Die ebene Curve zweiter Ordnung
als Resultat räumlicher Darstellung.

Von

Prof. R. Oehler.

Zu den unstreitig interessantesten Aufgaben aus dem Gebiete der darstellenden Geometrie gehören jene, deren Lösung Curven zweiter Ordnung ergibt. Erstens haben sie stets sehr wichtige Eigenschaften im Gefolge, deren eingehende Erörterung auf constructivem Wege in zweckdienliche Übereinstimmung gebracht werden kann mit den einschlägigen Untersuchungsergebnissen der Analysis, ferner wird zweitens der Schüler (und — was ich gleich an dieser Stelle bemerken will — meine Absicht in den vorliegenden Betrachtungen ist, dem Verständnisse des Realschülers gerecht zu werden) im Bewusstsein des Umstandes, eine ebene Curve genannter Ordnung zu erhalten, stets sich die Natur derselben vor Augen halten können, sohin leicht imstande sein, allfällige, oft kaum zu vermeidende Constructions-Ungenauigkeiten durch correctes Erfassen der gebotenen Verhältnisse zu paralysieren. Dieses wird selbstverständlicherweise umso erfolgreicher gelingen, je mehr sich die Schüler in der 4. Classe mit den ebenso wertvollen als zahlreichen Eigenschaften der Kegelschnittslinien vertraut gemacht haben.

Wo es mir angezeigt erscheint, da werde ich die Constructions-Ergebnisse auch auf mathematischem Wege zu beweisen versuchen, jedoch nie außeracht lassen, dass man auch der möglichst genauen Construction eine gewisse Beweiskraft zuerkennen müsse; letztere hat dann freilich in jenen Fällen ausschließlich herzuhalten, wo der Beweis ersterer Art zu umständlich oder hinsichtlich der Vorbildung der Schüler etwa gar unausführbar wäre. Hat man aber beim Unterrichte in all' den Fällen, wo ein mathematischer Beweis thunlich ist, denselben in thatsächlichen Einklang gebracht mit der durchgeführten Zeichnung, dann hat der Lehrende sicherlich auch jenes Maß von Vertrauen seitens der Schüler erlangt, das ihn der Verpflichtung enthebt, überall gleich die unanfechtbar constatierende Mathematik zuhilfe zu rufen; sieht des ferneren noch der Schüler, dass er durch genaue Construction auch so mancherlei nachzuweisen imstande ist, so kann das für ihn nur ein Ansporn mehr sein zu stets gewissenhafter, zu geradezu mit minutiöser Genauigkeit vorzunehmender Durchführung seiner Constructions-Aufgaben räumlicher Natur. Selbstredend kann es nicht meine Vornahme sein, die Behandlung des bezughabenden Stoffes allzuweit auszuspinnen, doch will ich mein Augenmerk dahin richten, möglichste Mannigfaltigkeit zu bieten bei Vermeidung überflüssiger Wiederholungen.

In Figur 1 ist der Schnitt eines schiefen kreisförmigen Doppelkegels (ab, s) nach einer Hyberbel, deren Ebene MNO, dargestellt. — Die Schnitte nach Ellipse und Parabel blieben, weil doch immerhin weniger interessantes Material bietend, an dieser Stelle weg; auch werden in der Folge beide Arten krummer Linien, insbesonders aber die erstere, noch häufig genug inbetracht gezogen werden. — Die Kegelerzeugenden $1\,s$ und $2\,s$, welche der Scheitelebene $M_1N_1O_1$ angehören, geben die Richtungen der beiden Asymptoten an, denn sie sind ja gleichzeitig die einzigen zwei Erzeugenden, welche die schneidende Ebene erst im Unendlichen treffen; die Curve hat sohin zwei unendlich ferne Punkte, ist demgemäß eine Hyberbel. — Da es nun stets von großer Wichtigkeit ist, lieber weniger Punkte, dafür aber in jedem die entsprechende Tangente zu bestimmen, so sei zunächst Erwähnung gethan der Ermittlung solcher Linie für den oberen Schnittpunkt 3; die berührende Ebene dieses Punktes, $3\,4\,s$, schneidet die Deckfläche nach der Basistangente 3 4, die Scheitelebene aber nach der Geraden $4\,s$, daher die dazu parallele Ebene MNO nach der durch 3 gehenden, zu $4\,s$ parallelen Geraden $3\,T$. — Will man die Asymptoten, so suche man nur die Schnitte der berührenden Ebenen für die Parallel-Erzeugenden mit MNO, u. zw.: Tangente in 1, geschnitten mit MN, gibt in 5 einen Punkt des Schnittes der berührenden Ebene $1\,5\,s$ mit der schneidenden; dieser Schnitt muss aber parallel sein zur Erzeugenden $1\,s$, trifft diese mithin erst im Unendlichen und ist, als Schnitt einer tangierenden mit der schneidenden Ebene schon die Tangente in diesem unendlich fernen Schnittpunkte, somit eine Asymptote. Ähnlich findet man die zweite. — Soll man aber den tiefsten Punkt t des oberen und den höchsten h des unteren Astes ermitteln, deren Tangenten alldort im Aufrisse horizontal, im Raume also gleichlaufend sein müssen mit MN, so benütze man jene zwei Tangierungsebenen $m_2n_2o_2$ und $m_1n_1o_1$, deren Basistrassen parallel mit MN sind. Weil nun die Tangenten in h und t dieselbe Richtung haben, so ist ht der zu dieser conjugierte Durchmesser und die Mitte C desselben der Mittelpunnkt der Curve, welcher schon früher im Schnitte der beiden Asymptoten erhalten wurde. — Der Zusammenhang der Geraden ht und der von ihr halbierten Hyperbel-Basissehne ist aus der Figur ohnehin ersichtlich; desgleichen die Bestimmung des Contourpunktes γ für den unteren Ast (der obere Contourpunkt hat entsprechend der gewählten Annahme gleiches y mit dem Mittelpunkte der Deckfläche) mittelst der vertical-projicierenden Berührungsebene und der parallelen Schnittlinien H_1s und $H\gamma$. — Noch sei bemerkt, dass in der Darstellung die Ebene als undurchsichtig aufgefasst wurde, mithin im Grundrisse dasjenige vom Kegel sichtbar erscheint, was rechts und oberhalb, im Aufrisse hingegen das, was links und vor der Ebene liegt.

Die Durchdringung zweier schiefen Cylinder, beziehungsweise Halbcylinder, eines kreisförmigen und eines elliptischen, projiciert auf die Ebene ihrer sich schneidenden Achsen, bei gleicher Weite $[2\,.\,O(c) = 2\,.\,\omega(\gamma)]$ nach 2 Ellipsen erfolgend, stellt Figur 2 dar. Die Benützung der in gleichen Entfernungen von der gemeinsamen Achsenebene gelegten Schichtenebenen e_1 mit ε_1, e_2 mit ε_2 und e_3 mit ε_3 (die Contouren ergeben directe Schnittpunkte) ist ohneweiters der Zeichnung zu entnehmen. Es erübrigt daher etwa nur noch zu beweisen, falls man der hier ohnehin überaus einfachen Construction nicht Glauben schenken wollte, dass z. B. speciell $\varDelta'$, aus den Erzeugenden d und δ hervorgehend, in die gerade Linie mp fallen müsse. (Die symmetrische Anordnung betreffs der Achsenebene bedingt ja zunächst nur, dass stets ein Punkt der einen Seite mit dem entsprechenden Punkte der anderen gemeinsame Projection auf der Achsenebene habe.) — $OA = \omega\alpha$ gemacht und den elliptischen Bogen $(c)DA$ als schiefe Projection (oder auch Parallel-Schlagschatten) des Kreisbogens $(c)\,(d)\,a$ aufgefasst, ergibt sich sofort die Proportion: $x(d) : xD = Oa : OA$ oder $x(d) : Oa = xD : OA$, wobei f als Fixpunkt erachtet wird; daraus folgt aber weiter auch: $Od' : Oa = xD : OA$. Ferner ist $xD = y(\delta) = \omega\delta'$, weswegen ganz ebenso gilt: $\omega\delta' : \omega\alpha = xD : OA$. $\varDelta'$ aber muss nun schließlich in der Geraden mp liegen, denn das Verhältnis $H'\varDelta' : H'm$ lässt sich nach dem Doppelsysteme von vorhandenen Parallelen einerseits ausdrücken durch $Od' : Oa$, andererseits noch durch $\omega\delta' : \omega\alpha$, deren Gleichheit vorhin gezeigt wurde. — Gleichzeitig sei auch darauf hingewiesen, dass bei den in der Figur noch angeordneten zwei geraden elliptischen Halbcylindern, die in a_1b_1 mit $\alpha_1\beta_1$ und in 3 mit III je eine gemeinsame Ebene haben (letztere als berührend anzusehen), genau dasselbe gilt. — Weil nun beide Cylinder der ursprünglichen Annahme in e_3 mit ε_3 und der hiezu um die Achsenebene symmetrisch gelegten Ebene zwei gemeinschaftlich berührende Ebenen besitzen, so ist an dieser Stelle schon zn ersehen, dass zwei solche Cylinder zweiter Ordnung sich nach ebenen Curven schneiden müssen.

Auch für den Fall der Figur 3, wo sich die Achsen eines geraden Kreiskegels (ab, s) und eines geraden Kreiscylinders (Querschnitt dQ) in m schneiden, welche ferner nach der Annahme für f und den hiezu betreffs der Achsenebene symmetrischen Punkt zwei gemeinsame Tangierungs-Ebenen haben, lässt sich leicht zeigen, dass die Schnittcurven aII und bI Linien zweiter Ordnung sein müssen. — Zu diesem Zwecke erscheint alldort bei ganz speciell gewählten Maßen ein rechtwinkeliges Coordinatensystem gelegt, und möge der Beweis analytisch durchgeführt werden. Wohl käme im gegebenen Falle diese Begründung, wenn die einfache Construction auch hier nicht schon beweiskräftig genug sein sollte, post festum, da die Durchdringungsaufgabe in der 6. Classe behandelt wird, diese mathematische Beweisführung aber erst in der 7. Classe zur Erörterung gelangen könnte.

Es sei nun hier speciell die Gleichung des Cylinderbasiskreises . . . $x^2 + y^2 - 10y = 0$, ferner $f(f) = 4$, wodurch s die Ordinate $\frac{40}{3}$ bekommt, und bei $g(g) = 4$ die Gerade $s(g)$ die Gleichung . . . $y = \frac{17}{6}x + \frac{40}{3}$ hat; diese Gerade schneidet in (h) bei $\bar{x} = -\frac{80}{17}$ die Abscissenachse. — Fasst man, wie es die Construction ja verlangt, $(h)_1O = (h)O$ als Abstand der Sehne $(3)_1(4)_1$ vom Kreismittelpunkte O auf, so lässt sich beim Kreise ab, dessen Halbmesser leicht mit 10 berechnet werden kann, die Länge der halben Sehne, somit die Abscisse des Punktes 3 sehr bequem durch den Wert $\frac{150}{17}$ feststellen. Es wird danach die Gleichung der Geraden $3s$ . . . $y = \frac{68}{45}x + \frac{40}{3}$, welche mit der Geraden III IV zum Schnitte gebracht, das Coordinatenpaar $y' = 2$ und $x' = -\frac{15}{2}$ ergibt, welch' letzteres auch der Gleichung der Geraden aII . . . $y = \frac{4}{5}x + 8$ vollkommen entspricht. — Punkt III (als Schnittprojection einer Kegel- mit der entsprechenden Cylinder-

Erzeugenden) liegt also in der Geraden a II, es ist sohin die Existenz geradliniger Projectionen der Schnittcurven dargethan.

Figur 4 zeigt in „allgemeiner" Projection (die ebensogut für eine Horizontal-, Vertical-, als auch Kreuzriss-Projection genommen werden kann) den Schnitt zweier Kegelflächen zweiter Ordnung, die auf verschiedenen, nach MN sich schneidenden Basisebenen fußen, und bezüglich derer zunächst darauf hingewiesen werden soll, dass sie in $d a \delta$ und $d b \delta$ (wobei d und δ die Schnitte der Verbindungsgeraden beider Spitzen mit den Basisebenen sind) zwei gemeinsame Tangierungsebenen besitzen. I II ist dann die, den beiden Schnittcurven gleichzeitig entsprechende Berührungssehne; 1 und 2 sind die unteren Schnittpunkte der Contour des aufrecht gezeichneten Kegels mit der zweiten Kegelfläche. — Um nun die vier Tangenten in I und II zu erhalten (je eine in den genannten Punkten an jede der beiden ebenen Curven), bestimmt man die Schnitte der Ebenen I II 1 und I II 2 mit den eingangs schon hervorgehobenen gemeinsamen Berührungsebenen. Zu diesem Behufe sucht man zuerst die Trassen der Curven-Ebenen in der Ebene $\alpha\beta$; da I 1 von αf in y, II 1 von βf in x, ferner I 2 von αg in u und schließlich II 2 von βg in z geschnitten werden muss, so sind xy und zu die verlangten Trassen. Ihre Schnitte mit denen der Berührungsebenen (3 und 4 einerseits, 5 und 6 andererseits) geben, mit I und II verbunden, die verlangten Tangenten, wobei noch zu erwähnen ist, dass sie sich paarweise in $s\sigma$ schneiden müssen, was für den ersteren Fall auch in S sehr deutlich zu sehen ist. Dieser Schnitt aber muss erfolgen, weil 3 I mit 4 II in einer und derselben Ebene . . . jener der Curve I 1 II . . . sich befindet, beide aber den in $s\sigma$ sich treffenden, gemeinsamen Tangierungsebenen angehören. — Auch die Ermittlung der zu I II conjugierten Diameter unterliegt keiner Schwierigkeit; halbiert man nämlich in m die Berührungssehne I II und legt die Ebene $m\sigma s$, welche die Ebene $\alpha\beta$ nach δm_2, hingegen ab nach $m_1 d$ schneidet, so ergeben die Schnittpunkte der Erzeugenden 9σ und 10σ mit $7s$ und $8s$ die gewünschten Begrenzungspunkte, in welchen die Tangenten parallel zu I II sein müssen. (T ist eine der vier Tangenten und muss sie sich mit zu und der Basistangente für 10 in einem und demselben Punkte treffen.)

Figur 5 bringt zur Darstellung die gesammte Schattenconstruction einer Kugelhaube mit geneigtem Rande bei centraler Beleuchtung. — Dass die Selbstschattengrenze ein Kreis (ab) wird, bedarf wohl nicht erst einer näheren Erörterung; ebensowenig die Bestimmung der großen Achse $\alpha\beta$ des Schlagschattens auf xy. Die kleine Achse erhält man am besten mittelst λ'' und o (I) aus $1''$ (1), wobei o (I) als die kleine Halbachse sich ergibt, was aus den Beziehungen zwischen $1''$ als Pol und λ'' L'' als entsprechende Polare desselben hergeleitet werden kann . . . aber auch unter Hinweis darauf, dass die beiden Kegel (L, ab) und (λ, Horizontalkreis für 1) in 1 und dem von ihm gedeckten Symmetriepunkte zwei gemeinsam berührende Ebenen haben, mit Horizontraltrassen parallel zur Projections-Achse. — Dass in der soeben angedeuteten Symmetrie-Ebene (für $L\lambda$ horizontal-projicierend) c den Schatten nach C, d nach D werfen muss, ist ohnehin klar; um aber zu zeigen, dass die Schlagschattencurve eine ebene werde, darf man nur den Schatten von f (mittelst Paralleldrehung zur Bildebene und nachträgliche Verwendung des η für F) in F bestimmen. Eine genaue Durchführung dieser ganz einfachen Construction verschafft genugsam Überzeugung von der Natur der Resultatscurve, die, weil eben und auf einer Kugel liegend, wieder nur ein Kreis sein kann. Behufs größerer Deutlichkeit des Ganzen wurde der unterste Punkt d des Schnittkreises in den horizontalen Hauptmeridian gelegt, und der oberste alsdann so gewählt, dass sein Schatten nach C desselben Meridians falle; ferner wird noch bemerkt, dass A Scheitel des hyperbolischen Schattens der Kugel auf xz ist und die Aufrisse der contourtangierenden Lichtstrahlen hiefür Asymptoten werden.

Nicht Zufall ist es, dass die zwei Linien $c''d''$ und $C''D''$ sich mit $a''b''$ in einem und demselben Punkte σ treffen, und dieser selbst in die Ordinale für L fällt; der diesbezügliche Beweis möge unter Berücksichtigung der Figur 6 (analytisch) wie folgt gegeben, doch nur in Kürze durchgeführt werden. Es habe K die Gleichung ... $x^2 + y^2 = r^2$, P die Coordinaten $\begin{cases} o \\ +b, \end{cases}$ $1 \begin{cases} +r \\ o \end{cases}$ und $2 \begin{cases} -x' \\ -y'. \end{cases}$ Die Gleichung der Polare des Punktes P mit Rücksicht auf K ist: $\pi \ldots y = \frac{r^2}{b}$; ferner die der Geraden $P1$ oder $g_1 \ldots$ $y = -\frac{b}{r}x + b$ und der Geraden $P2$ oder $g_2 \ldots y = \frac{b + y'}{x'}x + b$. — Bringt man nun K mit diesen beiden Geraden zum Schnitte, so ergeben sich außer den bekannten Punkten 1 und 2 noch Punkt 3 mit den Coordinaten $\xi_3 = \frac{r(b^2 - r^2)}{b^2 + r^2}$ und $\eta_3 = \frac{2br^2}{b^2 + r^2}$ nebst Schnitt 4 mit $\xi_4 = \frac{x'(r^2 - b^2)}{r^2 + b(b + 2y')}$ und $\eta_4 = \frac{2br^2 + y'(r^2 + b^2)}{r^2 + b(b + 2y')}$. Die Gleichung der Geraden 1 2 oder L_1 lautet ... $y = \frac{y'}{r + x'}x - \frac{y'r}{r + x'}$, wonach der Schnitt S von L_1 mit π die Coordinaten hat $\bar{x} = r + \frac{r^2(r + x')}{by'}$ und $\bar{y} = \frac{r^2}{b}$. Setzt man schließlich die Coordinatenwerte der drei Punkte S, 3 und 4 in das analytische Kennzeichen für die Untersuchung, ob drei gegebene Punkte in einer Geraden liegen, so kommt man auf die identische Gleichung $\frac{r^2(r^2 - b^2)}{b(b^2 + r^2)} = \frac{(r^2 - b^2)r^2}{(b^2 + r^2)b}$. Die Berechtigung des Punktes σ der vorigen Figur ist somit dargethan, wozu noch bemerkt wird, dass dieser Punkt nicht nur zur Controle, sondern unter Umständen auch bei eventuell schiefem Schnitte an anderer Stelle immerhin von einigem Werte sein kann. Aus der Figur 6 ist weiterhin noch zu ersehen, dass PS die Polare für den Schnittpunkt m der beiden Diagonalen des Sehnenvierecks 1 2 4 3 ist, und leicht zu begreifen, dass diese Polare auf 2 3 dann senkrecht stehen müsse, wenn 2 3 ein Durchmesser ist; dies gilt aber für $C''d''$ in Figur 5 und daher fällt auch mit Fug und Recht σ in die Ordinale $L''L'$.

Figur 7, als schmucklose Darstellung der Durchdringung eines geraden Kreiskegels mit einer concentrischen Kugel nach zwei Parallelkreisen ... durch Rotation leicht zu erklären ... soll den bereits für den Fall der Figur 5 Geltung habenden Satz bekräftigen: Haben zwei Flächen zweiter Ordnung schon eine Linie der gleichen Ordnung gemeinsam, so muss ihr zweiter Schnitt wieder desselben Grades sein. Es geht ja hier nicht mehr mit den „zwei gemeinsamen Tangierungsebenen", während der eben ausgesprochene Satz auch für die früher behandelten Fälle gilt.

Die gesammte Schattenbestimmung an einem einmanteligen Rotations-Hyperboloide bei parallelem Lichte L zeigt Figur 8. — Dass die Trennungscurve zwischen Licht und Schatten bei dieser Annahme eine Hyperbel wird, die ihren Mittelpunkt gemeinsam hat mit dem der Fläche selbst. ist leichterdings zu erfahren; die Existenz einer ebenen Trennungslinie überhaupt durch Construction zu erweisen, gelingt am besten mit Lichtstrahlen parallel zur Ebene des Hauptmeridians, was hier allerdings auch durch Paralleldrehung zu erreichen gewesen wäre. (Nebenbei sei erwähnt, dass, wenn in solcher Stellung der Lichtstrahl mit der Kehlkreisebene einen größeren Winkel bildet, als die Erzeugenden des Asymptotenkegels, die Selbstschattengrenze eine Ellipse, bei kleinerem Winkel — wie hier — eine Hyperbel, bei gleichem aber ein Paar zu L paralleler Geraden wird, Erzeugenden der beiden Systeme der windschiefen Fläche; diese Geraden stellvertreten bei Parallelbeleuchtung die noch fehlende Parabel. Ein Kreis ergibt sich bei mit der Umdrehungsachse gleichlaufenden Lichtstrahlen.) — $NO \perp L''$ ist die Verticaltrasse der Hyperbelebene, p ein Punkt der Trennungslinie selbst, bestimmt mittelst des in der Parallelkreisebene e_1 berührenden Kegels.

Was nun den Schatten ins Innere anbelangt, so muss der nach dem vorhin ausgesprochenen Satze auch eine ebene Curve sein, denn die beiden Flächen (Hyperboloid und Lichtstrahlencylinder für den schattenwerfenden Randkreis) sind zweiter Ordnung und haben eine Curve gleichen Grades — nämlich den vorderen Kreis ab — schon gemeinsam zum Schnitte. — Doch gelten hier auch die beiden gemeinschaftlichen Tangierungsebenen, die in jenen Punkten gelegt werden können, von denen der Schlagschatten ins Innere ausgeht. Die Lichtstrahlen jener Punkte gehören nämlich dem Cylinder an, sind aber auch gleichzeitig Tangenten an die gegebene Fläche, weil sie ja Selbstschattenpunkte hervorrufen; ferner gelten als gemeinsam beiden Flächen die Kreistangenten in jenen Ausgangspunkten, mithin das Vorhandensein der zwei gemeinsamen Berührungsebenen vollkommen sichergestellt. — Will man, was ja immer zunächst geschehen soll, die Schlagschattenpunkte in der Meridianebene des Lichtstrahles haben, so wird man durch Paralleldrehen im Schatten von (a) [nach der Richtung (L)] den hintersten Schattenpunkt (h) . . . zufällig in den Kehlkreis kommend . . . hingegen im wohl imaginären,*) doch constructiv ebensogut verwendbaren Schatten (v) des Punktes (b) den vordersten Schlagschattenpunkt erhalten; da die Tangenten in diesen beiden stets parallel zu xz sein müssen, u. zw. senkrecht zu L'', so ist $h''v''$ eine Achse, $h'v'$ hingegen (durch Rückdrehung erhalten) ein Durchmesser der Schlagschattencurve, die hier, weil geschlossen, eine Ellipse werden muss. — (Was sich ergibt, wenn die Trennungslinie selbst eine Ellipse wird, das soll späterhin erörtert werden.) — In der parallelgedrehten Stellung, wo man auch noch andere Schattenpunkte finden und sich überzeugen könnte, dass sie sämmtlich für den Grundriss in einer Geraden liegen müssen, ist $(h)\,(v)$ eben diese Gerade, und man kann leicht erweisen, dass die Sehne der Schlagschattenausgangspunkte derselben projicierenden Ebene $(h)\,(v)$ angehöre. (In der nächsten Figur wird der Fall näher besprochen werden.) — Zur Bestimmung des zweiten conjugierten Durchmessers halbiere man hv in μ und D_c gibt dann denselben der Lage nach an; seine Größe muss bei Parallelbeleuchtung dem Durchmesser der schattenwerfenden Curve gleichen, doch lassen sich seine Grenzen 3 und 4 auch unabhängig ermitteln, u. zw. unter Zuhilfenahme der Parallelkreisebene e_3, in welcher jener Durchmesser liegt. Der Radius $o'z$ des Parallelkreises wird ohne Erweiterung der

*) So heißt correcterweise ein Schattenpunkt, der zur Lichtquelle hin fällt, während man jene Schattenpunkte, die nur deswegen nicht „wirkliche“ sein können, weil schon andere Zwischenobjecte sie aufnehmen, am besten „constructive“ nennt.

Hyperbel sehr einfach nach der durch Prof. Niemtschik bekannt gewordenen Methode gefunden, indem wz gleich der halben reellen Hyperbelachse als eine Kathete, $o'w$ als die andere eines rechtwinkeligen Dreieckes gilt, dessen Hypotenuse der in Frage stehende Halbmesser ist; die Tangenten in 3 und 4 sind parallel mit μh. (Jene eben benützte Construction findet ihre Begründung im Zusammenhange zwischen dem Hyperboloide und seinem Asymptotenkegel, in der sehr einfachen Beziehung jener Parallelkreise beider, die einer Ebene angehören; als eine der gewiss nicht zum wenigsten interessanten Eigenschaft mag hervorgehoben werden, dass die Ringfläche zwischen je zwei zusammengehörigen Parallelkreisen einen constanten Wert hat, u. zw. der Fläche des Kehlkreises gleicht.) — 1 und 2 sind Schlagschattenpunkte in der Ebene des Parallelkreises e_2, indem man einfach den Schatten, welchen der vordere Rand der Fläche auf die genannte Ebene wirft, zum Schnitte bringt mit dem Kreise selbst. — Der Schatten der Trennungslinie auf die Ebene xz ist wieder eine Hyperbel, deren Asymptoten die Schlagschatten der Asymptoten jener Curve sind; Mittelpunkt ist m, Schatten von C.

Von ungemeinem Interesse sind die Beleuchtungserscheinungen am Rotations-Paraboloide (es wurden mit Rücksicht auf eine einleitende Bemerkung von derartigen Flächen zweiter Ordnung eben nur solche vorgeführt, welche durch Umdrehung entstanden sind), und sollen sie speciell für centrale Beleuchtuug in Figur 9 zur Behandlung kommen. Es unterliegt wieder keinerlei Schwierigkeit, Punkte der Selbstschattengrenze in einzelnen Parallelkreisen (so z. B. 3 und die hiezu um die Ebene des Lichtquelle-Meridianes symmetrische Lage in e) mittelst der betreffenden Berührungskegel zu erhalten; auch ist bequem zu finden γ'', der Punkt in der Aufriss-Contour, zugleich Berührungspunkt der Tangente von L'' an dieselbe. (Die Tangente ist eben Verticaltrasse der durch L an den, das Paraboloid berührenden, vertical-projicierenden, parabolischen Cylinder selbst berührend gelegten Ebene; dort, wo die Berührungserzeugende des Cylinders von der Berührungsparabel desselben mit der Rotationsfläche geschnitten wird, tangiert eben jener Lichtstrahl aus L das Paraboloid selbst.) — Der tiefste Punkt t wird mittelst Paralleldrehung (hier bezüglich xz) erhalten und ward L so angenommen, dass t in die Ordinate des Brennpunktes F zu liegen kam; Ll ist die Leitlinie. — Der höchste Punkt (h) ist durch die Tangente nach aufwärts zu erreichen und muss immer bei centraler Beleuchtung existieren, weil von einem Punkte (L) an eine Parabel stets zwei Tangenten gezogen werden können; die Verticale durch (L) halbiert aber den Abstand $(h)\,(t)$, da sie als conjugierter Durchmesser für die Parabel auftritt, muss somit das Centrum (C) der gedrehten Trennungslinie enthalten. (Eine Andeutung über die Construction der Tangenten von einem Punkte an eine Parabel gibt der aus (L) mit $(L)\,F$ beschriebene Bogen Fq, von dem in Ll allerdings nur der eine, erreichbare Schnittpunkt q . . . vertical unter (t) . . . vorhanden ist.) Führt man die Sehne (1) des Randes und der Ebene $(h)\,(t)$ zurück, so sieht man, dass sie vollkommen übereinstimmt mit der Sehne 1 2, die früher schon für die Selbstschattenpunkte des Randes ermittelt wurde. Von der Construction des conjugierten Durchmessers der Curve musste hier aus leicht erklärlichen Gründen Umgang genommen werden, doch auf das eine sei noch ganz entschieden hingewiesen, was man bei einigermaßen genauer Construction sofort wahrnehmen kann: Es ist die Curve $2'\gamma't'3'1'$ ein Kreisbogen, für den L' das Centrum C' ist; ließe sich der hier fehlende conjugierte Durchmesser bestimmen, so wäre seine horizontale Projection an Länge gleich $2 . L't'$, übereinstimmend mit dessen wahrer Größe.

Schiefe Ebenen schneiden das Paraboloid nach Ellipsen, deren Projectionen auf die Parallelkreisebenen Kreise werden. Ebenen hingegen, die parallel sind zur Umdrehungsachse, schneiden die Fläche nach Parabeln; eine solche Curve kommt auch zum Vorschein bei Parallelbeleuchtung, da der Berührungspunkt der zweiten Tangente, parallel zum Lichtstrahle an die Parabel des Lichtstrahl-Meridians gelegt, diese erst im Unendlichen berührt, mithin sich eine Curve mit nur einem unendlich fernen Punkte ergibt. Es wird sohin bei parallelem Lichte die Trennungslinie sich auf die Parallelkreisebene stets als Gerade projicieren. — Schnitte nach Hyperbeln können entsprechend dem bereits Angeführten nie erfolgen, auch schon deswegen nicht, weil ein zweiter Ast nie und nimmer erhältlich wäre.

Für (L) gibt (a) den Schlagschatten des untersten Punktes ... (u) ... und (b) ruft den wohl wieder nur constructive Bedeutung habenden obersten Punkt (o) hervor; es werden in der Rückdrehung dann wieder die Projectionen von o und u einen Durchmesser geben (im Grundrisse gar eine Achse), dessen conjugierter D_c ähnlich bestimmt wird, wie im früheren Beispiele. — Bringt man den Schnitt des Kegels (Parallelkreis in e und Spitze L) mit der schattenwerfenden Linie in Contact, so findet man, dass die Punkte 4 und 5 es sind, welche ihre Schatten in den Parallelkreis für e nach IV und V werfen; sie fallen bei genauer Construction in die schon früher bestimmte Kreisprojection der elliptischen Schlagschattencurve. — Zur Ermittlung letzterer kam hier ein Kegel zweiter Ordnung mit einem Paraboloide zum Schnitte, von denen man wieder aussagen kann, sie hätten zwei gemeinsame Tangierungsebenen, daher zwei ebene Schnittcurven; beziehungsweise schon eine ebene Curve ... den Rand ... als gemeinschaftlichen Schnitt, mithin noch eine zweite ebene Curve zu erwarten. — Der leicht zu bestimmende Schlagschatten auf die Projectionsebenen blieb absichtlich ganz unberücksichtigt.

Sicherlich leichter, denn im vorhergehenden Falle, ließe sich hier wieder auf „eben"-analytischem Wege der ebene Charakter der Curven successive nachweisen, doch könnte dies den Rahmen des vorliegenden Aufsatzes wohl überschreiten, weswegen der bloße Hinweis auf die Möglichkeit dessen an dieser Stelle genügen wolle.

In Figur 10 ist die Annahme so getroffen, dass die Selbstschattengrenze an dem einmanteligen Rotations-Hyperboloide (bei Central-Beleuchtung diesmal) eine Ellipse, der Schlagschatten des Randes aber auf die untere Außenfläche (denn einen Schatten ins Innere kann es hier begreiflicherweise nicht geben) eine Parabel werde, u. zw. letzteres, indem der Lichtstrahl durch a parallel gelegt wurde zu der einen Asymptotenrichtung. l ist der am meisten links, r der am meisten rechts befindliche Punkt des Selbstschattens, 1 2 die Sehne desselben im Kehlkreise, schließlich lr bei vorhandener Wahl der Lichtquelle schon eine Achse. — b wirft den Schlagschatten nach B, a vermöge vorgenommener Wahl nach $A\infty$, da die Hyperbel zum zweitenmale erst im Unendlichen geschnitten wird; es gibt sohin einen unendlich fernen Punkt, weswegen, wie schon erwähnt, der Schlagschatten eine Parabel wird, deren Scheitel B ist. Die Sehne 3 4 im Parallelkreise e ist nur controlweise bestimmt mittelst des Schattens K_2 des oberen Randes auf die Ebene e, und der Kreis K_1 ist dessen Schlagschatten auf xy; diejenige Sehne, welche dieser Kreis mit dem unteren Rande gemeinsam hat, ferner die Sehne 3 4 und B projicieren sich für den Aufriss in eine und dieselbe Gerade. Aus ähnlichem Grunde, wie bei Figur 5 betreffs des Punktes σ nachgewiesen wurde, schneiden sich auch hier $a''b''$ und $B''3''$ in der Geraden $l''r''$, doch bleibt die Beweisführung, als wohl umständlicher wie dort, weg. Die elliptische Selbstschattengrenze bei parallelem Lichte bedingt auch einen elliptischen Außen-Schlagschatten; hingegen erscheint bei einem Paare paralleler Geraden als Grenze überhaupt kein Schlagschatten am Körper, denn jene beiden Erzeugenden befinden sich im „Streiflichte".

Figur 11 veranschaulicht den Schnitt zweier Rotationsflächen, die eine berührende Kugel K gemeinsam haben (nur denkbar, wenn die Achsen sich schneiden), mithin auch die den beiden Berührungskreisen (K_1 auf dem Rotationsellipsoide und K_2 auf dem, dem Querschnitte nach geraden Kreiscylinder) entsprechende Sehne 1 2, und mit ihr ferner noch die in den Endpunkten derselben gelegten zwei Tangierungsebenen, weshalb auch dieser Schnitt nach ebenen Curven erfolgt. — Versucht man hier die Construction ohne Rücksicht auf das Vorkommen ebener Schnittlinien zweiter Ordnung mittelst solcher Kugeln (z. B. K_3), welche beide Flächen nach Kreisen schneiden, deren Mittelpunkte also nur in O sein können, so begibt man sich speciell in vorliegendem Falle wohl auf ein Feld ganz bedeutender Ungenauigkeiten, wie die Schnitte P und p'' gewiss genugsam klarlegen; es ist also hier wieder von sehr großem Vortheile, über die Natur der zu erwartenden Curven früher schon ganz im reinen zu sein, was auch im Falle einer bloß skizzenhaften Darstellung von besonderem Werte ist, einer Darstellungsart, wie sie ja im Leben des Technikers nicht selten vorkommt. — Ich verhehle mir nicht, dass ich bei Wahl anderer Rotationskörper wohl ein deutlicheres, ein zweckentsprechenderes Bild hätte bekommen können, doch war mir darum zu thun, zum Unterschiede auch 'mal ein Ellipsoid zu bringen.

Die letzte Figur (12) zeigt das Bild des von mir angegebenen Modellkegels unserer Lehranstalt in einem Viertel seiner linearen Ausdehnungen. Es stellt einen geraden elliptischen Kegel vor, der nach den zwei verschiedenen Kreisen, ferner noch nach Parabel und Hyperbel geschnitten ist. Was die ersteren anbelangt, so gibt die Kreuzrissprojection in, der Deutlichkeit des Aufrisses halber dort wieder gedrehter Stellung die verticalprojicierenden Lagen 1 2 und 3 4 jener beiden Ebenen an, u. zw. ist $c''d'' \parallel 3\,4$, $h''l'' \parallel 1\,2$ gelegt. — K''' ist nämlich die Kreuzrissprojection jener Kugel, welche in a und b den Kegel berührt, sonst aber nach zwei Kreisen schneidet; Kugel und Kegel haben für a und b zwei gemeinsam berührende Ebenen, sind beide zweiter Ordnung, schneiden sich mithin nach Linien desselben Grades, welche mit Rücksicht auf die Kugel eben nur Kreise sein können.

Der Kegel ist nach $e7$ parabolisch, nach $f5$ hyperbolisch und nach scd achsial geschnitten, doch nur ober cd, damit der von der elliptischen Basis, dem sie in d berührenden Kreise cd und einem Stück Kegelmantelfläche begrenzte Fuß dem Ganzen einen gewissen festen Halt verleihe. Bezüglich der Hyperbel-Asymptoten sei noch erwähnt, dass dieselben parallel sein müssen zu sr und dessen Symmetrielage, dass sie aber ausgehen vom gemeinsamen Mittelpunkte m, der Streckenmitte von fg ($mt \parallel sr$). — Im besonderen sei noch bemerkt, dass die Hyperbelsehne 5 6 den Mittelpunkt des Kreises cd enthält, und die Mitte der Parabelsehne 7 8 in der bereits genannten Symmetrie-Schnittebene cds des Kegels liegt. Es ist dies alles so angeordnet worden, um das Modell, welches von der Firma für Modell-Erzeugung „Karl Grund & Sohn" angefertigt wurde, und der ich auch damals (Jänner 1879) gleich das vollkommen freie Benützungsrecht hinsichtlich Wiederherstellung zugestand, zu einem möglichst praktischen zu gestalten.

Das Schraffieren der Schatten bei den Figuren 5, 8, 9 und 10 unterblieb, sowie auch das kräftigere Hervorheben der Resultatslinien, damit die

Genauigkeit der einzelnen Schnitte und Berührungspunkte nicht darunter leide. Achsen sind, wo es nicht ausdrücklich erwähnt ist im Texte, doch immerhin in den betreffenden Figuren ersichtlich gemacht worden; hingegen blieben so manche Controltangenten im Interesse der größeren Deutlichkeit fort. Gerne hätte ich auch noch einschlägige Schattenaufgaben für Kegel- und Cylinderflächen beigefügt, deren Durchführung sich zuweilen unter den erörterten Gesichtspunkten besonders zweckmäßig vornehmen lässt, doch musste ich mir in Hinsicht auf wichtiger erscheinende Probleme so manche Beschränkung auferlegen.

Der Wert ebener Curven zweiter Ordnung kann nie hoch genug gehalten werden, die Genauigkeit ihrer Zeichnung ist jederzeit höchstes Gebot der Nothwendigkeit. Ich habe mich deshalb auch veranlasst gesehen, im Jahre 1876 schon die astronomische Elementarfigur,*) die man leider heutzutage allermeist noch immer nicht ganz in Ordnung gezeichnet findet, in correcter Darstellung zu bringen; auch fand ich mich bestimmt, im Jahre 1883 dieselbe Figur für unsere Schule als Wandtafel zu zeichnen (Durchmesser 101 *cm*), wobei ich in, zumal für den Massenunterricht verbesserndem Sinne, die verschiedenen Coordinatensysteme auch verschiedenfarbig behandelte. — Schon mein erster Programm-Artikel „Die Winkelebene“**) zeigt in Figur 8 jene aufmerksame Sorgfalt, mit welcher ebene Curven zweiten Grades zu allen Zeiten und an allen Orten behandelt werden sollen, sowie ich auch seit Jahren im Freihandzeichnen-Unterrichte der ersten Classe stets ein Blatt fertigen lasse, das sich nur auf die Einzeichnung der Ellipse in Rechteck, Parallelogramm, Trapez und Trapezoid — in steter Bezugnahme auf den Kreis im Quadrate — alles nach mathematisch genauen, zum Theile auch in Perspective zur Anwendung kommenden Principien, bezieht. Man muss sich eben auch hierin vor Augen halten, dass „für die Jugend das Beste eben gut genug“ ist, und dass man auf keiner Stufe des Unterrichtes sich mit Näherungs-Constructionen, bloßen „Surrogaten“ begnügen darf, wenn daneben meist unschwer zu bewältigende, verlässliche, ihrem Wesen nach unanfechtbare Darstellungen bestehen.

Auch will ich schließlich noch ganz offen gestehen, dass mir nicht wenig darum zu thun ist, neuerlich, u. zw. diesmal schriftlich darauf hinzuweisen, dass man in der darstellenden Geometrie der Realschule ganz und gar der „neueren Geometrie“ entbehren könne, ja, dass ich die vollkommen feste Überzeugung hege, es werde durch die früher ganz allgemeine, mehr „räumliche“ Behandlung des Gegenstandes, das Vorstellungsvermögen der Schüler (doch eigentlich gewiss einer der Hauptzwecke dieses Unterrichtszweiges!) unverhältnismäßig mehr geweckt und gefördert. Ich folge hierin bereitwilligst dem nachahmenswerten Vorbilde eines ungemein fleißig gewesenen Mannes, des für unsere Wissenschaft leider nur zu früh verstorbenen Herrn Rudolf Niemtschick, k. k. o. ö. Professor der Wiener technischen

---

*) Jahresbericht unserer Lehranstalt von 1876.
**) Erster Jahresbericht der Teschner St.-R.-Sch. 1874.

Hochschule, meines mir unvergesslichen Lehrers, zu dessen aufmerksamsten Schülern ich in jener Zeit zählte, wo ich (vom October 1870 bis Februar 1873) die Ehre hatte, sein Assistent zu sein. Gewiss, er war ein unentwegter Vorkämpfer im Sinne des Altbewährten, unablässig bestrebt, den Stoff wissenschaftlich zu bereichern (ein rühmlich' Zeugnis hiefür geben seine schier zahllosen akademischen Abhandlungen); darum will ich auch allezeit sein Angedenken ehrend hochhalten und in seinem Sinne weiter wirken.