Zur sphärischen Trigonometrie.

In seinem „Leitfaden für den geometrischen Unterricht, zweiter Theil: Trigonometrie (Breslau 1882, Verlag von Eduard Trewendt)“ gibt Dr. Richard Heger in Dresden die **vollständigen** Determinationen für die zwei Aufgaben:

„Von einem sphärischen Dreieck sind zwei Seiten und der Gegenwinkel einer dieser Seiten gegeben; das Dreieck aufzulösen.“

„Von einem sphärischen Dreieck sind zwei Winkel und die Gegenseite eines dieser Winkel gegeben; das Dreieck aufzulösen.“

Im Vereine mit Herrn Eduard Grohmann in Wien hat der Unterzeichnete diese Determinationen in folgende für das Gedächtnis bequemere (und gleich für beide Fälle geltende) Fassung gebracht.

Unter den drei gegebenen Stücken sind immer zwei gleichartige (zwei Seiten, zwei Winkel); das dritte Stück mag als das ungleichartige mit u bezeichnet werden. In Bezug auf u ist das eine der gleichartigen Stücke das gegenüberliegende (g), das andere das anliegende (a). Ferner wollen wir sagen, die Gegenstücke g und u seien gleichnamig, wenn beide spitz, oder beide rechtwinkelig, oder beide stumpf sind, dagegen ungleichnamig, wenn das eine spitz und das andere rechtwinkelig oder stumpf, oder das eine rechtwinkelig und das andere schiefwinkelig, oder das eine stumpf und das andere spitz oder rechtwinkelig ist.

Wenn wir endlich noch vereinbaren, nur Dreiecke zu betrachten, in welchen jede Seite und jeder Winkel zwischen 0^0 und 180^0 liegt, so haben wir die Determination:

I. Ist $\sin g > \sin a$, so gibt es ein Dreieck.

II. Ist $\sin g = \sin a$, so gibt es ein Dreieck oder kein Dreieck, je nachdem die Gegenstücke (g und u) gleichnamig oder ungleichnamig sind.

III. Wenn $\sin g < \sin a$ ist, und die Gegenstücke ungleichnamig sind, so gibt es kein Dreieck.

IV. Wenn $\sin g < \sin a$ ist, und die Gegenstücke gleichnamig sind, so gibt es

$$\left.\begin{array}{r}\text{zwei Dreiecke,}\\ \text{ein Dreieck,}\\ \text{kein Dreieck,}\end{array}\right\}\text{ je nachdem } \sin g \left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\} \sin a \sin u,$$

in Worten: je nachdem der Sinus des gegenüberliegenden Stückes größer, ebensogroß, kleiner als das Product aus den Sinus der beiden anderen Stücke ist.

Diese vier Urtheile gelten mit alleiniger Ausnahme des Falles, dass $g = a = u = 90^0$ in diesem Falle entsprechen unendlich viele Dreiecke.

Das Urtheil III dürfte wohl nur in wenigen Lehrbüchern der sphärischen Trigonometrie anzutreffen sein. Nicht ohne Interesse ist ferner die Anlehnung an den analogen Fall der ebenen Trigonometrie.

Hermann Anton.