II. Abschnitt.

In diesem Abschnitte sei das dualistisch entsprechende Problem behandelt.

Ein Punkt P, der mit dem Begleitdreikante der Raumkurve C starr verbunden ist, nimmt während der Fortbewegung des Dreikantes ∞^1 verschiedene Lagen ein. Die Verbindungslinie G_1 des Punktes P mit seiner jeweiligen Nachbarlage (d. i. die Tangente an die von P beschriebene Kurve) ändert ihre Lage auch gegenüber dem Dreikante und beschreibt relativ zu diesem einen Kegel (G_1) mit der Spitze P. Jedem Punkte des mit dem Dreikante verbundenen Raumes ist ein solcher Kegel (G_1) zugeordnet. Denkt man sich zu einem Punkte P den zugeordneten Kegel (G_1) konstruiert, so übernehmen während der Fortbewegung des Punktes P die einzelnen Erzeugenden G_1 des Kegels der Reihe nach die Rolle als Tangenten an die von P beschriebene Raumkurve oder m. a. W. die Erzeugenden des Kegels (G_1) weisen der Reihe nach dem Punkte P seine jeweilige momentane Bewegungsrichtung zu. Der Kegel (G_1) sei Gegenstand der nachfolgenden Untersuchung.

§ 1. Die Gleichungen der Verbindungsgeraden G_1.

Der Punkt P habe relativ zum Begleitdreikante die Koordinaten $x_0 y_0 z_0$. Seine Koordinaten inbezug auf das der Raumkurve C zugrunde liegende Koordinatensystem sind dann, wenn x, y, z die Koordinaten des jeweiligen Raumkurvenpunktes bezeichnen

$$(1)\qquad \begin{aligned} X &= x + x_0\alpha + y_0\xi + z_0\lambda \\ Y &= y + x_0\beta + y_0\eta + z_0\mu \\ Z &= z + x_0\gamma + y_0\zeta + z_0\nu. \end{aligned}$$

Durch Differentiation nach der Bogenlänge s der Raumkurve C erhält man hieraus

$$(2) \qquad \frac{dX}{ds} = \alpha\left(1 - \frac{y_0}{\varrho}\right) + \xi\left(\frac{x_0}{\varrho} + \frac{z_0}{T}\right) - \lambda\frac{y_0}{T}$$

nebst entsprechenden Werten für $\frac{dY}{ds}$ und $\frac{dZ}{ds}$.

Für das Bogenelement der von P beschriebenen Raumkurve (1) erhält man daher

$$dS^2 = H^2 ds^2,$$

wobei
$$H = \sqrt{\left(1 - \frac{y_0}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{x_0}{\varrho} + \frac{z_0}{T}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{T}\right)^2}$$

Die Winkel der Tangente G_1 an die von P beschriebene Kurve gegenüber dem Grundsystem seien $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Es ist dann

$$(3) \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{H}\left(\alpha\left(1 - \frac{y_0}{\varrho}\right) + \xi\left(\frac{x_0}{\varrho} + \frac{z_0}{T}\right) - \lambda\frac{y_0}{T}\right) \\ \beta_1 &= \frac{1}{H}\left(\beta\left(1 - \frac{y_0}{\varrho}\right) + \eta\left(\frac{x_0}{\varrho} + \frac{z_0}{T}\right) - \mu\frac{y_0}{T}\right) \\ \gamma_1 &= \frac{1}{H}\left(\gamma\left(1 - \frac{y_0}{\varrho}\right) + \zeta\left(\frac{x_0}{\varrho} + \frac{z_0}{T}\right) - \nu\frac{y_0}{T}\right). \end{aligned}$$

Für die Winkel $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ dieser Tangente G_1 (= Verbindungsgeraden des Punktes P mit seiner Nachbarlage) gegenüber dem Dreikante folgt sodann

$$(4) \qquad \begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = \frac{1}{H}\left(1 - \frac{y_0}{\varrho}\right) \\ \beta_0 &= \xi\alpha_1 + \eta\beta_1 + \zeta\gamma_1 = \frac{1}{H}\left(\frac{x_0}{\varrho} + \frac{z_0}{T}\right) \\ \gamma_0 &= \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 = \frac{1}{H}\left(-\frac{y_0}{T}\right). \end{aligned}$$

Die Richtung der Geraden G_1 ist also eine Funktion von s, d. h. die Gerade beschreibt einen Kegel (G_1).

§ 2. Die Gleichung des Kegels (G_1).

Bezeichnet t eine von P aus auf G_1 abgetragene Strecke, so lauten die Gleichungen des Kegels (G_1) bezogen auf das Dreikant folgendermaßen

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
x &= x_0 + \frac{t}{H}\left(1 - \frac{y_0}{\varrho}\right)\\
y &= y_0 + \frac{t}{H}\left(\frac{x_0}{\varrho} + \frac{z_0}{T}\right)\\
z &= z_0 + \frac{t}{H}\left(-\frac{y_0}{T}\right)
\end{aligned}
$$

und bezogen auf ein durch P gelegtes Parallelkoordinatensystem

$$
(5')\qquad
\begin{aligned}
X &= \frac{t}{H}\left(1 - \frac{y_0}{\varrho}\right)\\
Y &= \frac{t}{H}\left(\frac{x_0}{\varrho} + \frac{z_0}{T}\right)\\
Z &= \frac{t}{H}\left(-\frac{y_0}{T}\right).
\end{aligned}
$$

Sind ϱ und T als Funktionen von s gegeben, so sind s und t die beiden unabhängigen Veränderlichen in diesen Gleichungen. Kennt man aber die für die Raumkurve C bestehende Relation

$$
(6)\qquad f\left(\frac{1}{\varrho},\ \frac{1}{T}\right) = 0,
$$

so genügt auch diese zur Bestimmung des Kegels, da mit Rücksicht auf diese Relation die Gleichungen (5′) die Größe t und eine der Größen ϱ und T als unabhängige Veränderliche enthalten.

Um nun die Gleichung des Kegels (G_1) in rechtwinkligen Koordinaten zu erhalten, sind die Gleichungen (5′) nach $\frac{t}{H}, \frac{1}{\varrho}, \frac{1}{T}$ aufzulösen und die beiden letzteren Werte in (6) einzusetzen. Man erhält

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varrho} = \frac{Yy_0 + Zz_0}{y_0(Xx_0 + Yy_0 + Zz_0)},\\
&\frac{1}{T} = -\frac{Zx_0}{y_0(Xx_0 + Yy_0 + Zz_0)},\quad \frac{t}{H} = \frac{Xx_0 + Yy_0 + Zz_0}{x_0\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},
\end{aligned}
$$

und mithin als Gleichung des dem Punkte $P(x_0 y_0 z_0)$ zugeordneten Kegels (G_1) inbezug auf das durch P parallel zum Dreikant gelegte System

$$
(8)\qquad f\left(\frac{Yy_0 + Zz_0}{y_0(Xx_0 + Yy_0 + Zz_0)},\ \frac{-Zx_0}{y_0(Xx_0 + Yy_0 + Zz_0)}\right) = 0.
$$

Man erkennt daraus:

Ist für die Kurve C die Beziehung zwischen Krümmung und Torsion algebraisch vom n^{ten} Grade, so ist auch der einem jeden Punkte zugeordnete Kegel (G_1) von der Ordnung n.

Speziell folgt:

Die den Punkten des mit dem Begleitdreikante von Bertrandschen Kurven verbundenen Raumes zugeordneten Kegel (G_1) arten in Ebenen aus.

Für $y_0 = 0$, also für die Punkte der rektifizierenden Ebene, ist die Auflösung (7) ungültig. In diesem Falle ist nach (5) $z = z_0$, d. h.

Die den Punkten der rektifizierenden Ebene zugeordneten Kegel (G_1) arten bei jeder Raumkurve in Ebenen aus, welche zur Schmiegungsebene parallel sind[1]*.*

Wenn ϱ und T konstant sind, also bei gemeinen Schraubenlinien, dann artet nach (4) der Kegel (G_1) in eine Gerade aus. Jedem Punkte ist eine bestimmte Gerade durch die Gleichungen (4) zugeordnet. Diese Gerade bewegt sich dann in der Weise fort, daß sie stets Tangente ist an die von ihrem festen Punkte P beschriebene Kurve.

Es sei nun die Frage beantwortet, wann überhaupt Kegel (G_1) in eine Gerade ausartet. Hiezu ist nur notwendig, daß $\alpha_0\ \beta_0\ \gamma_0$ konstant sind. Die Auflösung der Gleichungen (4) ergibt dann

$$(9)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{y_0\beta_0 + z_0\gamma_0}{y_0(x_0\alpha_0 + y_0\beta_0 + z_0\gamma_0)} \\ \frac{1}{T} &= \frac{-x_0\gamma_0}{y_0(x_0\alpha_0 + y_0\beta_0 + z_0\gamma_0)}. \end{aligned}$$

Es müssen also Krümmung und Torsion der Kurve C konstant sein, d. h. C muß eine gemeine Schraubenlinie sein. Gleichungen (9) bestimmen dann jene gemeine Schraubenlinie, längs der sich das Dreikant fortbewegen muß, damit eben die durch $(x_0\, y_0\, z_0\, \alpha_0\, \beta_0\, \gamma_0)$ bestimmte Gerade G_1 sich als Tangente der von $P(x_0\, y_0\, z_0)$ beschriebenen Kurve fortbewegt.

Die Auflösung (9) ist ungültig für $y_0 = 0$. In diesem Falle folgt aus (4) zunächst $\gamma_0 = 0$, sodann lediglich die Relation

$$\frac{x_0}{\varrho} + \frac{z_0}{T} = \frac{\beta_0}{\alpha_0},$$

[1]) Ebenso ist die Auflösung (7) ungültig für $x_0 = 0$, d. h. für die Punkte der Normalebene. In diesem Falle erhält man aus (5) $Yy_0 + Zz_0 = 0$, d. h. (G_1) ist ein Strahlenbüschel in der Ebene, welche in P senkrecht zur Verbindungslinie von P mit der Ecke des Dreikantes errichtet ist (vgl. Progr. 1913, S. 6).

d. h. C muß eine Bertrandsche Kurve sein. Dieselbe hat dann, wie man unmittelbar erhält, die Konstanten (s. § 4, Abschnitt I)

$$cotg\,\Theta = -\frac{z_0}{x_0},\quad m = \frac{x_0\,\alpha_0}{\beta_0}.$$

Ist umgekehrt eine Bertrandsche Kurve gegeben durch die Relation

$$\frac{\sin\Theta}{\varrho} - \frac{\cos\Theta}{T} = \frac{\sin\Theta}{m}, \tag{10}$$

so erhält man für die Punkte der rektifizierenden Ebene, deren Kegel in eine Gerade ausartet

$$\frac{z_0}{x_0} = -\,cotg\,\Theta$$

$$\alpha_0 = \frac{m}{\sqrt{m^2 + x_0^2}},\quad \beta_0 = \frac{x_0}{\sqrt{m^2 + x_0^2}},\quad \gamma_0 = 0.$$

Es existieren daher nicht für alle Punkte der rektifizierenden Ebene von Bertrandschen Kurven derartige in eine Gerade G_1 ausartende Kegel, sondern nur für die Punkte der durch die Ecke des Dreikantes gelegten Parallelen zur Binormalen der zugehörigen zweiten Bertrandschen Kurve. Die Richtung einer Geraden G_1 ist dann bestimmt durch die Winkel α_0, β_0, γ_0. Die Gesamtheit dieser Geraden bildet, wie man unmittelbar erhält, ein hyperbolisches Paraboloid.

Die Auflösung (9) ist schließlich auch ungültig für den Fall

$$x_0\alpha_0 + y_0\beta_0 + z_0\gamma_0 = 0, \tag{11}$$

d. h. wenn Gerade G_1 auf der Verbindungslinie des Punktes P mit der Ecke des Dreikantes senkrecht stehen würde. Die Auflösung von (4) lautet in diesem Falle

$$x_0 = 0,\quad y_0\beta_0 + z_0\gamma_0 = 0,$$

$$\frac{z_0\gamma_0}{\varrho} - \frac{z_0\alpha_0}{T} + \beta_0 = 0,$$

sodaß C wiederum eine Bertrandsche Kurve sein muß und zwar mit den Konstanten

$$cotg\,\Theta = \frac{\alpha_0}{\gamma_0},\quad m = y_0.$$

Ist die Bertrandsche Kurve (10) vorgegeben, so erhält man als Punkte P mit je zugehöriger Geraden G_1

$$x_0 = 0,\ y_0 = m,\ z_0 \text{ beliebig;}$$

$$\alpha_0 = \frac{m\cos\Theta}{\sqrt{m^2 + z_0^2\sin^2\Theta}},\quad \beta_0 = \frac{-z_0\sin\Theta}{\sqrt{m^2 + z_0^2\sin^2\Theta}},\quad \gamma_0 = \frac{m\sin\Theta}{\sqrt{m^2 + z_0^2\sin^2\Theta}}.$$

Es sind dies die Punkte der durch die Ecke des Begleitdreikantes der zu (10) gehörigen zweiten Bertrandschen Kurve parallel zur Binormalen der ersten B-Kurve gelegten Geraden. Die den einzelnen Punkten P zugeordneten Geraden G_1 bilden wiederum ein hyperbolisches Paraboloid, dessen Erzeugenden zur Schmiegungsebene der zweiten B-Kurve parallel sind.

Schließlich sei bemerkt, daß die Lösung $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ von (11) zur Folge hat $\beta_0 = \gamma_0 = 0,\ \alpha_0 = 1$, also die Tangente von Kurve C, die sich selbstverständlich in der gewünschten Weise fortbewegt.

Die Frage nach Punkten, deren zugeordneter Kegel (G_1) in eine Gerade ausartet, ist daher folgendermaßen zu beantworten:

Bei gemeinen Schraubenlinien und nur bei diesen ist jedem Punkte des bewegten Raumes eine solche Gerade zugeordnet. Bei Bertrandschen Kurven sind allen Punkten der beiden durch die Ecken der beiden Begleitdreikante je zur Binormalen der anderen Kurve parallelen Geraden solche Gerade zugeordnet. Bei allen übrigen Raumkurven existieren solche Punkte abgesehen von der Ecke des Dreikantes nicht.

Gleichung (8) bestimmt den dem Punkte $P(x_0 y_0 z_0)$ zugeordneten Kegel, wenn Gleichung (6) vorgegeben ist. Verlangt man umgekehrt, daß der dem Punkte P (außerhalb der rektifizierenden Ebene) zugeordnete Kegel die vorgegebene Gleichung

$$\mathbf{F}\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = 0 \tag{12}$$

inbezug auf das durch P parallel zum Dreikant gelegte System habe, so erhält man die Relation, welcher in diesem Falle Krümmung und Torsion der Raumkurve C genügen müssen, indem man die Gleichungen (7) nach $\frac{X}{Z}$ und $\frac{Y}{Z}$ auflöst und die erhaltenen Werte in (12) einsetzt. Man erhält so

$$\mathbf{F}\left(\frac{\frac{y_0}{\varrho} - 1}{\frac{y_0}{T}}, \frac{-\left(\frac{x_0}{\varrho} + \frac{z_0}{T}\right)}{\frac{y_0}{T}}\right) = 0. \tag{13}$$

Diese Gleichung ist für $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$ von demselben Grade wie Gleichung (12) für X, Y, Z.

§ 3. Ausartung des Kegels (G_1) in ein Strahlenbüschel.

Von besonderem Interesse ist der Fall, in welchem (G_1) ein ebenes Strahlenbüschel ist. In diesem Falle ist die Bewegungsrichtung des Punktes P stets senkrecht zu einer bestimmten durch P gehenden Geraden H, der Normalen zur Ebene des Strahlenbüschels. Diese Gerade H bewegt sich dann so fort, daß der auf ihr liegende feste Punkt P eine Orthogonaltrajektorie auf der von H erzeugten Regelfläche beschreibt[1]). Derartige Punkte P sind zunächst bei jeder Raumkurve die Punkte der Normalebene und der rektifizierenden Ebene (s. § 2). Um die gestellte Aufgabe allgemein zu lösen, ist Gleichung (12) linear anzunehmen und Gleichung (13) zu bestimmen.

Es seien a, b, c die Richtungskosinus der Normalen H zu jener durch P gelegten Ebene E, in welcher das dem Punkte P zugeordnete Strahlenbüschel liegt. Die Gleichung (12) der Ebene E lautet dann bezogen auf das durch P gelegte Parallelsystem

$$Xa + Yb + Zc = 0.$$

Nach (13) erhält man sodann als Relation zwischen Krümmung und Torsion der Raumkurve C

$$a\left(\frac{y_0}{\varrho} - 1\right) - b\left(\frac{x_0}{\varrho} + \frac{z_0}{T}\right) + c\,\frac{y_0}{T} = 0$$

oder

$$\frac{b x_0 - a y_0}{\varrho} + \frac{b z_0 - c y_0}{T} + a = 0. \tag{14}$$

Damit also derartige Punkte P mit zugeordneten Strahlenbüscheln existieren, muß C eine Bertrandsche Kurve sein. In dem Programm 1913 ist a. a. O. bereits gezeigt, daß bei jeder B-Kurve jedem Punkte des mit dem Dreikante verbundenen Raumes eine Gerade H, mithin ein ebenes Strahlenbüschel zugeordnet ist und daß die Gesamtheit der Geraden H, die sich wegen des Zusammenfallens der den ∞^1 Punkten von H zugehörigen ∞^1 Geraden H auf ∞^2 reduziert, identisch ist mit jenen ∞^2 Geraden, welche die beiden durch die Ecken der zwei Begleitdreikante des Bertrandschen Paares je parallel zur Binormale der anderen Kurve gelegten Geraden schneiden.

[1]) Die Erledigung dieser Frage s. Progr. 1913, S. 6—9.

Es ist also bei B-Kurven jedem Punkte P eine Ebene E zugeordnet und man findet leicht, daß auch umgekehrt jeder Ebene E ein Punkt P zugeordnet ist, nämlich der Durchstoßpunkt jener unter den ∞^2 Geraden H, zu welcher E senkrecht steht. Diese umkehrbar-eindeutige Zuordnung von Punkt P und Ebene E ist aber die gleiche wie in § 4 des I. Abschnittes, wie man folgendermaßen erkennt:

In Gleichung (19, I. Abschnitt) führt die Forderung $d = 0$ gerade zu obiger Gleichung (14). Die Forderung $d = 0$ aber sagt dortselbst, daß alle Schnittgeraden G der durch $P(x_0 y_0 z_0)$ gelegten Ebene $E(a, b, c)$ ein Strahlenbüschel mit dem Zentrum P bilden, d. h. E ist die dem Punkte P nach § 4 zugeordnete Ebene. Da nun (14) mit (19) für $d = 0$ übereinstimmt, so ist die hier stattfindende Zuordnung die gleiche wie dort. Es sei jedoch bemerkt, daß die beiden in E liegenden Strahlenbüschel mit dem Zentrum P, nämlich das Strahlenbüschel der Schnittgeraden G (nach I) und das Strahlenbüschel der Verbindungsgeraden G_1 (nach II) im allgemeinen nicht identisch sind. Berechnet man nämlich aus (2′) und (3′) Abschn. I die Richtungswinkel der Schnittgeraden G, so erhält man mit Hilfe dieser Winkel und der Winkel $\alpha_0 \beta_0 \gamma_0$ (4) als Kosinus des von G_1 und G eingeschlossenen Winkels

$$\delta = \frac{1}{H\Delta}\left[\left(\frac{c}{\varrho} - \frac{a}{T}\right)\left(\frac{b x_0 - a y_0}{\varrho} + \frac{b z_0 - c y_0}{T} + a\right) + \frac{1}{T}\right],$$

wobei
$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{T^2} - \left(\frac{c}{\varrho} - \frac{a}{T}\right)^2}.$$

Mit Rücksicht auf Relation (14) hat man alsdann

$$\delta = \frac{1}{H\Delta T},$$

welcher Wert im allgemeinen von 1 verschieden ist.

Aus dem Bisherigen ergibt sich nun folgende einfache Konstruktion der einem Punkte P zugeordneten Ebene E:

Man legt durch den willkürlich gewählten Punkt P jene Gerade H, welche die beiden mehrfach genannten Parallelen zu den Binormalen der B-Kurven schneidet und konstruiert in P die zu H senkrechte Ebene E. Diese Ebene E enthält dann sowohl das Strahlenbüschel der aufeinanderfolgenden Schnittgeraden G der Ebene, sowie das Strahlenbüschel der aufeinanderfolgenden Verbindungsgeraden G_1 des Punktes P mit seiner jeweiligen Nachbarlage. Beide Strahlenbüschel haben das gemeinsame Zentrum P, sind jedoch nicht identisch, d. h. die Tangente G_1 an die von P beschriebene Orthogonaltrajektorie zur Regelfläche von H fällt nicht zusammen mit der Tangente G an die Gratlinie der von E erzeugten abwickelbaren Fläche oder m. a. W. genannte Gratlinie fällt nicht mit der Orthogonaltrajektorie zusammen[1]).

Die genannte Konstruktion der Zuordnung von Ebene und Punkt läßt nun unmittelbar eine wichtige Eigenschaft der im I. Abschnitt besprochenen Fläche $\mathfrak{F}$ (10) erkennen. Diese Fläche ist der Ort aller Punkte P, welche den ∞^2 durch P_0 gelegten Ebenen zugeordnet sind. Jede dieser Ebenen steht auf einer der ∞^2 Geraden H (Schnittgeraden der beiden unter sich windschiefen Parallelen zu den Binormalen) senkrecht. Ihr Schnittpunkt mit dieser senkrechten Geraden H ist der der Ebene E zugeordnete Punkt P. Die Punkte P sind daher die ∞^2-Fußpunkte der von P_0 auf die ∞^2 Geraden H gefällten Senkrechten. Daraus folgt unmittelbar, daß jede Ebene E_1, die durch eine der beiden Parallelen zu den Binormalen gelegt ist, die Fläche $\mathfrak{F}$ in einem Kreise schneidet, nämlich dem Schnittkreis von E_1 mit jener Kugel, welche die Verbindungsstrecke des Punktes P_0 mit dem Durchstoßpunkt S der anderen Parallelen durch E_1 als Durchmesser hat. (Fig. 2, in welcher P_0 außerhalb Ebene E_1 zu denken ist.)

Wir haben somit:

Fläche $\mathfrak{F}$ wird von den beiden Ebenenbüscheln, welche die beiden Parallelen zu den Binormalen bzw. als Achsen haben, in zwei Systemen von Kreisen geschnitten und zwar enthält jeder Schnittkreis einer solchen Ebene den Schnittpunkt S dieser Ebene mit der anderen Achse.

Auch für die Fläche $\mathfrak{F}_1$ (11, I. Abschnitt) ergibt sich eine bemerkenswerte Eigenschaft. $\mathfrak{F}_1$ ist die Gesamtheit der Ebenen E, welche den ∞^2 Punkten P einer bestimmten Ebene E_0 zugeordnet sind. Zu jedem P erhält man die zugeordnete E, indem man in P zur hindurchgehenden H die senkrechte Ebene errichtet[2]). Ist nun

---

[1]) Würden sie zusammenfallen, so wäre H die Binormale dieser Kurve. Eine mit dem Dreikant einer Raumkurve C fest verbundene Gerade H kann aber nur dann Binormale einer zweiten Raumkurve sein, wenn für die erste Kurve die Relation besteht $\frac{A}{T^2}+\frac{B}{\varrho^2}+\frac{C}{\varrho}=0$ (vgl. Progr. 1913, S. 38). Daraus folgt schon ohne Weiteres, daß unsere beiden Strahlenbüschel nicht identisch sind.

[2]) In Fig. 3 ist diese Ebene nicht gezeichnet.

(Fig. 3) E_1 eine durch Parallele I gelegte Ebene und S ihr Schnittpunkt mit Parallele II, so wird E_0 von E_1 in einer Geraden J geschnitten. Die den Punkten P von J zugeordneten Ebenen E haben dann als Umhüllungsgebilde einen parabolischen Zylinder (nach der bekannten Eigenschaft der Scheiteltangente der Parabel), dessen Scheitel-Tangentialebene die durch J senkrecht zu E_1 gelegte Ebene ist, und dessen Brenngerade durch S geht. Das Gleiche gilt für alle Geraden J, in welchen das durch Parallele I gelegte Ebenenbüschel die Ebene E_0 schneidet. Diese Geraden J bilden ein in E_0 gelegenes Strahlenbüschel, dessen Zentrum der Durchstoßpunkt von Parallele I durch E_0 ist. Das analoge Resultat erhält man nun auch für das Strahlenbüschel L, in welchem E_0 das durch Parallele II gelegte Ebenenbüschel schneidet. Wir haben also:

Die ∞^2 erzeugenden Ebenen der Fläche $\mathfrak{F}_1$ gruppieren sich auf ***zweifache*** *Art als Tangentialebenen einer Schar parabolischer Zylinder. Diese Gruppierung wird bewirkt durch die beiden Strahlenbüschel, in welchen Ebene E_0 die beiden durch Parallele I und Parallele II gelegten Ebenenbüschel schneidet und zwar bestimmen die Punkte je eines Strahles die Tangentialebenen je eines parabolischen Zylinders.*

§ 4. Kegel (G_1) ist von der 2. Ordnung.

Soll (G_1) von der zweiten Ordnung sein, so muß nach § 2 auch die zwischen Krümmung und Torsion der Raumkurve bestehende Relation vom zweiten Grade sein und umgekehrt. Ist diese Relation gegeben in der Form (12, I), so erhält man nach (8) als Gleichung des dem Punkte $P(x_0\, y_0\, z_0)$ zugeordneten Kegels die folgende

$$A_1X^2 + 2B_1XY + C_1Y^2 + 2D_1XZ + 2E_1YZ + F_1Z^2 = 0, \tag{15}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\begin{aligned}
A_1 &= Fx_0^2y_0^2\\
B_1 &= \frac{1}{2}(D + 2Fy_0)\,x_0y_0^2\\
C_1 &= (A + Dy_0 + Fy_0^2)\,y_0^2\\
D_1 &= \frac{1}{2}(Dz_0 - Ex_0 + 2Fy_0z_0)\,x_0y_0\\
E_1 &= \frac{1}{2}(2Az_0 - Cx_0 + 2Dy_0z_0 - Ex_0y_0 + 2Fy_0^2z_0)\,y_0\\
F_1 &= Az_0^2 + Bx_0^2 - Cx_0z_0 + Dy_0z_0^2 - Ex_0y_0z_0 + Fy_0^2z_0^2.
\end{aligned}$$

In dem besonderen Falle, wo (15) ein Rotationskegel ist, bildet die momentane Bewegungsrichtung des Punktes P stets einen konstanten Winkel φ mit einer durch P gelegten festen Geraden L. Es bewegt sich also die mit dem Dreikante fest verbundene Gerade L so fort, daß der auf ihr liegende feste Punkt P eine isogonale Trajektorie auf der von L erzeugten Regelfläche beschreibt. Die Bedingungen dafür, daß (15) ein Rotationskegel ist, lauten unter der Voraussetzung, daß keine der Größen $B_1\, D_1\, E_1$ verschwindet:

$$(16)\qquad \begin{aligned} B_1\,(E_1^2 - D_1^2) &= E_1\, D_1\,(C_1 - A_1) \\ D_1\,(E_1^2 - B_1^2) &= E_1\, B_1\,(F_1 - A_1)\,. \end{aligned}$$

Die Koordinaten der Punkte P, denen je ein Rotationskegel zugeordnet ist, müssen also zwei Gleichungen befriedigen, d. h. es existieren ∞^1 solche Punkte P, deren Ort die Schnittkurve der beiden Flächen (16) ist. Die Gleichungen (16) lauten nach Vereinfachung

$$(16')\qquad \begin{aligned} & x_0 Cn - x_0 z_0^2 Dp + 2 z_0 x_0^2 (Dr + Fn) - x_0^3 Er + x_0 y_0 (En - Cr) \\ & \quad - x_0 y_0^2 Er + 2 x_0^2 y_0 z_0 Fr - 2 z_0 An + 2 y_0 z_0 (Ar - Dn) \\ & \quad + 2 y_0^2 z_0 (Dr - Fn) + 2 y_0^3 z_0 Fr - 2 x_0 y_0 z_0^2 Fp = 0, \\ & \quad 2 z_0^2 \left[y_0 (Dn - Ar) + An + y_0^2 (Fn - Dr) - y_0^3 Fr\right] \\ & \qquad + z_0 x_0 \left[(2 Am - Cn) + 2 y_0 (2 Aq + Dm - Fl) \right. \\ & \qquad\qquad \left. + y_0^2 (3 q - p) D + 2 y_0^3 (q - p) F\right] \\ & \quad + x_0^2 \left[2 y_0^3 Fr + y_0^2 (Dr - Eq) + 2 y_0 (Br - Cq) - Cm\right] = 0. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten p, q, r, m, n, l dieselben Größen wie § 6, I.

Aus der zweiten Gleichung erhält man leicht den Quotienten $\frac{z_0}{x_0}$ als Funktion von y_0. Durch Einsetzen des Wertes $z_0 = x_0 \cdot f(y_0)$ in die erste Gleichung wird diese quadratisch für x_0, so daß man ohne Schwierigkeit x_0 und z_0 als Funktionen der unabhängigen Größe y_0 explizite darstellen kann. Die beiden Reellitätsbedingungen sollen hier nicht untersucht werden. Es sei nur bemerkt, daß die beiden Flächen (16') auch gewisse Punkte gemeinsam haben, welchen die Eigenschaft, Rotationskegel zu haben, nicht zukommt. So erfüllen z. B. alle Punkte der in der Ebene $y_0 = -\frac{D}{2F}$ befindlichen Geraden $pz_0 - rx_0 = 0$, wie man sich leicht überzeugen kann, die beiden Gleichungen (16'), während die fragliche Eigenschaft nur einer endlichen Anzahl von Punkten dieser Geraden zukommt, nämlich den Schnittpunkten der Geraden mit der eigentlichen Schnittkurve der beiden Flächen (16'). Dieser scheinbare Widerspruch kommt daher, daß für die Punkte der Geraden

$$(17)\qquad y_0 = -\frac{D}{2F} \qquad \frac{z_0}{x_0} = \frac{r}{p}$$

die beiden Koeffizienten B_1 und E_1 der Gleichung (15) verschwinden, so daß nicht mehr die Gleichungen (16') die Bedingung für den Rotationskegel enthalten, sondern vielmehr die Gleichung

$$(C_1 - A_1)(C_1 - F_1) - D_1^2 = 0.$$

Dies wird nach Einsetzen der Werte von y_0 und z_0 aus (17) eine quadratische Gleichung für x_0^2, deren 4 Wurzeln die richtigen Punkte auf der Geraden (17) bestimmen[1]).

Der analoge Fall liegt vor bei der Geraden

$$(18)\qquad y_0 = \frac{n}{r} \qquad \frac{z_0}{x_0} = \frac{r}{p}.$$

Hier verschwinden D_1 und E_1 und die Bedingung dafür, daß den Punkten dieser Geraden Rotationskegel zugehören ist nicht (16'), sondern vielmehr die Gleichung

$$(F_1 - A_1)(F_1 - C_1) - B_1^2 = 0,$$

welche wiederum quadratisch für x_0^2 wird und daher vier Punkte auf der Geraden bestimmt, denen Rotationskegel zugehören, während die übrigen Punkte der Geraden ausscheiden.

Die Gleichungen (16') sind schließlich auch unrichtig, wenn

---

[1]) Wenn $D = F = 0$, dann verschwindet B_1. Damit nun ein Rotationskegel vorliegt, ist zunächst nötig, daß noch einer der Koeffizienten D_1 und E_1 verschwindet. Das Verschwinden von D_1 hat nun das Verschwinden von E zur Folge, so daß es sich nur um eine Schraubenlinie handelt. Im Falle $E_1 = 0$ aber lautet die Bedingung für den Rotationskegel wie vorher. Die beiden Bedingungen für die Existenz eines Rotationskegels sind also

$$2Az_0 - Cx_0 - Ex_0y_0 = 0$$
$$4A(Ay_0^2 + Az_0^2 - Bx_0^2) + E^2x_0^4 = 0.$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen den Ort der Punkte mit Rotationskegeln bei den Kurven $\frac{A}{\varrho^2} + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{\varrho T} + \frac{E}{T} = 0$.

B_1 und D_1 verschwinden, was infolge des auszuschließenden Falles $x_0 = y_0 = 0$ (s. 7) nur bewirkt wird durch die beiden Werte

$$y_0 = -\frac{D}{2F} \text{ und } E = 0. \tag{19}$$

Fragt man also bei den besonderen Kurven $E = 0$ nach jenen Punkten in der Ebene $y_0 = -\frac{D}{2F}$, denen Rotationskegel zugehören, so lautet die Bedingung

$$(A_1 - C_1)(A_1 - F_1) - E_1^2 = 0$$

oder nach Einsetzen von (19) und ausführlich geschrieben

$$4F^2\left[x_0^2(D^2 - 4BF) + z_0^2(D^2 - 4AF) + 4x_0 z_0 FC\right] + (D^2 - 4AF)(D^2 - 4BF) - 4C^2F^2 = 0$$

d. h. die in der Ebene befindlichen Punkte der fraglichen Art bilden einen Kegelschnitt. Ob es bei den Kurven $E = 0$ außerhalb dieser Ebene noch Punkte mit der verlangten Eigenschaft gibt, entscheiden die Gleichungen (16′), welche für alle außerhalb der Ebene gelegenen Punkte gültig sind.

Die Achse des einem Punkte der Kurve (16) zugeordneten Rotationskegels, d. i. die Gerade L, auf deren Regelfläche der Punkt bei der Bewegung eine isogonale Trajektorie beschreibt, hat die Richtung:

$$a_1 = \frac{1}{E_1\sqrt{\frac{1}{B_1^2} + \frac{1}{D_1^2} + \frac{1}{E_1^2}}},$$

$$b_1 = \frac{1}{D_1\sqrt{\frac{1}{B_1^2} + \frac{1}{D_1^2} + \frac{1}{E_1^2}}},$$

$$c_1 = \frac{1}{B_1\sqrt{\frac{1}{B_1^2} + \frac{1}{D_1^2} + \frac{1}{E_1^2}}},$$

während sich für den halben Öffnungswinkel φ der Wert ergibt

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{D_1 B_1 (D_1 B_1 - A_1 E_1)}{B_1^2 E_1^2 + B_1^2 D_1^2 + D_1^2 E_1^2}}.$$

Es gibt also durch jeden Punkt P der Kurve (16) e i n e Gerade, auf deren Regelfläche der feste Punkt P eine isogonale Trajektorie mit dem bestimmten Winkel φ beschreibt[1]).

Es seien nun noch jene Punkte bestimmt, denen ein gleichseitiger Kegel zugeordnet ist. Die Bedingung dafür, daß Kegel (15) gleichseitig werde, ist

$$A_1 + C_1 + F_1 = 0, \quad \text{also}$$

$$Fy_0^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2) - Ex_0y_0z_0 + (y_0^2+z_0^2)(Dy_0+A) + x_0(Bx_0 - Cz_0) = 0. \tag{20}$$

Jeder Punkt dieser Fläche bewegt sich so, daß zu jeder Bahntangente relativ zum Dreikant zwei andere Bahntangenten existieren, die unter sich und zur ersten senkrecht stehen.

---

[1]) Vgl. Progr. 1913, S. 5—11, wo die auf andere Art versuchte Lösung dieser Aufgabe an der Kompliziertheit der Bedingungsgleichungen scheiterte.