III. Abschnitt.

Beschränkt man sich auf die Betrachtung einer unendlich kleinen Bewegung des Raumes, so ist für den Moment der Bewegung jeder Ebene eine Gerade G nach I (Schnittgerade oder Charakteristik) und jedem Punkte eine Gerade G_1 nach II (Verbindungsgerade oder Richtungsgerade) zugeordnet. Diese Geraden seien fortan bezeichnet als Momentangerade G bzw. G_1. Zur Bestimmung der ersteren dienen die Gleichungen (2′) und (3′, I), zur Bestimmung der letzteren die Gleichungen (4, II), wobei ϱ und T bestimmte Werte bedeuten, nämlich Krümmungs- und Torsionsradius jener Raumkurve C, längs welcher sich das Dreikant bewegt, in dem bestimmten Punkte C_1. Nun kann man für die unendlich kleine Bewegung die Raumkurve C ersetzen durch jene in C_1 oskulierende gemeine Schraubenlinie, welche mit Kurve C außer der Krümmung auch die Torsion gemeinsam hat. Die Achse dieser Schraubenlinie, auch Windungsachse der Raumkurve C im Punkte C_1 genannt, ist dann die Achse, um welche der Raum seine momentane (allgemeinste) Bewegung ausführt und zwar derart, daß der Windungsradius r des Punktes C_1 und der Windungsparameter k ($2\pi^{\text{ter}}$ Teil der Ganghöhe) der Schraubenlinie die Werte haben

$$r = \frac{\varrho T^2}{\varrho^2 + T^2},$$

$$k = \frac{-\varrho^2 T}{\varrho^2 + T^2}.$$

Die allgemeinste unendlich kleine Bewegung ist nun eine Schraubenbewegung mit einem gewissen Windungsparameter k. Jeder bewegte Punkt, z. B. ein in der Entfernung r von der Schrauben-Achse befindlicher Punkt beschreibt ein Bogenelement der Schraubenlinie, wobei das Begleitdreikant dieser Schraubenlinie fest mit dem bewegten Raume verbunden bleibt. ϱ und T dieser Schraubenlinie sind durch obige Gleichungen als Funktionen von k und r bestimmt. Handelt es sich also nur um eine unendlich kleine Bewegung, so gelten die zur Bestimmung von G und G_1 aufgestellten Formeln ganz allgemein für jede Bewegung ohne Rücksicht auf die Raumkurve C. Dabei bedeuten dann ϱ und T bzw. Krümmungs- und Torsionsradius jener gemeinen Schraubenlinie, welche von einem im Abstande r von der Schraubenachse befindlichen Punkte bei einer Schraubung mit dem Parameter k beschrieben wird. Die Gleichungen von G und G_1 sind hiebei auf das gegen den bewegten Raum fest bleibende Begleitdreikant dieser Schraubenlinie bezogen.

§ 1. Über die Momentangeraden G und G_1.

Die dem Punkte $P_0(x_0 y_0 z_0)$ zugeordnete G_1 hat nach (5, II) die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + u\left(1 - \frac{y_0}{\varrho}\right)\\
(1) \qquad y &= y_0 + u\left(\frac{x_0}{\varrho} + \frac{z_0}{T}\right)\\
z &= z_0 + u\left(-\frac{y_0}{T}\right).
\end{aligned}
$$

Den ∞^2 Punkten einer festen Ebene E_0 mit der Gleichung

$$(2) \qquad ax + by + cz - p = 0$$

sind ∞^2 Momentangerade G_1 zugeordnet und man kann die Frage stellen nach jenen Punkten der Ebene, deren Momentangeraden G_1 in die Ebene selbst fallen. Man erhält diese Punkte durch die Bedingung, daß die Koordinaten (1) die Gleichung (2) erfüllen für jeden beliebigen Wert von u. Setzt man die Werte aus (1) in (2) ein, so erhält man

$$ax_0 + by_0 + cz_0 - p + u\left[x_0 \frac{b}{\varrho} - y_0\left(\frac{a}{\varrho} + \frac{c}{T}\right) + z_0 \frac{b}{T} + a\right] = 0.$$

Der Ort der verlangten Punkte P_0 ist also bestimmt durch die beiden Gleichungen

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
ax_0 + by_0 + cz_0 - p &= 0\\
x_0 \frac{b}{\varrho} - y_0\left(\frac{a}{\varrho} + \frac{c}{T}\right) + z_0 \frac{b}{T} + a &= 0,
\end{aligned}
$$

d. h. der Ort dieser Punkte ist eine Gerade und zwar zeigt der Vergleich mit (3', I), daß es die Momentangerade G der Ebene E_0 ist. Dieses Resultat erkennt man direkt, wenn man beachtet, daß die Bewegung der Ebene E_0 in einer Rotation um G und einer Rotation der Ebene in sich um einen Zentralpunkt M besteht. Erstere Bewegung hat aber auf die Punkte von G keinen Einfluß, folglich liegen die den Punkten von G zugeordneten Geraden G_1 in der Ebene selbst und zwar berühren sie als Senkrechte zum Verbindungsstrahl mit M eine Parabel mit dem Brennpunkte M (Fig. 4). Auf letzteren Punkt hat die zweite Bewegungskomponente keinen Einfluß. M ist daher jener ausgezeichnete Punkt der Ebene E_0, dessen Momentangerade G_1 zu E_0 senkrecht steht. Seine Koordinaten $X_0\,Y_0\,Z_0$ sind bestimmt durch die Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{aligned} k\left(1-\frac{Y_0}{\varrho}\right)&=a\\ k\left(\frac{X_0}{\varrho}+\frac{Z_0}{T}\right)&=b\\ k\left(-\frac{Y_0}{T}\right)&=c\\ aX_0+bY_0+cZ_0&=p. \end{aligned}$$

Man erhält daraus

$$(5)\qquad X_0=\frac{p}{T\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right)},\quad Y_0=\frac{-c}{\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}},\quad Z_0=\frac{b-\frac{p}{\varrho}}{\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}}.$$

Diese Gleichungen ordnen jeder Ebene des bewegten Raumes einen Punkt M zu. Die Elimination von p ergibt nun

$$Z_0\varrho+X_0T=\frac{T\varrho^2 b}{a\varrho-cT}.$$

Diese Gleichung und der Wert für Y_0 enthalten das Resultat:

Die Zentralpunkte M eines jeden Systems von Parallelebenen liegen auf einer Geraden, welche zur momentanen Windungsachse parallel ist.

Ferner folgt aus (5), daß alle zur Windungsachse parallelen Ebenen ihre Zentralpunkte in der unendlich fernen Ebene haben.

Die Gleichungen (4) ordnen nicht nur jeder Ebene E einen Punkt M, sondern auch umgekehrt jedem Punkte M eine bestimmte

Ebene E eindeutig zu. Es sei nun die Frage gestellt nach dem Orte der ∞^2-Punkte M, welche den ∞^2 durch einen Punkt $P_1(x_1 y_1 z_1)$ gelegten Ebenen E zugehören.

Die Gleichung einer solchen Ebene E ist, wenn $X_0 Y_0 Z_0$ ihre laufenden Koordinaten bedeuten

$$a(X_0 - x_1) + b(Y_0 - y_1) + c(Z_0 - z_1) = 0.$$

Die Elimination von a, b, c aus dieser und den Gleichungen (4) ergibt nun nach Vereinfachung

$$X_0\left(1 - \frac{y_1}{\varrho}\right) + Y_0\left(\frac{x_1}{\varrho} + \frac{z_1}{T}\right) - Z_0 \frac{y_1}{T} - x_1 = 0. \tag{6}$$

Mit Rücksicht auf (1) haben wir also

Der Ort der Zentralpunkte aller durch einen Punkt P_1 gelegten Ebenen ist jene durch diesen Punkt gehende Ebene E_1, für welche P_1 Zentralpunkt ist. Umgekehrt gehen alle Ebenen, welche den ∞^2-Punkten einer Ebene E_1 zugeordnet sind, durch den Zentralpunkt dieser Ebene.

Wählt man unter den ∞^2 durch P_1 gehenden Ebenen die ∞^1-Ebenen E eines Büschels mit der Achse S_1 (Fig. 5), so liegen die Zentralpunkte dieser Ebenen bzw. auf deren Schnittgeraden mit E_1. Da aber die Ebenen E durch jeden Punkt von S_1 gehen, so liegen ihre Zentralpunkte in allen Ebenen, welche den Punkten von S_1 zugeordnet sind. Daraus folgt, daß alle den Punkten von S_1 zugeordneten Ebenen sich in einer Geraden S_2 (in E_1) schneiden und daß diese Gerade S_2 der Ort der Zentralpunkte aller Ebenen des Büschels S_1 ist. Die beiden Geraden S_1 und S_2 haben also die Eigenschaft, daß jede der Ort der Zentralpunkte für das durch die andere gelegte Ebenenbüschel ist. Sie sollen daher als konjugierte Gerade bezeichnet werden. Zu jeder durch P_1 gehenden Geraden S_1 gibt es alsdann eine konjugierte Gerade S_2. Letztere liegt stets in der dem Punkte P_1 zugeordneten Ebene[1]). Es soll nun die zu S_1 konjugierte Gerade S_2 analytisch bestimmt werden.

S_1 sei gegeben durch $P_1(x_1 y_1 z_1)$ und ihre Richtung $A_1 B_1 C_1$ gegenüber dem Dreikante. Irgend ein Punkt T von S_1 hat dann die Koordinaten

$$x_1 + tA_1,\; y_1 + tB_1,\; z_1 + tC_1.$$

---

[1]) Jede durch den Zentralpunkt P_1 gehende Gerade der Ebene E_1 ist sich selbst konjugiert.

Die diesem Punkte zugeordnete Ebene hat somit nach (4) die Stellungswinkel

$$a = k\left[1 - \frac{y_1}{\varrho} - t\,\frac{B_1}{\varrho}\right]$$
$$b = k\left[\frac{x_1}{\varrho} + \frac{z_1}{T} + t\left(\frac{A_1}{\varrho} + \frac{C_1}{T}\right)\right]$$
$$c = k\left[\frac{-y_1}{T} + t\left(\frac{-B_1}{T}\right)\right].$$

Als Gleichung dieser dem Punkte T zugeordneten Ebene erhält man nun nach Vereinfachung

$$\left[X\left(1 - \frac{y_1}{\varrho}\right) + Y\left(\frac{x_1}{\varrho} + \frac{z_1}{T}\right) + Z\left(-\frac{y_1}{T}\right) - x_1\right]$$
$$- t\left[X\,\frac{B_1}{\varrho} - Y\left(\frac{A_1}{\varrho} + \frac{C_1}{T}\right) + Z\,\frac{B_1}{T} + A_1\right] = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Ebenenbüschels, dessen Achse S_2 bestimmt ist durch die beiden Gleichungen

$$\text{(7)}\qquad \begin{aligned} &X\left(1 - \frac{y_1}{\varrho}\right) + Y\left(\frac{x_1}{\varrho} + \frac{z_1}{T}\right) + Z\left(-\frac{y_1}{T}\right) - x_1 = 0, \\ &X\,\frac{B_1}{\varrho} - Y\left(\frac{A_1}{\varrho} + \frac{C_1}{T}\right) + Z\,\frac{B_1}{T} + A_1 = 0. \end{aligned}$$

Erstere stellt die dem Punkte P_1, letztere die dem unendlich fernen Punkte von S_1 zugeordnete Ebene dar. In dem speziellen Falle, wo S_1 die dem Punkte P_1 zugehörige Momentangerade G_1 ($\perp E_1$) ist, ist S_2 nach (3', I) die der Ebene E_1 zugehörige Momentangerade G.

Aus (7) erhält man für die Richtung der zu S_1 konjugierten Geraden S_2 die Werte

$$\text{(8)}\qquad \begin{aligned} A_2 &= \frac{k_2}{T}\left(\frac{A_1 y_1 - B_1 x_1}{\varrho} + \frac{C_1 y_1 - B_1 z_1}{T}\right) \\ B_2 &= \frac{k_2}{T}\,B_1 \\ C_2 &= k_2\left(\frac{B_1 x_1 - A_1 y_1}{\varrho^2} + \frac{B_1 z_1 - C_1 y_1}{\varrho T} + \frac{A_1}{\varrho} + \frac{C_1}{T}\right) \end{aligned}$$

und schließlich für den Neigungswinkel von S_2 gegen S_1 den Wert

$$\text{(9)}\qquad \cos\delta = k_2\left[\frac{C_1(B_1 x_1 - A_1 y_1)}{\varrho^2} + \frac{A_1(C_1 y_1 - B_1 z_1)}{T^2}\right.$$
$$\left. + \frac{A_1(A_1 y_1 - B_1 x_1) + C_1(B_1 z_1 - C_1 y_1)}{\varrho T} + \frac{A_1 C_1}{\varrho} + \frac{B_1^2 + C_1^2}{T}\right].$$

δ ist natürlich ein rechter Winkel, wenn S_1 identisch ist mit der dem Punkte P_1 zugehörigen Momentangeraden G_1, da diese zu E_1 senkrecht steht. Stellt man nun die Frage nach allen jenen durch P_1 gehenden Geraden S_1, die zu ihrer Konjugierten S_2 senkrecht sind, so bilden diese S_1 wegen des für $A_1\,B_1\,C_1$ homogen-quadratischen Ausdruckes in der eckigen Klammer von (9) einen Kegel zweiter Ordnung mit der Spitze P_1. Die Erzeugenden S_1 dieses Kegels sind, wie sich später zeigen wird, Momentangerade G_1 für ∞^1 Punkte des Raumes, welche bei der Momentanbewegung des Raumes zentripetal oder zentrifugal gegenüber dem Punkte P_1 sind. Es gibt also senkrechte Konjugierte S_2 nur zu solchen S_1, welche Momentangerade G_1 für irgend einen Punkt des Raumes sind. Von diesen senkrechten Konjugierten ist dann S_1 die Momentangerade G_1 des Zentralpunktes M einer Ebene E_1, S_2 die Momentangerade G derselben Ebene. Umgekehrt ist ebenso S_2 die Momentangerade G_1 für den Zentralpunkt N einer Ebene E_2, während S_1 die Momentangerade G dieser Ebene ist (Fig. 6).

N ist jener ausgezeichnete Punkt der Ebene E_1, dessen Momentangerade G_1 mit der Momentangeraden G der Ebene E_1 zusammenfällt. Er ist der Scheitelpunkt der oben erwähnten Parabel, deren Brennpunkt M ist. Für seine Koordinaten $x_2\,y_2\,z_2$ erhält man, wenn Ebene E_1 durch Gleichung (2) gegeben ist, aus den Bedingungen für das Zusammenfallen von G mit G_1 die Werte (s. 28)

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{p}{T\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right)} - \frac{b}{\varrho\, T\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right)\left[\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{T^2}-\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right)^2\right]} \\
(10)\qquad y_2 &= \frac{-c}{\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}} + \frac{\frac{a}{\varrho}+\frac{c}{T}}{T\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right)\left[\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{T^2}-\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right)^2\right]} \\
z_2 &= \frac{b-\frac{p}{\varrho}}{\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}} - \frac{b}{T^2\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right)\left[\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{T^2}-\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right)^2\right]}\,.
\end{aligned}
$$

Für den Abstand R der Punkte M und N erhält man den Wert

$$
R = \frac{1}{T\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{T^2}-\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right)^2}}\,.
$$

Da R von p unabhängig ist, so liegen mit Rücksicht auf Satz 4 in § 3, I die Orthogonalprojektionen der Zentralpunkte aller parallelen Ebenen auf eine dieser Ebenen in einer Geraden, welche zur Momentangeraden G der letzteren Ebene parallel ist.

Zu Beginn dieses § wurde die Frage gestellt nach den ∞^1-Momentangeraden G_1, die in einer Ebene liegen und es wurde festgestellt, daß diese Geraden eine Parabel umhüllen. Es sei nun die Frage gestellt nach jenen Momentangeraden G_1, die durch einen Punkt $P_1(x_1 y_1 z_1)$ gehen. Da die Anzahl aller Momentangeraden entsprechend der Anzahl der Punkte des Raumes ∞^3 ist, so gehen durch jeden Punkt P_1 des Raumes ∞^1 solche Gerade G_1. Die ∞^1-Punkte P_0, denen diese G_1 zugehören, bewegen sich momentan so, daß ihre Bahntangenten durch P_1 gehen, d. h. die Punkte bewegen sich zentripetal oder zentrifugal zu P_1. Es soll nun der von diesen Geraden G_1 gebildete Kegel sowie die auf diesem Kegel befindliche Kurve der Punkte P_0 bestimmt werden. P_1 hat die Koordinaten $x_1 y_1 z_1$. Ein Punkt P_0, dessen G_1 durch P_1 gehen soll, habe die Koordinaten $x_0 y_0 z_0$. Nach (1) ist dann, wenn u der Strecke $P_1 P_0$ proportional ist

$$(11)\qquad \begin{aligned} x_0 + u\left(1 - \frac{y_0}{\varrho}\right) &= x_1 \\ y_0 + u\left(\frac{x_0}{\varrho} + \frac{z_0}{T}\right) &= y_1 \\ z_0 + u\left(-\frac{y_0}{T}\right) &= z_1. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach $x_0 y_0 z_0$ ergibt als Gleichungen des Ortes aller Punkte P_0, deren momentane Bahntangenten durch P_1 gehen, die folgenden

$$(12)\qquad \begin{aligned} x_0 &= \frac{(x_1 - u)\left(1 + \frac{u^2}{T^2}\right) + y_1 \frac{u}{\varrho} - z_1 \frac{u^2}{\varrho T}}{1 + u^2\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{T^2}\right)} \\ y_0 &= \frac{-(x_1 - u)\frac{u}{\varrho} + y_1 - z_1 \frac{u}{T}}{1 + u^2\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{T^2}\right)} \\ z_0 &= \frac{-(x_1 - u)\frac{u^2}{\varrho T} + y_1 \frac{u}{T} + z_1\left(1 + \frac{u^2}{\varrho^2}\right)}{1 + u^2\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{T^2}\right)} \end{aligned}$$

Der von den durch P_1 gehenden Bahntangenten gebildete Kegel (P_1) hat, wenn XYZ seine laufenden Koordinaten bedeuten, inbezug auf ein durch P_1 parallel zum bisherigen System gelegtes Koordinatensystem die Gleichungen

$$X:Y:Z=(x_1-x_0):(y_1-y_0):(z_1-z_0).$$

Setzt man hier die Werte von (12) ein und eliminiert alsdann u, so erhält man nach längeren Vereinfachungen als Gleichung des Kegels (P_1)

$$(13)\qquad X^2\frac{y_1}{\varrho T}+Y^2\frac{1}{T}+Z^2\left(\frac{1}{T}-\frac{y_1}{\varrho T}\right)-XY\frac{1}{T}\left(\frac{x_1}{\varrho}+\frac{z_1}{T}\right)$$
$$+XZ\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{y_1}{\varrho^2}+\frac{y_1}{T^2}\right)+YZ\frac{1}{\varrho}\left(\frac{x_1}{\varrho}+\frac{z_1}{T}\right)=0.$$

Dieser Kegel ist von der zweiten Ordnung und ist, wie der Vergleich mit der eckigen Klammer von (9) direkt erkennen läßt, identisch mit dem dortselbst erwähnten Kegel jener Geraden S_1, zu denen es senkrechte Konjugierte S_2 gibt. Die auf dem Kegel (P_1) liegende Kurve (12) der zentripetalen (zentrifugalen) Punkte P_0 ist die Schnittkurve dieses Kegels mit folgender Fläche zweiter Ordnung, die man durch Elimination von u aus der ersten und dritten der Gleichungen (11) erhält, wobei $x_0 y_0 z_0$ die laufenden Koordinaten gegen das Dreikant sind:

$$\frac{x_0 y_0}{T}-\frac{y_0 z_0}{\varrho}+y_0\left(\frac{z_1}{\varrho}-\frac{x_1}{T}\right)+z_0-z_1=0.$$

Inbezug auf das für den Kegel (13) zugrundeliegende Koordinatensystem lautet die Gleichung dieser Fläche

$$(14)\qquad XY\frac{1}{T}-YZ\frac{1}{\varrho}+X\frac{y_1}{T}+Z\left(1-\frac{y_1}{\varrho}\right)=0.$$

Wir haben also

Die Bahntangenten jener Punkte P_0, welche bei einer unendlich kleinen Bewegung des Raumes zentrifugal oder zentripetal zu einem beliebigen Punkte P_1 sind, bilden stets einen Kegel zweiter Ordnung. Die Punkte P_0 selbst bilden die Schnittkurve dieses Kegels mit einem hyperbolischen Paraboloide.

Da die momentane G_1 eines Punktes P_1 stets zugleich momentane G für eine Ebene ist, so erhält man den Kegel (13) auch durch die Frage nach jenen durch P_1 gehenden Ebenen, deren momentane G durch den Punkt P_1 gehen. Um unter den ∞^2 durch P_1 gehenden

Ebenen die ∞^1 fraglichen Ebenen auszuwählen, ist folgendermaßen zu verfahren:

Die einer Ebene E_0 zugehörige Momentangerade G ist bestimmt durch die Gleichungen (2' und 3', I). Soll eine solche G durch $P_1(x_1 y_1 z_1)$ gehen, so muß außer (2') auch (3') durch die Koordinaten des Punktes P_1 erfüllt werden, also

$$a\left(1-\frac{y_1}{\varrho}\right)+b\left(\frac{x_1}{\varrho}+\frac{z_1}{T}\right)-c\frac{y_1}{T}=0. \tag{15}$$

Dies ist eine Bedingung für a, b, c, welche aussagt, daß die Normalen der fraglichen Ebenen senkrecht stehen zur festen Richtung

$$k\left(1-\frac{y_1}{\varrho}\right),\ k\left(\frac{x_1}{\varrho}+\frac{z_1}{T}\right),\ k\left(-\frac{y_1}{T}\right).$$

Nachdem aber die Ebenen durch P_1 gehen, so ist ihre Gesamtheit ein Ebenenbüschel, dessen Achse [vgl. 4, II] die dem Punkte P_1 zugehörige Momentangerade G_1 ist.

Die diesen Ebenen zugehörigen Momentangeraden G sind bestimmt durch die Gleichungen (2') und (3', I) und haben bezogen auf das durch P_1 gelegte Parallelsystem die Gleichungen

$$\begin{aligned} X&=t\left(\frac{ac}{\varrho}+\frac{1-a^2}{T}\right), \\ Y&=t\left(\frac{bc}{\varrho}-\frac{ab}{T}\right), \\ Z&=t\left(\frac{c^2-1}{\varrho}-\frac{ac}{T}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Die Elimination von a, b, c und t aus diesen Gleichungen und der Gleichung (15) führt ebenfalls zu Gleichung (13).

Es ist nun noch die Gesamtheit der den Erzeugenden S_1 des Kegels (P_1) senkrecht Konjugierten S_2 zu bestimmen. Diese S_2 liegen in der Ebene E_1, für welche P_1 momentaner Zentralpunkt ist und bilden die Tangenten der mehrfach erwähnten Parabel, welche P_1 zum Brennpunkt hat. Sie sind zugleich die Momentangeraden G für jene Ebenen E_0, welche die Punkte P_0 der Kurve (12) zu Zentralpunkten haben. Man erhält diese S_2 auch durch Bestimmung derjenigen unter allen ∞^3 Geraden G des Raumes, welche in eine Ebene E_1 fallen. Dabei findet man, daß die ∞^1 Ebenen E_0, welchen diese (eine Parabel erzeugenden) Momentangeraden G zugehören, zu den Erzeugenden einer Fläche zweiter Klasse gehören.

Man kann nun nach dem Vorausgehenden folgende Tatsachen einander gegenüberstellen:

Die durch einen Punkt P_1 gehenden G_1 erzeugen einen Kegel zweiter Ordnung und sind zugleich G für ein Ebenenbüschel, dessen Achse die dem Punkte P_1 zugehörige G_1 ist.	*Die in einer Ebene E_1 liegenden G erzeugen eine Parabel und sind zugleich G_1 für eine Punktreihe, deren Träger die der Ebene E_1 zugehörige G ist.*
Die Punkte P_0, deren G_1 durch P_1 gehen, liegen auf dem genannten Kegel und einem hyperbolischen Paraboloide.	*Die Ebenen E_0, deren G in E_1 liegen, berühren die genannte Parabel und eine gewisse Fläche zweiter Klasse.*

Ist nun P_1 der Zentralpunkt von E_1, so gilt noch:

Die den Ebenen E_0 zugehörigen Zentralpunkte sind identisch mit den Punkten P_0 des Kegels und je eine Erzeugende des Kegels ist senkrecht Konjugierte zu einer Erzeugenden der Parabel.

* * *

Alle bei der vorangehenden Betrachtung der Momentanbewegung in Betracht kommenden Größen sind von ϱ und T abhängig und ändern sich mit diesen. Es sollen nun diese Änderungen untersucht werden, wenn ϱ und T die variablen Krümmungs- und Torsionsradien einer Raumkurve C sind, d. h. wenn der Raum sich mit dem Begleitdreikante von C fortbewegt. Die Änderung der G einer Ebene und die Änderung der G_1 eines Punktes sind bereits in den zwei ersten Abschnitten behandelt.

§ 2. Die Zentralpunkte M der festen Ebene E.

Bewegt sich das Dreikant längs der Kurve

$$f\left(\frac{1}{\varrho},\ \frac{1}{T}\right)=0, \tag{17}$$

so erzeugt die Gesamtheit der Zentralpunkte M einer mit dem Dreikant starr verbundenen Ebene E in dieser Ebene eine Kurve (M). Es soll diese Kurve bestimmt werden.

E habe die Gleichung

$$ax+by+cz-p=0.$$

Der Punkt M ist bestimmt durch die Gleichungen (5). Seine Projektion auf eine durch die Ecke des Dreikantes parallel zu E

gelegte Ebene hat inbezug auf ein in dieser Ebene (nach § 2. I) gewähltes System die Koordinaten

$$(18)\qquad \begin{aligned} X &= a_1 X_0 + b_1 Y_0 + c_1 Z_0 = \frac{1}{\frac{a}{T} - \frac{c}{\varrho}} \left[p \left(\frac{a_1}{T} - \frac{c_1}{\varrho} \right) + a_2 \right] \\ Y &= a_2 X_0 + b_2 Y_0 + c_2 Z_0 = \frac{1}{\frac{a}{T} - \frac{c}{\varrho}} \left[p \left(\frac{a_2}{T} - \frac{c_2}{\varrho} \right) - a_1 \right]. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser beiden Gleichungen nach $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$ ergibt

$$(18')\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{p - a(Xa_1 + Ya_2 + pa)}{p(Xb_1 + Yb_2 + pb)} \\ \frac{1}{T} &= \frac{-c(Xa_1 + Ya_2 + pa)}{p(Xb_1 + Yb_2 + pb)}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in (17) ein, so hat man die Gleichung des geometrischen Ortes der Punkte M für die Ebene E. Man erkennt ohne weiteres:

Ist für eine Raumkurve C die Relation zwischen Krümmung und Torsion algebraisch vom n^{ten} Grade, so ist der geometrische Ort der Zentralpunkte einer jeden mit dem Begleitdreikante fest verbundenen Ebene in dieser Ebene im allgemeinen eine Kurve n^{ter} Ordnung.

Die Auflösung (18') ist ungültig, wenn p verschwindet, d. h. wenn E durch die Ecke des Dreikantes geht. In diesem Falle verschwindet nach (5) X_0, d. h. M liegt stets in der Normalebene.

Für jede durch die Ecke des Begleitdreikantes gelegte Ebene ist (M) die Schnittgerade dieser Ebene mit der Normalebene der Kurve C.[1])

Ebenso ist (18') ungültig, wenn c verschwindet, also E zur Binormalen parallel ist. In diesem Falle verschwindet nach (5) Y_0, d. h.

---

[1]) Ob alle Punkte dieser Schnittgeraden während der Bewegung Zentralpunkte werden oder nur ein Teil derselben, hängt von der besonderen Beschaffenheit der Raumkurve ab. Es kann unter Umständen sogar nur ein Punkt der Schnittgeraden Zentralpunkt werden, der dann während der ganzen Bewegung diese Rolle behält. Dies ist der Fall, wenn

$$\frac{a}{T} - \frac{c}{\varrho} = k_1,$$

wobei k_1 eine Konstante bedeutet, also bei gewissen Ebenen, die mit dem Begleitdreikante von Bertrandschen Kurven verbunden sind. Ist eine

Für jede zur Binormalen parallele Ebene ist (M) die Schnittgerade dieser Ebene mit der rektifizierenden Ebene.[1])

Verschwindet neben c auch a, sodaß E zur rektifizierenden Ebene parallel ist, dann ist (M) die unendlich ferne Gerade von E.

Stellt man die Forderung, daß in einer mit dem Dreikante verbundenen Ebene, die durch a, b, c, p gegeben sei, der geometrische Ort der Zentralpunkte die vorgegebene Kurve

$$\mathbf{F}(X, Y) = 0 \tag{19}$$

sei, so erhält man die für die Raumkurve C notwendige Relation, indem man die Werte von (18) in (19) einsetzt. Die entstehende Gleichung ist für $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$ vom gleichen Grade wie die gegebene Gleichung für X und Y.

Für die drei Projektionen der Kurve (M) auf die drei Ebenen des Begleitdreikantes erhält man nach (5) bzw. die Gleichungen

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{p - aX_0}{pY_0}, \frac{-cX_0}{pY_0}\right) = 0 \\ & f\left(\frac{b(aX_0 - p)}{p(aX_0 + cZ_0 - p)}, \frac{cbX_0}{p(aX_0 + cZ_0 - p)}\right) = 0 \\ & f\left(\frac{bY_0 + cZ_0}{pY_0}, \frac{c(bY_0 + cZ_0 - p)}{apY_0}\right) = 0\,. \end{aligned} \tag{20}$$

---

solche Kurve in der Form (6, I) gegeben, so erhält man fragliche Ebenen durch Auflösung der Gleichungen

$$c = \sigma \sin\Theta\,,\ a = \sigma\cos\Theta\,,\ k_1 = -\sigma\frac{\sin\Theta}{m}\,,$$

woraus man erhält $\frac{a}{c} = \operatorname{cotg}\Theta\,,\ k_1 = -\frac{c}{m}$.

Es ist dies das Ebenenbüschel durch die Gerade, welche durch die Ecke des Dreikantes parallel zur Binormalen der zweiten Bertrandschen Kurve gelegt ist. Für den Zentralpunkt einer solchen Ebene erhält man nach (5) $X_0 = 0$, $Y_0 = m$, $Z_0 = -\frac{bm}{c}$, d. i. ihren Schnittpunkt mit der Parallelen zur Binormalen der ersten durch die Ecke des Dreikantes der zweiten Bertrandschen.

[1]) Als Ebenen, bei denen ein Punkt dieser Geraden stets Zentralpunkt ist, erhält man das Büschel durch die Parallele II bei Bertrandschen Kurven und als Zentralpunkt den Schnittpunkt jeder Ebene des Büschels mit Parallele I.

Beispiele.

A. Die Bertrandschen Kurven. Es folgt unmittelbar:

In jeder Ebene ist der Ort der Zentralpunkte eine Gerade.[1])

Um diese Gerade (M) zu bestimmen ist in der zwischen $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$ bestehenden Gleichung

$$\frac{\sin\Theta}{\varrho}-\frac{\cos\Theta}{T}-\frac{\sin\Theta}{m}=0$$

das Ergebnis von (18′) einzusetzen, wodurch man erhält

$$X\left[ma_1(c\,\mathrm{cotg}\,\Theta-a)-p\,b_1\right]+Y\left[m\,a_2(c\,\mathrm{cotg}\,\Theta-a)-p\,b_2\right]$$
$$+p\left[a\,m(c\,\mathrm{cotg}\,\Theta-a)+m-p\,b\right]=0.$$

Es ist indes einfacher, die Gerade (M) durch ihre Projektion auf die Schmiegungsebene nach (20) zu bestimmen, sodaß sie also durch diese Projektion und die Gleichung der Ebene E bestimmt ist. Man erhält so

$$(21)\qquad \begin{aligned} &X_0(a-c\,\mathrm{cotg}\,\Theta)\,m+Y_0\,p-mp=0\\ &X_0\,a+Y_0\,b+Z_0\,c-p=0.\end{aligned}$$

Jeder Ebene E ist eine Gerade (M) zugeordnet, sodaß es im ganzen ∞^3 solche Geraden gibt. Da nun die Anzahl aller Geraden ∞^4 ist, so ist umgekehrt nicht jeder Geraden eine Ebene zugeordnet. Es sollen nun von den ∞^2 durch einen Punkt P_1 gehenden Geraden jene bestimmt werden, welchen je eine Ebene zugeordnet ist. Die Ebenen, welchen diese Geraden zugehören, müssen selbst durch $P_1(x_1y_1z_1)$ hindurchgehen. Damit nun Gerade (M) durch P_1 gehe, müssen die Gleichungen (21) durch $x_1y_1z_1$ erfüllt sein. Eliminiert man alsdann p, so bleibt eine homogene lineare Gleichung für a, b, c, nämlich

$$(22)\qquad a\,x_1y_1+b\,y_1(y_1-m)+c\,(y_1z_1-mz_1-m\,x_1\,\mathrm{cotg}\,\Theta)=0,$$

d. h. die Normalen der fraglichen Ebenen stehen alle auf einer festen Richtung senkrecht und da die Ebenen durch P_1 gehen, so bilden sie ein Büschel. Man findet leicht, daß die Achse dieses Büschels

---

[1]) Damit ist nicht gesagt, daß jeder Punkt der Geraden während der Bewegung einmal Zentralpunkt werden muß. Dagegen kann ein und derselbe Punkt wiederholt Zentralpunkt werden. Es hängt dies ganz von der speziellen Kurve C ab.

die beiden bekannten Parallelen zu den Binormalen schneidet. Bestimmt man nun nach (21) zu jeder Ebene dieses Büschels die Gerade (M), so erhält man eben diese Achse des Büschels. Diese Achse ist mithin Gerade (M) für jede durch sie gelegte Ebene. Es gibt also durch P_1 nur eine Gerade der verlangten Art, der jedoch ∞^1-Ebenen zugeordnet sind, und zwar ist dies jene durch P_1 gelegte Gerade, welche die beiden Parallelen zu den Binormalen schneidet.

Diese Eigenschaft einer beliebigen Schnittgeraden der beiden Parallelen zu den Binormalen folgt ohne weiteres aus dem Umstande, daß eine solche Gerade sich stets so bewegt, daß jeder ihrer Punkte sich senkrecht zur Geraden verschiebt. Infolgedessen ist jeder Punkt der Geraden ein momentaner Zentralpunkt für irgend eine Ebene des durch sie gelegten Büschels. Für jede feste Ebene des Büschels wandert der Zentralpunkt längs der Achse. Dagegen sind die zwei Schnittpunkte der Achse mit den beiden Parallelen zu den Binormalen konstante Zentralpunkte (s. obige Anmerkungen auf S. 46 u. 47) für jene beiden Ebenen des Büschels, welche je eine der genannten Parallelen enthalten. Auch diese Eigenschaft der beiden besonderen Ebenen des Büschels ist selbstverständlich, wenn man beachtet, daß jede durch eine der genannten Parallelen gelegte Ebene sich als Normalebene jener Raumkurve fortbewegt, welche vom Durchstoßpunkt der anderen Parallelen durch diese Ebene beschrieben wird[1]).

B. Die Kurven mit quadratischer Relation zwischen $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$.

Ist diese Relation in der Form (12, I) gegeben, so erhält man nach (20) als Projektion von (M) auf die Schmiegungsebene die Kurve

$$(23)\qquad \begin{aligned} X_0^2(Aa^2+Bc^2+Cac)+Y_0^2Fp^2-X_0Y_0p(Da+Ec)\\ -X_0p(2Aa+Cc)+Y_0Dp^2+Ap^2=0. \end{aligned}$$

Da durch eine Orthogonalprojektion sich die Gattung eines Kegelschnittes nicht ändert, außer in dem Falle, wo die Ebene des Kegelschnittes auf der Projektionsebene senkrecht steht — in diesem Falle aber ist (M) die Schnittgerade von E mit der rektifizierenden Ebene —, so kann die Frage nach Ellipse, Parabel und Hyperbel

---

[1]) Die Normalen in diesen Punkten zu den Ebenen sind die ∞^1 Cesàro-Geraden, welche abwickelbare Flächen erzeugen, und zwar hier so, daß sie mit dem festen Punkte als Tangenten an die Gratlinie fortgleiten.

durch die Diskriminante von (23) entschieden werden. *(M)* ist daher Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem

$$(24)\quad p^2\left(a^2(D^2-4AF)+2ac(DE-2CF)+c^2(E^2-4BF)\right)\lesseqgtr 0.$$

Diese Bedingung ist, abgesehen von dem bereits erledigten Falle $p=0$, unabhängig von p, dagegen abhängig von der Normalenrichtung der Ebene. Wir haben also

In jeder Ebene ist der Ort der Zentralpunkte ein Kegelschnitt. Es sind im allgemeinen alle Arten von Kegelschnitten vertreten, jedoch sind die Kegelschnitte in einem System von parallelen Ebenen stets von gleicher Art.

Die Ebenen, deren *(M)* eine Parabel ist, sind bestimmt durch

$$(25)\quad \frac{a}{c}=\frac{-(DE-2CF)\pm\sqrt{(DE-2CF)^2-(D^2-4AF)(E^2-4BF)}}{D^2-4AF}$$

Es sind dies sämtliche Ebenen, die auf einer von zwei bestimmten Ebenen senkrecht stehen. Sie sind reell, wenn

$$F\left[F(C^2-4AB)+AE^2+BD^2-ECD\right]\geqq 0.$$

Vergleicht man diese Bedingung mit der Bedingung (14, I), so folgt, wenn man von der zerfallenden Gleichung absieht, — diese führt zu Bertrandschen Kurven — als Resultat:

Reelle Ebenen, deren (M) eine eigentliche Parabel ist, existieren nur dann, wenn die den Ebenen zugehörigen G eine Hyperbel oder Parabel erzeugen.

In dem Falle, wo G eine Parabel erzeugt, d. i. bei den Cesàro-Kurven $(F=0)$, fallen die beiden Ebenen, zu welchen die Ebenen mit *(M)*-Parabeln senkrecht stehen, in eine zusammen.

Liegt schließlich jene besondere Klasse von Cesàro-Kurven vor, deren Windungsachsen relativ zum Begleitdreikante ein Plückersches Konoid erzeugen und die durch das Verschwinden von E charakterisiert sind, so ist nach Bedingung (24) in allen Ebenen, die nicht durch die Ecke gehen oder zur Tangente parallel sind, der Ort der Zentralpunkte M eine Hyperbel.

§ 3. Die Ebenen *E* des festen Zentralpunktes *M*.

Im Vorausgehenden wurde die Änderung des Zentralpunktes M einer festen Ebene E behandelt. Da E und M sich gegenseitig eindeutig zugeordnet sind, so entsteht von selbst die Frage nach jenen Ebenen, für welche im Verlaufe der Bewegung der feste Punkt $M(X_0 Y_0 Z_0)$ der Reihe nach die Rolle des Zentralpunktes übernimmt. Die Bestimmungsgrößen a, b, c, p dieser Ebenen, welche Funktionen von ϱ und T werden, sind in den Gleichungen (4) berechnet. Es gibt ∞^1 durch M gehende Ebenen, für welche M der Reihe nach Zentralpunkt wird. Die durch M gelegte Normale zu einer solchen Ebene muß dann momentane Bahntangente G_1 für den Punkt M sein. Der Normalenkegel der Ebenenschar E ist daher identisch mit dem dem Punkte M zugeordneten Kegel (G_1) in Abschnitt II. Wir haben also, wenn man von den in § 2, II besprochenen Ausnahmefällen absieht und wenn man die Ebene E, für welche M momentaner Zentralpunkt ist, als „momentane Zentralebene“ des Punktes M bezeichnet:

Der Normalenkegel der einem festen Punkte M zugeordneten Zentralebenen ist von derselben Ordnung wie die Relation zwischen Krümmung und Torsion der Raumkurve C.

Bei Bertrandschen Kurven ist dieser Normalenkegel ein ebenes Strahlenbüschel, also die Ebenenschar E ein Ebenenbüschel, sodaß man unter Berücksichtigung des Ergebnisses von § 2 für B-Kurven hat:

Die Zentralpunkte einer festen Ebene E erzeugen eine Gerade (M) in der Ebene E. Die Zentralebenen eines festen Punktes M erzeugen ein Ebenenbüschel, dessen Achse (E) durch den Punkt M geht.

Auf diese Art ist bei den B-Kurven jeder Ebene E eine Gerade (M) und ebenso jedem Punkte M eine Gerade (E) zugeordnet. Die Anzahl aller dieser Geraden (E) ist jedoch nur ∞^2, und zwar sind es die Geraden, welche die beiden bekannten Parallelen zu den Binormalen schneiden. Jeder auf (E) liegende Punkt M ist in jedem Momente für eine andere Ebene des Büschels (E) Zentralpunkt oder m. a. W. das Ebenenbüschel (E) stellt für jeden Punkt seiner Achse die Gesamtheit der Zentralebenen dar.

§ 4. Über die besondere Eigenschaft der Cesàro-Kurven.

Nach dem Ergebnisse von (13) bzw. (14) haben von den ∞^2 durch einen Punkt P_1 gehenden Geraden nur ∞^1 die Eigenschaft, bei einer Momentanbewegung Bahntangenten G_1 zu sein. Sie bilden einen Kegel zweiter Ordnung und sind zugleich momentane Schnittgeraden G für die Ebenen eines Büschels. Dieser Kegel zweiter Ordnung ist von ϱ und T abhängig, ändert sich also für den Punkt P_1, wenn die Bewegung eine fortgesetzte ist. Eine durch P_1 gelegte feste Gerade S_1, welche in einem Momente zu den Erzeugenden des Kegels (P_1) gehört, verliert daher bei der Fortbewegung im allgemeinen diese Eigenschaft und ist im nächsten Momente nicht mehr Bahntangente G_1 für einen Punkt des Raumes. Es sei nun die Frage gestellt nach einer durch P_1 gelegten Geraden S_1, die bei fester Verbindung mit dem Begleitdreikante während der Bewegung die Eigenschaft, eine G_1 für irgend einen ihrer Punkte (bzw. eine G für irgend eine durch sie gelegte Ebene) zu sein, beibehält.

Damit S_1 diese Eigenschaft während der Bewegung beibehält, ist lediglich notwendig, daß ihre nach (8) definierte Konjugierte S_2 trotz der Änderung von ϱ und T stets zu S_1 senkrecht ist. Die hinreichende und notwendige Bedingung dafür ist aber nach (9), daß ϱ und T der Raumkurve C der folgenden Gleichung genügen:

$$\begin{aligned}(26)\qquad &\frac{C_1(B_1x_1-A_1y_1)}{\varrho^2}+\frac{A_1(C_1y_1-B_1z_1)}{T^2}\\ &+\frac{A_1(A_1y_1-B_1x_1)+C_1(B_1z_1-C_1y_1)}{\varrho T}+\frac{A_1C_1}{\varrho}+\frac{B_1^2+C_1^2}{T}=0,\end{aligned}$$

d. h. die Raumkurve C muß eine Cesàro-Kurve sein. Es soll nun umgekehrt bewiesen werden, daß bei jeder Cesàro-Kurve

$$\frac{A}{\varrho^2}+\frac{B}{T^2}+\frac{C}{\varrho T}+\frac{D}{\varrho}+\frac{E}{T}=0$$

derartige Geraden S_1 existieren. Man erhält sie durch Auflösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} C_1(B_1x_1-A_1y_1)&=\sigma A\\ A_1(C_1y_1-B_1z_1)&=\sigma B\\ A_1(B_1x_1-A_1y_1)+C_1(C_1y_1-B_1z_1)&=-\sigma C\\ A_1C_1&=\sigma D\\ B_1{}^2+C_1{}^2&=\sigma E\\ A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2&=1.\end{aligned}$$

Die Auflösung ergibt, wenn man zur Abkürzung den Ausdruck

$$\frac{-C\pm\sqrt{C^2-4AB}}{2A}$$

mit h bezeichnet, die Werte

$$C_1^2 = \frac{D}{h(E+hD)}; \quad B_1^2 = \frac{hE-D}{h(E+hD)}; \quad A_1 = h \cdot C_1;$$

$$\left[\sigma = \frac{1}{E+hD}\right];$$

$x_1 y_1 z_1$ müssen den beiden Gleichungen genügen

$$B_1 x_1 - A_1 y_1 = \frac{\sigma}{C_1} \cdot A$$

$$B_1 z_1 - C_1 y_1 = -\frac{\sigma}{A_1} \cdot B.$$

Wegen der Zweiwertigkeit von h liegen also zwei bestimmte Richtungen vor. Der Ort der Punkte P_1 besteht nach den beiden letzten Gleichungen aus 8 verschiedenen Geraden, da auch noch die verschiedene Wahl der Vorzeichen von C_1 und B_1 diese Gleichungen beeinflußt. Man erkennt leicht, daß die Richtungen dieser 8 Geraden, von denen je 4 unter sich parallel sind, eben durch $A_1 B_1 C_1$ gegeben sind. Jede dieser 8 Geraden ist während der Bewegung stets Bahntangente G_1 eines auf ihr gelegenen variablen Punktes[1]. Sie schneidet daher in diesem Punkte ihre Nachbarlage und ist mithin nichts anderes als die bekannte Cesàro-Gerade, die bei Fortbewegung mit dem Dreikante eine abwickelbare Fläche erzeugt. Eine solche Gerade ist stets eine momentane G für irgend eine durch sie gelegte variable Ebene, nämlich der jeweiligen Schmiegungsebene der Gratlinie der erzeugten abwickelbaren Fläche. Ihre senkrechte Konjugierte ist die Krümmungsachse dieser Gratlinie.

§ 5. Der Punkt *N* der festen Ebene *E*, dessen Bahntangente G_1 mit der Schnittgeraden *G* der Ebene zusammenfällt.

Für die Richtung der einer Ebene

(27) $$ax + by + cz - p = 0$$

zugehörigen Momentangeraden G erhält man aus dieser Gleichung und der Gleichung (3′, I) die Werte

[1] d. h. sie gleitet nicht mit einem festen Punkte längs der Raumkurve fort, wie dies bei den ∞^1 Cesàro-Geraden der Bertrandschen Kurven der Fall ist.

$$k_1\left(\frac{ac}{\varrho}+\frac{b^2+c^2}{T}\right),\qquad k_1\left(\frac{bc}{\varrho}-\frac{ab}{T}\right)$$

$$-k_1\left(\frac{a^2+b^2}{\varrho}+\frac{ac}{T}\right).$$

Die Bedingungen dafür, daß für einen Punkt $N(x_2 y_2 z_2)$ die Momentangerade G_1 mit G zusammenfällt, ist nach (4, II)

$$\begin{aligned}
&1-\frac{y_2}{\varrho}=\lambda\left(\frac{ac}{\varrho}+\frac{b^2+c^2}{T}\right)\\
(28)\qquad &\frac{x_2}{\varrho}+\frac{z_2}{T}=\lambda\left(\frac{bc}{\varrho}-\frac{ab}{T}\right)\\
&\frac{y_2}{T}=\lambda\left(\frac{a^2+b^2}{\varrho}+\frac{ac}{T}\right).
\end{aligned}$$

Da $x_2 y_2 z_2$ auch der Gleichung (27) genügen, so kann man diese Koordinaten als Funktionen von ϱ und T berechnen. Das Resultat dieser Berechnung findet sich in (10), welche Gleichungen bei veränderlichem ϱ und T den Ort der Punkte N für die feste Ebene (27) bestimmen, und zwar als Funktion der Grundvariabeln der Raumkurve C, längs welcher das Dreikant gleitet. Kennt man für C nur die Relation zwischen ϱ und T, so ist durch diese und die Gleichungen (10) die ebene Kurve (N) ebenfalls bestimmt. Ist

$$(29)\qquad f\left(\frac{1}{\varrho},\ \frac{1}{T}\right)=0$$

nicht auflösbar, so löst man Gleichungen (10) oder statt dessen (28) nach $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$ auf und setzt diese Werte in (29) ein. Man erhält

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varrho}=\frac{a\left[2acx_2+z_2-cp-\sqrt{(z_2-cp)^2-4abx_2y_2}\right]}{bx_2z_2+ay_2(z_2-cp)+(bx_2-ay_2)\sqrt{(z_2-cp)^2-4abx_2y_2}}\\
(30)\qquad &\frac{1}{T}=\frac{2ax_2(c^2-1)}{bx_2z_2+ay_2(z_2-cp)+(bx_2-ay_2)\sqrt{(z_2-cp)^2-4abx_2y_2}}
\end{aligned}$$

Gleichung (29) stellt dann die Projektion der fraglichen Kurve auf jede Ebene des Koordinatensystems dar. Um z. B. die Projektion auf die xy Ebene zu haben, ist nur nötig, auf Grund der Gleichung (27) die Größe z_2 zu ersetzen durch $\frac{1}{c}(p-ax_2-by_2)$.

Die Projektion der Kurve (N) auf die durch die Ecke des Dreikantes parallel zu E gelegte Ebene hat inbezug auf ein nach § 2, I gewähltes Koordinatensystem XY die Gleichungen

$$(31)\quad \begin{aligned} X &= a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 \\ &= \frac{a_2 + p\left(\frac{a_1}{T} - \frac{c_1}{\varrho}\right)}{\frac{a}{T} - \frac{c}{\varrho}} + \frac{\frac{c_2}{\varrho} - \frac{a_2}{T}}{T\left(\frac{a}{T} - \frac{c}{\varrho}\right)\left[\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{T^2} - \left(\frac{a}{T} - \frac{c}{\varrho}\right)^2\right]} \\ Y &= a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 \\ &= \frac{-a_1 + p\left(\frac{a_2}{T} - \frac{c_2}{\varrho}\right)}{\frac{a}{T} - \frac{c}{\varrho}} - \frac{\frac{c_1}{\varrho} - \frac{a_1}{T}}{T\left(\frac{a}{T} - \frac{c}{\varrho}\right)\left[\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{T^2} - \left(\frac{a}{T} - \frac{c}{\varrho}\right)^2\right]} \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$ erhält man dadurch, daß man in (30) an Stelle von $x_2 y_2 z_2$ folgende Werte setzt

$$\begin{aligned} x_2 &= a_1 X + a_2 Y + ap \\ y_2 &= b_1 X + b_2 Y + bp \\ z_2 &= c_1 X + c_2 Y + cp. \end{aligned}$$

Setzt man alsdann die Werte von $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$ in (29) ein, so hat man die Gleichung der Kurve *(N)* inbezug auf ein in ihrer Ebene befindliches Koordinatensystem. *(N)* wird bei Bertrandschen Kurven bereits eine Kurve dritter Ordnung.

Verlangt man umgekehrt, daß *(N)* eine gegebene Kurve

$$(32)\qquad \mathbf{F}(X,\ Y) = 0$$

sei, so erhält man die Relation, welcher Krümmung und Torsion der Raumkurve C in diesem Falle genügen müssen, indem man die Werte von (31) in (32) einsetzt.

Die Auflösung (30) ist ungültig, wenn a verschwindet, d. h. für alle Ebenen, die zur Tangente der Raumkurve C parallel sind. Man erhält in diesem Falle vielmehr die Werte

$$(33)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{(y - bp)^2}{y\left[c^2 x^2 + (y - bp)^2\right]} \\ \frac{1}{T} &= \frac{bcx(y - bp)}{y\left[c^2 x^2 + (y - bp)^2\right]}, \end{aligned}$$

die nach Einsetzen in (29) die Projektion von *(N)* auf die Schmiegungsebene ergeben.

§ 6. Die Einhüllende *(MN)* der Verbindungsgeraden *MN*.

Die Gleichung dieser Geraden erhält inbezug auf das in der Ebene E befindliche Koordinatensystem nach Vereinfachung die Form, deren Ableitung unter Benützung von (5) und (10) erfolgt:

$$\left[X\left(\frac{a_1}{T}-\frac{c_1}{\varrho}\right)+Y\left(\frac{a_2}{T}-\frac{c_2}{\varrho}\right)\right]\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right) \tag{34}$$
$$+\frac{b}{\varrho}-p\left[\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{T^2}-\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right)^2\right]=0.$$

Bezeichnen u und v die Linienkoordinaten dieser Geraden, so ist

$$(35)\quad \begin{aligned} u&=\frac{\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right)\left(\frac{a_1}{T}-\frac{c_1}{\varrho}\right)}{\frac{b}{\varrho}-p\left[\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{T^2}-\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right)^2\right]}\\ v&=\frac{\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right)\left(\frac{a_2}{T}-\frac{c_2}{\varrho}\right)}{\frac{b}{\varrho}-p\left[\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{T^2}-\left(\frac{a}{T}-\frac{c}{\varrho}\right)^2\right]}\end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$ ergibt

$$(36)\quad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho}&=\frac{b\,(u a_2-v a_1)^2}{p\left[(u^2+v^2)\,b^2+2\,(u b_1+v b_2)^2\right]-b\,(u b_1+v b_2)}\\ \frac{1}{T}&=\frac{b\,(u a_2-v a_1)\,(u c_2-v c_1)}{p\left[(u^2+v^2)\,b^2+2\,(u b_1+v b_2)^2\right]-b\,(u b_1+v b_2)}\end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in die gegebene Relation (29) ein, so hat man die Gleichung der Einhüllenden *(MN)* in Linienkoordinaten. Man erkennt:

Ist die Relation zwischen Krümmung und Torsion der Raumkurve eine allgemeine Gleichung n^{ten} Grades, so erzeugt während der Bewegung des Dreikantes die Gesamtheit aller Geraden MN in jeder Ebene eine Kurve von der $2n^{ten}$ Klasse.

Die Auflösung (36) ist unrichtig, wenn b verschwindet. In diesem Falle erhält man als Beziehung zwischen u und v lediglich

$$\frac{u}{v}=-\frac{b_2}{b_1},$$

d. h. die Geraden MN bilden ein Parallelsystem senkrecht zum Parallelsystem der Geradenschar G in der Ebene E (vgl. § 3, I).

Enthält die Gleichung (29) kein konstantes Glied, sodaß sie also auch durch das Wertepaar $\frac{1}{\varrho}=0$, $\frac{1}{T}=0$ erfüllt wird, dann enthält die Raumkurve C eine (oder eine endliche Anzahl) reelle oder imaginäre Stelle, an welcher nur eine Parallelverschiebung des Raumes stattfindet. Für solche Stellen, die von vorne herein bei unseren Untersuchungen auszuschließen sind, sind nach (35) u und v unbestimmt und die Auflösung (36) hinfällig. Die Gleichung der Einhüllenden von MN, die man durch Einsetzen der Werte (36) in (29) erhält, zerfällt in diesem Falle in eine Kurve von der Klasse $2n-1$ und den auszuschließenden unendlich fernen Punkt[1])

$$u a_2 - v a_1 = 0\,.$$

Verlangt man umgekehrt, daß die Gesamtheit der Geraden MN einer Ebene die vorgegebene Kurve

$$\mathbf{F}(u,\ v) = 0 \tag{37}$$

erzeuge, so erhält man die zu diesem Zwecke benötigte Relation für Krümmung und Torsion der Raumkurve C, indem man (35) in (37) einsetzt.

Beispiele.

A. Bestimmung der Einhüllenden von MN bei Bertrandschen Kurven.

Man erhält durch Einsetzen von (36) in die bekannte lineare Relation zwischen Krümmung und Torsion die Gleichung

$$\begin{aligned}
(38)\qquad & u^2\left[mba_2(a_2-c_2\cot\Theta)-p(b^2+2b_1^{\,2})\right] \\
& +v^2\left[mba_1(a_1-c_1\cot\Theta)-p(b^2+2b_2^{\,2})\right] \\
& -uv\left[mba_1(a_2-c_2\cot\Theta)+mba_2(a_1-c_1\cot\Theta)+4pb_1b_2\right] \\
& +ubb_1+vbb_2=0.
\end{aligned}$$

Sieht man also von den zur Hauptnormalen parallelen Ebenen ab, so hat man

In jeder mit dem Begleitdreikante einer Bertrandschen Kurve fest verbundenen Ebene erzeugen die Geraden MN eine Parabel.[2])

---

[1]) Fehlen der Gleichung (29) weitere Glieder der niedrigsten Ordnung, so erfährt der Grad der Einhüllenden eine weitere Reduzierung.

[2]) Ausnahme siehe bei Beispiel B!

In Punktkoordinaten lautet die Gleichung dieser Parabel (vgl. § 6, I)

$$b_2^2 X^2 - 2 b_1 b_2 XY + b_1^2 Y^2 + 2mb\left(\cot\Theta\,(ca_1 + ac_1) - 2aa_1\right) X$$
$$+ 2mb\left(\cot\Theta\,(ca_2 + ac_2) - 2aa_2\right) Y$$
$$+ m^2 b^2 \cot^2\Theta + 4p^2 b^2 - 8p^2 + 4mpb\left(1 + a(a - c\cdot\cot\Theta)\right) = 0.$$

Man erkennt daraus, daß weder die Achsenlage der Parabel noch ihr Parameter von p abhängig ist. Für letzteren erhält man den Wert

$$\frac{2mab^2(c\cot\Theta - a)}{\left(\sqrt{1-b^2}\right)^3}.$$

Wir haben also:

Die einem System von parallelen Ebenen zugehörigen Parabeln sind kongruent und so gelegen, daß bei ihrer Projektion auf eine dieser Ebenen sämtliche Parabelachsen in eine Gerade fallen.

B. Es soll jene Raumkurve C bestimmt werden, bei welcher in der mit dem Begleitdreikante verbundenen Ebene (a, b, c, p) die Geraden MN ein Strahlenbüschel (MN) bilden.

Der Punkt, in welchem sich die Gesamtheit der Geraden MN schneiden soll, habe inbezug auf das in der Ebene selbst gewählte Koordinatensystem die Koordinaten P und Q. Seine Gleichung in Linienkoordinaten lautet dann

$$Pu + Qv + 1 = 0.$$

Durch Einsetzen der Werte von (35) in diese Gleichung erhält man als Relation zwischen Krümmung und Torsion der fraglichen Raumkurve:

$$(39)\quad \frac{1}{\varrho^2}\left(Pcc_1 + Qcc_2 - p(1-c^2)\right) + \frac{1}{T^2}\left(Paa_1 + Qaa_2 - p(1-a^2)\right)$$
$$- \frac{1}{\varrho T}\left(P(ac_1 + ca_1) + Q(ac_2 + ca_2) + 2pac\right) + \frac{b}{\varrho} = 0.$$

Damit also eine Ebene existiert, deren Geraden MN ein Strahlenbüschel bilden, muß zwischen $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$ der Raumkurve eine Gleichung bestehen von der Form

$$(40)\quad \frac{A}{\varrho^2} + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{\varrho T} + \frac{D}{\varrho} = 0.$$

Zu diesen Kurven, welche uns auch im nächsten Abschnitte beschäftigen werden, gelangte Demoulin durch die Forderung, daß ihre Windungsachsen relativ zum Begleitdreikant ein Plückersches Konoid erzeugen[1]). Es soll nun bewiesen werden, daß bei jeder Kurve (40) auch wirklich eine Ebene der verlangten Art existiert. Man erhält bei gegebener Gleichung (40) diese Ebene und das Zentrum des Strahlenbüschels durch Auflösung der Gleichungen

$$Pcc_1 + Qcc_2 - p(1-c^2) = b\frac{A}{D}$$

$$Paa_1 + Qaa_2 - p(1-a^2) = b\frac{B}{D}$$

$$P(ac_1+ca_1) + Q(ac_2+ca_2) + 2pac = -b\frac{C}{D}$$

$$a^2+b^2+c^2 = 1.$$

Man erhält daraus

$$P = \frac{1}{D(1-b^2)}\Big[A(ac_2+ca_2-a^2b_1) - B(ac_2+ca_2+c^2b_1) \\ - C(aa_2-cc_2+acb_1)\Big]$$

$$(41)\quad Q = \frac{1}{D(1-b^2)}\Big[A(-ac_1-ca_1-a^2b_2) + B(ac_1+ca_1-c^2b_2) \\ - C(-aa_1+cc_1+acb_2)\Big]$$

$$p = \frac{b}{D(1-b^2)}\Big[-Aa^2 - Bc^2 - Cac\Big].$$

Diese Gleichungen sagen aus, daß es nicht nur eine, sondern ∞^2 Ebenen der verlangten Art gibt, da zwei der Größen a, b, c willkürlich bleiben. Die letzte Gleichung stellt den Abstand jeder solchen Ebene von der Ecke des Dreikants dar und ist mithin allein hinreichend zur Definierung der zweifach unendlichen Ebenenschar. Es seien nun die Koordinaten des einer jeden Ebene zugehörigen Punktes (MN) bezogen auf das Begleitdreikant berechnet. Bezeichnet man sie mit X, Y, Z, so ist nach Vereinfachung

$$X = Pa_1 + Qa_2 + pa = \frac{b}{D(1-b^2)}\Big(-Aa+Ba-Cc\Big)$$

$$Y = Pb_1 + Qb_2 + pb = \frac{1}{D(1-b^2)}\Big(-Ac^2 - Ba^2 + Cac\Big)$$

$$Z = Pc_1 + Qc_2 + pc = \frac{b}{D(1-b^2)}\Big(Ac - Bc - Ca\Big).$$

[1]) Bull. de la soc. math. Paris 1893, p. 9—13.

Löst man diese Gleichungen nach $\boldsymbol{a}$, b, c auf, so erhält man

$$
(42)\quad
\begin{aligned}
a^2 &= \frac{DY^2[CZ+(A-B)X]^2}{(BX^2+AZ^2-CXZ)\{D(BX^2+AZ^2-CXZ)-Y[C^2+(A-B)^2]\}}\\
b^2 &= \frac{D(BX^2+AZ^2-CXZ)}{D(BX^2+AZ^2-CXZ)-Y[C^2+(A-B)^2]}\\
c^2 &= \frac{DY^2[(A-B)Z-CX]^2}{(BX^2+AZ^2-CXZ)\{D(BX^2+AZ^2-CXZ)-Y[C^2+(A-B)^2]\}}
\end{aligned}
$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung

$$a^2+b^2+c^2=1$$

ein, so hat man als Ort der Punkte, die in den ∞^2 Ebenen die Strahlenbüschelzentren bilden, die folgende Fläche

$$(43)\qquad DY(X^2+Z^2)+BX^2+AZ^2-CXZ=0.$$

Dies ist aber nach (24, IV) gerade das Plückersche Konoid der Windungsachsen.

Wir haben also:

Bei den Raumkurven, deren Windungsachsen relativ zum Begleitdreikante ein Plückersches Konoid bilden, existieren stets ∞^2 Ebenen, in denen die Geraden MN je ein Strahlenbüschel erzeugen. Der Ort der Zentren dieser Strahlenbüschel ist eben das Plückersche Konoid der Windungsachsen. Die genannten Kurven sind zudem die einzigen, bei denen Ebenen der fraglichen Art existieren.

Die Gleichungen (42) ordnen alsdann jedem Punkte des Plückerschen Konoides seine Ebene zu.

Da die Bertrandschen Kurven ebenfalls zur Klasse (40) gehören $\left(A=1,\ B=0,\ C=-\cot\Theta,\ D=-\frac{1}{m}\right)$ — das Plückersche Konoid hat lediglich eine spezielle Lage zum Dreikante —, so sind bei diesen Kurven nicht allen Ebenen eigentliche Parabeln zugeordnet[1]). Es sind vielmehr auch hier den Ebenen (s. 41)

$$(44)\qquad p=\frac{bma}{1-b^2}\left(a-c\cot\Theta\right)$$

Strahlenbüschel zugeordnet. Untersucht man die Bedingung, unter welcher (38) in zwei Linearfaktoren zerfällt, so findet man in der Tat die Gleichung (44). Der eine dieser Faktoren bestimmt das dem

---

[1]) Beispiel A, S. 57.

Plückerschen Konoide angehörige Zentrum des Strahlenbüschels, während der andere Faktor einen unendlich fernen Punkt darstellt.

Fig. 7 veranschaulicht die verschiedenen geometrischen Örter in einer derartigen Ebene bei Bertrandschen Kurven. Die aufeinanderfolgenden Schnittgeraden G erzeugen das Strahlenbüschel (G) nach I. Die Zentralpunkte M erzeugen die Gerade (M) nach III, § 2. Die Geraden MN erzeugen nach obigem das Strahlenbüschel (MN). Da aber MN stets senkrecht zur entsprechenden Geraden G ist, so ist hier der Ort der Punkte N ein Kreis. Außerdem erkennt man aus der Figur, daß die Punktreihe (M) und das Strahlenbüschel (G) in einer solchen Ebene projektiv aufeinander bezogen sind.

Bei den übrigen mit dem Begleitdreikante von Bertrandschen Kurven verbundenen Ebenen tritt an Stelle des Punktes (MN) eine Parabel, während Punktreihe (M) und Strahlenbüschel (G) ihren Charakter nicht ändern. An Stelle des Kreises der Punkte N tritt dann eine Kurve dritter Ordnung.

Bei den Kurven (40) bleibt in den durch (42) und (43) bestimmten Ebenen das Strahlenbüschel (MN) erhalten, während an Stelle des Punktes (G) eine Parabel (nach 15, I) und an Stelle der Geraden (M) eine Hyperbel (nach 24, III) tritt.

Um nun bei den Kurven (40) auch in den übrigen Ebenen die Einhüllende von MN zu bestimmen, hat man ebenso wie in Beispiel A die Werte von (36) in (40) einzusetzen, wodurch man erhält

$$\begin{aligned}
&u^2\left[b(Aa_2^2+Bc_2^2+Ca_2c_2)+Dp(b^2+2b_1^2)\right]\\
&+v^2\left[b(Aa_1^2+Bc_1^2+Ca_1c_1)+Dp(b^2+2b_2^2)\right]\\
&-uv\left[b\left(2Aa_1a_2+2Bc_1c_2+C(a_1c_2+c_1a_2)\right)-4Dpb_1b_2\right]\\
&-uDbb_1-vDbb_2=0.
\end{aligned}$$

Dies ist aber eine Parabel (vgl. 38 in Beispiel A). Das in Beispiel A für Bertrandsche Kurven erhaltene Resultat gilt daher für alle Kurven (40), sodaß wir haben:

Bei allen Kurven, deren Windungsachsen relativ zum Begleitdreikante ein Plückersches Konoid erzeugen, existieren ∞^2 Ebenen, in denen die Geraden MN ein Strahlenbüschel bilden. In allen anderen Ebenen erzeugen diese Geraden eine Parabel.

Auf die gegenseitigen Beziehungen der verschiedenen einer Ebene zugehörigen Kurven sei hier nicht weiter eingegangen.