zu H mit Hilfe von (8), wobei a, b, c bzw. durch die Werte $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ zu ersetzen sind, so erhält man wieder Gerade G. D. h.

Die Geraden G und H sind sich gegenseitig zugeordnet.

Die ∞^4 Geraden des bewegten Raumes bilden also ∞^4 Paare von einander zugeordneten Geraden. Die Geraden eines Paares stehen in ihrem gemeinsamen Mittelpunkte M aufeinander senkrecht und da M für beide Geraden die Stelle des kleinsten Abstandes von der Schraubenachse ist, so ist die Ebene GH parallel zu dieser momentanen Schraubenachse. Jeder Punkt P des bewegten Raumes ist gleichzeitig momentaner Mittelpunkt für alle Strahlen jenes durch ihn

[1]) Die zur momentanen Schraubenachse parallelen Geraden haben keinen momentanen Mittelpunkt. Da diese Geraden zu ihrer benachbarten Lage parallel sind, so ist jeder Punkt derselben eine Stelle des kürzesten Abstandes.

gelegten (ebenen) Strahlenbüschels, dessen Ebene zu der von P auf die Schraubenachse gefällten Senkrechten senkrecht steht.

Der Mittelpunkt M einer Geraden G hat nach (10) die Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= x_1 + a u_0 \\ y &= y_1 + b u_0 \\ z &= z_1 + c u_0 . \end{aligned} \tag{12}$$

Multipliziert man diese Gleichungen bzw. mit

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{a}{\varrho}+\frac{c}{T}\right), \quad b\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{T^2}\right), \quad \frac{1}{T}\left(\frac{a}{\varrho}+\frac{c}{T}\right)$$

und addiert sie, so erhält man unter Beachtung von (9)

$$\frac{x}{\varrho}\left(\frac{a}{\varrho}+\frac{c}{T}\right)+y\left(\frac{b}{\varrho^2}+\frac{b}{T^2}\right)+\frac{z}{T}\left(\frac{a}{\varrho}+\frac{c}{T}\right)-\frac{b}{\varrho}=0. \tag{13}$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die einem System von ∞^2 parallelen Geraden G zugehörigen momentanen Mittelpunkte in einer Ebene liegen, und zwar in einer die Schraubenachse enthaltenden Ebene E. Man findet leicht, daß die gleiche Ebene auch der Ort der momentanen Mittelpunkte ist für alle Parallelsysteme, deren Projektionen auf E zur Schraubenachse parallel sind. Man erhält bei gegebener Schraubenachse W die Mittelpunktsebene eines gegebenen Parallelensystems, indem man durch W jene Ebene legt, auf welche sich das Parallelensystem bei Orthogonalprojektion parallel zu W projiziert. Daraus folgt weiter, daß für parallele Windungsachsen W die Mittelpunktsebenen d e s s e l b e n Parallelensystems zu einander parallel sind.

§ 3. Gleichung des Konoides (H) in rechtwinkligen Koordinaten.

Die zwischen Krümmung und Torsion der Raumkurve C bestehende Gleichung habe die Form (11). Um die Gleichung von (H) in rechtwinkligen Koordinaten bezogen auf das Begleitdreikant zu erhalten, hat man die Gleichungen (10) nach v, $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$ aufzulösen und die für die beiden letzteren Größen erhaltenen Werte in Gleichung (11) einzusetzen. Man erhält aus (10)

$$(14)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{b\left(b(z-z_1)-c(y-y_1)\right)^2}{N} \\ \frac{1}{T} &= \frac{b\left(b(z-z_1)-c(y-y_1)\right)\left(a(y-y_1)-b(x-x_1)\right)}{N}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} N = {} & \left[b(z-z_1)-c(y-y_1)\right]^2 \left\{\left[a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)\right](a^2+b^2)+ax_1+by_1\right\} \\ & + \left[a(y-y_1)-b(x-x_1)\right]^2 \left\{\left[a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)\right](b^2+c^2)+by_1+cz_1\right\} \\ & + \left[a(y-y_1)-b(x-x_1)\right]\cdot\left[b(z-z_1)-c(y-y_1)\right] \\ & \qquad \left\{\left[a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)\right] 2\,ac+az_1+cx_1\right\} \end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieser Werte stellt (11) die Gleichung von *(H)* dar bezogen auf das Dreikant[1]). Diese Gleichung vereinfacht sich wesentlich, wenn man die Fläche *(H)* auf ein Koordinatensystem bezieht, welches den Punkt $P(x_1\,y_1\,z_1)$ als Anfangspunkt hat und von dem etwa die Y-Achse in die Gerade G fällt, während die X- und Z-Achse unter sich und zu G senkrecht, im übrigen willkürlich gewählt seien. Es habe nun die X-Achse gegenüber dem Dreikante die Richtungskosinus $a_1\,b_1\,c_1$, die Z-Achse $a_2\,b_2\,c_2$, während die Y-Achse die Kosinus a, b, c hat. Von den sechs ersteren Größen ist nur eine willkürlich innerhalb eines gewissen Intervalles (cf. § 2, I). Die fünf übrigen Größen sind dann bestimmt nach den in § 2 des I. Abschnittes erwähnten Gleichungen. Die Transformation der Fläche *(H)* auf dieses neue System wird ausgeführt durch die Substitutionen

$$\begin{aligned} x &= x_1 + Xa_1 + Ya + Za_2 \\ y &= y_1 + Xb_1 + Yb + Zb_2 \\ z &= z_1 + Xc_1 + Yc + Zc_2. \end{aligned}$$

---

[1]) Für $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ erhält man das der Hauptnormale von C zugehörige Konoid *(H)*. Die der Hauptnormalen zugeordnete momentane H ist aber identisch mit der momentanen Schraubenachse, d. h. der Achse jener unendlich kleinen Schraubung, durch welche der bewegte Raum in seine benachbarte Lage gebracht wird. Man nennt diese Achse auch die Windungsachse der Raumkurve C. Für sie ist nach (14) $\frac{1}{\varrho} = \frac{z^2}{y(x^2+z^2)}$, $\frac{1}{T} = \frac{-zx}{y(x^2+z^2)}$ und (11) stellt somit die Fläche der Windungsachsen von C relativ zum Begleitdreikante dar.

Auf diese Art erhält man nach einigen Umformungen

$$(14') \qquad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{(a_1 Z - a_2 X)^2}{N}, \\ \frac{1}{T} &= \frac{(a_1 Z - a_2 X)(c_1 Z - c_2 X)}{N}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} N = (X^2 + Z^2)(bY + y_1) - X^2 b_2 (x_1 a_2 + y_1 b_2 + z_1 c_2) \\ - Z^2 b_1 (x_1 a_1 + y_1 b_1 + z_1 c_1) \\ + XZ \left[b_1 (x_1 a_2 + y_1 b_2 + z_1 c_2) + b_2 (x_1 a_1 + y_1 b_1 + z_1 c_1) \right]. \end{aligned}$$

Eine weitere Vereinfachung der Gleichung wird dadurch erzielt, daß man für jede Gerade G den willkürlichen Punkt P in der rektifizierenden Ebene annimmt, also $y_1 = 0$ wählt, und außerdem etwa $b_1 = 0$ setzt, d. h. die X-Achse senkrecht zur Hauptnormalen wählt. Die Gleichung des Konoides (H) lautet dann, wenn (11) die vorgegebene Relation für C ist, folgendermaßen

$$(15) \qquad f\left(\frac{(a_1 Z - a_2 X)^2}{N}, \ \frac{(a_1 Z - a_2 X)(c_1 Z - c_2 X)}{N} \right) = 0,$$

wobei

$$N = bY(X^2 + Z^2) + b_2 X \left[Z(a_1 x_1 + c_1 z_1) - X(a_2 x_1 + c_2 z_1) \right].$$

Die linke Seite der Gleichung (15) ist eine Funktion von Y und dem Quotienten $\frac{X}{Z}$ [1].

Man kann nun die umgekehrte Aufgabe stellen:

Mit dem Begleitdreikante einer Raumkurve C ist die Gerade G verbunden, welch letztere gegeben sei durch den Punkt $P(x_1 \ 0 \ z_1)$ und ihre Richtungskosinus a, b, c gegenüber dem Dreikante. Wie muß die Relation zwischen Krümmung und Torsion der Kurve C lauten, damit das der Geraden G zugeordnete Konoid (H) inbezug auf ein Koordinatensystem, dessen Anfang in P, dessen Y-Achse in G liegt und dessen X-Achse (zu G und) zur Hauptnormalen senkrecht gewählt ist, die v o r g e g e b e n e Gleichung

$$(16) \qquad \mathrm{F}\left(Y, \frac{X}{Z} \right) = 0$$

erhält?

[1] Da G und H sich gegenseitig zugeordnet sind, so ist (15) auch die Gesamtheit jener Geraden H, für welche die feste Gerade G während der Bewegung der Reihe nach Gerade des kürzesten Abstandes wird.

Zur Beantwortung dieser Frage bedarf es nur der Auflösung der Gleichungen (14′) nach Y und $\frac{X}{Z}$. Man erhält

$$(17)\qquad Y=\frac{\frac{b}{\varrho}-\frac{ax_1}{\varrho^2}-\frac{cz_1}{T^2}-\frac{az_1+cx_1}{\varrho T}}{\frac{a^2+b^2}{\varrho^2}+\frac{b^2+c^2}{T^2}+\frac{2ac}{\varrho T}}$$

$$\frac{X}{Z}=\frac{c_1 T-a_1\varrho}{c_2 T-a_2\varrho}.$$

Setzt man diese Werte in (16) ein, so hat man die gewünschte Relation zwischen Krümmung und Torsion der Raumkurve C.

§ 4. Beispiele.

I. Es sei folgende Relation für die Raumkurve C gegeben

$$(18)\qquad \frac{A}{\varrho^2}+\frac{B}{T^2}+\frac{C}{\varrho T}+\frac{D}{\varrho}=0,$$

zu welcher M. Demoulin durch die Forderung gelangte, daß die Windungsachsen von C relativ zum Begleitdreikant ein Plückersches Konoid beschreiben. Es soll die Gleichung des einer beliebigen Geraden G zugeordneten Konoides (H) aufgestellt werden.

Man erhält nach obigem Verfahren als Gleichung von (H) bezogen auf das oben besprochene spezielle Koordinatensystem:

$$(19)\qquad \begin{aligned} DbY(X^2+Z^2)+X^2\big(Aa_2{}^2+Bc_2{}^2+Ca_2c_2-Db_2(a_2x_1+c_2z_1)\big)\\ +Z^2(Aa_1{}^2+Bc_1{}^2+Ca_1c_1)\\ +XZ\big(Db_2(a_1x_1+c_1z_1)-2Aa_1a_2-2Bc_1c_2-C(a_1c_2+c_1a_2)\big)=0.\end{aligned}$$

Dies ist ebenfalls ein Plückersches Konoid, sodaß wir haben:

Bei den Raumkurven (18) ist nicht nur das der Hauptnormalen zugeordnete Konoid (Windungsachsenfläche), sondern das einer **jeden** *mit dem Begleitdreikante verbundenen Geraden zugeordnete Konoid (H) ein Plückersches.*

Von diesen Plückerschen Konoiden arten jene von ∞^2 bestimmten Geraden G in Ebenen aus, deren jede natürlich auf ihrer Geraden G senkrecht steht. Bei einer solchen speziellen Geraden G

ist dann ihr Durchstoßpunkt durch die betreffende Ebene stets Mittelpunkt während der ganzen Bewegung, sodaß also die Striktionslinie der von G erzeugten Regelfläche von einem festen Punkte der Geraden G beschrieben wird[1]).

II. Es sei nun als Beispiel für die Umkehrung die Aufgabe gestellt:

Wie muß die Relation zwischen Krümmung und Torsion einer Raumkurve beschaffen sein, damit das einer bestimmten Geraden G zugeordnete Konoid (H) eine Ebene wird?

Eine Ebenengleichung von der Form (16), d. h. bezogen auf das spezielle Koordinatensystem, kann nur lauten

$$\frac{X}{Z} = k \quad \text{oder} \quad Y = k.$$

Im ersten Falle erhält man als Relation zwischen ϱ und T

$$\frac{\varrho}{T} = \frac{c_1 - k c_2}{a_1 - k a_2}, \tag{20}$$

d. h. C muß eine Schraubenlinie sein. Da nach (8) die Richtung von H nur vom Verhältnis $\varrho : T$ abhängt, so folgt auch umgekehrt, daß bei einer Schraubenlinie das Konoid (H) einer jeden Geraden G eine die Gerade G enthaltende Ebene ist.

Im zweiten Falle erhält man als Relation zwischen ϱ und T

$$\frac{a x_1 + k(a^2 + b^2)}{\varrho^2} + \frac{c z_1 + k(b^2 + c^2)}{T^2} + \frac{a z_1 + c x_1 + 2kac}{\varrho T} - \frac{b}{\varrho} = 0, \tag{21}$$

also eine Gleichung von der Form (18). Diese Relation (21) muß bestehen, damit die durch den Punkt $(x_1\, 0\, z_1)$ gehende Gerade G mit der Richtung a, b, c die gegebene Ebene $Y = k$[2]) als zugeordnetes Konoid hat. Besteht aber für eine Kurve C eine solche Relation von der Form (18), dann ist G nicht die einzige Gerade, welcher eine Ebene als Konoid (H) zugehört, sondern es existiert eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit solcher Geraden. Man erhält sie durch Auflösung des Gleichungssystems

---

[1]) Siehe hierüber Progr. der Kreisoberrealschule Würzburg 1913, S. 16—23.

[2]) Gegenüber den Dreikantsachsen lautet die Gleichung dieser Ebene

$$(x - x_1)\, a + y\, b + (z - z_1)\, c - k = 0.$$

$$\begin{aligned}
a x_1 + k(a^2 + b^2) &= \sigma A \\
c z_1 + k(b^2 + c^2) &= \sigma B \\
a z_1 + c x_1 + 2kac &= \sigma C \\
b &= -\sigma D \\
a^2 + b^2 + c^2 &= 1.
\end{aligned} \tag{22}$$

Eliminiert man σ und löst alsdann nach x_1, z_1 und k auf, so erhält man zu jeder beliebig vorgegebenen Richtung a, b, c den Punkt P der rektifizierenden Ebene, durch welchen die betreffende Gerade hindurchgeht, sowie die Strecke k, welche auf dieser Geraden von P aus abzutragen ist, um ihren unveränderlichen Mittelpunkt zu erhalten. Würde man nach Elimination von σ die obigen Gleichungen nach a, b, c und k auflösen, so würde man zu jedem beliebigen Punkte $P(x_1 z_1)$ der rektifizierenden Ebene zwei durch ihn gehende Gerade G mit zugehörigem Abschnitt k erhalten. Jede der beiden Auflösungen zeigt, daß die Anzahl der existierenden Geraden G ∞^2 ist. Es seien indes beide Auflösungen unterlassen und dafür behufs gleichzeitiger Feststellung des geometrischen Ortes der ∞^2 festen Mittelpunkte aller G folgender Weg eingeschlagen:

Bezeichnen $x_2\, y_2\, z_2$ relativ zum Begleitdreikant die Koordinaten des Mittelpunktes der Geraden G, den man durch Abtragen der Strecke k erhält, so ist

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_2 - ka \\
z_1 &= z_2 - kc \\
0 &= y_2 - kb.
\end{aligned}$$

Setzt man die für $x_1\, z_1$ und k hieraus folgenden Werte in obige Gleichungen ein, so werden die drei ersten nach Elimination von σ homogen-linear für a, b, c und ergeben mit Rücksicht auf die fünfte Gleichung die Werte

$$a = \frac{-(Dy_2 + A)}{x_2 H}, \quad b = \frac{D}{H}, \quad c = \frac{-(Dy_2 + B)}{z_2 H}, \tag{23}$$

wobei

$$H = \sqrt{\left(\frac{Dy_2 + A}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{Dy_2 + B}{z_2}\right)^2 + D^2}.$$

Aus den drei homogenen linearen Gleichungen folgt jedoch für $x_2\, y_2\, z_2$ die Bedingung

$$Dy_2(x_2^2 + z_2^2) + Bx_2^2 + Az_2^2 - Cx_2 z_2 = 0. \tag{24}$$

Dies ist die Gleichung des geometrischen Ortes der festen Mittelpunkte der fraglichen ∞^2 Geraden G und nach (19) folgt, daß diese Fläche (24) identisch ist mit dem der Hauptnormale zugeordneten (Plückerschen) Konoide (H). Die Gleichungen (23) ordnen dann jedem Punkte der Fläche (24) eine Gerade G zu[1]).

Die Ebenen der einem Parallelsystem von Geraden zugehörigen momentanen Mittelpunkte gehen bei den Kurven (18) alle durch einen Punkt $M_2(x_2 y_2 z_2)$, nämlich den unveränderlichen Mittelpunkt der dem Parallelsystem zugehörigen besonderen Geraden G, deren Konoid (H) in eine Ebene ausartet.

M_2 ist ein Punkt der Fläche (24) und jede der durch M_2 gelegten ∞^1 Mittelpunktsebenen enthält nach (13) die jeweilige Windungsachse, also eine geradlinige Erzeugende des Plückerschen Konoides (24). Die Gesamtheit dieser durch M_2 gehenden Ebenen erzeugt einen Kegel. Betrachtet man statt dieses Kegels den von den Ebenen-Normalen in M_2 gebildeten Kegel, so lauten nach (13) dessen Gleichungen inbezug auf ein durch M_2 gelegtes zum Dreikant paralleles Koordinatensystem

$$(25) \qquad X : Y : Z = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{a}{\varrho} + \frac{c}{T}\right) : \left(\frac{b}{\varrho^2} + \frac{b}{T^2}\right) : \frac{1}{T}\left(\frac{a}{\varrho} + \frac{c}{T}\right).$$

Die Elimination des Quotienten $\varrho : T$ aus diesen beiden Gleichungen ergibt als Gleichung des Normalenkegels in rechtwinkligen Koordinaten

$$(25') \qquad b(X^2 + Z^2) - aXY - cYZ = 0,$$

d. h.

Die Normalen sowie die Mittelpunktsebenen selbst erzeugen einen Kegel zweiter Ordnung.

In diesem Satze ist eine, auch direkt leicht zu beweisende, besondere Eigenschaft des Plückerschen Konoids zum Ausdruck gebracht, nämlich:

Legt man durch irgend einen Punkt des Plückerschen Konoides jene ∞^1 Ebenen, deren jede eine geradlinige Erzeugende des Konoides enthält, so erzeugen diese Ebenen (bzw. deren Normalen) einen Kegel zweiter Ordnung.

---

[1]) Über diese Geraden siehe Programm 1913.

§ 5. Die Mittelpunkts-Ebenen eines Systems von parallelen Geraden.

Bewegt sich der mit dem Dreikante verbundene Raum längs einer beliebigen Raumkurve C, so erzeugen die momentanen Mittelpunktsebenen eines Parallelensystems keinen Kegel, da sie im allgemeinen nicht durch einen Punkt gehen. Fällt man aber von irgend einem Punkte, etwa der Ecke des Dreikantes, die Normalen zu diesen Ebenen, so hat man den der Ebenenschar zugehörigen Normalenkegel mit den Gleichungen (25). Nach diesen Gleichungen ist die Normalenrichtung eine Funktion des Quotienten $\varrho : T$ und ist daher konstant, wenn C eine Schraubenlinie ist. Bei einer beliebigen Kurve C ist der Quotient $\varrho : T$ zwar veränderlich, aber der dem Parallelensystem (a, b, c) zugehörige Normalenkegel hat ohne Rücksicht auf den Charakter der Kurve C stets die Gleichung (25'), d. h. er ist von der Raumkurve unabhängig[1]).

Dieses Resultat kann aus der oben erwähnten Eigenschaft des Plückerschen Konoides auch direkt gefolgert werden. Denkt man sich nämlich bei der beliebigen Raumkurve C außer der Fläche ihrer Windungsachsen auch ein Plückersches Konoid mit der Hauptnormalen verbunden, so gibt es zu jeder Windungsachse W von C stets eine parallele Erzeugende V des Plückerschen Konoides, da ja die Erzeugende des letzteren eine volle Umdrehung vollführt. Nun ist es (s. Schluß von § 2) hinsichtlich der Richtung der Mittelpunktsebene gleichgültig, ob W oder V momentane Windungsachse ist, d. h. der Normalenkegel ist derselbe wie bei den Kurven, für welche das Plückersche Konoid selbst Windungsachsenfläche ist.

Der genannte Normalenkegel für ein System von parallelen Geraden bleibt auch noch ungeändert bei einer wesentlich allgemeineren Bewegung des Raumes als sie in Verbindung mit dem Begleitdreikante einer Raumkurve erfolgt. Bei der Bewegung des Begleitdreikantes schneiden alle momentanen Schraubenachsen eine feste Gerade (Hauptnormale) senkrecht. Verallgemeinert sich aber die Bewegung in der Weise, daß die Schraubenachse stets eine feste Gerade des bewegten Raumes senkrecht kreuzt (d. h. stets zu einer

---

[1]) Dagegen hängt es von der Raumkurve C ab, ob der Kegel (25') vollständig von den Normalen beschrieben wird, oder nur ein Teil desselben. Bei Schraubenlinien C tritt nur eine Erzeugende des Kegels auf.

festen Ebene parallel ist), so wird dadurch die Richtung der Mittelpunktsebene eines Parallelensystems nicht geändert. Wir haben also:

Ist bei einer Bewegung die momentane Schraubenachse stets zur gleichen Ebene des bewegten Raumes parallel, so ist der Kegel der Normalen zu den Mittelpunktsebenen irgend eines Systems von parallelen Geraden stets von der zweiten Ordnung, und zwar ist er unabhängig von dem besonderen Charakter der Bewegung.

Dieser Satz ist übrigens eine direkte Folge des bekannten geometrischen Satzes:

Schneidet man die Ebenen E eines durch die Gerade S gelegten Ebenenbüschels durch eine Ebene E_1, so erzeugt die Gesamtheit der Ebenen E_2, welche in den Schnittgeraden V je senkrecht zu E konstruiert werden, einen Kegel zweiter Ordnung (Fig. 8). Ebenso bilden dann die von einem Punkte auf E_2 gefällten Normalen einen Kegel zweiter Ordnung.

Es sei nun gezeigt, wie daraus obiger Satz über die Mittelpunktsebenen hervorgeht.

S sei eine Gerade des Parallel-Geradensystems, E_1 eine feste Ebene. Ist nun in der Schnittgeraden V die zu E senkrechte Ebene E_2 errichtet, so ist V die Orthogonalprojektion von S auf E_2. Die Orthogonalprojektionen aller Geraden des Parallelensystems S auf E_2 sind folglich parallel zu V. Ist nun V eine momentane Schraubenachse, so ist (s. Schluß von § 2) E_2 momentane Mittelpunktsebene des Parallelensystems S. Beschreibt nun V ein Strahlenbüschel in E_1, so erzeugt E_2 nach obigem geometrischen Satze einen Kegel zweiter Ordnung. Die Normalen zu E_2 erzeugen folglich ebenfalls einen Kegel zweiter Ordnung. Hat man nun irgend eine momentane Schraubenachse W, welche zu E_1 parallel ist, so ist diese W stets zu irgend einer Geraden V_1 des Strahlenbüschels V parallel. Folglich ist auch die durch W gelegte momentane Mittelpunktsebene des Systems S parallel zu der durch V_1 gelegten E_2. Die Normale zur Mittelpunktsebene bleibt daher ungeändert, solange die momentane Schraubenachse W zu V_1 parallel bleibt. Daraus folgt, daß der Normalenkegel derselbe bleibt, gleichgültig ob die Gesamtheit der Schraubenachsen aus dem Strahlenbüschel V oder aus irgend welchen zu E_1 parallelen Geraden besteht.

festen Ebene p tung der Mittel-
punktsebene ei Wir haben also:

Ist bei ei enachse stets zur
gleichen Ebene st der Kegel der
Normalen zu e Systems von par-
allelen Gerade zwar ist er un-
abhängig von ung.

Dieser Sa s bekannten geo-
metrischen Sat

Schneidet Gerade S gelegten
Ebenenbüschel e Gesamtheit der
Ebenen E_2, w krecht zu E kon-
struiert werde). Ebenso bilden
dann die von alen einen Kegel
zweiter Ordnu

Es sei über die Mittel-
punktsebenen

S sei ei s, E_1 eine feste
Ebene. Ist m senkrechte Ebene
E_2 errichtet, S auf E_2. Die
Orthogonalpro systems S auf E_2
sind folglich ntane Schrauben-
achse, so ist Mittelpunktsebene
des Parallelen Strahlenbüschel in
E_1, so erzeu atze einen Kegel
zweiter Ordnu folglich ebenfalls
einen Kegel z d eine momentane
Schraubenachs ist diese W stets
zu irgend ein parallel. Folglich
ist auch die lpunktsebene des
Systems S p Die Normale zur
Mittelpunktse e die momentane
Schraubenach s folgt, daß der
Normalenkege e Gesamtheit der
Schraubenach us irgend welchen
zu E_1 paralle

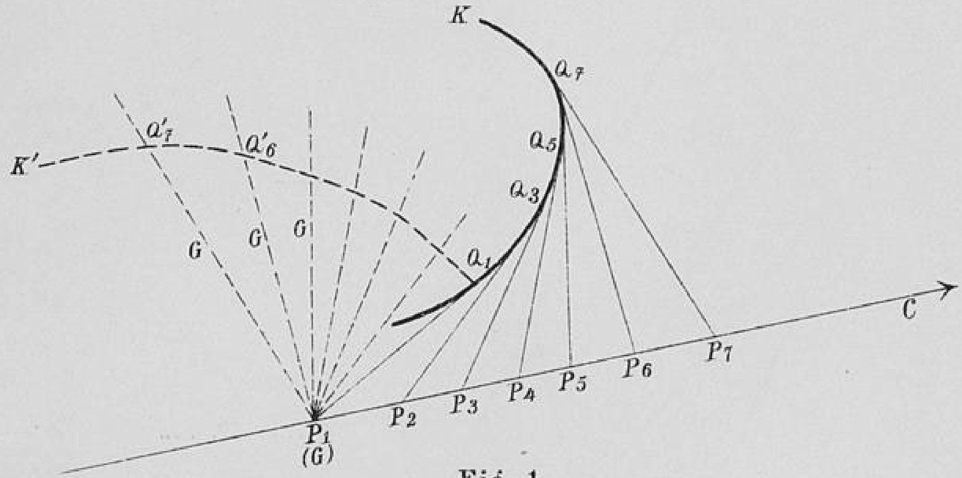

Fig. 1.

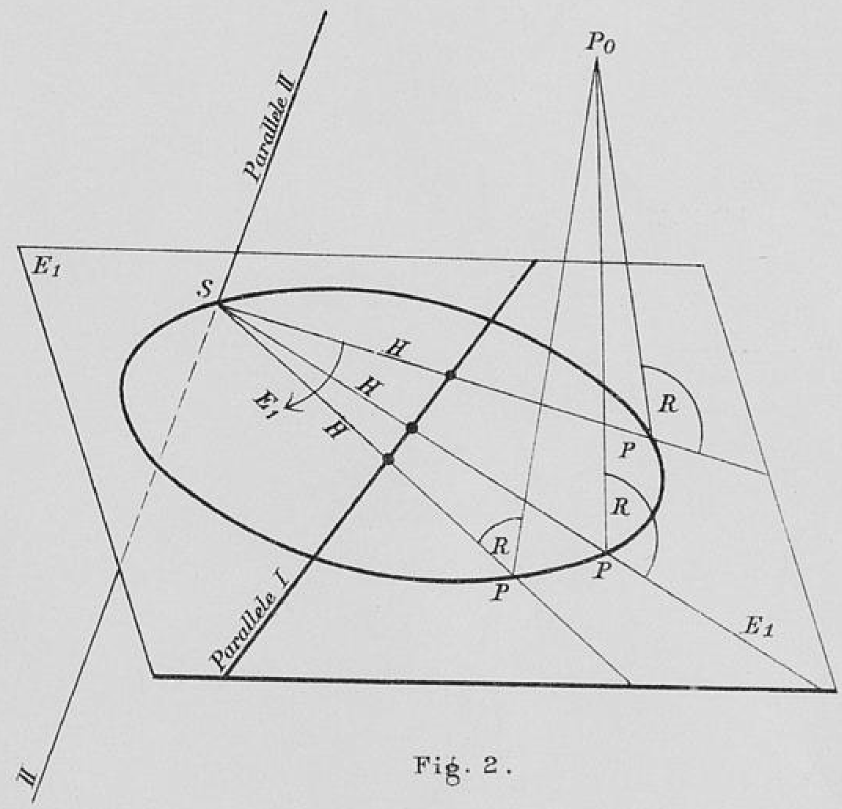

Fig. 2.

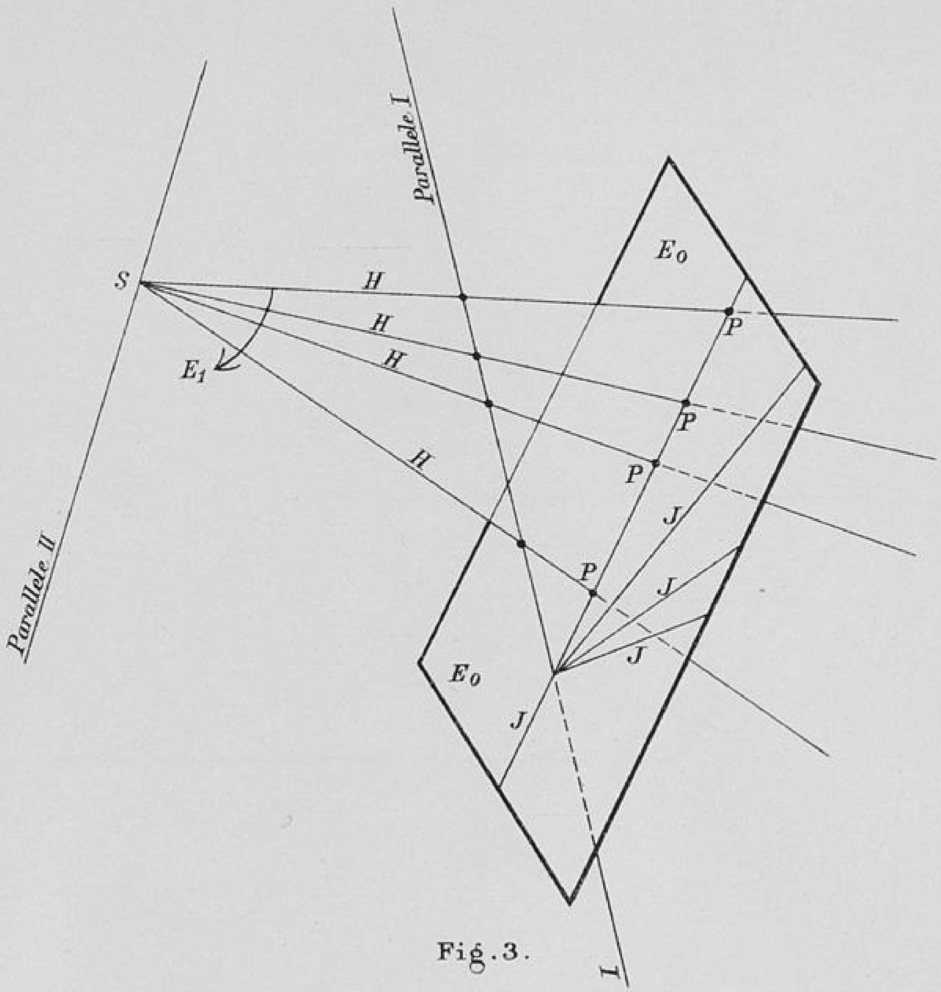
Parallele I
Parallele II
S
H
H
H
H
E_1
E_0
E_0
P
P
P
P
J
J
J
J
I

Fig. 3.

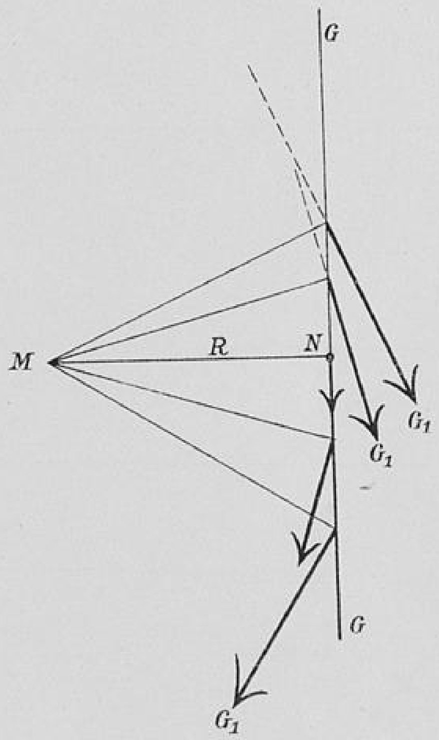
G
G
M
R
N
G_1
G_1
G_1

Fig. 4.

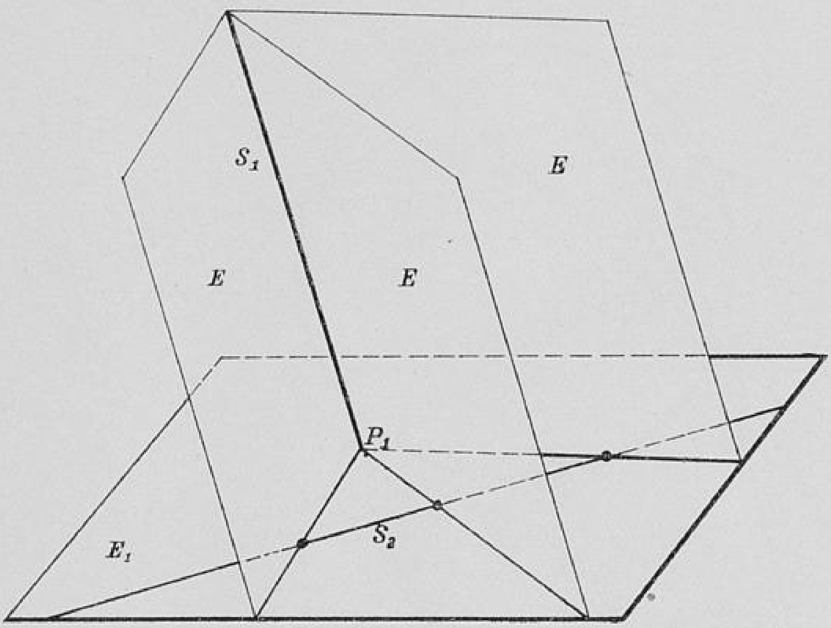

Fig. 5.

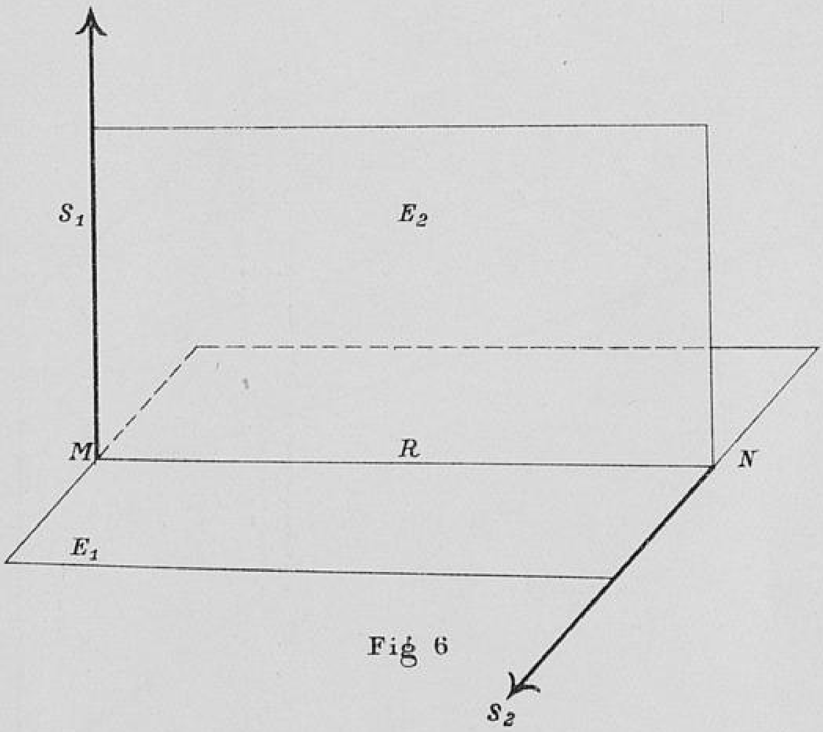

Fig 6

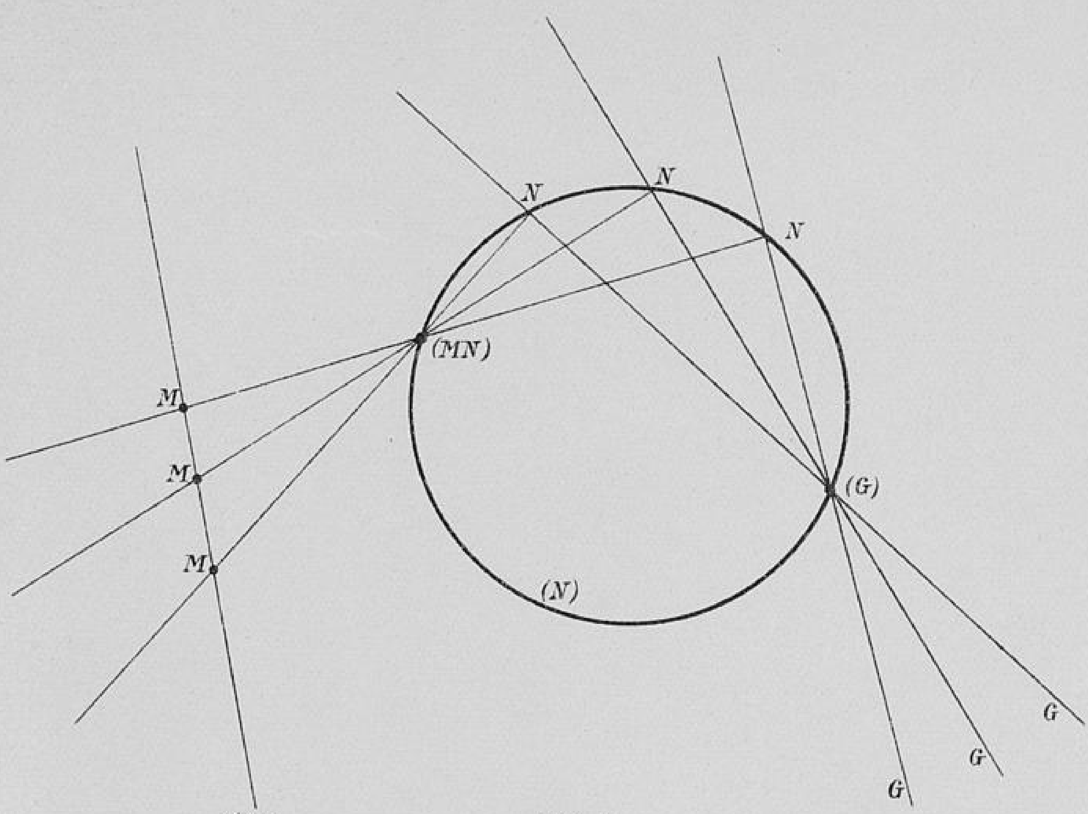

Fig. 7.

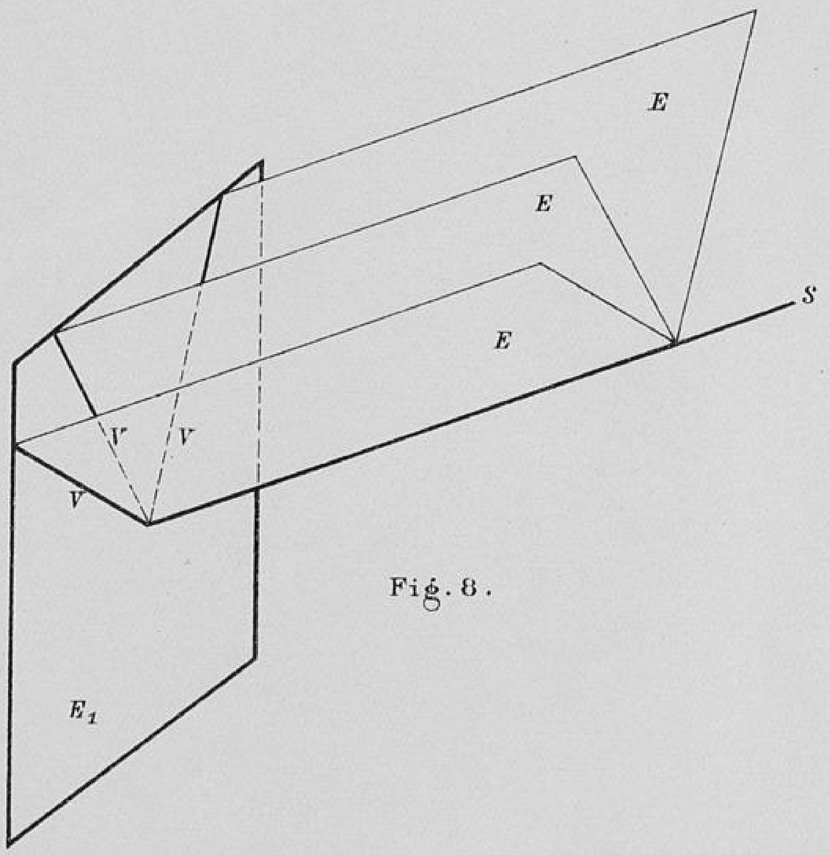

Fig. 8.