I. Abschnitt.

Ein aus drei zueinander senkrechten Geraden bestehendes Dreikant bewege sich so längs der Raumkurve C, daß diese Geraden stets bzw. mit der Tangente, der Hauptnormale und der Binormale von C zusammenfallen. Mit diesem „Begleitdreikante" der Kurve C sei nun eine Ebene E fest verbunden. Letztere nimmt dann bei der Bewegung des Dreikantes ∞^1 verschiedene Lagen an. Die Schnittgerade von E mit ihrer jeweiligen benachbarten Lage sei G. Die Gesamtheit der ∞^1 Geraden G, welche die Erzeugenden der von der Ebenenschar E (Ebene E in ∞^1 verschiedenen Lagen) gebildeten abwickelbaren Fläche sind, bildet in der festen Ebene E eine Schar von Geraden. Diese Geraden bilden die Tangenten einer in E liegenden Kurve (G), der „Einhüllenden" der Geraden G. Denkt man sich in der mit dem Begleitdreikante fest verbundenen Ebene E die Kurve (G) mit ihren sämtlichen Tangenten konstruiert, so erfolgt die Fortbewegung von E derart, daß die aufeinander folgenden Tangenten von (G) der Reihe nach zusammenfallen mit den Erzeugenden der von E beschriebenen abwickelbaren Fläche oder mit anderen Worten: Die Tangenten von (G) bilden der Reihe nach die Tangenten der Gratlinie K der von E erzeugten abwickelbaren Fläche. Es sei jedoch betont, daß die Punkte der Kurve (G) im allgemeinen nicht mit den Punkten von K zusammenfallen. Um dies zu erkennen, sei nur auf das Verhalten der rektifizierenden Ebene hingewiesen (Fig. 1). Diese schneidet ihre vorausgehende Lage in der rektifizierenden Geraden, deren Gesamtheit in dieser Ebene ein Strahlenbüschel G mit der Ecke des Dreikants als Zentrum bildet, so daß (G) in einen Punkt zusammenschrumpft, der während der Fortbewegung der Ebene von dem jeweiligen Punkte Q der Gratlinie K der rektifizierenden Developpabeln den (veränderlichen) Abstand P_1Q_1, P_2Q_2, ... hat. [Fig. 1 zeigt die rektifizierende Developpable mit den Kurven C und K in die Ebene ausgebreitet.] Die hier den einzelnen Geraden G zugehörigen Punkte Q', in welchen erstere während der Bewegung die Gratlinie K berühren, bilden in der rektifizierenden Ebene selbst eine Kurve K' (z. B. einen Kreis, falls K eine Traktrix ist).

Im Folgenden soll Kurve (G), d. i. die Einhüllende der Geraden G, in welchen eine beliebige mit dem Dreikant verbundene Ebene E während der Bewegung „sich selbst" schneidet, untersucht werden.

§ 1. Gleichung der Ebene E.

Sind $x_0\, y_0\, z_0$ die Koordinaten eines festen Punktes der Ebene E relativ zu dem aus Tangente, Hauptnormale und Binormale bestehenden Dreikant, ferner a, b, c die Richtungs-Kosinus der Normalen von E gegenüber den Achsen dieses Dreikantes, so lautet die Gleichung von E bezogen auf dieses Dreikant, wenn X, Y, Z die laufenden Koordinaten bedeuten:

1) $$E \equiv (X - x_0)\, a + (Y - y_0)\, b + (Z - z_0)\, c = 0.$$

Es soll nun Gleichung (1) auf das der Raumkurve C zugrunde liegende Koordinatensystem (x, y, z) transformiert werden. Zu diesem Zwecke ist eine Drehung und Verschiebung notwendig. Sind x, y, z die Koordinaten des Kurvenpunktes C, ausgedrückt als Funktionen der Bogenlänge s, ferner α, β, γ, ξ, η, ζ, λ, μ, ν die Richtungs-Kosinus der Tangente, Hauptnormale und Binormale, so ist zum Zwecke der Drehung und Verschiebung zu setzen

$$\begin{aligned} X &= (X' - x)\,\alpha + (Y' - y)\,\beta + (Z' - z)\,\gamma \\ Y &= (X' - x)\,\xi + (Y' - y)\,\eta + (Z' - z)\,\zeta \\ Z &= (X' - x)\,\lambda + (Y' - y)\,\mu + (Z' - z)\,\nu. \end{aligned}$$

Dabei sind X', Y', Z' die laufenden Koordinaten von E bezogen auf das der Raumkurve C zugrundeliegende Koordinatensystem.

Gleichung (1) geht dann über in

$$(2)\qquad E \equiv (X'-x)(a\alpha + b\xi + c\lambda) + (Y'-y)(a\beta + b\eta + c\mu) + (Z'-z)(a\gamma + b\zeta + c\nu) - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$$

Wenn nun das Dreikant sich längs der Kurve C fortbewegt, so bildet E eine Ebenenschar mit der Gleichung (2), wobei s als Parameter zu betrachten ist. Durch Differentiation nach s, wobei X', Y', Z' als Konstante zu behandeln sind, erhält man nach Vereinfachung:

$$(3)\qquad \frac{\partial E}{\partial s} \equiv (X'-x)\left[a\frac{\xi}{\varrho} - b\left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{T}\right) + c\frac{\xi}{T}\right] + (Y'-y)\left[a\frac{\eta}{\varrho} - b\left(\frac{\beta}{\varrho} + \frac{\mu}{T}\right) + c\frac{\eta}{T}\right] + (Z'-z)\left[a\cdot\frac{\zeta}{\varrho} - b\left(\frac{\gamma}{\varrho} + \frac{\nu}{T}\right) + c\frac{\zeta}{T}\right] - a = 0.$$

Dabei sind $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$ bzw. Krümmung und Torsion der Kurve C.

§ 2. Gleichungen der Schnittgeraden G.

Die Schnittgerade G der Ebene E mit ihrer benachbarten Lage ist bestimmt durch die Gleichungen (2) und (3), da (3) selbst eine durch G hindurchgehende Ebene vorstellt. Diese Gleichungen beziehen G auf das der Kurve C zugrundeliegende Koordinatensystem. Um G auf das Begleitdreikant zu beziehen, sind Gleichungen (2) und (3) wieder auf dieses Dreikant zu transformieren, wodurch sie übergehen in

$$(2')\qquad E \equiv (X-x_0)a + (Y-y_0)b + (Z-z_0)c = 0$$

$$(3')\qquad \frac{\partial E}{\partial s} \equiv (X\alpha + Y\xi + Z\lambda)\cdot\left[a\frac{\xi}{\varrho} - b\left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{T}\right) + c\frac{\xi}{T}\right] + (X\beta + Y\eta + Z\mu)\cdot\left[a\frac{\eta}{\varrho} - b\left(\frac{\beta}{\varrho} + \frac{\mu}{T}\right) + c\frac{\eta}{T}\right] + (X\gamma + Y\zeta + Z\nu)\cdot\left[a\frac{\zeta}{\varrho} - b\left(\frac{\gamma}{\varrho} + \frac{\nu}{T}\right) + c\frac{\zeta}{T}\right] - a = 0.$$

Letztere Gleichung lautet nach Vereinfachung

$$(3')\qquad \frac{\partial E}{\partial s} = X\left(-\frac{b}{\varrho}\right) + Y\left(\frac{a}{\varrho} + \frac{c}{T}\right) + Z\left(-\frac{b}{T}\right) - a = 0.$$

Für die Richtungskosinus von G gegenüber den Achsen des Dreikantes erhält man aus (2′) und (3′) die Werte

$$\frac{\frac{ac}{\varrho}+\frac{1-a^2}{T}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{T^2}-\left(\frac{c}{\varrho}-\frac{a}{T}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{bc}{\varrho}-\frac{ab}{T}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{T^2}-\left(\frac{c}{\varrho}-\frac{a}{T}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{c^2-1}{\varrho}-\frac{ac}{T}}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{T^2}-\left(\frac{c}{\varrho}-\frac{a}{T}\right)^2}}.$$

Es soll nun die Schnittgerade G auf ein in der Ebene E liegendes Koordinatensystem $(X_1\, Y_1)$ bezogen werden. Zu diesem Zwecke drehen wir das Koordinatensystem unter Belassung des Anfangspunktes in die Lage $X_1\, Y_1\, Z_1$, wobei Z_1 auf E senkrecht steht, währene X_1 und Y_1 zwei zueinander senkrechte Achsen in der durch den Anfangspunkt parallel zu E gelegten Ebene sind.

Die Richtungskosinus	von		Z_1	sind	a	b	c.
„	„	„	„ X_1	seien	a_1	b_1	c_1.
„	„	„	„ Y_1	„	a_2	b_2	c_2.

Von den letzteren 6 Größen ist nur eine innerhalb eines gewissen Intervalles willkürlich [z. B. a_1 innerhalb des Intervalles $\pm$ sinarc a], während die übrigen von dieser und den Größen a, b, c abhängig sind. Die bestehenden Relationen, von denen im folgenden häufig Gebrauch zu machen ist, erhält man, wenn man in der Determinante der 9 Richtungskosinus die Quadratsumme der Glieder einer jeden Reihe gleich der Einheit und die Produktensumme der Glieder aller Paare von Parallelreihen gleich Null setzt. Außerdem ist jedes Glied der Determinante gleich seiner Unterdeterminante.

Behufs Drehung des Koordinatensystems ist nun zu setzen

$$X = a_1 X_1 + a_2 Y_1 + a Z_1$$
$$Y = b_1 X_1 + b_2 Y_1 + b Z_1$$
$$Z = c_1 X_1 + c_2 Y_1 + c Z_1 .$$

Durch Einsetzen in (2′) und (3′) erhält man

$$(2'') \qquad Z_1 = ax_0 + by_0 + cz_0$$

$$(3'') \qquad X_1\left(\frac{ab_1 - ba_1}{\varrho} + \frac{cb_1 - bc_1}{T}\right) + Y_1\left(\frac{ab_2 - ba_2}{\varrho} + \frac{cb_2 - bc_2}{T}\right) + Z_1\left(\frac{ab - ab}{\varrho} + \frac{bc - bc}{T}\right) - a = 0$$

oder nach Vereinfachung

$$(3'') \qquad X_1\left(\frac{c_2}{\varrho} - \frac{a_2}{T}\right) + Y_1\left(-\frac{c_1}{\varrho} + \frac{a_1}{T}\right) - a = 0.$$

(3″) ist die Projektion der in E liegenden Geraden G auf eine durch die Ecke des Begleitdreikantes parallel zu E gelegten Ebene, während (2″) den konstanten Abstand der beiden parallelen Ebenen angibt. Da (3″) den Parameter s enthält, so stellt es die Gesamtheit aller Geraden G, in welchen die Ebene E während ihrer Fortbewegung von der jeweils benachbarten Lage geschnitten wird, relativ zur Ebene E dar.

Denkt man sich die Achsen X_1 und Y_1 in die Ebene E selbst projiziert, so macht G auf diesen Achsen bzw. die Abschnitte (nach 3″)

$$\frac{a}{\frac{c_2}{\varrho} - \frac{a_2}{T}} \quad \text{und} \quad \frac{a}{-\frac{c_1}{\varrho} + \frac{a_1}{T}}$$

Die Linienkoordinaten der Geraden G sind daher

$$(4) \qquad \begin{aligned} u &= \frac{1}{a}\left(-\frac{c_2}{\varrho} + \frac{a_2}{T}\right) \\ v &= \frac{1}{a}\left(\frac{c_1}{\varrho} - \frac{a_1}{T}\right) \end{aligned}$$

Sie sind lineare Funktionen von $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$. Umgekehrt erhält man Krümmung und Torsion als lineare Funktionen von u und v, nämlich

$$(4') \qquad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{a}{b}(a_1 u + a_2 v) \\ \frac{1}{T} &= \frac{a}{b}(c_1 u + c_2 v) \end{aligned}$$

Es sei nun zunächst die Frage beantwortet: Wann fallen die einer Ebene zugehörigen Geraden in e i n e Gerade zusammen?

Dies ist der Fall, wenn

I. u und v konstant sind, was nach (4') konstante Krümmung und konstante Torsion zur Folge hat.

II. wenn $a = b = 0$, d. h. wenn E parallel zur Schmiegungsebene ist. In diesem Falle lautet Gleichung (3'')

$$X_1 b_1 + Y_1 a_1 = 0$$

oder bezogen auf die Achsen des Dreikants

$$Y = 0.$$

Wir haben also:

Jede mit dem Begleitdreikante einer gemeinen Schraubenlinie verbundene Ebene wird durch ihre aufeinanderfolgenden Lagen stets in ***derselben*** *Geraden geschnitten.*

Bei jeder Raumkurve wird jede zur Schmiegungsebene parallele Ebene durch ihre aufeinanderfolgenden Lagen stets in ***derselben*** *Geraden geschnitten und zwar in ihrem Schnitt mit der rektifizierenden Ebene.*

In allen anderen Fällen ist die Schnittgerade G veränderlich und es soll nunmehr die von der Gesamtheit der einer Ebene E zugehörigen Geraden G erzeugte Kurve bestimmt werden.

§ 3. Die Einhüllende (G) der Geradenschar G.

Hat die zwischen der Krümmung und der Torsion der Raumkurve C bestehende Relation die Form

$$f\left(\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{T}\right) = 0, \tag{5}$$

so erhält man die Gleichung von (G) in Linienkoordinaten, wenn man die Werte von (4) in die Relation (5) einsetzt, wodurch man erhält

$$f\left(\frac{a}{b}(a_1 u + a_2 v), \ \frac{a}{b}(c_1 u + c_2 v)\right) = 0. \tag{5'}$$

Soll umgekehrt die einer bestimmten mit dem Dreikante fest verbundenen Ebene zugehörige Kurve (G) die vorgegebene Gleichung haben

$$\mathbf{F}(u, v) = 0,$$

so erhält man für die Raumkurve, deren Dreikant sich fortbewegt, (nach 4) die Relation

$$\mathrm{F}\left(\frac{1}{a}\left(-\frac{c_2}{\varrho}+\frac{a_2}{T}\right),\ \frac{1}{a}\left(\frac{c_1}{\varrho}-\frac{a_1}{T}\right)\right)=0.$$

Aus dem Bisherigen folgt:

Ist für eine Raumkurve C die zwischen Krümmung und Torsion bestehende Relation algebraisch vom Grade n, so erzeugen die aufeinanderfolgenden Schnitte jeder mit dem Begleitdreikante fest verbundenen Ebene in dieser Ebene eine Kurve n^{ter} *Klasse.*

Speziell folgt demnach:

Jede mit dem Begleitdreikante einer Bertrandschen Kurve fest verbundene Ebene wird durch ihre aufeinanderfolgenden Lagen so geschnitten, daß alle Schnittgeraden durch einen festen Punkt (G) der Ebene hindurchgehen.

Besteht zwischen Krümmung und Torsion einer Raumkurve eine Relation zweiten Grades, so erzeugen die Geraden, in welchen jede mit dem Begleitdreikante verbundene Ebene von ihren aufeinanderfolgenden Lagen geschnitten wird, in dieser Ebene einen Kegelschnitt.

Aus (4) und (3″) folgt:

Die einem System von **parallelen** *Ebenen zugehörigen Kurven (G) sind einander kongruent und so gelegen, daß ihre Projektionen auf eine dieser Ebenen zusammenfallen.*

Man kann sich daher auf die ∞^2 durch die Ecke des Begleitdreikantes gelegten Ebenen beschränken.

Wenn $a=0$, also E parallel zur Kurventangente ist, dann geht nach (3″) bzw. (4) G stets durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems X_1, Y_1, d. h.:

Bei jeder Raumkurve gehen die aufeinanderfolgenden Schnitte einer jeden zur Tangente parallelen Ebene durch **einen** *Punkt dieser Ebene.*

Wenn $b=0$, dann muß nach (4) entweder a verschwinden, was bereits erledigt ist, oder es müssen die Gleichungen bestehen

$$a_1 u + a_2 v = 0$$
$$c_1 u + c_2 v = 0.$$

Da die Determinante dieser Gleichungen, welche den Wert b hat, verschwindet, so folgt

$$\frac{u}{v} = -\frac{a_2}{a_1},\ \text{d. h.:}$$

In jeder zur Hauptnormalen parallelen Ebene sind die Geraden G unter sich parallel.

Ist die Relation zwischen Krümmung und Torsion homogen, so wird auch die Relation zwischen u und v homogen, so daß folgt:

Jede mit dem Begleitdreikante einer allgemeinen Schraubenlinie verbundene Ebene wird durch ihre aufeinanderfolgenden Lagen in parallelen Geraden geschnitten.

Wie oben gezeigt, fallen bei der gemeinen Schraubenlinie diese Parallelen zusammen.

§ 4. Die Bertrandschen Kurven.

Die Relation (5) sei linear und in der üblichen Form geschrieben

$$\frac{\sin\Theta}{\varrho}-\frac{\cos\Theta}{T}-\frac{\sin\Theta}{m}=0. \tag{6}$$

Nach (5') erhält man als Gleichung des Punktes (G)

$$u(a_1\sin\Theta-c_1\cos\Theta)+v(a_2\sin\Theta-c_2\cos\Theta)-\frac{b\sin\Theta}{a\cdot m}=0. \tag{7}$$

Die Koordinaten des Punktes (G) sind daher

$$\begin{aligned} X_1&=\frac{(c_1\cos\Theta-a_1\sin\Theta)\,am}{b\sin\Theta},\\ Y_1&=\frac{(c_2\cos\Theta-a_2\sin\Theta)\,am}{b\sin\Theta},\\ Z_1&=ax_0+by_0+cz_0,\end{aligned} \tag{8}$$

welch letztere hinzutritt, wenn Ebene E nicht durch die Ecke des Dreikantes hindurchgeht.

Inbezug auf das Dreikant selbst erhält man für den Punkt (G) nach § 2 die Koordinaten

$$\begin{aligned} X&=\frac{am}{b\sin\Theta}\left[-ac\cos\Theta+(a^2-1)\sin\Theta\right]+aZ_1\\ Y&=\frac{am}{b\sin\Theta}\left[-bc\cos\Theta+ab\sin\Theta\right]+bZ_1\\ Z&=\frac{am}{b\sin\Theta}\left[(1-c^2)\cos\Theta+ac\sin\Theta\right]+cZ_1\end{aligned} \tag{9}$$

Diese Gleichungen bestimmen in jeder Ebene E, die gegeben ist durch den Punkt $P_0(x_0\,y_0\,z_0)$ und die Richtungskosinus a, b, c

ihrer Normalen, den der Ebene E zugehörigen Punkt (G). Sie ordnen somit jeder Ebene einen in ihr liegenden Punkt eindeutig zu. Legt man durch P_0 alle ∞^2-Ebenen, so bilden die ihnen zugeordneten ∞^2-Punkte eine Fläche $\mathfrak{F}$ mit den Gleichungen (9). Auf diese Art ist jedem Punkte P_0 des mit dem Begleitdreikante verbundenen Raumes eine Fläche $\mathfrak{F}$ zugeordnet.

Es seien nun folgende Umformungen mit den Gleichungen (9) vorgenommen:

1. Die drei Gleichungen werden bzw. mit a, b, c multipliziert und addiert.

2. Die mit b multiplizierte erste Gleichung wird von der mit a multiplizierten zweiten Gleichung subtrahiert.

3. Die mit c multiplizierte zweite Gleichung wird von der mit b multiplizierten dritten Gleichung subtrahiert.

Man erhält so

$$(9')\qquad \begin{aligned} (X-x_0)\,a+(Y-y_0)\,b+(Z-z_0)\,c &= 0 \\ -Xb \quad +Ya-ma \qquad\qquad &= 0 \\ -Yc \quad +Zb-ma\cot\Theta \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Bezeichnen nun U, V, W die Ebenenkoordinaten der Ebene E relativ zum Dreikant, so ist das System (9') folgendermaßen zu schreiben

$$(9'')\qquad \begin{aligned} XU+YV+ZW+1 &= 0 \\ -XV+YU-mU \quad &= 0 \\ -YW+ZV-mU\cot\Theta &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind linear sowohl inbezug auf X, Y, Z, als auch inbezug auf U, V, W. Daher ist nicht nur jeder Ebene E_0 ein Punkt, sondern auch jedem Punkte P_0 eine Ebene eindeutig zugeordnet. Wählt man in der Ebene E_0 alle ∞^2-Punkte, so erzeugen die diesen Punkten zugeordneten ∞^2-Ebenen eine Fläche $\mathfrak{F}_1$. Auf diese Art ist jeder Ebene E_0 des mit dem Begleitdreikante verbundenen Raumes eine Fläche $\mathfrak{F}_1$ zugeordnet.

Es sollen nun die Gleichungen der dem Punkte P_0 zugeordneten Fläche $\mathfrak{F}$, sowie der der Ebene E_0 zugeordneten Fläche $\mathfrak{F}_1$ bestimmt werden.

Punkt $P_0(x_0\,y_0\,z_0)$ hat in Ebenenkoordinaten die Gleichung

$$Ux_0+Vy_0+Wz_0+1=0.$$

Die Elimination von U, V, W aus dieser Gleichung und den Gleichungen (9″) ergibt als Gleichung der dem Punkte P_0 zugeordneten Fläche $\mathfrak{F}$ in rechtwinkligen Koordinaten bezogen auf das Dreikant

$$(10)\qquad \begin{aligned} &Y(X^2+Y^2+Z^2)-Y^2(m+y_0)-Z^2m-XZm\,cotg\,\Theta \\ &\quad -XYx_0-YZz_0+Xmz_0\,cotg\,\Theta+Ymy_0+Zmz_0=0\,. \end{aligned}$$

Ebene $E_0(u_0\,v_0\,w_0)$ hat in Punktkoordinaten die Gleichung

$$u_0X+v_0Y+w_0Z+1=0\,.$$

Die Elimination von X, Y, Z aus dieser Gleichung und den Gleichungen (9′) ergibt als Gleichung der der Ebene E_0 zugeordneten Fläche $\mathfrak{F}_1$ in Ebenenkoordinaten bezogen auf das Dreikant

$$(11)\qquad \begin{aligned} &V(U^2+V^2+W^2) \\ &\quad -u_0(mUW^2+mWU^2\,cotg\,\Theta+UV+mUV^2) \\ &\quad +v_0(mVU^2-V^2-mUVW\,cotg\,\Theta) \\ &\quad +w_0(mU^3\,cotg\,\Theta+mWU^2+mUV^2\,cotg\,\Theta-VW)=0. \end{aligned}$$

Bezüglich der Fläche $\mathfrak{F}$ sei bemerkt:

1. Sie enthält den Punkt $P_0(x_0\,y_0\,z_0)$.
2. Sie geht durch den unendlich fernen imaginären Kugelkreis.
3. Sie enthält die unendlich ferne Gerade der rektifizierenden Ebene.
4. Von der rektifizierenden Ebene wird sie abgesehen von der unendlich fernen Geraden noch geschnitten in der Kurve

$$(Z-z_0)(Z+X\,cotg\,\Theta)=0\,,$$

d. h. in einer Parallelen zur Tangente der Raumkurve C (der ersten Bertrandschen) und einer Parallelen zur Binormalen der zugehörigen zweiten Bertrandschen Kurve.

5. Von der Ebene $Y=m$, also der rektifizierenden Ebene der zweiten Bertrandschen Kurve, wird $\mathfrak{F}$ geschnitten in der unendlich fernen Geraden und in der Kurve

$$X(X-x_0-Z\,cotg\,\Theta+z_0\,cotg\,\Theta)=0\,,$$

d. h. in einer Parallelen zur Tangente der zweiten Bertrandschen Kurve und einer Parallelen zur Binormalen der ersten.

Alle Flächen $\mathfrak{F}$, welche den ∞^3-Punkten P_0 des Raumes zugeordnet sind, gehen demnach durch die beiden Geraden, welche durch die Ecken der beiden Begleitdreikante des Kurvenpaares je parallel zur Binormalen der anderen Kurve gelegt sind.

6. Eine zur rektifizierenden Ebene parallele Ebene $Y = k$ schneidet $\mathfrak{F}$ in der unendlich fernen Geraden und in dem Kegelschnitt

$$kX^2 + (k - m) Z^2 - XZm \operatorname{cotg} \Theta + X(mz_0 \operatorname{cotg} \Theta - kx_0) + Z(mz_0 - kz_0) + k(m - k)(y_0 - k) = 0.$$

Dieser Kegelschnitt ist bei jeder Fläche $\mathfrak{F}$ eine Parabel für

$$k = \frac{m}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sin \Theta}\right),$$

also bei jenen zwei Ebenen, welche das Plückersche Konoid der Windungsachsen des Bertrandschen Paares[1]) längs seiner Grenzerzeugenden berühren. Man findet leicht, daß alle zwischen diesen beiden Ebenen gelegenen Parallelebenen die Fläche $\mathfrak{F}$ in Hyperbeln, alle außerhalb derselben gelegenen Parallelebenen in Ellipsen schneiden. Die Hyperbeln der beiden rektifizierenden Ebenen, welch letztere stets zwischen den Grenzerzeugenden liegen[2]), zerfallen nach 4 und 5 je in zwei Gerade.

7. Die dem Punkte $P_0(x_0\, y_0\, z_0)$ zugeordnete Ebene E ist Tangentialebene an die dem Punkte P_0 zugeordnete Fläche $\mathfrak{F}$. Denn man hat zur Bestimmung der Tangentialebene nach (10)

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial X} = 2XY - mZ \operatorname{cotg} \Theta - Yx_0 + mz_0 \operatorname{cotg} \Theta,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial Y} = 3Y^2 + X^2 + Z^2 - 2Y(m + y_0) - Xx_0 - Zz_0 + my_0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial Z} = 2YZ - 2mZ - mX \operatorname{cotg} \Theta - Yz_0 + mz_0.$$

Für den Punkt P_0 ist daher

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial X} = x_0 y_0, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial Y} = y_0(y_0 - m),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial Z} = y_0 z_0 - m z_0 - m x_0 \operatorname{cotg} \Theta.$$

Diese drei Größen, welche den Richtungskosinus der Flächennormalen proportional sind, erfüllen, wie man sich direkt überzeugen kann, die Gleichungen (9'), wenn man sie dort für a, b, c einsetzt, d. h. die Flächennormale in P_0 fällt mit der Normalen von E zusammen.

---

[1]) S. Archiv d. Math. u. Phys. III. Reihe XX. Heft 1, Seite 25 u. 26, sowie Programm der Kreisoberrealschule Würzburg 1913, S. 38—40.

[2]) Bei Kurven konstanter Krümmung fallen sie mit den längs der Grenzerzeugenden berührenden Ebenen zusammen.

Bezüglich der Fläche $\mathfrak{F}_1$ (11) sei bemerkt:

1. Die Ebene $E_0\,(u_0\,v_0\,w_0)$ gehört selbst zu den Erzeugenden.
2. Die unendlich ferne Ebene ist Erzeugende.

Hat man eine Ebene E_0, so ist derselben eine bestimmte Fläche $\mathfrak{F}_1$ zugeordnet. Der Ebene E_0 ist aber nach (9″) ein bestimmter in ihr liegender Punkt (G) zugeordnet und letzterem eine ganz bestimmte Fläche $\mathfrak{F}$. Somit sind jeder Ebene E_0 (oder auch jedem Punkte) zwei bestimmte Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ zugeordnet, welche beide E_0 als Tangentialebene haben. Auf die gegenseitigen Beziehungen dieser beiden sich so zugeordneten Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ sei hier nicht weiter eingegangen. Die Flächen selbst werden uns im II. Abschnitte nochmals begegnen.

§ 5. Die Kurven, deren Krümmung und Torsion einer Gleichung zweiten Grades genügen.

Die Relation zweiten Grades mit konstanten Koeffizienten sei in der Form geschrieben

$$\frac{A}{\varrho^2}+\frac{B}{T^2}+\frac{C}{\varrho T}+\frac{D}{\varrho}+\frac{E}{T}+F=0. \tag{12}$$

Die einer jeden mit dem Begleitdreikante fest verbundenen Ebene E zugehörige Kurve (G) hat nach (5′) die Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{b^2}(A a_1^2+B c_1{}^2+C a_1 c_1)\,u^2+\frac{a^2}{b^2}(A a_2^2+B c_2^2+C a_2 c_2)\,v^2 \\ +\frac{a^2}{b^2}(2A a_1 a_2+2B c_1 c_2+C a_1 c_2+C c_1 a_2)\,u v \\ +\frac{a}{b}(D a_1+E c_1)\,u+\frac{a}{b}(D a_2+E c_2)\,v+F=0\,.\end{aligned} \tag{13}$$

Als Bedingung dafür, daß diese C^2 eine Ellipse oder Hyperbel sei, erhält man nach längerer Vereinfachung

$$\frac{a^4}{b^2}F\cdot\left[F(C^2-4AB)+AE^2+BD^2-DEC\right]\lessgtr 0\,. \tag{14}$$

Die Bedingung dafür, daß C^2 eine Parabel sei, lautet

$$F=0. \tag{15}$$

Die Bedingung dafür, daß C^2 in zwei Punkte zerfällt, lautet

$$F(C^2-4AB)+AE^2+BD^2-DEC=0. \tag{16}$$

Diese Bedingungen sind, wie von vorne herein selbstverständlich ist, unabhängig von $a_1\ b_1\ c_1 \ldots$, d. h. von dem in der Ebene E gewählten Koordinatensystem. Sie sind aber auch abgesehen von dem Falle $a = 0$ unabhängig von a, b, c, d. h. von der Lage der Ebene E selbst. Daraus folgt:

Kurve (G) ist bei ***allen*** *mit dem Dreikante verbundenen Ebenen entweder eine Ellipse oder eine Parabel oder eine Hyperbel oder zerfällt in zwei Punkte, sodaß bei jeder vorgegebenen Kurve (12) nur* ***eine*** *Gattung von Kegelschnitten auftritt.*

Nach (15) folgt speziell:

Bei jeder Cesàro-Kurve bewegt sich jede mit dem Begleitdreikante verbundene Ebene so, daß ihre aufeinanderfolgenden Schnittgeraden in dieser Ebene die Tangenten einer Parabel bilden. Diese Eigenschaft kommt nur den Cesàro-Kurven zu.

Für die zur Tangente der Raumkurve parallelen Ebenen ($a = 0$) gilt natürlich das in § 3 ausgesprochene Resultat.

Die Bedingung (16) hat nicht nur das Zerfallen von Gleichung (13) in zwei lineare Faktoren zur Folge, sondern auch, wie man leicht sieht, das Zerfallen von Gleichung (12). Gleichung (12) stellt in diesem Falle zwei nicht zusammengehörige Bertrandsche Kurven dar und die in der Ebene E liegende C^2 zerfällt in zwei Punkte. Umgekehrt muß (12) in zwei Bertrandsche zerfallen, wenn C^2 in zwei Punkte zerfallen soll. Je nachdem das Begleitdreikant längs der einen oder anderen Bertrandschen Kurve sich fortbewegt bildet der eine oder andere der zwei Punkte das Zentrum des von den verschiedenen Schnittgeraden gebildeten Strahlenbüschels.

§ 6. Die Gleichung der C^2 (13) in Punktkoordinaten.

Ist

$$au^2 + bv^2 + cuv + du + ev + f = 0$$

die Gleichung einer eigentlichen C^2 in Linienkoordinaten, so erhält man als Gleichung dieser Kurve in rechtwinkligen Punktkoordinaten die folgende, deren Ableitung hier unterlassen sei

$$\begin{gathered}(e^2 - 4bf)x^2 + (d^2 - 4af)y^2 + (4cf - 2de)xy \\ + (4bd - 2ce)x + (4ae - 2cd)y + (c^2 - 4ab) = 0.\end{gathered}$$

Führt man dies an Kurve (13), welche als eigentliche C^2 vorausgesetzt sei, durch, so lautet die Gleichung dieses Kegelschnittes bezogen auf das in seiner Ebene gewählte Koordinatensystem $X_1 Y_1$ nach Vereinfachung also

$$(17) \quad \begin{aligned} &(pa_2{}^2 + qc_2{}^2 + 2ra_2c_2) X_1{}^2 + (pa_1{}^2 + qc_1{}^2 + 2ra_1c_1) Y_1{}^2 \\ &+ 2(-pa_1a_2 - qc_1c_2 - ra_1c_2 - rc_1a_2) X_1 Y_1 \\ &+ 2a(mc_2 - na_2) X_1 + 2a(-mc_1 + na_1) Y_1 + la^2 = 0. \end{aligned}$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt

$$p = D^2 - 4AF, \quad q = E^2 - 4BF, \quad r = DE - 2CF,$$
$$m = CE - 2BD, \quad n = CD - 2AE, \quad l = C^2 - 4AB.$$

Das der Gleichung (17) zugrundeliegende Koordinatensystem hat seinen Anfang in der Ecke des Begleitdreikantes. Der Kegelschnitt liegt in einer durch diese Ecke gehenden Ebene E und ist zugleich die Orthogonalprojektion aller Kegelschnitte in den zu E parallelen Ebenen auf die Ebene E.

Es sei nun nach jenen Kegelschnitten gefragt, welche ihren Mittelpunkt in der Ecke des Dreikantes haben. Es sind dies jene, für welche nach (17) die beiden Gleichungen erfüllt sind

$$(18) \quad \begin{aligned} mc_2 - na_2 &= 0 \\ mc_1 - na_1 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können dadurch erfüllt werden, daß die Determinante $c_2 a_1 - a_2 c_1$, welche den Wert b hat, verschwindet. Der Fall $b = 0$ ist aber bereits in § 3 erledigt. Wir haben daher als Lösung von (18)

$$m = n = 0.$$

Dies hat aber zur Folge

$$\text{I. } E = D = 0 \text{ oder}$$

$$\text{II. } A = \frac{CD}{2E}, \quad B = \frac{CE}{2D}.$$

Die letztere Lösung hat, wie man durch Einsetzen der Werte in (16) unmittelbar erhält, das Zerfallen der C^2 (13) zur Folge und kommt als Widerspruch mit der Voraussetzung nicht in Betracht.

Die erste Lösung, die das Zerfallen von (13) bzw. (12) nicht zur Folge hat, sagt aus: Bei allen Kurven mit der Gleichung

$$\frac{A}{\varrho^2} + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{\varrho T} + F = 0$$

und nur bei diesen liegen die Mittelpunkte der Kegelschnitte, welche den durch die Ecke des Dreikants gelegten Ebenen zugehören, in der Ecke dieses Dreikantes. Je nachdem hier (s. 14) $C^2 - 4AB \lessgtr 0$ ist, ist der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel.

Für die Mittelpunktskoordinaten des beliebigen Kegelschnittes (17) erhält man durch einfache Berechnung die Werte

$$(X_1) = -\frac{a}{b(r^2 - pq)}\left[(mp + nr)a_1 + (mr + nq)c_1\right]$$

$$(Y_1) = -\frac{a}{b(r^2 - pq)}\left[(mp + nr)a_2 + (mr + nq)c_2\right].$$

Dazu kommt noch für den Fall, daß die Ebene nicht durch die Ecke des Dreikants, sondern durch den Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ geht

$$(Z_1) = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

Auf das Begleitdreikant selbst bezogen hat der Mittelpunkt die Koordinaten

$$X = a_1(X_1) + a_2(Y_1) + a(Z_1)$$
$$= \frac{a}{b(r^2 - pq)}\left[(mr + nq)ac + (mp + nr)(a^2 - 1)\right] + aZ_1$$
$$Y = b_1(X_1) + b_2(Y_1) + b(Z_1)$$
$$= \frac{a}{b(r^2 - pq)}\left[(mr + nq)bc + (mp + nr)ab\right] + bZ_1$$
$$Z = c_1(X_1) + c_2(Y_1) + c(Z_1)$$
$$= \frac{a}{b(r^2 - pq)}\left[(mr + nq)(c^2 - 1) + (mp + nr)ac\right] + cZ_1.$$

Der Vergleich dieser Formeln mit den Gleichungen (9) in § 4 führt zu einem bemerkenswerten Zusammenhang der Kurven (12) mit den Bertrandschen Kurven. Wählt man nämlich für die Bertrandsche Kurve (6) als Konstanten die Größen

$$\overline{m} = \frac{mp + nr}{r^2 - pq},$$

$$\cot g\,\Theta = -\frac{mr + nq}{mp + nr},$$

so erhält man dortselbst als den der Ebene E zugeordneten Punkt (G) eben den Mittelpunkt des derselben Ebene hier zugehörigen Kegelschnittes. Wir haben also:

Zu jeder Kurve, deren Krümmung und Torsion einer Gleichung zweiten Grades (12) genügen, gibt es eine Bertrandsche Kurve mit der Relation

$$\frac{mp + nr}{\varrho} + \frac{mr + nq}{T} + pq - r^2 = 0.$$

Bewegt sich das Dreikant längs der ersteren, so erzeugen die aufeinanderfolgenden Schnittgeraden einer jeden Ebene E einen Kegelschnitt. Bewegt es sich aber längs der letzteren, so bilden die aufeinanderfolgenden Schnittgeraden derselben Ebene E ein Strahlenbüschel, dessen Zentrum der Mittelpunkt jenes Kegelschnittes ist.

Daher erhält man bei den Kurven (12) als Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte in den ∞^2 durch einen Punkt P_0 gelegten Ebenen die Fläche $\mathfrak{F}$ (10) und als Ort der Ebenen, für deren Kegelschnitte die ∞^2Punkte einer Ebene E_0 Mittelpunkte sind, die Fläche $\mathfrak{F}_1$ (11).

Anmerkung 1. Im Falle $m = n = 0$, also bei den Kurven

$$\frac{A}{\varrho^2} + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{\varrho T} + F = 0$$

existiert die genannte Bertrandsche Kurve nicht. Der Ort $\mathfrak{F}$ der Mittelpunkte in den Ebenen durch P_0 ist hier eine Kugel, deren Durchmesser die Verbindungsstrecke von P_0 mit der Ecke des Dreikantes ist. Die der Ebene E_0 zugeordnete Fläche $\mathfrak{F}_1$ hat die Gleichung

$$U^2 + V^2 + W^2 - Uu_0 - Vv_0 - Ww_0 = 0 .$$

Anmerkung 2. Die einer Cesàro-Kurve in diesem Sinne zugeordnete Bertrandsche ist wegen des Unendlichwerdens von $\overline{m}$ eine Schraubenlinie.

§ 7. Die Kreise unter den Kegelschnitten (17).

Um jene Ebenen E aufzusuchen, in denen die aufeinanderfolgenden Schnittgeraden die Tangenten eines Kreises bilden, sind in (17) die Faktoren von X_1^2 und Y_1^2 einander gleich zu setzen und der Faktor von $X_1 Y_1$ zum Verschwinden zu bringen. Die Elimination von $a_1 b_1 c_1$ ergibt dann die gesuchte Ebene. Es scheint jedoch dieses Verfahren auf Schwierigkeiten zu stoßen, weshalb folgender Weg zur Lösung der gestellten Frage eingeschlagen sei.

Es seien, wie in § 1, $x_0 y_0 z_0$ die Koordinaten eines in der Ebene E gelegenen Punktes P_0 inbezug auf das Dreikant. Die Schnittgerade G der Ebene E mit ihrer benachbarten Lage ist dann bestimmt durch die Gleichungen (2′) und (3′), da (3′) selbst eine gewisse durch G hindurchgehende Ebene darstellt. Wie man sofort erkennt ist Ebene (3′) senkrecht zur Ebene E. Daher erhält man den Abstand d des Punktes P_0 von der Schnittgeraden G, indem man den Abstand d des Punktes P_0 von der Ebene (3′) berechnet. Dadurch erhält man

$$d = \frac{-\frac{b x_0}{\varrho} + y_0\left(\frac{a}{\varrho} + \frac{c}{T}\right) - \frac{b z_0}{T} - a}{\sqrt{\left(\frac{b}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{a}{\varrho} + \frac{c}{T}\right)^2 + \left(\frac{b}{T}\right)^2}}. \tag{19}$$

Stellt man nun die Forderung, daß dieser Abstand einen konstanten Wert d habe, so lautet die Bedingung hiefür, die man durch Quadrieren von (19) erhält

$$\begin{aligned} &\frac{(b x_0 - a y_0)^2 - d^2(1 - c^2)}{\varrho^2} + \frac{(b z_0 - c y_0)^2 - d^2(1 - a^2)}{T^2} \\ &\quad + \frac{2\left[(b x_0 - a y_0)(b z_0 - c y_0) - d^2 a c\right]}{\varrho T} \\ &\quad + \frac{2 a (b x_0 - a y_0)}{\varrho} + \frac{2 a (b z_0 - c y_0)}{T} + a^2 = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Wenn für eine Raumkurve diese Bedingung erfüllt ist, dann hat die Schnittgerade G den konstanten Abstand d vom Punkte P_0, d. h. die Ebene E schneidet sich entweder stets in derselben Geraden oder die Geraden G bilden die Tangenten eines Kreises mit dem Mittelpunkte P_0 und dem Radius d. Ob ersteres oder letzteres eintritt, entscheidet der Umstand, ob die Richtungswinkel der Schnittgeraden konstant oder eine Funktion von s sind. Da nach (2′) und (3′) im allgemeinen das Letztere der Fall ist, so ist unter der Bedingung (20) Gerade G Tangente an einen Kreis. Ebene E bewegt sich so fort, daß die Tangenten an die Gratlinie der von ihr erzeugten abwickelbaren Fläche in der Ebene selbst einen Kreis erzeugen. Sollen derartige Ebenen existieren, so muß zwischen Krümmung und Torsion der Raumkurve C die Gleichung (20) bestehen. Diese Gleichung ist bei jeder beliebigen Raumkurve erfüllt in den Fällen:

1. $a = b = 0,\ c = 1,\ d^2 = y_0^2;$
2. $a = 0,\ x_0 = 0,\ d = 0.$

In diesen beiden Fällen aber ist, wie man leicht erhält, die Richtung der Schnittgeraden G konstant, so daß keine Kreise vorliegen, sondern lediglich das bereits in § 3 festgestellte Resultat:

1. Jede zur Schmiegungsebene parallele Ebene schneidet sich stets in derselben Geraden, die zur Tangente parallel ist.

2. Jede zur Tangente parallele Ebene E schneidet sich stets in einer Geraden des durch den Punkt P_0 gelegten Strahlenbüschels

($d = 0!$). P_0 ist hier der Fußpunkt der von der Ecke des Dreikantes auf E gefällten Senkrechten.

Erfüllt eine Raumkurve die quadratische Gleichung (12) mit konstanten Koeffizienten, so läßt sich leicht zeigen, daß stets Ebenen mit je einem der verlangten Kreise existieren. Man erhält diese Ebenen und ihre Kreise durch Auflösung des folgenden Gleichungssystems, welches sich aus der Vergleichung der Relationen (20) und (12) ergibt:

$$
(21)\qquad
\begin{aligned}
&(b x_0 - a y_0)^2 - d^2 (1 - c^2) = \sigma A\\
&(b z_0 - c y_0)^2 - d^2 (1 - a^2) = \sigma B\\
&2 (b x_0 - a y_0)(b z_0 - c y_0) - 2 d^2 a c = \sigma C\\
&2 a (b x_0 - a y_0) = \sigma D\\
&2 a (b z_0 - c y_0) = \sigma E\\
&a^2 = \sigma F\\
&a^2 + b^2 + c^2 = 1.
\end{aligned}
$$

Nach Elimination von σ sind dies 6 Gleichungen für die 7 Größen $a, b, c, x_0, y_0, z_0, d$. Man erhält daraus die Lösungen

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
d^2 &= \frac{1}{8F^2}\left\{ p - q \underset{(-)}{+} \sqrt{(p-q)^2 + 4r^2} \right\},\\
a^2 &= \frac{4F^2 d^2}{q + 4F^2 d^2},\\
c^2 &= \frac{q - p + 4F^2 d^2}{q + 4F^2 d^2},\\
b^2 &= 1 - a^2 - c^2 = \frac{p - 4F^2 d^2}{q + 4F^2 d^2},\\
x_0 &= \frac{a}{b}\left(y_0 + \frac{D}{2F}\right),\\
z_0 &= \frac{1}{b}\left(c y_0 + \frac{aE}{2F}\right),
\end{aligned}
$$

dabei bedeuten p, q, r dieselben Größen wie in § 6. Die Größen a, b, c, d, x_0, z_0 sind hiemit durch die Koeffizienten der Gleichung (12) und die willkürliche Größe y_0 ausgedrückt.

Reellitätsbedingungen:

1. Zur Reellität von d ist notwendig und hinreichend, daß die Wurzel nur mit positivem Vorzeichen genommen wird.
2. Damit $a^2 \overline{\overline{<}} 1$ werde, ist notwendig und hinreichend $q \geqq 0$.
3. Damit $c^2 \overline{\overline{<}} 1$ werde, ist notwendig und hinreichend $p \geqq 0$.

4. Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Reellität von b findet man nach Einsetzen des Wertes von d^2

$$pq > r^2.$$

Letztere Bedingung macht eine der beiden vorausgehenden Bedingungen überflüssig, da z. B. unter den Bedingungen 3) und 4) die Bedingung 2) von selbst erfüllt ist.

Die beiden notwendigen und hinreichenden Reellitätsbedingungen lauten, ausführlich geschrieben, folgendermaßen

$$D^2 - 4AF \geqq 0$$

$$F.[F(C^2 - 4AB] + AE^2 + BD^2 - DEC] < 0.$$

Letzteres ist aber nach (14) die Bedingung dafür, daß (G) eine Ellipse ist. Aus den Lösungen (22) folgt daher das Resultat:

Liegt bei einer Kurve, deren Krümmung und Torsion einer Gleichung zweiten Grades von der Form (12) genügen, der elliptische Fall vor, so existieren unter der Voraussetzung $D^2 \geqq 4AF$ stets zwei Scharen von reellen Parallelebenen, in denen (G) je ein Kreis ist. Alle Kreise haben gleichen Radius und die Mittelpunkte einer Kreisschar liegen auf einer Normalen zu ihren Ebenen.