Transzendente Zahlen, insbesonders e und π.

Von

Dr. Vinzenz Blaha.

Transzendente Zahlen im allgemeinen[1]).

Jede Wurzel der Gleichung:

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} + \ldots\ldots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

in welcher die Koeffizienten rationale Zahlen sind, nennen wir eine algebraische Zahl, dabei sind sowohl reelle wie komplexe Zahlen zugelassen. Sie sind denselben Rechnungsregeln unterworfen wie die reellen Zahlen.

Nun aber fragt es sich, ob außer den algebraischen Zahlen, die also rationale und irrationale umfassen, sowie nach Gauß die komplexen von der Form $a + bi$, noch andere Zahlen existieren, die man als nicht algebraische oder transzendente Zahlen bezeichnen müßte. Durch eine sehr schöne und einfache Untersuchung hat nun zuerst Liouville den strengen Nachweis geliefert, daß in der Tat transzendente Zahlen vorhanden sind. Seine Methode besteht hauptsächlich in der Betrachtung der rationalen Zahlen, welche sich einer bestimmten inkommensurablen Größe nähern. Bezeichnen wir mit ξ eine reelle algebraische Zahl vom Grade n, welche die Gleichung mit ganzen Koeffizienten $f(\xi) = 0$ befriedigt. Es sei nun $\frac{p}{q}$, ein möglichst abgekürzter Bruch, ein Näherungswert für ξ. Wir setzen nun voraus, daß $\frac{p}{q}$ in ganz bestimmter Weise auch in einem Intervalle $\alpha \ldots\ldots \beta$ enthalten sei, welches auch ξ enthält; dies Intervall sei aber sonst ganz beliebig. Es ist nun klar, daß wenn die Zahl x dem Intervalle $\alpha \ldots\ldots \beta$ angehört, eine solche Zahl M existiert, daß man schreiben kann:

1) Borel Emile, Leçons sur la Théorie des fonctions. Paris 1898. — Legendre A. M., Essai sur la théorie des nombres. Paris 1808. — Weber Heinrich, Lehrbuch der Algebra. 2. Aufl. Braunschweig 1898—1899. — Bachmann Paul, Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. Leipzig 1892. — Barlow P., An elementary investigation of the theory of numbers. London 1911.

1. $|f'(x)| < M$;
dann wollen wir bedenken, daß, weil $f(x)$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten ist, wenn man x durch die rationale Zahl $\frac{p}{q}$ ersetzt, man ein Resultat erhält von der Form: $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{A}{q^n}$; wobei A eine ganze Zahl ist. Wenn also $\frac{p}{q}$ keine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist, so hat man $|A| \geqq 1$ und daher

2. $\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqq \frac{1}{q^n}$; nachdem dies festgestellt ist, bedenken wir, daß $\frac{p}{q}$ im Intervalle $\alpha \ldots\ldots \beta$ steht und beachten, daß laut Annahme $f(\xi) = 0$; nun ist nach Taylors Entwicklung

$f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q} - \xi\right) - f'\left[\xi + \vartheta\left(\frac{p}{q} - \xi\right)\right]$, wobei ϑ ein echter Bruch ist. Man kann also infolge der Ungleichungen 1. und 2. schreiben

$$M\left|\frac{p}{q} - \xi\right| > \frac{1}{q^n}; \text{ oder}$$

$$\text{(A)} \quad \left|\frac{p}{q} - \xi\right| > \frac{1}{M \cdot q^n}.$$

Wenn also eine algebraische Zahl ξ vom Grade n gegeben ist und ein Intervall $\alpha \ldots\ldots \beta$, welches dieses ξ enthält, so läßt sich immer eine Zahl M derart angeben, welches auch immer der Wert von $\frac{p}{q}$ im Intervalle $\alpha \ldots\ldots \beta$ sei, daß die Ungleichung (A) gilt. Wenn wir nun das $q > M$ voraussetzen, so nimmt die Ungleichung (A) die Form an:

$$\text{(B)} \quad \left|\frac{p}{q} - \xi\right| > \frac{1}{q^{n+1}}.$$

Man sieht übrigens leicht ein, daß diese Ungleichung wenigstens für die Werte von q, die eine gewisse Grenze überschreiten, auch dann besteht, wenn $\frac{p}{q}$ außerhalb des Intervalles $\alpha \ldots\ldots \beta$ liegt. Wir können demnach behaupten, daß, wenn ξ eine algebraische Zahl vom Grade n ist, die Ungleichung (B) erfüllt wird, so bald nur q eine gewisse Grenze überschreitet, die nur von ξ abhängt.

Wir können somit sagen: „Wenn eine Zahl ξ gegeben ist und wenn Werte von q existieren, die jede Grenze überschreiten und für deren jeden die Ungleichung $\left|\frac{p}{q} - \xi\right| < \frac{1}{q^{n+1}}$ erfüllt ist, dann kann das ξ **keine** algebraische Zahl vom Grade n sein." Setzen wir jetzt voraus, daß wir denselben Beweis für jeden Wert von n erbringen können, so können wir behaupten, daß ξ eine transzendente Zahl ist. Dabei ist jedoch wichtig zu bemerken, daß, wenn man dem Bruche $\frac{p}{q}$ und dem ξ bestimmte Werte gibt, die Ungleichung 3. $\left|\frac{p}{q}-\xi\right|<\frac{1}{q^{n+1}}$ nur für eine endliche Anzahl von Werten für n befriedigt werden kann. Aber es kann vorkommen, daß bei gegebenen ξ, welches auch der dem n beigelegte fixe Wert sei, die Ungleichung 3. für eine unendliche Anzahl von Werten für $\frac{p}{q}$ befriedigt wird; allein diese Werte bleiben nicht alle dieselben, wenn sich n verändert. Um nun die Transzendenz von ξ behaupten zu können, ist das wesentliche Erfordernis das, daß es für **jeden** Wert von n eine unendlich große Anzahl von Werten für $\frac{p}{q}$ gibt, welche die Ungleichung 3. erfüllen. Es ist nun leicht, Zahlen ξ zu bilden, welche diese Eigenschaft haben. Setzen wir

$$\xi=\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\frac{\alpha_3}{10^{3!}}+\ldots\ldots+\frac{\alpha_n}{10^{n!}}+\ldots\ldots \textit{ in inf.},$$

wobei $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ ganze positive Zahlen sind, welche, um bestimmter zu sprechen, kleiner als 10 sein sollen, so zwar, daß ξ wirklich in der Form eines Dezimalbruches geschrieben erscheint. (Man setzt natürlich voraus, daß es eine unendliche Anzahl von Zahlen α gibt, die nich Null sind.) Bezeichnen wir nun mit $\frac{p}{q}$ die Summe der m ersten Glieder in der Reihe, welche ξ definiert, dann haben wir offenbar $q=10^{m!}$ und

$$\xi=\frac{p}{q}+\frac{\alpha_{m+1}}{q^{m+1}}+\frac{\alpha_{m+2}}{q^{(m+1)(m+2)}}+\ldots\ldots\ldots$$

daraus ergibt sich unmittelbar die Ungleichung:

$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^m}$; es genügt also $m>n+1$ zu nehmen, um beweisen zu können, daß die Ungleichung 3., wenn n einen bestimmten Wert hat, für eine unendliche Anzahl von Werten für $\frac{p}{q}$ gilt. ξ ist also transzendent.

Es ist leicht einzusehen, daß man auf diese Weise eine unendliche, nicht abzählbare Menge von transzendenten Zahlen definieren kann und sogar, wenn man will eine unendliche Anzahl, welche die Mächtigkeit des Kontinuums hat.

Setzen wir voraus: $\xi'=\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\frac{\alpha_3}{10^3}+\ldots+\frac{\alpha_n}{10^n}+\ldots\ldots\ldots$, wobei man dem α alle ganzzahligen Werte kleiner als 10 gibt, so wird ξ' alle Werte annehmen zwischen 0 und 1.

Wenn man weiter voraussetzt, daß es eine unendliche Anzahl von Zahlen α gibt, die nicht Null sind, so darf man offenbar gewisse rationale Zahlen von ξ' ausschließen, aber man wird bedenken müssen, daß 0·5 z. B. geschrieben werden kann $0{\cdot}4\dot{9}\ldots$ und daß man in der Reihe $\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^{2!}}+\ldots\ldots\frac{\alpha_n}{10^{n!}}+\ldots\ldots$ den Fall nicht ausgeschlossen hat, wo von einer gewissen Stelle angefangen alle α gleich q sind, man hat also eine Menge, welche die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.

Wenn nun jedem Element ξ' dieser Menge die Zahl ξ entspricht, für welche die α denselben Wert haben in den beiden Reihen

$$\xi=\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^{2!}}+\ldots\ldots+\frac{\alpha_n}{10^{n!}}+\ldots\ldots$$

$$\xi'=\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^{2}}+\ldots\ldots+\frac{\alpha_n}{10^{n}}+\ldots\ldots,$$ so wird man eine Menge von transzendenten Zahlen ξ bestimmt haben, welche die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt, was wir ja bestimmen wollten.

An diesen Nachweis für die Existenz transzendenter Zahlen schließt Emile Borel in seiner „Theorie des fonctions" eine Betrachtung über die Annäherung an irrationale Zahlen, welche die Ergebnisse Liouvilles etwas einschränkt.

Man weiß, daß, wenn eine irrationale Zahl α gegeben ist, man auf eine unendliche Anzahl von Arten eine unendliche Folge von rationalen Zahlen finden kann, welche α zur Grenze hat. Jede derselben kann als Näherungswert von α betrachtet werden; aber es ist klar, daß die Kenntnis des einen oder mehrerer solcher Näherungswerte keine Aufklärung gibt über die arithmetische Natur ihrer Grenze.

Es ist nun vor allem wichtig, unter diese Näherungswerte eine gewisse Ordnung zu bringen, wie dies Aufgabe der Theorie der arithmetischen Kettenbrüche ist. Ihre Grundresultate sind in kurzen Worten ungefähr Folgendes: Wenn eine reelle, irrationale Zahl α gegeben ist, kann man sie nur auf eine einzige Art in die Form bringen:

$$\alpha=\alpha_0+\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\ldots\ldots}}},$$ wobei die α ganze Zahlen sind, deren erste Null oder negativ sein kann, während die anderen wesentlich positiv sind. Setzt man nun $p_0=1,\ p_1=\alpha_0\ldots\ldots p_{n+1}=\alpha_n\ldots\ldots$

$$q_0=0\ldots\ldots,$$

so sind die Brüche in der einfachsten Form $\frac{P_n}{Q_n}$ die Näherungsbrüche, sie sind abwechselnd größer oder kleiner als α und es ist $P_{n-1}.Q_n-$

$-P_n \,.\, Q_{n-1} = (-1)^n$. Man folgert leicht daraus die Grundeigenschaft der Näherungsbrüche; nämlich jeder von ihnen ist genauer als jeder Bruch, der kleinere Zahlen hat, oder wenn $\frac{a}{b}$ irgendein Bruch ist und $\frac{P_n}{Q_n}$ ein Näherungsbruch ist und wenn $\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| < \left|\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right|$, so kann man daraus schließen: $a < P_n$, $b < Q_n$; es geht daraus hervor, daß beim Studium der Annäherung an die Zahl α mittels rationaler Zahlen man sich im allgemeinen auf die Betrachtung der Näherungsbrüche beschränken kann. Es ist übrigens leicht, zwei Grenzen der Annäherung, die man mittels eines Näherungsbruches erhalten kann, anzugeben. Wir setzen $\alpha > 0$ voraus und gehen aus von den evidenten Ungleichungen:

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}\right| < \left|\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right| < \left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right|;$$

wenn man bedenkt, daß

$$|P_n \,.\, Q_{n+2} - P_{n+2} \,.\, Q_n| \geqq 1 \text{ und}$$
$$|P_n \,.\, Q_{n+1} - P_{n+1} \,.\, Q_n| = 1,$$

kann man schließen

1. $\frac{1}{Q_n \,.\, Q_{n+2}} < \left|\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right| < \frac{1}{Q_n \,.\, Q_{n+1}}$; man hat übrigens

$$\left.\begin{array}{l} Q_{n+1} = a_n Q_n + Q_{n-1} \\ Q_{n+2} = a_{n+1} \,.\, Q_{n+1} + Q_n \end{array}\right\} \text{ und da } \begin{array}{l} a_n Q_n < Q_{n+1} < Q_n a_{n+1} \\ Q_{n+2} < [a_n \,.\, a_{n+1} + a_{n+1} + 1]\, Q_n, \end{array}$$

erhalten die Ungleichungen 1. die Form:

2. $\frac{1}{(a_n \,.\, a_{n+1} + a_{n+1} + 1)\, Q_n^2} < \left|\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right| < \frac{1}{a_n \,.\, Q_n^2}$ und liefern 2 Grenzen der durch den n ten Näherungsbruch gegebenen Annäherung.

Um davon eine unmittelbare Anwendung zu geben, setzen wir voraus, daß α eine bestimmte algebraische Zahl vom Grade r sei; wir wissen dann, daß eine Zahl M existiert der Art, daß man, was auch p und q bedeuten mögen, die Ungleichung hat $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{Mq^r}$; setzt man $p = P_n$, $q = Q_n$ und vergleicht man dies mit Ungleichung 2., so schließt man daraus 3. $a_n < M \,.\, Q_n^{r-2}$.

Wenn also eine algebraische Zahl α vom Grade r gegeben ist, so kann man eine solche Zahl M finden, daß die Ungleichung 3. für jeden Wert von n gilt, und in dem Falle $r = 2$ sieht man, daß alle $a_n < M$ (eine fixe Zahl). Es ist leicht, Kettenbrüche anzugeben, welche die Ungleichung 3. nicht erfüllen, sei es für einen bestimmten Wert von r, sei es sogar für ein beliebiges r; man hat somit ein neues Beispiel von transzendenten Zahlen. Aber dies Resultat unterscheidet sich nicht merklich von jenem, das oben durch die einfache Betrachtung der Dezimalbrüche erlangt wurde; im Gegenteil gestattet die erste der Ungleichungen 2., die wir in der Form anschreiben wollen:

4. $\left|\frac{P_n}{Q_n}-\alpha\right|>\frac{1}{(a_n \,.\, a_{n+1}+a_{n+1}+1)\,Q^2_n}$ Resultate zu erhalten, zu welchen uns die Theorie der Dezimalbrüche allein nicht führen würde.

Nehmen wir an, daß alle die unvollständigen Quotienten a_n zwischen 1 und 10 enthalten seien, z. B.

5. $1 \leqq a_n \leqq 10$, $n=1,2,3\ldots\ldots$ und bezeichnen wir mit b irgendeine zwischen Q_{n-1} und Q_n enthaltene ganze Zahl, so hat man

6. $Q_n > b > Q_{n-1} > \frac{1}{10}\,Q_n$, da $Q_n < (a_{n-1}+1)\,Q_{n-1}$ und $(a_{n-1}+1) \leqq 10$.

Anderseits hat man, wenn a irgendeine ganze Zahl ist, indem man die Ungleichungen 4., 5., 6. und die Grundeigenschaft der Näherungsbrüche benützt $\left|\frac{a}{b}-\alpha\right|>\left|\frac{P_n}{Q_n}-\alpha\right|>\frac{1}{100\,Q^2{}_n}>\frac{1}{10000\,b^2}$; also hat die Ungleichung 5. zur Folge, daß

7. $\left|\frac{a}{b}-\alpha\right|>\frac{1}{10000\,b^2}$, wobei a und b beliebige ganze Zahlen sind. Wir sagen also, daß die Eigenschaft der algebraischen Zahlen, deren Kenntnis man Liouville verdankt, durchaus nicht charakteristisch ist und daß man eine unendliche Anzahl transzendenter Zahlen α finden kann, welche der Ungleichung 7. genügen, d. h. die sich vom Gesichtspunkte der Annäherung aus so verhalten, wie die algebraischen Zahlen 2. Grades. Ferner ist klar, daß die Menge der Zahlen α, deren Entwicklung in einen unendlichen Kettenbruch der Ungleichung 5. genügt, dieselbe Möglichkeit hat, wie die Menge der Zahlen α', welche durch die Gleichung definiert sind:

$$\alpha' = \frac{\alpha_1 - 1}{q} + \frac{\alpha_2 - 1}{q^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{a_n - 1}{q^n} + \ldots\ldots\ldots,$$

wobei die α immer 5. befriedigen; und es ist klar, daß die Menge der α' nichts anderes ist, als die Menge der zwischen Null und Eins enthaltenen Zahlen, die beiden Grenzen mit inbegriffen. Die Menge der α hat also die Mächtigkeit des Kontinuums und schließt infolgedessen transzendente Zahlen ein.

Außer dem Beweise, den Liouville für die Existenz nicht algebraischer oder transzendenter Zahlen erbracht hat, rühren solche auch von G. Cantor her.

Dieser knüpft zunächst an den Begriff der Menge oder Mannigfaltigkeit an, worunter ein System von Elementen irgendwelcher Art verstanden wird, das so abgegrenzt erscheint, daß von jedem beliebigen Objekte völlig entschieden ist, ob es zu dem Systeme gehört oder nicht. Man unterscheidet endliche und unendliche Mengen und nimmt als wichtigstes Beispiel einer unendlichen Menge die Gesamtheit der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ...... an. Dann gilt folgende Definition: „Eine Menge heißt abzählbar, wenn ihre Elemente mit der natürlichen Zahlenreihe oder einem Teile derselben in eine gegenseitig eindeutige Beziehung gesetzt werden können."

Jede endliche Menge ist hienach abzählbar und bei ihrer Abzählung wird die natürliche Zahlenreihe nur bis zu einer gewissen höchsten Zahl verwendet.

Der Definition für eine unendliche abzählbare Menge hingegen kann man auch den Ausdruck geben, daß es eine solche Menge ist, bei der jedem Elemente eine bestimmte Zahl der natürlichen Zahlenreihe als Name beigelegt werden kann, so daß jede Zahl dabei und zwar nur einmal verwendet wird.

Man kann auch sagen, daß eine unendliche abzählbare Menge eine solche ist, die sich derart in eine Reihe ordnen läßt, daß ein erstes Element vorhanden ist und daß auf jedes Element ein bestimmtes anderes der Menge folgt und jedem, außer dem ersten, ein bestimmtes anderes Element vorangeht. Es ist dann klar, daß eine abzählbare Menge nicht nur auf eine, sondern auf unendlich viele verschiedene Arten abzählbar ist. Außer der natürlichen Zahlenreihe selbst könnte man als Beispiel das System der rationalen positiven echten Brüche anführen, die unter anderen in folgender Weise abgezählt werden können:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \ldots\ldots$$

d. h. so daß jeder größere Nenner dem kleineren Nenner folgt und daß die Brüche von gleichem Nenner nach der Größe des Zählers geordnet sind. Wollte man aber die Brüche nach ihrem numerischen Werte ordnen, würde man keine abzählbare Menge bekommen. „Die Gesamtheit aller algebraischen Zahlen ist nun eine abzählbare Menge."

Um diesen wichtigen Satz zu beweisen, wird erinnert, daß jede algebraische Zahl Θ die Wurzel einer und nur einer irreduziblen Gleichung ist:

$f(\Theta) = \alpha_0 \; \Theta^n + \alpha_1 \; \Theta^{n-1} + \ldots\ldots + \alpha_n = 0$, in der α_0, α_1, α_2 $\ldots\ldots \alpha_n$ ganze rationale Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind und α_0 von Null verschieden und positiv ist. Der Grad n der Gleichung ist eine positive ganze Zahl, also mindestens $= 1$. Die Zahlen $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_{n-1}$ können zum Teil Null sein. Wir wollen nun die Vorzeichen $\pm$ so bestimmen, daß $\pm \alpha_1$, $\pm \alpha_2 \ldots\ldots \pm \alpha_n$ nicht negativ sind und nennen die Summe

$N = (n-1) + \alpha_0 \pm \alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots\ldots \pm \alpha_n$ die Höhe der algebraischen Zahl Θ; diese ist dann immer eine positive ganze Zahl.

Nun ist leicht einzusehen, daß es für einen gegebenen Wert der Höhe N immer nur eine endliche Anzahl von algebraischen Zahlen geben kann. Denn zunächst kann n nie größer als N sein.

Zu jedem gegebenen N und n kann man die Zahlen $\alpha_0 \ldots\ldots \alpha_n$ nur auf eine endliche Anzahl von Arten bestimmen. Man hat dann unter den so bestimmten Funktionen $f(\Theta)$ nur die irreduziblen beizubehalten. Wenn man nun die algebraischen Zahlen in der Weise ordnet, daß man die Zahlen von geringerer Höhe denen von größerer Höhe voranstellt, daß man unter Zahlen gleicher Höhe die voranstellt, deren reeller Teil kleiner ist und unter Zahlen von gleicher Höhe und gleichen reellen Teilen die von kleinerem imaginären Teile vorangehen läßt, so haben wir eine zählbare Menge von algebraischen Zahlen und es ist erwiesen, daß die Gesamtheit aller algebraischen Zahlen eine abzählbare Menge ist.

Wir erhalten beispielsweise:

$N = 1.\ n = 1,\ \alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0$

$N = 2.\ n = 1,\ \alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = \pm 1$

$N = 3.\ n = 1,\ \alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = \pm 2$

$\alpha_0 = 2,\ \alpha_1 = \pm 1$

$n = 2,\ \alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_0 = 1$ und der Anfang der geordneten Reihe der algebraischen Zahlen lautet:

$$0,\ -1,\ +1,\ -2,\ -\frac{1}{2},\ -\sqrt{-1},\ \sqrt{-1},\ \frac{1}{2},\ 2,\ \ldots\ldots$$

Jeder Teil der natürlichen Zahlenreihe ist eine abzählbare Menge, denn man braucht ja die Zahlen eines solchen Teiles nur nach ihrer Größe zu ordnen, um eine zählbare Anordnung zu erhalten. Daraus ergibt sich aber, daß jeder Teil einer abzählbaren Menge selbst wieder eine abzählbare Menge ist. Es folgt daraus unter anderem, daß auch die Menge der reellen algebraischen Zahlen abzählbar ist.

Wir kommen zum Beweise des Satzes, daß es unter den Zahlenmengen auch nicht abzählbare gibt und wir beweisen speziell: „Daß die Gesamtheit aller reellen Zahlen, selbst wenn wir uns auf ein endliches Intervall beschränken, nicht abzählbar ist."

Wir betrachten zu dem Ende irgendeine abzählbare Menge reeller voneinander verschiedener Zahlen, die wir in eine zählbare Anordnung Ω gesetzt, so bezeichnen wollen:

$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3 \ldots\ldots$, wobei dies keine Aufeinanderfolge nach der Größe bedeuten soll.

Der Kürze wegen nennen wir von zwei Elementen der Reihe Ω das mit dem kleineren Index das frühere, das mit dem größeren das spätere Element. Wir nehmen nun irgend zwei reelle Zahlen α, β an, so daß $\alpha < \beta$ ist und zeigen, daß es in dem Intervalle $\delta = (\alpha . \beta)$ mindestens eine Zahl gibt, die nicht in der Reihe Ω vorkommt. Haben wir eine solche Zahl für jedes Intervall nachgewiesen, so gibt es auch deren unendlich viele, da man ja dieselbe Schlußweise auf jeden Teil des Intervalles anwenden kann. Zunächst ist klar, daß unsere Behauptung richtig ist, wenn in irgendeinem endlichen Teile des Intervalles δ nur eine endliche Anzahl von Zahlen der Reihe Ω enthalten ist und wir können also ohneweiters zu dem Falle übergehen, daß in jedem noch so kleinen Teile des Intervalles δ eine unendliche Menge von Zahlen der Reihe Ω liegt. Wir bezeichnen mit α_1, β_1 die beiden frühesten Zahlen der Reihe Ω, die in dem Intervalle δ liegen, nehmen an $\alpha_1 < \beta_1$ und setzen $\delta_1 = \beta_1 - \alpha_1$, so daß $\delta_1 = (\alpha_1 \beta_1)$ ein Teil des Intervalles δ ist.

Nun bezeichnen wir ebenso mit α_2, β_2 die beiden frühesten Zahlen von Ω, die im Innern des Intervalles δ_1 mit Ausschluß der Grenzen liegen, setzen $\alpha_2 < \beta_2$ voraus und $\delta_2 = \beta_2 - \alpha_2$. Auf diese Weise können wir fortfahren und erhalten eine unbegrenzte Reihe von Intervallen:

$\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \ldots\ldots\ldots$

deren jedes alle folgenden einschließt und zwei Reihen von Zahlen

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots\ldots$

$\beta, \beta_1, \beta_2 \ldots\ldots\ldots$, die mit etwaiger Ausnahme der ersten, α und β, alle der Reihe Ω angehören. Die $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots\ldots$ bilden eine wachsende, die $\beta, \beta_1, \beta_2 \ldots\ldots$ eine fallende Zahlenreihe und zugleich ist jedes α kleiner als jedes β.

Daraus ergibt sich, daß die Zahlen α_v eine obere Grenze a, die Zahlen β_v eine untere Grenze b haben und daß a jedenfalls nicht größer als b ist. Es kann aber möglicherweise $a = b$ sein.

Aus der Bildungsweise der Intervalle $\delta, \delta_1, \delta_2 \ldots\ldots$ geht noch folgendes hervor: Wenn irgendeine Zahl ω der Reihe Ω in dem Intervalle δ_v, mit Ausschluß seiner Grenzen α_v und β_v, liegt, so ist ω in der Reihe Ω später als das derselben Reihe angehörige Zahlenpaar α_v, β_v; denn α_v, β_v waren ja die beiden frühesten im Intervalle δ_{v-1} gelegenen Zahlen von Ω. Daraus folgt: Die der Reihe Ω angehörigen Zahlenpaare α_v, β_v sind um so spätere Glieder der Reihe Ω, je größer der Index v ist, und da wir angenommen haben, die Reihe der Intervalle δ_v breche nicht ab, so können wir α_v, β_v für ein hinlänglich großes v beliebig weit in der Reihe Ω hinausrücken lassen. Nun ergibt sich sehr einfach, daß keine Zahl g, die mit einer der Zahlen a, b zusammenfällt, oder auch, wenn a und b verschieden sind, zwischen ihnen liegt, zu der Reihe Ω gehören kann. Denn die Zahl g liegt im Innern eines jeden der Intervalle δ_v.

Nehmen wir an, es komme g in Ω vor und wir gehen mit v so weit, daß α_v, β_v in Ω später als g kommen, so kann g nicht mehr in

δ_v liegen und damit ist die Unmöglichkeit unserer Annahme erwiesen. Daraus folgt also, daß die Gesamtheit der Zahlen eines Intervalles α, β keine abzählbare Menge bildet.

Diese Tatsache läßt sich noch auf einem anderen Wege beweisen, den wir mit wenig Worten darlegen wollen. Wir beschränken die Allgemeinheit nicht, wenn wir wieder das Intervall von 0 bis 1 zugrunde legen. Alle Zahlen dieses Intervalles denken wir uns durch unendliche Dezimalbrüche dargestellt. Darunter sind auch die endlichen Dezimalbrüche enthalten, wenn wir alle Ziffern von einer gewissen an gleich Null setzen. Um die Darstellung durch Dezimalbrüche zu einer eindeutigen zu machen, mag noch festgesetzt sein, daß für einen endlichen Dezimalbruch immer diese Darstellung gewählt ist, also nicht 0·4999...... für 0·5000...... gesetzt werden soll.

Wir wollen nun annehmen, diese Dezimalbrüche bilden eine abzählbare Menge; sie lassen sich also in eine zählbare Reihe anordnen, die wir so darstellen:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0, \alpha_1^{(1)}\, \alpha_2^{(1)}\, \alpha_3^{(1)} \ldots\ldots \\ \omega_2 &= 0, \alpha_1^{(2)}\, \alpha_2^{(2)}\, \alpha_3^{(2)} \ldots\ldots \\ \omega_3 &= 0, \alpha_1^{(3)}\, \alpha_2^{(3)}\, \alpha_3^{(3)} \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

worin die $\alpha_u^{(v)}$-Ziffern des dekadischen Systems bedeuten.

Es ist nun aber sehr leicht einen Dezimalbruch oder auch beliebig viele nachzuweisen, die in der Reihe Ω nicht enthalten sind.

Wir brauchen nur

$\eta = 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots\ldots$ zu bilden, wobei die β_v-Ziffern des dekadischen Systems sind, die der einen Bedingung genügen, daß β_v für jedes v von $\alpha_v^{(v)}$ verschieden ist. Diese Zahl η, die doch auch dem Intervalle $0 - 1$ angehört, kann mit keiner Zahl der Reihe Ω übereinstimmen. Man kann die Bildung von η noch dadurch verallgemeinern, daß man die ersten β bis zu einem beliebig weit entfernten willkürlich annimmt und erst von da an das Gesetz: β_v verschieden von $\alpha_v^{(v)}$ gelten läßt.

Da nun bewiesen ist, daß die reellen algebraischen Zahlen eine abzählbare Menge bilden, und daß es in jedem Intervalle Zahlen gibt, die einer gegebenen abzählbaren Menge nicht angehören, so folgt hieraus ganz unmittelbar:

„Es gibt in jedem reellen Intervalle transzendente Zahlen."

Eine weit schwierigere Frage ist nun die, von einer bestimmten vorgelegten Zahl zu entscheiden, ob sie algebraisch oder transzendent ist. In dieser Hinsicht forderten besonders zwei Zahlen die Untersuchung der Mathematiker heraus, die gewöhnlich mit e und π bezeichnet werden, d. h. die Basis des natürlichen Logarithmensystems und die Ludolphische Zahl, die den Umfang des Kreises vom Durchmesser 1 mißt.

Geschichte von e und π[1]).

Die Geschichte der Transzendenz von π deckt sich mit der von der Quadratur des Kreises. Schon die alten Ägypter haben sich, wie wir aus einer Aufgabe im Eisenlohrschen Papyrus weit mehr als 1000 Jahre v. Chr. ersehen, mit der Quadratur des Kreises beschäftigt; es ist dies wirklich eine Quadratur zu nennen, weil sie lehrt, ein Quadrat zu finden, welches dem Kreise flächengleich ist, und zwar wird als Seite des Quadrates der um $\frac{1}{9}$ seiner Länge verminderte Kreisdurchmesser gewählt, ohne daß jedoch gesagt würde, wie man zu dieser Vorschrift gekommen sei. Sicher jedoch ist diese Formel durch ihr wiederholtes Auftreten und ihre Verwendbarkeit, denn sie entspricht dem Werte

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{\cdot}1604\ldots\ldots\ldots .$$

Eine interessante Berechnung des Kreisumfanges aus dem Halbmesser findet sich bei den Juden und ist von ihnen zu den Babyloniern übergegangen. Die Formel ist angewandt bei der Schilderung des großen Waschbeckens, das unter dem Namen „ehernes Meer (הַיָּם מוּצָק)" eine Zierde des Tempels bildete, den Salomon um 1000 v. Chr. erbaute. Von diesem Gefäße heißt es an zwei Stellen der Schrift (I. Reg. 7, u. II. Chron. 4) fast mit den gleichen Worten:

„Und er machte ein Meer, gegossen, zehn Ellen weit von einem Rande bis zum anderen, und eine Schnur dreißig Ellen lang war das Maß ringsum." Dabei ist offenbar $30 = 3 . 10$; und diese Größe für π ($= 3$) hat sich bei den Hebräern noch viele Jahrhunderte hindurch fort erhalten, so daß der Talmud in seinem Mischnah genannten Teile stets die Regel anwendet:

„Was im Umfange drei Handbreiten hat, ist eine Hand breit."

Wenn wir nun die Geschichte der Quadratur des Kreises bei den griechischen Mathematikern verfolgen, so hat, wie Plutarch er-

[1]) Cantor M. Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik. 2. Aufl., 4 Bde. Leipzig 1894—1908. — Mathematische Annalen, herausg. v. A. Clebsch u. C. Neumann. Leipzig 1869 ff. — Nouvelles Annales de mathématiques, journal rédigé par O. Terquem et C. Gerono. Paris 1842 ff. — Archiv d. Math. u. Phys., herausg. v. J. A. Grunert. Greifswald 1841 ff. — Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausg. von C. Ohrtmann u. F. Müller. Berlin 1871 ff. — The messenger of mathematics. Cambridge 1862 ff.

zählt, Anaxagoras v. Klazomene um 434 v. Chr. im Gefängnisse die Quadratur des Kreises gezeichnet. Es heißt nämlich in seiner Schrift de exilio c. 17: „ἀλλ' Ἀναξαγόρας μὲν ἐν τῷ δεσμωτηρίῳ τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸν ἔγραψεν".

Er hat eben eine Figur gezeichnet, welche als Quadrat die Fläche des Kreises ziemlich erfüllte; die Mängel derselben dürften ihm nicht unbekannt geblieben sein.

Ferner hat Hippias von Elis um 420 eine Kurve gefunden, welche einem doppelten Zwecke dienen konnte, nämlich der Dreiteilung eines Winkels und der Quadratur des Kreises; von dieser letzteren Anwendung erhielt sie ihren Namen „Quadratrix". Sie entsteht durch Verbindung zweier Bewegungen, einer drehenden und einer fortschreitenden. Der Schriftsteller Pappus gibt davon folgende Darstellung. (Fig. 1.)

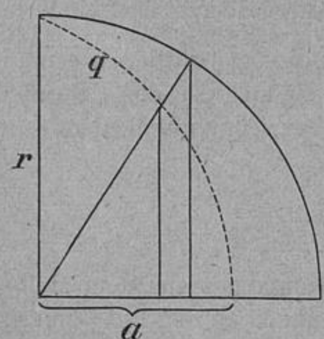

Fig. 1.

Dinostratus benützte später diese Kurve zur Rektifikation des Kreises:

$$q : r = r : a.$$

Mit diesem wichtigen Probleme beschäftigten sich dann außer der pythagoräischen Schule verschiedene Männer, wie: Antiphon, Bryson, Hippokrates von Chios, welcher zuerst den Satz aufstellte, daß die Kreisfläche dem Quadrate ihres Radius proportional sei.

Sonderbarerweise ist Euklid bei diesen Resultaten in bezug auf die Ausmessung des Kreises stehen geblieben, während Archimedes durch ein- und umgeschriebene Vielecke, indem er bis zum 96-Eck vorschritt, den Kreis in zwei Grenzen einschloß und fand

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7};$$

dieser ziemlich angenäherte Wert von $3\frac{1}{7}$ behielt nun lange Zeit die Herrschaft und verdrängte selbst bei Heron v. Alexandria den altägyptischen von $\left(\frac{16}{9}\right)^2$; aber im Buche der Ausmessungen (Heron, Mensurae [ed. Hultsch]) ist regelmäßig $\pi = 3$. Man hat den babylonischen Ursprung dieses Wertes zu begründen gesucht. Und der ägyptische Wert, kann man fragen, $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$, welchen Athmes angewandt hat, kommt er nirgends vor? Nein, und wenn es auch insgemein mißlich ist, negative Erscheinungen erklären zu wollen, hier wären wir am wenigsten in Verlegenheit, einen einleuchtenden Grund anzugeben. Die Neuerung $\pi = \frac{22}{7}$ statt $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ war durch die größere Genauigkeit der Ergebnisse bedeutsam, aber was die Rechnungsausführung betrifft, kaum redenswert. Ob der Praktiker mit dieser oder mit jener gebrochenen Zahl vervielfachte, das konnte ihm gleich sein. Er mußte aus Bequemlichkeit alte und neue angenäherte Dreiecks- und Vierecksformeln ohne Wurzelausziehung festzuhalten suchen, um jener für ihn schwierigen Rechnungsoperation zu entgehen. Er mußte $\pi = 3$ als ganzzahligen Multiplikator vorziehen. Aber daß er nicht auf $\pi = \frac{256}{81}$ zugunsten von $\pi = \frac{22}{7}$ verzichten sollte, dafür gab es gar keinen Grund.

Erst Claudius Ptolemäus ist insoferne bemerkenswert, als er den Wert von π mit 3.8.30, d. h. $= 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3\frac{17}{120} = 3{\cdot}141666$ annahm.

Wenn wir jedoch von den griechischen zu den römischen Mathematikern übergehen, so wäre bloß Vitruvius zu nennen zurzeit des Augustus, der des leichteren Rechnens halber den Wert $3\frac{1}{8}$ für π annahm, während alle anderen sich auf die griechischen Forscher stützten.

So bietet Sextus Julius Frontinus zahlreiche Berechnungen des Umfanges der Wasserleitungsrohre aus ihren Durchmessern, wobei er die Verhältniszahl $3\frac{1}{7}$ benützt.

In Indien hingegen setzt Aryabhatta $\pi = \sqrt{10}$, während Bhaskara durch Fortsetzung des archimedischen Systems bis zum 384-Eck $\pi = 3{\cdot}1416 \ldots\ldots$ findet. Auch die Chinesen, welche sich dies Problem wahrscheinlich schon viel früher gestellt hatten, und die Araber, die berühmtesten Mathematiker des Altertums, haben ähnliche Größen für π verwendet.

Bei den Chinesen wird die Verhältniszahl des Kreisumfanges zum Durchmesser stets als 3 gerechnet (Tcheou pei S. 613, 614, 626. Auf S. 614 ist zwar zu dem Durchmesser $267666\frac{2}{3}$ der Umfang 833000 statt 803000 angegeben, doch dürfte diese einzige Ausnahme auf einem Druckfehler im „Journal Asiatique" beruhen). Das bestätigt jene Bemerkung, warum 3 die Zahl des Kreises sei, erinnert zugleich an die altbabylonische Umfangsformel. Aus den Durchmessern 238000, $317333\frac{1}{3}$, 357000, $396666\frac{2}{3}$, $436333\frac{1}{3}$, 476000, 810000 sind die Umfänge 714000, 952000, 1071000, 1190000, 1309000, 1428000, 2430000 gefolgert und in einem Beispiel heißt es ausdrücklich: „Nimm einen Durchmesser von $121\frac{75}{100}$ Fußen, vervielfache mit 3, Du erhältst $365\frac{1}{4}$ Fuß."

Das genauere Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser war einem Schriftsteller Tsu-tschung-tsche, der dem Ende des VI. Jahrh. angehören soll, als $\pi = \frac{22}{7}$ bekannt und Liuhwuy benützte $\pi = \frac{157}{50}$.

Auch im Swan-fa-tong-tsong werden noch mancherlei andere Dinge gerühmt, so die Anwendung der Verhältniszahl $\pi = \frac{22}{7}$.

Bei Mohammed ibu Mûsâ Alchwariznû wird π in dreierlei Größen angegeben. Davon werde „$\frac{22}{7}$ im praktischen Leben angewandt, wiewohl es nicht ganz genau sei; die Geometer besitzen zwei andere Methoden", und diese sind die indischen $\pi = \sqrt{10}$ und $\pi = \frac{62832}{20000}$.

Überhaupt ist vom Ausgange des Altertums an ein Niedergang der mathematischen Wissenschaften zu verzeichnen und schwinden auch die Versuche bezüglich der Quadratur des Kreises, wenigstens insoweit, als uns fast gar keine Nachrichten darüber erhalten sind. Erst ein Werk Frankos v. Lüttich über die Quadratur des Kreises nach dem Jahre 1000 gibt uns Nachricht, daß die von Aristoteles herstammenden Kenntnisse sich bis auf Boethius erhalten hätten; dann aber sei alles verloren gegangen und alle Gelehrten Deutschlands, Italiens und Frankreichs hätten bei den Kreisaufgaben Fehler gemacht und sich vergeblich bemüht.

Unter ihnen sei auch Gerbert, ein berühmter Mathematiker aus der Zeit der Ottonen, gewesen, welcher die verloren gegangene Geometrie des Boethius im Kloster Bobbio in Norditalien wieder aufgefunden habe. Ob jedoch in diesem Werke Frankos, das aus sechs Bänden besteht, wesentliche Forschungen enthalten sind, ist aus dem Grunde nicht festgestellt, weil es bisnun nie durchstudiert wurde.

Auch Hermannus Contractus beschäftigt sich in einer mutmaßlich von Macrobius abhängigen Fassung mit der seinerzeit durch Eratosthenes vollzogenen Messung des Erdumfanges. Der Verfasser will aus dem Umfange den Durchmesser berechnen und sich dabei der archimedischen Verhältniszahl $\frac{22}{7}$ bedienen, d. h. er hat $\frac{7}{22}$ des Erdumfanges von 252000 Stadien zu ermitteln. Dazu ist eine mittelbare Methode (ein Schreiben Meinzos v. Constanz an Hermann den Lahmen, herausgegeben von E. Dümmler im Neuen Archiv d. Gesellschaft f. ältere deutsche Geschichtskunde V. 202—206) angewandt, welche auch im 56. Kapitel von Gerberts Geometrie (Oeuvres de Gerbert ed. Olleris, pag. 453), wir wissen freilich nicht aus welcher Quelle, hat nachgewiesen werden können. Es wird nämlich, um $\frac{21}{22}$ zu erhalten, zuerst $\frac{1}{22}$ des Umfanges abgezogen, dann von jenen $\frac{21}{22}$ der 3. Teil genommen:

„Gegeben ist der Umkreis 252000. Sein $\frac{1}{22}$ beträgt $11454\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{22}$. Durch Abziehen bleibt $240544\frac{1}{2}$ und $\frac{21}{22}$, deren Drittel mit $80181\frac{1}{2}$ und $\frac{7}{22}$ den Durchmesser liefert."

Nicht übergangen werden darf jedoch ein deutscher Mathematiker des 14. Jahrhunderts, der von Rudolf IV. als Rektor an die im Entstehen begriffene Universität zu Wien berufen wurde, Albertus de Saxonia, der eine Abhandlung über unsere Frage geschrieben hat. Für ihn wie für das ganze Mittelalter überhaupt ist $\pi = 3\frac{1}{7}$ kein Näherungswert, sondern genau richtig. Von dieser Meinung kam endlich um 1450 der Kardinal Nikolaus v. Cusa ab, der gerade in jener Zeit eine Übersetzung des Archimedes in lateinischer Sprache aus Italien erhielt und so die beiden Grenzwerte für π kennen lernte. Ebenso erkannte er aber auch die genaue Bestimmung von π als noch ungelöste Frage und stellte eine neue Betrachtung der Kreislinie als Unendlichkeitsvieleckes auf. Eine neue Fragestellung aber wie diese es war, muß ihm als Verdienst angerechnet werden.

Als Mathematiker, der eine Zusammenfassung aller bisherigen Ergebnisse geliefert hat, wäre Johannes Buteo oder Borrel mit seiner Schrift: „de quadratura circuli" zu nennen. Nach ihm stellte Adrian Metius aus Metz zwei neue Grenzwerte auf, indem er annahm:

$$3\frac{15}{106} < \pi < 3\frac{17}{120}.$$

Später ging er weiter, indem er diesen Grenzwerten einen Mittelwert dadurch entnahm, daß er die Zähler und die Nenner addierte und sagte:

$$\pi = 3\frac{15+17}{106+120} = 3{\cdot}1415929 \ldots\ldots,$$ freilich hatte schon einige Jahre früher Ludolph van Ceulen π auf 35 Dezimalen genau berechnet, eine alle früheren Berechnungen soweit übertreffende Annäherung, daß man mit Recht diese Verhältniszahl nach ihm benannt

hat. Die genaue Berechnung von π bildet einen Hauptgegenstand seiner Schriften, sowohl der Streitschriften als auch eines selbständigen Werkes „Van den Cirkel", welches 1596 im Druck erschien. Bei dieser Berechnung hatte ihm seine Gattin Adriana geholfen. Der Weg, den er betreten, ist der seit Archimedes altbekannte. Die Bezeichnung π selbst tritt uns zum ersten Male in dem Werke eines englischen Mathematikers William Jones entgegen und wird von da an (1706) allgemein gebräuchlich, nachdem Euler sie angenommen. Dieser selbst benützt zur Definition von π in seinen „Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum 1739" die bekannte Leibnizische Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots$$

Er war es auch, der die erste bekannte Benützung des Buchstabens e für die Basis des natürlichen Logarithmensystems brachte. Und mit ihm tritt die Reihenentwicklung von e und π immer mehr in den Vordergrund. Selbst im entfernten Japan findet sich um diese Zeit eine solche Entwicklung für π^2.

Um aber zu den Forschern des 16. Jahrhunderts zurückzukehren, so gehörten zu denen, welche glaubten, den Kreis genau in ein Quadrat verwandeln zu können, Orontius, Finaeus und Bouvelles. Nonius und Buteo waren Widerleger ihrer Irrtümer. Auch Clavius kann man diesen beigesellen, welcher in seiner „Geometria practica" gegen Finaeus auftrat. Ein neuer, der Natur der Sache nach gleichfalls unglücklicher Verfasser von für genau gehaltenen Kreisquadraturen war Simon Duchesne. Man kennt seinen Geburtsort, Dôles in Frankreich. Er muß aber frühzeitig nach Holland gekommen sein, wo sein Name sich in Van der Eycke, lateinisch a quercu, umwandelte und wo er seine Muttersprache so gründlich verlernte, daß seine französisch geschriebenen Bücher schlechten wörtlichen Übersetzungen aus dem Holländischen gleichen. Er wohnte 1584 in Delft und lebte noch 1603. Er hat 1583 einen ersten, 1586 einen zweiten Versuch zur Kreismessung gemacht. Er wußte, daß Archimed dem Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser, also derjenigen Zahl, welche seit der Mitte des 18. Jahrhunderts etwa durch π bezeichnet wird (Eneström — Bibliotheca mathematica 1889 — pag. 28), zwei Grenzen gesetzt hat, indem er $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ nachwies, und er erkannte zunächst die Richtigkeit dieser archimedischen Grenzen an. Zwischen ihnen lag auch die erste von Duchesne gegebene Verhältniszahl $\pi = 3\frac{69}{484}$, denn in Dezimalbrüche umgesetzt ist $3\frac{10}{71} = 3{\cdot}14084507\ldots\ldots$, $3\frac{69}{484} = 3{\cdot}14256198\ldots\ldots$, $3\frac{1}{7} = 3{\cdot}14285714$

...... — Die Duchesnesche Zahl $3\frac{69}{484}$ besitzt überdies die Eigenschaft, ein vollständiges Quadrat $\left(\frac{39}{22}\right)^2$ zu sein, und dadurch ist die Auffindung des dem Kreise flächengleichen Quadrates wesentlich erleichtert, da dessen Seite $\frac{39}{44}\,d$ wird, unter d den Kreisdurchmesser verstehend. Die von den Ägyptern benützte Verhältniszahl führte zu $\frac{8}{9}\,d$ als Quadratseite, Inder fanden sie als $\frac{7}{8}d$. Franco v. Lüttich benützte $\frac{9}{10}d$. Diese drei Werte scheinen die einzigen zu sein, welche neben dem von Duchesne π als quadratisch auftreten lassen. Wahrscheinlich 1585 erschien eine Gegenschrift von Ludolph van Ceulen, dessen hervorragende eigene Leistungen in ein späteres Jahr fallen. Wider diese Gegenschrift wandte sich Duchesne in einer Veröffentlichung von 1586, welcher im gleichen Jahr eine abermalige Entgegnung von Ludolph van Ceulen folgte (Bouwstoffen, S. 112—113). Soviel hatte die Gegenschrift gefruchtet, daß Duchesne nicht bei seinem ersten Werte blieb, aber er ersetzte ihn durch einen weitaus unvollkommeneren, durch $\pi = \sqrt{\sqrt{320} - 8} = 3{\cdot}1446055$ ....., d. h. durch eine Zahl, welche größer war als die von Archimed aufgestellte obere Grenze $3\frac{1}{7}$ und Duchesne handelte dabei keineswegs unbewußt — er erklärt vielmehr ruhig: demzufolge komme die richtige Verhältniszahl zwischen Durchmesser und Umfang außerhalb der archimedischen Grenzen zu liegen und sei größer als $3\frac{1}{7}$.

Trotz dieser Eigenschaft des neuen Wertes, welche jeden ernsthaften Mathematiker auch der damaligen Zeit kopfscheu machen mußte, fand derselbe einen Bewunderer in Raimarus Ursus. Dieser Landmesser aus dem Diethmarschen, welcher durch eigenes Studium vom Schweinehirten zum kaiserl. Mathematiker aufgestiegen war, widmete in seinem „Fundamentum astronomicum" von 1588 ein besonderes Blatt Simoni a quercu, inventori divini artificii. Diese Erfindung wird folgender-

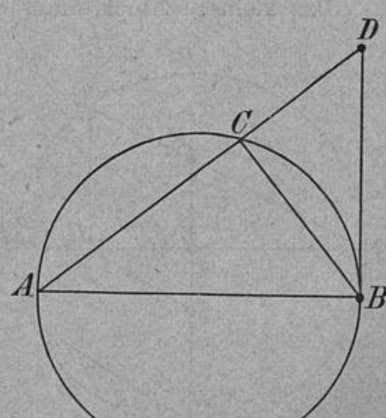

Fig. 2.

maßen geschildert (Fig. 2): Es sei AB ein Kreisdurchmesser und BD Tangente an den Kreis, ferner AD so gezogen, daß das innerhalb des Kreises fallende Stück AC gleich wird BD: so ist AC zugleich auch die Länge des Kreisquadranten. Zieht man die Hilfslinie BC, so sind die beiden rechtwinkeligen Dreiecke ABD und BCD einander ähnlich, mithin $AD:BD=BD:CD$. Nun heiße $BD=$ $=AC=x$, $CD=y$, $AB=d$, so ist: $(x+y)^2=x^2+d^2$, $y=$ $=\sqrt{x^2+d^2}-x$ und jene Proportion geht über in:

$$\sqrt{x^2+d^2}:x=x:(\sqrt{x^2+d^2}-x),$$ woraus folgt

$x=\frac{d}{4}\sqrt{\sqrt{320}-8}$. Ist nun x wirklich die Länge des Quadranten oder $\frac{\pi d}{4}$, so erscheint in der Tat $\pi=\sqrt{\sqrt{320}-8}$; aber für jene Gleichsetzung, welche doch erst bewiesen werden müßte, scheint eine Begründung nicht versucht worden zu sein.

Vieta gab 1593 das 8. Buch der vermischten Aufgaben heraus, und dort sind der Zahl π mehrere Annäherungen gegeben, welche aber, immer nur als Annäherungen bezeichnet, Vietas wissenschaftlichen Standpunkt wahren. Zunächst erklärt Vieta, er sei den Spuren Archimeds folgend weit über das von diesem erreichte Ziel hinausgekommen. Er habe nämlich gefunden:

$$\frac{31415926535}{10000000000}<\pi<\frac{31415926537}{10000000000}.$$

Nächst dieser auf 9 Dezimalstellen genauen Ermittlung schlägt Vieta folgendes vor:

Das kleinere Stück einer im goldenen Schnitt geteilten Strecke verhalte sich zur ganzen Strecke wie der Kreisdurchmesser zu $\frac{10}{12}$ der Peripherie.

Dieser Annahme entspricht

$$\pi=\frac{18+\sqrt{180}}{10}=3{\cdot}14164075$$

......, d. h. ein Wert, welcher sich von dem des Ptolemäus erst von der 5. Dezimalstelle an unterscheidet. Eine Konstruktion desselben ist folgende (Fig. 3).

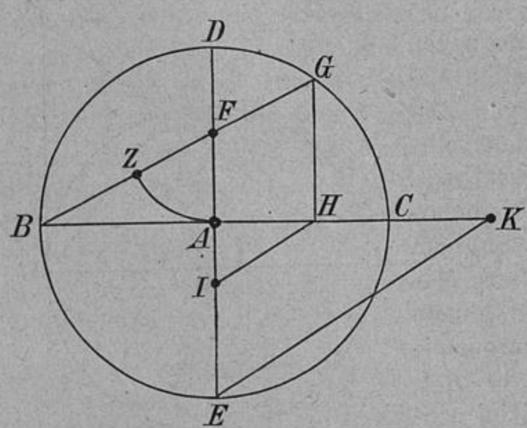

Fig. 3.

BC und DE sind zwei aufeinander normale Durchmesser. AD ist in F halbiert und durch F die Sehne BG gezogen, dann von G aus parallel mit ED die GH. Man mache $FZ = FA$, $EJ = BZ$, zieht JH und mit ihr parallel EK, so ist AK die angenäherte Länge des Kreisquadranten. Wegen $AB = 2\,AF$ ist $BH = 2\,GH$, und da $GH^2 = BH.HC$, so ist auch $GH = 2\,HC$, $BH = 4\,HC = \frac{4}{5}$ $AH = \frac{4}{5}\,d - \frac{1}{2}\,d = 0{\cdot}3\,d$. Ferner $FB = \sqrt{AB^2 + AF^2} = \frac{d}{4}\sqrt{5}$, $BZ =$ $= EJ = \frac{d}{4}(\sqrt{5} - 1)$, $AJ = AE - EJ = \frac{d}{4}(3 - \sqrt{5})$. Aber $AJ : AE =$ $= AH : AK$, mithin $AK =$

$$\frac{AE.AH}{AJ} = \frac{\frac{d}{2}\cdot\frac{3d}{10}}{\frac{d}{4}(3 - \sqrt{5})} = \frac{3}{20}\,d\,(3 + \sqrt{5})$$

und da AK der Kreisquadrant oder $\frac{d\pi}{4}$ sein soll, so wird $\pi = \frac{18 + \sqrt{180}}{10}$ wie oben. Auch eine Zeichnung des flächengleichen Quadrates wird unter Voraussetzung des gleichen Wertes von π gelehrt.

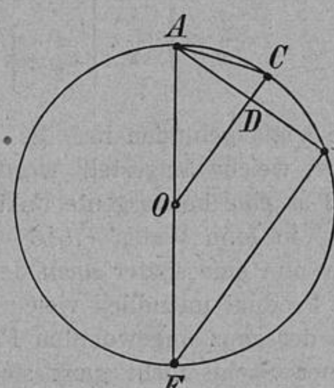

Fig. 4.

Wissenschaftlich weit merkwürdiger ist eine zweite, von Vieta eingeschlagene Gedankenfolge, von welcher er selbst aussagt, sie sei das in Rechnung umgesetzte Verfahren des Antiphon (Fig. 4). Sei $AB = a_n$ die Seite des regelmäßigen Sehnen-n-eckes, dessen Fläche F_n heiße, sei ferner $AC = a_{2n}$ die Seite des regelmäßigen Sehnen-$2\,n$-eckes und F_{2n} dessen Fläche. $OC = r =$ Halbmesser, $BE = \alpha_n$ ist die Supplementarsehne von AB, für welche Vieta sich des Namens Apotome bediente. Offenbar ist nun $\Delta ABE \sim ADO$, mithin $BE : AE =$ $= OD : OA$ oder $\frac{OD}{r} = \frac{\alpha_n}{2r}$. Ferner ist $\Delta OAC = \frac{1}{2n}F_{2n}$, $\Delta OAD =$ $= \frac{1}{2n}F_n$; $F_n : F_{2n} = \Delta OAD : \Delta OAC = OD : OC = \alpha_n : 2r$. Genau so beweist sich $F_{2n} : F_{4n} = \alpha_{2n} : 2r$, $F_{4n} : F_{8n} = \alpha_{4n} : 2r$ usw. Die Multiplikation von k solchen aufeinander folgenden Proportionen gibt:

$$F_n : F_{2^k n} = \alpha_n \,.\, \alpha_{2n} \ldots\ldots \alpha_{2^{k-1} n} : (2r)^k.$$

Ist $n=4$, so ist $F_4=2r^2$ und $2^k n=2^{k+2}$, $2^{k-1}n=2^{k+1}$, also

$$F_{2^{k+2}}=2r^2\frac{2r}{\alpha_4}\cdot\frac{2r}{\alpha_8}\cdot\ldots\ldots\frac{2r}{\alpha_{2^{k+1}}}.$$

Bei unendlich werdendem k fällt $F_{2^{k+2}}$ mit der Kreisfläche $r^2\pi$ zusammen und durch leichte Umformung ist $\frac{2}{\pi}=\frac{\alpha_4}{2r}\cdot\frac{\alpha_8}{2r}\cdot\frac{\alpha_{16}}{2r}\cdots\cdots$ in infinitum.

Nun ist aber $\frac{\alpha_n}{2r}=\cos AEB=\cos\frac{360^0}{2n}$ oder die unendliche Faktorenfolge rechter Hand würde sich heute in der Form

$$\cos\frac{90^0}{2}\cdot\cos\frac{90^0}{4}\cdot\cos\frac{90^0}{8}\cdots\cdots \text{ darstellen.}$$

Die Werte dieser einzelnen Faktoren aber sind:

$$\sqrt{\frac{1}{2}},\ \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}},\ \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots \text{ und so kommt}$$

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots,$$

wie Vieta gefunden hat. Es war das die erste unendliche Faktorenfolge, welche aufgestellt worden ist, und ein glücklicher Zufall wollte, daß es eine konvergente Faktorenfolge war.

In John Wallis' (1616—1703) „Arithmetica infinitorum" von 1659 war nun eine später nach dem Erfinder benannte Darstellung von π als Produkt unendlich vieler Faktoren veröffentlicht. Wallis selbst war bei der ganz ungewohnten Form des von ihm gegebenen Ausdruckes seiner Sache nicht ganz sicher. Er legte seine Entwicklung Lord Brouncker vor und dieser brachte das Produkt $\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\cdots$ in die Form des Kettenbruches

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cdots\cdots}}}}.$$

Wie Lord Brouncker diese Umwandlung vollzogen hat, ist nicht bekannt. Ein von Wallis gegebener Beweis ist derart gekünstelt, daß man unmöglich annehmen kann, die Erfindung sei auf einem ihm entsprechenden Weg gemacht worden.

Ersetzt man die Bezeichnung von Wallis durch die der heutigen Mathematik, ohne von seinem Gedankengang abzuweichen, so ist die Fläche $\frac{\pi}{4}$ des Kreisquadranten vom Radius 1 durch das Integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ dargestellt, das Quadrat des Halbmessers durch 1. Das Verhältnis dieses Quadrates zu jener Fläche ist also

$$4 : \pi = 1 : \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

Jenes Integral ist aber enthalten in der allgemeinen Form: $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{\lambda}{2}}\, dx$ und nicht minder in der allgemeineren Form:

$$\int_0^1 \left(1-x^{\frac{2}{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Aus der ersteren entsteht es durch $\lambda = 1$, aus der letzteren durch $\mu = 1$, und aus der noch zusammengesetzteren Form $\int_0^1 \left(1-x^{\frac{2}{\mu}}\right)^{\frac{\lambda}{2}} dx$ durch gleichzeitige Annahme von $\lambda = 1$ und $\mu = 1$. Geradzahlige Werte von λ gestatten, die Potenzierung unter dem Integralzeichen auszuführen, wodurch zwar mehrgliedrige Ausdrücke auftreten, deren einzelne Monome aber nach den Regeln, die sich als

$$\int_0^1 x^m\, dx = \frac{1}{m+1}$$

zusammenfassen lassen, integriert werden können. Da ferner für Wallis bereits der Satz vorhanden war, den wir heute dahin aussprechen, das Integral einer Summe sei gleichbedeutend mit der Summe der Integrale, so findet er eine ganze Anzahl von Werten der Funktion $\int_0 \left(1-x^{\frac{2}{\mu}}\right)^{\frac{\lambda}{2}} dx$ bei $\lambda = 0, 2, 4, 6, 8$ und $\mu = -1, 0, 1, 2 \ldots\ldots 8$, von welchen die bei $\mu = -1$ erscheinenden allerdings falsch sind. Ist gleichzeitig μ und λ gerade, so haben die Integrale eine sehr symmetrische Gestalt und Wallis nimmt nach derselben Induktion, von welcher er fortwährend Gebrauch macht, an, diese Symmetrie müsse erhalten bleiben, auch wenn λ ungerade gewählt wird. Kurzum, Wallis beabsichtigt eine Interpolation, welche den doppelten Zweck erfülle, einen Mittelwert zwischen zwei Ausdrücken zu finden, der als Wert zwischen beiden enthalten in der Form mit der Bauart beider übereinstimme. Diesem Doppelzweck rückt er allmählich dadurch näher, daß ein Faktor, der als Quadratwurzel geschrieben, die Symmetrie stört, allmählich beseitigt wird, und dies geschieht, indem der Radikand der Einheit näher gebracht wird, während andere Faktoren daneben erscheinen, die in das allgemeine Gesetz passen. Schließlich erscheint: $\frac{4}{\pi}=\frac{3.3.5.5.7.7.9.9\ldots\ldots}{2.4.4.6.6.8.8\ldots\ldots\ldots}$ mit im Zähler und im Nenner ins Unendliche fortgesetzten Faktorenfolgen.

In Lamberts Tabellensammlung[1]) (Tafel XXIV) finden sich π, $\log\pi, \frac{1}{\pi}, \sqrt{\pi}$ auf 18 Dezimalen angeführt. Vega gab in seinem Thesaurus (S. 633) π auf 140 Stellen an, wovon 136 richtig sind. Die Methoden, mit denen man π berechnete, beruhten fast durchaus auf dem Kunstgriff, den zuerst Machin angewendet hat, nämlich $\frac{\pi}{4}$ in die Summe zweier oder mehrerer Bogen mit rationalen Tangenten zu zerlegen, die dann einzeln mit der Arkustangensreihe berechnet wurden. Machin, ein Engländer, berechnete π auf 100 Dezimalen genau unter Benützung von:

$$tg\,\alpha=\frac{1}{5};\ tg\,4\,\alpha=\frac{120}{119};\ tg\left(4\,\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{239}$$

$$\frac{\pi}{4}=4\,arc\,tg\frac{1}{5}-arc\,tg\frac{1}{239}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\ldots\ldots\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\ldots\ldots\right).$$

Euler beutete diesen Gedanken auf das beste aus, indem er schon 1737 [De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi. Comment. Acad. Petrop. IX, 1737] durch Einführung spezieller Zahlenwerte in die allgemeine Formel

$$arc\,tg\frac{1}{p}=arc\,tg\frac{1}{p+q}+arc\,tg\frac{q}{p^2+pq+1}$$

solche Zerlegungen vornahm und die Reihe aufstellte:

$$arc\,tg\frac{x}{y}=arc\,tg\frac{a\,x-y}{a\,y-x}+arc\,tg\frac{b-a}{a\,b+1}+arc\,tg\frac{c-b}{c\,b+1}+\ldots\ldots,$$

[1]) Zusätze zu den logarithmisch-trigonometrischen Tabellen zur Erleichterung und Abkürzung der bei Anwendung der Mathematik vorfallenden Berechnungen. Berlin 1770.

die z. B. für $\frac{x}{y} = 1, a, b, c, \ldots\ldots$ gleich den ungeraden Zahlen der Zahlenreihe

$$\frac{\pi}{4} = arc\,tg\frac{1}{2} + arc\,tg\frac{1}{2.4} + arc\,tg\frac{1}{2.9} + arc\,tg\frac{1}{2.16} + \ldots\ldots\ldots$$

lieferte.

Daran anschließend hat dann Johann Friedrich Pfaff (1765—1825), Professor zu Helmstädt und dann zu Halle, diese Reihen untersucht. (De progressionibus arcuum circularium etc. Nova Acta Acad. Petrop. X, 1792.)

Eulers Reihen wurden vielfach zur Berechnung von π benützt. So hat z. B. Vega sein Resultat aus der Eulerschen Formel

$$\frac{\pi}{4} = 5\,arc\,tg\frac{1}{7} + 2\,arc\,tg\frac{3}{79}$$

gewonnen, wozu er noch zur Kontrolle

$$\frac{\pi}{4} = 2\,arc\,tg\frac{1}{3} + arc\,tg\frac{1}{7} \quad \text{nahm und}$$

Karl Buzengeiger (1771—1835), zuerst Magister in Ansbach, dann Professor in Freiburg im Breisgau, gab die ähnlich gebildete neue Formel:

$$\frac{\pi}{4} = 8\,arc\,tg\frac{1}{10} - 4\,arc\,tg\frac{1}{515} - arc\,tg\frac{1}{239}$$

[Klügel, Wörterbuch I, S. 666], die rasch konvergierende Reihen ergibt. Ebenso teilte Ch. Hutton [Glaisher in Messenger of Mathematics II, 1873] eine Zerlegung von $\frac{\pi}{4}$ mit in einer sehr rasch konvergierenden Reihe:

$$arc\,tg\,\tau = \frac{\tau}{1+\tau^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{\tau^2}{1+\tau^2}\right) + \frac{2.4.}{3.5.}\left(\frac{\tau^2}{1+\tau^2}\right)^2 + \ldots\ldots\right\},$$

welche Reihe auch schon Euler aufgestellt hat, der seiner Angabe nach π in einer Stunde auf 20 Dezimalen berechnete. [Opera posthuma L. Euleri von P. H. Fuß et Nic. Fuß 1862, I, S. 288] mit der sehr bequemen Formel:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{28}{10}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2.4.}{3.5.}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \ldots\ldots\right\}$$
$$+ \frac{30366}{100000}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{10000}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \ldots\ldots\right\}.$$

In einer neuen Abhandlung (Nova Acta Acad. Petrop. XI, S. 150) bildete Euler die leicht zu beweisende Gleichung:

$$arc\,tg\,\frac{x}{2-x} = 2\int_0^x \frac{dx}{4+x^4} + 2\int_0^x \frac{x\,dx}{4+x^4} + \int_0^x \frac{x^2\,dx}{4+x^4},$$

entwickelte diese Integrale in Reihen, setzte $x = \frac{1}{2}$ und dann $\frac{1}{4}$ und erhielt dadurch Reihen für $arc\,tg\,\frac{1}{3}$ und $arc\,tg\,\frac{1}{7}$, die in die Gleichung $\frac{\pi}{4} = 2\,arc\,tg\,\frac{1}{3} + arc\,tg\,\frac{1}{7}$ eingesetzt einen Ausdruck lieferten, der π berechnen ließ.

Anschließend an Descartes bildete Euler eine andere brauchbare Reihe zur Bestimmung von π.

Um nämlich den Kreis zu rektifizieren, hatte Cartesius (Oeuvres de Descartes. Ed. Comin XI) an das Quadrat $\widehat{bf}$ das Rechteck $\widehat{cg}$, dessen vierte Ecke auf der Diagonale liegt und dessen Fläche $\frac{1}{4}$ des Quadrates ist, angelegt; an dieses wieder ein Rechteck $\widehat{dh} = \frac{1}{4} \cdot \widehat{cg}$ usw.

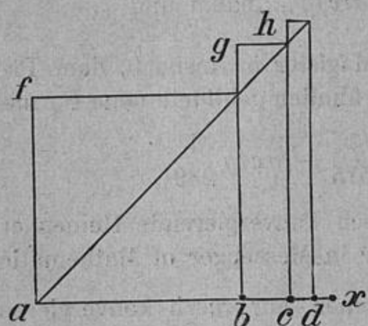

Fig. 5.

Dadurch gelangte er endlich zu einem Grenzpunkte x, so daß $a\,x$ dem Durchmesser des gesuchten Kreises gleich wird. Dabei hatte er angegeben, daß ab Durchmesser des dem Quadrat eingeschriebenen Kreises, $a\,c$ Durchmesser des dem Achteck, ad des dem 16-Eck usw. eingeschriebenen Kreises sei, so daß $a\,x$ der Durchmesser des dem Polygon mit ∞ vielen Seiten eingeschriebenen Kreises, d. h. der gesuchte Kreisdurchmesser selbst wird. Euler leitete aus dieser Konstruktion die Formel ab:

$$tg\,\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,tg\,\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\,tg\,\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}\,tg\,\frac{\pi}{32} + \ldots\ldots = \frac{4}{\pi}.$$

Von dieser Reihe gelangt er zur Summierung der allgemeinen Reihe $tg\,\varphi + \frac{1}{2}\,tg\,\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\,tg\,\frac{\varphi}{4} + \ldots\ldots = \frac{1}{\varphi} - 2\,cotg\,2\,\varphi$, aus welcher Gleichung er die Faktorenfolge gewann:

$$\frac{2\,\varphi}{sin\,2\,\varphi} = 1 : \left(cos\,\varphi\,cos\,\frac{\varphi}{2}\,cos\,\frac{\varphi}{4}\,cos\,\frac{\varphi}{8}\ldots\ldots\right),$$

die als das erste unendliche Produkt gilt.

Auch Lambert hatte schon 1758 an die Quadraturversuche des Gregorius a St. Vincentio anschließend eine Ableitung dieser Faktorenfolge in den Observationes variae in mathesin puram. [Acta Helvetica III, Basileae 1758, § 10, S. 132] gegeben und findet π viel genauer als dies aus den ein- und umgeschriebenen Polygonen möglich ist. Auf diese Ableitung näher einzugehen, würde zu weit führen.

Nicht unerwähnt mögen die Versuche bleiben, die in Japan in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts gemacht wurden, um die Zahl π auf eine größere Zahl Dezimalen zu berechnen. Japans berühmtester Mathematiker Kowa Seki gilt als Erfinder einer solchen Methode, ähnlich jenen, die im Abendlande der Erfindung der Infinitesimalrechnung unmittelbar vorhergingen. Seine Schüler bauten diese Methode später aus und so finden sich eine Anzahl unendlicher Reihen für *arc sin x* in japanischen Werken. In dem Werke Ho en san Kyo von Yoshihide Matsunaga im Jahre 1739 ist π auf 50 Stellen aus der gewöhnlichen Arkussinusreihe berechnet.

Aijma aber (1737—1797) gab außer jener Reihe auch folgende an:

$$\frac{1}{2}(arc\,sin\,x + x\sqrt{1-x^2}) = x - \sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} \frac{1}{2\beta+1} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2\beta-3)}{2.4.6\ldots2\beta} \cdot x^{2\beta+1}$$

und

$$arc\,sin\,x = \sqrt{1-x^2} \cdot \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} \frac{2.4.6\ldots2\beta}{1.3.5\ldots(2\beta+1)} \cdot x^{2\beta+1}$$

(Harzer P., „Die exakten Wissenschaften im alten Japan". Rede, gehalten zu Kiel am 27. Feb. 1905.)

Außerdem finden sich in japanischen Schriften jener Zeit auch Darstellungen der Zahl π durch Näherungswerte von Kettenbrüchen. (T. Hayashi, The values of π by the japanese mathematicians of the 17^{th} and 18^{th} centuries. Bibliotheca math. 1902, p. 273—275.) So stammt von Y. Arima aus dem Jahre 1766 der auf 12 Stellen richtige Näherungswert $\pi = \frac{5419351}{1725033}$ und der auf 30 Stellen entsprechende $\pi = \frac{428224593349304}{136308121570117}$ und G. Kurushima gab für π^2 den Wert $\frac{98548}{9985}$ an.

Versuche, den Charakter der Zahl π zu ergründen, waren schon von De Lagny (Mémoires de l'Acad. de Paris, 1719, p. 141) gemacht worden. Er war schon zu dem wichtigen Satze gelangt, den er aussprach, ohne ihn beweisen zu können, daß der Bogen selbst irrational sein muß, wenn die zugehörige Tangente eine rationale Zahl ist. Aus diesem Satze schloß er später 1727, daß die Kreisrektifikation durch Radius und Tangente geometrisch unmöglich sei. Dieser Satz war es, der von Lambert zum Ausgangspunkt seines

Beweises für die Irrationalität von π im Jahre 1767 diente. (Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques. Lu en 1767. Histoire de l'Acad. de Berlin 1761.) Man sehe über den Wert von Lamberts Beweis: A. Pringsheim, „Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π." Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der k. bayr. Akad. der Wissensch. 1898, XXVIII, Heft 2, S. 325—337. Ja, Lambert ging in seiner Erkenntnis noch einen Schritt weiter, indem er in einem Briefe an Holland (Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel, herausgegeben von J. Bernoulli) sagt: „Die Art, wie ich dies bewiesen habe, läßt sich so weit ausdehnen, daß zirkuläre und logarithmische Größen nicht Wurzeln von rationalen Gleichungen sein können." Daß Lamberts Beweis von seinen Zeitgenossen nicht entsprechend beachtet wurde, scheint aus dem Umstande hervorzugehen, daß selbst Euler 1771 seine Spekulationen über die Möglichkeit der Quadratur des Kreises wiederholte, die er schon in der Introductio an die Lösung transzendenter Gleichungen wie $x = \cos x$, $s = \sin 2s$ usw. angeknüpft hatte.

Euler ging von der Leibnizischen Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots = \frac{\pi}{4}$ aus, und dieses dürfte die erste Stelle sein (Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum 1739, T. IX, 165), an welcher Euler sich des Buchstabens π für die Zahl 3·1415926...... bediente. Wir wissen, daß es William Jones 1706 mit eben dieser Bezeichnung versuchte aber ohne Nachahmung blieb. Eulers Beispiel schlug durch und bald nahm ein Schriftsteller nach dem anderen das π an. Noch eine andere bald allgemein gewordene Bezeichnung schreibt sich von dem in Rede stehenden Aufsatze her, in welchem die erste uns bekannte Benützung des Buchstabens e für die Basis des natürlichen Logarithmensystems sich findet (Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum 1739, T. IX, 187: posito e pro numero cuius logarithmus hyperbolicus est 1).

Schon 1730 oder 1731 hatte Euler erkannt, daß $\left(\frac{1-x^z}{z}\right)_{(z=0)} = -\log z$; und von da an war der Übergang zur Auffassung der Exponentialgröße als Grenzwert angebahnt. Auch der Zusammenhang zwischen trigonometrischen Ausdrücken und Exponentialgrößen mit imaginären Exponenten war Euler nachweislich schon früher nicht entgangen.

Euler beschäftigt sich in zwei Aufsätzen (Nov. Act. Petrop. XI, 1793 [1798], S. 133 und S. 150) mit Zyklometrie, d. h. mit der Frage nach expediter Berechnung des Wertes der Zahl π. Euler gibt zunächst eine kurze historische Übersicht über die Resultate von A. Sharp, J. Machin und G. de Lagny; dabei erklärt er die Arbeit des letzteren, der die Berechnung auf 100 Stellen durchführte, für eine mehr als herkulische Leistung. Euler übersieht hiebei eine Arbeit, auf die im Briefwechsel von Lambert IV, S. 480 (Schreiben von Wolfram an Lambert) aufmerksam gemacht wird: B. Lamy hat π bis auf 128 Ziffern geliefert. Danach stellt er eine neue Formel auf, die bedeutende Vorzüge gegen die Leibnizische Formel hat. Bedeutet s den zur Tangente τ gehörigen Bogen, so wird

$$s=\frac{\tau}{1+\tau^2}\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{\tau^2}{1+\tau^2}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\left(\frac{\tau^2}{1+\tau^2}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\left(\frac{\tau^2}{1+\tau^2}\right)^3+\ldots\ldots\right].$$

Auf verschiedenen Wegen, einmal durch eine Reduktionsformel, einmal durch eine Integral-Transformation, wird die Richtigkeit dieser Beziehung nachgewiesen. Die einzelnen Glieder lassen sich deswegen bequemer entwickeln als bei der Leibnizischen Formel, weil jedes durch eine einfache Multiplikation aus dem vorhergehenden abgeleitet werden kann. Ein weiterer Vorzug liegt darin, daß alle Glieder von gleichem Vorzeichen sind, so daß eine Addition der Glieder genügt. Wird die neue Formel bei $\pi=4\,A\,tg\frac{1}{2}+4\,A\,tg\frac{1}{3}$ verwendet, so entsteht

$$\pi=\frac{16}{10}\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{10}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\left(\frac{2}{10}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\left(\frac{2}{10}\right)^3+\ldots\ldots\right]$$
$$+\frac{12}{10}\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\left(\frac{1}{10}\right)^3+\ldots\ldots\right];$$

noch bessere Formeln erhält man für $\pi=8\,A\,tg\frac{1}{3}+4\,A\,tg\frac{1}{7}$, da die auf den zweiten Summanden bezügliche Reihe nach Potenzen von $\frac{2}{100}$ fortschreitet, und für $\pi=20\,A\,tg\frac{1}{7}+8\,A\,tg\frac{3}{79}$, wo die entsprechende Entwicklung nach Potenzen von $\frac{144}{100000}$ erfolgt.

Der Ausgangspunkt der letzten Abhandlung (ibid., S. 150) ist die Integralgleichung:

$$\int\frac{2+2x+x^2}{4+x^4}\,dx=\int\frac{dx}{2-2x+x^2}=\int d\,A\,tg\frac{x}{2-x}=$$
$$=2\int\frac{dx}{4+x^4}+2\int\frac{x\,dx}{4+x^4}+\int\frac{x^2\,dx}{4+x^4}.$$

Nimmt man die Grenzen der Integrale gleich 0 und x, so wird ihr Wert gleich $A\,tg\frac{x}{2-x}$; dies Integral bezeichnet Euler mit dem astronomischen Zeichen für die Sonne und ähnlich die drei Integrale rechts mit den Zeichen für Saturn, Jupiter und Mars:

$$\int \frac{d\,x}{4+x^4} = ♄, \quad \int \frac{x\,d\,x}{4+x^4} = ♃, \quad \int \frac{x^2\,d\,x}{4+x^4} = ♂.$$

Er schreibt also $\odot = 2\,♄ + 2\,♃ + ♂ = A\,tg\,\frac{x}{2-x}$. Nun ist die Entwicklung des Nenners der Integrale nach Potenzen von $\frac{x^4}{4}$ leicht. Die erlangten Reihen werden für $x=1$, $x=\frac{1}{2}$ und $x=\frac{1}{4}$ benützt, wodurch man auf $A\,tg\,1$, $A\,tg\,\frac{1}{3}$ und $A\,tg\,\frac{1}{7}$ kommt. Die beiden letzten Reihen, die nach Potenzen von $\frac{1}{64}$, beziehungsweise $\frac{1}{1024}$ fortschreiten, konvergieren recht gut und liefern den Wert für $\frac{\pi}{4} = 2\,A\,tg\,\frac{1}{3} + A\,tg\,\frac{1}{7}$ mit ziemlicher Leichtigkeit als Aggregat von sechs unendlichen Reihen.

Im gleichen Bande der Petersburger Veröffentlichungen kommt Nik. Fuß (Nov. Act. Petrop. XI, 1793 [1798], S. 155) auf ein früher von Euler behandeltes Thema zurück. Es handelt sich um die Entwicklung von $\cos n\varphi = s$ nach Potenzen von $\cos\varphi = z$ und bei $\sin n\varphi = v\sqrt{1-z^2}$ um die von v nach Potenzen von z. Fuß stellt die schon von Euler angegebene Differentialgleichung $d^2 s\,(z^2-1) + z\,d\,z\,d\,s - n^2 s\,d\,z^2 = 0$ auf und integriert sie mit Hilfe unbestimmter Koeffizienten in Gestalt einer Reihe, die nach steigenden Potenzen von z fortschreitet, statt nach fallenden, wie bei Euler. Dabei wird das Eintreten von Ausnahmsfällen vermieden.

Wir haben unsere Blicke jetzt wieder nach England zu richten, wo uns die Transactions von Edinburgh und die von London einiges Bemerkenswerte bieten. Da sei kurz einer Arbeit von James Ivory (Transact. R. Soc. of Edinburgh IV [1798]), gedacht, der eine Formel schneller Konvergenz für den Umfang einer Ellipse aus der Entwicklung der Potenz $(a^2+b^2-2\,a\,b\cos\varphi)^n$ herleitet. Auf den Kreis angewendet, liefert diese Formel

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1^2}{4^2} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1^2}{4^2}\cdot\frac{3^2}{6^2} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{1^2}{4^2}\cdot\frac{3^2}{6^2}\cdot\frac{5^2}{8^2} + \cdots\cdots$$

als besonderen Fall.

Auch gab schon 1776 Ch. Hutton in den Philosophical Transactions der Londoner Royal Society bequem und schnell konvergierende Reihen zur Berechnung von π, die sich auf

$$arctan\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots.. \text{in inf.}$$

stützen.

Von den „Mathematical Memoirs" von J. Landen (London 1780) haben wir das fünfte „eine neue Methode, um die Summen gewisser Reihen zu erhalten", in unsere Besprechung zu ziehen. Nach einigen analytischen Vorbereitungen geht Landen so vor: Aus den Entwicklungen von $l\,(1+n)$ und $l\left(1+\frac{1}{n}\right)$ folgert er ohne Konvergenz-Bedenken $l\,u = (u - u^{-1}) - \frac{1}{2}(u^2 - u^{-2}) + \frac{1}{3}(u^3 - u^{-3}) - \ldots..;$ hierin trägt er $l\,u = z\sqrt{-1}$ ein und erhält $\frac{z}{2} = \frac{sin\, z}{1} - \frac{sin\, 2\,z}{2} + \frac{sin\, 3\,z}{3} - \ldots$ In diese Formel setzt er zur Herleitung spezieller Resultate

$$z = \frac{\pi}{3},\ z = \frac{\pi}{4} \text{ usw.}$$

Die Integration der Formel liefert

$$-\frac{z^2}{4} = \frac{cos\, z}{1^2} - \frac{cos\, 2\,z}{2^2} + \frac{cos\, 3\,z}{3^2} - \ldots\ldots - p'', \text{ wo}$$

$p'' = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots$ ist; dies wird mittels eines Kunstgriffes $= \frac{\pi^2}{12}$ bestimmt. In entsprechender Art leitet Landen die Formeln

$$\frac{sin\frac{3}{2}z}{1^2.2^2} - \frac{sin\frac{5}{2}z}{2^2.3^2} + \frac{sin\frac{7}{2}z}{3^2.4^2} - \ldots\ldots = \left(\frac{\pi^2}{6} + 3 - \frac{z^2}{3}\right) sin\frac{1}{2}z - 2\,z\,cos\frac{1}{2}z$$

und

$$\frac{cos\frac{3}{2}z}{1^2.2^2} + \frac{cos\frac{5}{2}z}{2^2.3^2} + \frac{sin\frac{7}{2}z}{3^2.4^2} + \ldots\ldots = 2\,(\pi - z)\,sin\frac{1}{2}z + \left(\frac{\pi^2}{3} - \pi z + \frac{1}{2}z^2 - 3\right)$$

her. Aus diesem letzten Resultate folgt

$$\frac{\pi^2}{3} - 3 = \frac{1}{1^2.2^2} + \frac{1}{2^2.3^2} + \frac{1}{3^2.4^2} + \ldots\ldots..$$

Ebenso wie früher, vielleicht auch noch in größerem Maßstabe, war die Aufmerksamkeit einiger Spezialisten und überhaupt vieler Leute, die dem aufgeklärteren Teile der Gesellschaft angehören, im Laufe der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts auf das Vermächtnis des Altertums, die berühmten Aufgaben der Dreiteilung eines Winkels, Quadratur des Kreises und der Verdopplung des Würfels, gerichtet. Als auf sehr bedeutende Zeichen der Aufmerksamkeit auf diese Aufgaben seitens der Spezialisten ist auch auf das Erscheinen in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts von Werken, die der Geschichte dieses Gegenstandes gewidmet waren, hinzuweisen. Es gab drei solche Werke. Als erstes erschien Montuclas „Histoire des recherches sur la quadrature du cercle" (Paris 1754), das im letzten 6. Kapitel einen kurzen historischen Überblick der Aufgaben über die Verdopplung des Würfels und die Dreiteilung eines Winkels enthielt. Die beiden anderen Werke, die ausschließlich der Aufgabe der Verdopplung des Würfels gewidmet waren, gehörten Nikolaus Theodor Reimer (Poggendorf, II, S. 596) (1772—1832), der im Jahre 1796 Privatdozent an der Universität in Göttingen war und später, vom Jahre 1801 an Professor der Mathematik an der Universität zu Kiel.

Die Aufmerksamkeit auf diese berühmten Aufgaben seitens der Mitglieder der gebildeten Gesellschaft kennzeichnete sich durch das Erscheinen einer bedeutenden Anzahl von Versuchen, dieselben zu lösen. Die Aufgabe der Quadratur des Kreises beschäftigte übrigens die gebildete Gesellschaft mehr als die beiden anderen. Besonders viel beschäftigte man sich mit ihr, nach der gedruckten Literatur zu urteilen, in Polen, wo ihr 15 Werke gewidmet waren, und in Frankreich, wo es 7 solcher Werke gab. Elf der Werke über die Quadratur des Kreises, die in Polen erschienen, gehörten einem Autor, dem Vizeoberst Eugenius Innocentius Corsonich, der darin bewies, daß $\pi = 3\frac{1}{8}$ sei. Sowohl dieses Resultat, als auch dessen in denselben Werken versuchter Beweis waren, seinen Worten nach, von vielen Mathematikern und von sieben Akademien gutgeheißen. Und wirklich wurde der von ihm zusammengestellte genaue Bericht über seine sechsjährige Beschäftigung mit den entsprechenden Gegenständen außer in Warschau, wo er im Jahre 1779 erschien, noch in den „Nova Acta eruditorum" (Anno 1776), gedruckt unter dem Titel „Quadratura lunulae, circuli et segmenti, nec non curvatura sphaerae a V.-Col. E. Corsonich, ope 4 propositionum fundamentalium invicte demonstrata, et judicio Academiarum celeberrimarum subjecta". Jedoch nicht alle, die mit den Arbeiten von Corsonich bekannt waren, befriedigten sich mit seinen Beweisen. Als Opponent in der Heimat des Autors trat in der Literatur der Warschauer Professor Johann Koc vor. Die Polemik über einige im Druck erschienene Versuche zur Lösung dieser berühmten Aufgaben entstand auch in anderen Ländern.

So herrschte in Italien, wo man sich mehr mit der Dreiteilung eines Winkels und der Verdopplung des Würfels beschäftigte als mit der Quadratur des Kreises, nach der Literatur zu urteilen, eine heiße Polemik zwischen Francesco Boaretti einerseits und Vincenzo Dandolo und Antonio Romano anderseits in den Jahren 1792—1793 über den vom ersteren gegebenen Versuch, diese beiden Aufgaben mit Hilfe des Zirkels und Lineals zu lösen. [G. Valentin, Eine seltene Schrift über Winkeldreiteilung. Bibliotheca mathematica VII. (1893), S. 113—114.]

Die Literatur über die Lösung dieser drei berühmten Aufgaben erschöpfte sich jedoch nicht mit den Werken, die im Druck erschienen. Der bedeutend größere Teil der Versuche, diese Aufgaben zu lösen, blieb in Manuskripten und in diesem Zustande den Akademien und gelehrten Gesellschaften vorgelegt, belästigte er sie äußerst, da er zu seiner Durchsicht eine vollständig nutzlose Anwendung von Mühe und Zeit beanspruchte.

Außerdem tritt auch die Frage in den Vordergrund, die uns eigentlich beschäftigt, nämlich nach einem Beweise für die Transzendenz von e und π.

Lambert[1]), der bekannte Berliner Akademiker aus der Zeit Friedrichs des Großen, hat in dieser Hinsicht bereits erwiesen, daß die Zahl $\pi = 3{\cdot}14159265\ldots\ldots$ wenigstens nicht rational sein könne, sowie daß nicht nur die Zahl $e = 2{\cdot}7182818284\ldots\ldots$, sondern auch jede ihrer Potenzen mit rationalem Exponenten irrational sein müsse. Sein Beweis läßt allerdings in mehr als einer Beziehung zu wünschen übrig, doch hat Legendre in seinen éléments de geômetrie, ausgehend von derselben Grundlage wie Lambert, einen einfachen Beweis von mehr Strenge geliefert, der ihm zugleich noch das Mittel gewährte, zu zeigen, daß auch π^2 keine rationale Zahl ist, d. h. π nicht die Quadratwurzel aus einer solchen sein könne. Fügen wir hinzu, daß bezüglich der Zahl e Liouville etwas Ähnliches, sogar Umfassenderes nachgewiesen hat, nämlich, daß weder e selbst noch auch e^2 Wurzel einer ganzzahligen quadratischen Gleichung sein kann, so ist im wesentlichen alles angeführt, was bis in die neue Zeit hinein in bezug auf unsere Frage geleistet wurde. Erst im Jahre 1874 gelang es Hermite, unter Anwendung höherer analytischer Hilfsmittel, den strengen Nachweis zu führen, daß die Zahl e eine transzendente Zahl ist. Auf seiner Grundlage weiterbauend, fand dann Lindemann im Jahre 1882 dasselbe Ergebnis für die Zahl π; sein nicht leichter Beweis wurde später von Weierstraß 1885 durch einfachere Betrachtungen ersetzt. Noch später, 1893, haben Hilbert, Hurwitz, Gordan und andere den Beweis noch mehr vereinfacht, so daß er jetzt mit ganz elementaren Mitteln geführt werden kann.

---

[1]) Lambert J. H., Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen, herausgegeben von F. Rudio. 1892.

Die Grundlage der Untersuchungen von Lambert und Legendre[1]) ist ein gewisser unendlicher Kettenbruch, den wir zunächst herleiten wollen. Setzen wir nämlich

$$\varphi(z) = 1 + \frac{1}{z} y^2 + \frac{1}{z(z+1)} \cdot \frac{y^4}{2!} + \frac{1}{z(z+1)(z+2)} \cdot \frac{y^6}{3!} + \ldots\ldots,$$

so bestätigt sich ohne besondere Mühe die Beziehung:

$$\varphi(z) - \varphi(z+1) = \frac{y^2}{z(z+1)} \cdot \varphi(z+2)$$

und hieraus, wenn

5. $\psi(z) = \frac{y^2}{z} \cdot \frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}$ gesetzt wird, folgende Gleichung:

$\psi(z) = \frac{y^2}{z + \psi(z+1)}$; aus welcher sogleich die Kettenbruchentwicklung hervorgeht:

$$6.\quad \psi(z) = \cfrac{y^2}{z + \cfrac{y^2}{z+1 + \cfrac{y^2}{z+2+\ldots\ldots}}}.$$

Wird nun $z = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{x}{2}$ gewählt, so findet sich

$$\varphi(z) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\frac{y^2}{z} \cdot \varphi(z+1) = \frac{x}{2}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\right) = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

und demnach aus (5) und (6) die Gleichung

$$7.\quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2} + \cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{3}{2} + \cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{5}{2} + \cfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{7}{2} + \ldots\ldots}}}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{7 + \ldots\ldots}}}}.$$

Aus dieser Gleichung geht durch den Übergang zum Imaginären, indem nämlich x verwandelt wird in $x\sqrt{-1}$ — ein Verfahren, dessen

[1]) Legendre, A. M. Beweis, daß das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser und das Quadrat desselben irrationale Zahlen sind, deutsch v. F. Rudio 1892.

Zulässigkeit freilich erst gerechtfertigt werden müßte — mit Hilfe der bekannten Formel der Analysis

$$tg\, x = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}}$$

die neue Gleichung hervor:

$$8.\quad tg\, x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \ldots\ldots}}}.$$

Dies sind die beiden von Lambert gegebenen Kettenbrüche, an welche nun angeknüpft wird. Betrachten wir nämlich einen unendlichen Kettenbruch

$$9.\quad \cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \ldots\ldots}}}$$

in welchem sowohl die einzelnen Zähler $m, m', m'' \ldots\ldots$ als auch die einzelnen Nenner $n, n', n'' \ldots\ldots$ ganze Zahlen sind, deren letztere offenbar, indem man den jedesmaligen Zähler mit passendem Vorzeichen nimmt, positiv vorausgesetzt werden dürfen, so wird der Wert des Kettenbruches wesentlich irrational sein müssen, sobald die einzelnen Brüche $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''} \ldots.$ numerisch kleiner sind als Eins.

Um sich hievon zu überzeugen, bemerke man zunächst, daß der Kettenbruch keinesfalls größer als Eins werden kann. Denn, da $\frac{m}{n}$ numerisch kleiner als Eins sein soll, so ist der numerische Wert von m kleiner als $n - 1$; $n + \frac{m'}{n'}$ aber ist sicher $> n - 1$, also $\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n'}}$ numerisch kleiner als Eins.

Dasselbe gilt aus ähnlichen Gründen von dem Bruche $\cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n''}}$; folglich ist $n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n''}}$ größer als $n - 1$ und demnach

$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n''}}}$ numerisch unter der Einheit und so fort; wie weit der

Kettenbruch auch fortgesetzt wird, er wird nie die Einheit übertreffen. Das gleiche wird aber auch von jenen Kettenbrüchen gelten, welche aus dem vorigen hervorgehen, wenn man einen oder mehrere der Brüche am Anfange unterdrückt. Auch der Einheit gleich sein kann der ins Unendliche fortgesetzte Kettenbruch, respektive die letztgenannten Teile desselben nur in einem einzigen Falle. Soll nämlich, wo zur Abkürzung ω für den Kettenbruch $\cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \cfrac{m'''}{n''' + \dots\dots\dots}}}$ steht,

$\frac{m}{n+\omega} = \pm 1$ oder $\frac{\pm m}{n+\omega} = 1$ sein, so folgt aus $\pm m = n + \omega$ notwendig, daß $\omega = -1$, also $n = \pm m + 1$ sei; dann müßte, unter ω' den Kettenbruch $\cfrac{m''}{n'' + \cfrac{m'''}{n''' + \dots}}$ verstanden, $\frac{m'}{n' + \omega'} = -1$; $m' = -n' - \omega'$ sein. Hieraus folgt aber wieder notwendig $\omega' = -1$, also $n' = -m' + 1$ usf., so daß der Kettenbruch ω nur dann die Einheit zum Grenzwert haben kann, wenn er die Gestalt hat:

$$\cfrac{m}{\pm m + 1 + \cfrac{m'}{-m' + 1 + \cfrac{m''}{-m'' + 1 + \cfrac{m'''}{-m''' + \dots\dots}}}}.$$

Da jedoch die Kettenbrüche, welche wir nach Lambert zu betrachten haben, diese Gestalt nicht besitzen, können wir von diesem Ausnahmsfalle absehen und sagen: Der Kettenbruch (9) und die daraus durch Unterdrückung von 1, 2, 3 ...... Brüchen am Anfange hergeleiteten Kettenbrüche sind sämtlich numerisch kleiner als Eins.

Wollte man nun gegen die Behauptung des Satzes annehmen, der Kettenbruch (9) sei rational, nämlich gleich $\frac{b}{a}$:

$$\frac{b}{a} = \cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \dots\dots}}},$$

so bestimme man Werte $c, d, e \dots\dots$ durch nachstehende Gleichungen:

$$\frac{c}{b} = \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \cfrac{m'''}{n''' + \dots\dots}}} \qquad \frac{d}{c} = \cfrac{m''}{n'' + \cfrac{m'''}{n''' + \dots\dots}} \quad \text{usw.}$$

Dem eben Gesagten zufolge bilden die Werte $b, c, d, e \ldots\ldots$ eine unbegrenzte Reihe abnehmender Werte. Ferner aber finden sich aus den Gleichungen

$$\frac{b}{a}=\frac{m}{n+\frac{c}{b}},\ \frac{c}{b}=\frac{m'}{n'+\frac{d}{c}}$$ usw. die folgenden:

$c=ma-nb;\ d=m'b-n'c;\ e=m''c-n''d \ldots\ldots$, aus welchen sich $c, d, e \ldots\ldots$ als ganze Zahlen ergeben. Man gelangt also zu einer unbegrenzten Reihe numerisch abnehmender ganzzahliger Werte, welche nicht möglich ist und damit ist die Behauptung erwiesen.

Dieselbe Behauptung bleibt auch richtig, wenn der Kettenbruch (9) nicht vom Anfange, sondern erst von einer späteren Stelle an die Bedingungen des vorigen Satzes erfüllt.

Erfüllt er sie z. B. erst vom Gliede $\frac{m'''}{n'''}$ an, so würde der Kettenbruch $\omega=\cfrac{m'''}{n'''+\cfrac{m''''}{n''''+\ldots\ldots}}$ nach dem vorigen Satze irrational sein, und daher auch, wie leicht zu sehen, der Bruch

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\omega}}}$$ d. h. der ganze Kettenbruch (9) nicht rational sein können.

Nachdem diese Hilfsbetrachtung zu Ende geführt ist, wollen wir nun annehmen, in den Kettenbrüchen (7) und (8) werde unter x ein rationaler Wert $\frac{p}{q}$ verstanden. Sie werden dann offenbar von einer gewissen Stelle an die Bedingungen des Hilfssatzes erfüllen, da die Brüche $\frac{p^2}{1.q^2}, \frac{p^2}{3.q^2}, \frac{p^2}{5.q^2} \ldots\ldots$ von einer bestimmten Stelle an kleiner als Eins bleiben. Hieraus schließen wir dann sogleich, daß weder e^x noch $tg\,x$ gleichzeitig mit x rational sein können oder anders ausgedrückt: „Jede Potenz von e mit rationalem Exponenten ist irrational; desgleichen ist die Tangente jedes rationalen Bogens irrational."

Da nun für $x=\frac{\pi}{4}$ gefunden wird $tg\,x=tg\frac{\pi}{4}=1$, also gleich einer rationalen Zahl, so kann $\frac{\pi}{4}$ und folglich auch π nicht einer rationalen Zahl gleich sein. Wir schließen demnach: die Zahl π ist irrational. Diesen Lambertschen Sätzen konnte Legendre vermittels seines Hilfssatzes noch einen weiteren hinzufügen. Die Gleichung (8) gibt nämlich, wenn $x=\pi$ gesetzt wird, die folgende:

$$0 = \cfrac{\pi}{1 - \cfrac{\pi^2}{3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \ldots\ldots}}},$$ welche nicht anders bestehen kann, als wenn der die Zahl π teilende Ausdruck unendlich groß und folglich $3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \ldots\ldots}} = 0$ ist.

Demnach kann π^2 keine rationale Zahl sein, denn sonst wäre der Kettenbruch von der Art des Kettenbruches (9) und könnte nicht den rationalen Wert Null haben, den er doch besitzt.

Die Irrationalität der Zahl e selbst kann übrigens weit einfacher mittels der bekannten diese Zahl definierenden Reihe

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots$$

nachgewiesen werden; doch scheint sie nicht geeignet, um auch das allgemeinere Ergebnis von Lambert daraus zu gewinnen. Dagegen hat Liouville sie benützt, um zu zeigen, daß weder e selbst noch e^2 Wurzel einer ganzzahligen quadratischen Gleichung sein kann[1]).

Aus der Reihe $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$ findet man zunächst, wenn man sie nicht ins Unendliche fortsetzt, sondern nach der n^{ten} Potenz abbricht, die Gleichung:

$$10.\quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{\Theta x}{n+1-x};$$

wobei Θ einen positiven echten Bruch bedeutet.

Für $x=1$ liefert diese Gleichung den Wert e unter der Form:

$$11.\quad e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{1}{m!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \cdot \frac{\Theta}{n},$$

wobei n eine beliebig große Zahl bedeutet.

Wäre demnach e eine rationale Zahl, so dürfte man unter n auch den Nenner des möglichst gekürzten Bruches $e = \frac{m}{n}$ verstehen,

---

[1]) Paul Bachmann, Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. P. Bachmann, Zahlentheorie. Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft. Leipzig 1892 ff.

und erhielte somit aus der Gleichung (11), indem man sie mit $n!$ multipliziert und die ganzzahligen Bestandteile alle auf die linke Seite schafft, eine Gleichung von der Form:

$N = \frac{\Theta}{n}$, in welcher links eine ganze Zahl N, rechts aber ein echter Bruch steht, was widersinnig ist.

„Die Zahl e ist daher jedenfalls irrational."

Setzen wir nun in (10) $x = -1 = \varepsilon$, so erhalten wir:

$$12.\quad e^{-1} = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{\varepsilon^n}{n!} + \frac{\varepsilon^{n+1}}{n!} \cdot \frac{\Theta'}{n+2},$$

wobei wieder Θ' einen positiven echten Bruch bedeutet, der aber mit Θ nicht identisch sein muß. Nehmen wir nun an, e sei Wurzel einer quadratischen Gleichung $a x^2 - b x + c = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten a, b, c, so dürfen wir zunächst a als positiv voraussetzen und müßten dann haben:

$$a e^2 - b e + c = 0 \text{ oder } a e + c e^{-1} = b,$$

eine Gleichung, welche nach Einsetzung der Reihen (11) und (12) für e und e^{-1} folgende Gestalt annimmt:

$$a\left[1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n}\right] +$$

$$c\left[1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{\varepsilon^n}{1.2.3\ldots n}\right] + a \cdot \frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{\Theta}{n} +$$

$$c \cdot \frac{\varepsilon^{n+1}}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{\Theta'}{n+2} = b.$$

Hieraus folgt aber wieder durch Multiplikation mit $n!$ und wenn die ganzzahligen Bestandteile hierauf nach rechts geschafft werden,

$$a \cdot \frac{\Theta}{n} + c \cdot \varepsilon^{n+1} \cdot \frac{\Theta'}{n+2} = N,$$

unter N eine gewisse ganze Zahl verstanden. Nun ließe sich n zunächst so wählen, daß $c \cdot \varepsilon^{n+1}$ positiv wird. Dazu ist nur nötig, n gerade oder ungerade zu nehmen, je nachdem c negativ oder positiv ist. Ferner aber gilt unsere Betrachtung, wie groß die so gewählte Zahl n auch sei; mit wachsendem n wird aber der positive Ausdruck links kleiner als die Einheit, während N immer eine ganze Zahl bleibt, dies ist ein Widerspruch und folglich kann e nicht Wurzel einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten sein.

Dasselbe gilt aber auch für e^2. Um dies zu erweisen, erinnern wir uns an eine bekannte Formel aus der Zahlentheorie. Bezeichnet $E(x)$ die größte ganze Zahl, welche in x, und zwar in den positiven x

enthalten ist und m eine positive ganze Zahl, so gibt die Summe

$E\left(\frac{m}{2}\right)+E\left(\frac{m}{4}\right)+E\left(\frac{m}{8}\right)+\ldots\ldots$, fortgesetzt, bis sie von selbst abbricht, die Anzahl an, wie oft der Faktor 2 in dem Produkt $1.2.3\ldots\ldots m$ enthalten ist. Insbesonders findet sich, wenn $m=2^i$ ist, der Wert dieser Summe oder dieser Anzahl $2^{i-1}+2^{i-2}+\ldots\ldots+2+1=2^i-1=m-1$ und wenn $m=2^i+1$ gleich $2^i-1=$ $=m-2$.

Allgemein ist jene Summe, aber kleiner als die unendliche Reihe $\frac{m}{2}+\frac{m}{4}+\frac{m}{8}+\ldots\ldots$, deren Wert m ist.

Hebt man demnach im Bruche $\frac{2^m}{1.2.3\ldots m}$ nach Möglichkeit den Faktor 2 aus Zähler und Nenner heraus, so bleibt im Zähler eine Potenz von 2, etwa $2^{\alpha m}$ mit positivem Exponenten zurück, welcher speziell in den beiden hervorgehobenen Fällen den Wert 1, beziehungsweise 2 haben wird; der so vereinfachte Bruch möge $\frac{2^{\alpha m}}{p_m}$ genannt werden. Ist $n>m$ und setzt man in gleicher Weise vereinfacht $\frac{2^n}{1.2.3\ldots n}=\frac{2^{\alpha n}}{p_n}$, so wird der Nenner p_n offenbar alle in p_m verbliebenen ungeraden Faktoren enthalten, also durch p_m teilbar sein müssen.

Nunmehr untersuchen wir die Annahme, daß e^2 Wurzel der Gleichung $a x^2-b x+c=0$ sei (mit ganzzahligen Koeffizienten), man müßte dann haben:

$a e^2+c e^{-2}=b$, oder nach Einsetzen der Werte für e^2 und e^{-2}, nämlich:

$$e^2=1+\frac{2}{1}+\ldots\ldots+\frac{2^m}{m!}+\ldots\ldots+\frac{2^n}{n!}+\frac{2^n}{n!}\cdot\frac{2\,\Theta}{n-1} \text{ oder}$$

$$e^{+2}=1+\frac{2}{1}+\ldots\ldots+\frac{2^{\alpha m}}{p_m}+\ldots\ldots+\frac{2^{\alpha n}}{p_n}+\frac{2^{\alpha n}}{p_n}\cdot\frac{2\,\Theta}{n-1} \text{ und}$$

$$e^{-2}=1+\frac{2\,\varepsilon}{1}+\ldots\ldots+\frac{2^{\alpha m}\,\varepsilon^m}{p_m}+\ldots\ldots+\frac{2^{\alpha n}\,\varepsilon^n}{p_n}+\frac{2^{\alpha n}\,\varepsilon^{n+1}}{p_n}\cdot\frac{2\,\Theta'}{n+3},$$

folgende Gleichung:

$$a\left(1+\frac{2}{1}+\ldots\ldots+\frac{2^{\alpha m}}{p_m}+\ldots\ldots+\frac{2^{\alpha n}}{p_n}\right)$$
$$+c\left(1+\frac{2\,\varepsilon}{1}+\ldots\ldots+\frac{2^{\alpha m}\cdot\varepsilon^m}{p_m}+\ldots\ldots+\frac{2^{\alpha n}\cdot\varepsilon^n}{p_n}\right)$$
$$+a\frac{2^{\alpha n}}{p_n}\cdot\frac{2\,\Theta}{n-1}+c\,\frac{2^{\alpha n}\cdot\varepsilon^{n+1}}{p_n}\cdot\frac{2\,\Theta'}{n+3}=b.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit p_n, so werden alle Glieder der mit a und c multiplizierten Klammergrößen ganze Zahlen, und wenn man dann alle ganzzahligen Bestandteile nach rechts schafft, entsteht die Gleichung:

$$13. \quad a \,.\, 2^{\alpha n} \,.\, \frac{2\,\Theta}{n-1} + c \,.\, 2^{\alpha n} \,.\, \varepsilon^{n+1} \,.\, \frac{2\,\Theta'}{n+3} = N,$$

unter N eine gewisse ganze Zahl verstanden.

Wir können hiebei wieder unter n eine gerade oder ungerade Zahl verstehen, je nachdem c negativ oder positiv ist, wodurch dann die beiden Glieder links wesentlich positiv werden. Dies kann z. B. in der Weise bewirkt werden, daß wir $n = 2^i$ wählen, wenn c negativ und $n = 2^i + 1$, wenn c positiv ist. Dementsprechend würde dann der Wert der linken Seite durch den Ausdruck

$$14. \quad 4\left(\frac{a\,\Theta}{n-1} + \frac{c\,\varepsilon^{n+1} \,.\, \Theta'}{n+3}\right), \text{ respektive } 8\left(\frac{a\,\Theta}{n-1} + \frac{c\,\varepsilon^{n+1} \,.\, \Theta'}{n+3}\right) \text{ ge-}$$

geben sein.

Wir dürfen endlich bei unserer Betrachtung das so gewählte n beliebig groß annehmen und werden dies bei der bereits getroffenen Wahl von n in beiden Fällen dadurch erreichen, daß wir den Exponenten i hinreichend groß wählen. Da hiebei mit dem unendlich wachsenden n die Ausdrücke (14) unendlich abnehmen, sinken sie schließlich, ohne Null zu sein, unter Eins herab, während N eine ganze Zahl bleibt. Die Gleichung (13) ergibt dann einen Widerspruch und folglich ist damit der Beweis der Behauptung erbracht.

Die bisnun in betreff der beiden Zahlen e und π entwickelten Sätze sind jedoch nur besondere Fälle des allgemeinen Ergebnisses, welches für die Zahl e von Hermite in seiner Schrift „sur la fonction exponentielle" und für π von Lindemann festgestellt worden ist, daß nämlich jede dieser Zahlen eine transzendente ist. Im folgenden sei eine zusammenhängende Darstellung der Betrachtungen Hermites gegeben.

Versteht man unter A die Funktion $\sin x$ oder in bekannter Reihenform

$$A = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots\ldots; \text{ kürzer mit Verwendung des Summen-}$$

zeichens:

$$\text{I. } A = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \,.\, x^{2k+1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (2k+1)} \text{ und bildet hieraus die unbegrenzte}$$

Reihe von Größen A_1, A_2, A_3...... nach dem Gesetze, welches die Formeln ausdrücken:

$$A_1 = \int_0^x x\,A\,d\,x;\ A_2 = \int_0^x x\,A_1\,d\,x \ldots\ldots \text{ allgemein}$$

II. $\boldsymbol{A_n = \int_0^x x\,A_{n-1}\,d\,x,}$ so findet sich vermittels der für A gegebenen Reihenentwicklung ohne weiteres:

$$\text{III. } A_n = x^{2n+1} . \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{1.2.3\ldots 2k} . \frac{x^{2k}}{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2n+1)}.$$

Wird anderseits $\mathfrak{A} = \frac{\sin x}{x}$ gesetzt und hieraus die Reihe der Größen $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2\ \mathfrak{A}_3 \ldots\ldots$ durch die Gleichungen

$$\mathfrak{A}_1 = -\frac{1}{x} . \frac{d\,\mathfrak{A}}{d\,x};\ \mathfrak{A}_2 = -\frac{1}{x} . \frac{d\,\mathfrak{A}_1}{d\,x} \ldots\ldots$$

allgemein

IV. $\boldsymbol{\mathfrak{A}_n = -\frac{1}{x} . \frac{d\,\mathfrak{A}_{n-1}}{d\,x}}$ hergeleitet, so ergibt sich gleichfalls

$$\text{V. } \mathfrak{A}_n = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2n+1)} . \frac{x^{2k}}{1.2.3\ldots 2k},$$

d. h. es ist

VI. $\mathfrak{A}_n = \frac{A_n}{x^{2n+1}}$ und daher auch $\mathfrak{A}_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{x^{2n+3}}$; VII.

Wird nun in (IV) $n+1$ statt n, darauf die Werte (VI) und (VII) eingesetzt und die aus der Definitionsgleichung (II) hervorgehende Beziehung

$\frac{d\,A_n}{d\,x} = x\,.\,A_{n-1}$ beachtet, so findet sich folgende interessante Rekursionsformel:

VIII. $A_{n+1} = (2n+1)\,A_n - x^2\,.\,A_{n-1}$.

Die hieraus für $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$ entstehenden Gleichungen

$$A_2 = 3\,A_1 - x^2\,A$$
$$A_3 = 5\,A_2 - x^2\,A_1$$
$$A_4 = 7\,A_3 - x^2\,A_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

können folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{x^2\,A}{A_1} = 3 - \frac{x^2}{x^2\,\frac{A_1}{A_2}}$$

$$\frac{x^2\,A_1}{A_2} = 5 - \frac{x^2}{x^2\,\frac{A_2}{A_3}} \ldots\ldots \text{ und liefern daher}$$

durch allmähliches Einsetzen den Kettenbruch:

$$\frac{x^2 A}{A_1} = 3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots\ldots}}$$

Aber aus $A = sin\, x$ folgt sogleich $A_1 = \int_0^x x\, sin\, x\, d\, x = sin\, x -$ $- x\, cos\, x$, folglich ist $\frac{sin\, x - x\, cos\, x}{sin\, x} = \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots\ldots}}}$ und hieraus

$$tg\, x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots\ldots}}}};$$

wir sind so auf anderem Wege zu dem Kettenbruch zurückgeführt worden, den schon Lambert für $tg\, x$ angegeben hatte.

Allein wir wollen uns zunächst genauer mit dem Ausdrucke A_n beschäftigen. Man kann statt desselben einen zweiten von ganz anderer Gestalt aufschreiben, wenn man die Integrationen in den Definitionsgleichungen ohne die Reihenentwicklung für $sin\, x$ mit Anwendung der partiellen Integration ausführt. Man findet auf diese Weise:

$$A_1 = \int_0^x x\, sin\, x\, d\, x = sin\, x - x\, cos\, x$$

$$A_2 = \int_0^x x\, A_1\, d\, x = (3 - x^2)\, sin\, x - 3\, x\, cos\, x$$

$$A_3 = \int_0^x x\, A_2\, d\, x = (15 - 6\, x^2)\, sin\, x - (15\, x - x^3)\, cos\, x \text{ usw.}$$

Es stellt sich hienach für A_n die allgemeine Form heraus:

IX. $A_n = \psi(x) . sin\, x + \chi(x) . cos\, x,$

wo $\psi(x)$ eine gerade ganze Funktion vom n^{ten}, beziehungsweise $(n-1)^{ten}$ Grade ist, je nachdem n gerade oder ungerade, $\chi(x)$ eine ungerade ganze Funktion vom $(n-1)^{ten}$ oder n^{ten} Grade ist, je nach den beiden unterschiedenen Fällen. Die Koeffizienten dieser Funktionen sind ganze Zahlen. Dies Induktionsgesetz wollen wir vor allem bestätigen. Man erhält leicht durch partielle Integration die Formeln:

$$\int \varphi(x)\, sin\, x\, d\, x = sin\, x\, \Phi'(x) - cos\, x . \Phi(x)$$

$$\int \varphi(x)\, cos\, x\, d\, x = sin\, x . \Phi(x) + cos\, x\, \Phi'(x),$$

in welchen zur Abkürzung gesetzt ist

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \varphi''(x) + \varphi^{(4)}(x) \ldots\ldots$$

Die Funktionen $\Phi(x)$ und $\Phi'(x)$ in diesen Formeln sind ganze Funktionen von gleichem, beziehungsweise um 1 geringeren Grade wie die Funktion $\varphi(x)$. Bei der Integration von 0 bis x gibt die erste Formel:

$\int_0^x \varphi(x) \sin x \, d x = \sin x \,.\, \Phi'(x) - \cos x \,.\, \Phi(x) + \Phi(0)$, also so oft $\Phi(0)$ Null ist, was z. B. eintrifft, wenn $\varphi(x)$ und folglich seine Ableitungen gerader Ordnung, also auch $\Phi(x)$ ungerade Funktionen von x sind, gilt

$$\text{X. } \int_0^x \varphi(x) \sin x \, d x = \sin x \,.\, \Phi'(x) - \cos x \,.\, \Phi(x).$$

Ebenso ergibt die zweite Formel, wenn $\varphi(x)$ und folglich seine Ableitungen gerader Ordnung gerade Funktionen, $\Phi'(x)$ also eine ungerade Funktion von x ist, sind:

$$\text{XI. } \int_0^x \varphi(x) \cos x \, d x = \sin x \,.\, \Phi(x) + \cos x \,.\, \Phi'(x).$$

Nehmen wir nunmehr an, das für A_n ausgesprochene Gesetz sei bis zu einem bestimmten Index n hin bestätigt, so würde sich finden

$$A_{n+1} = \int_0^x x A_n \, d x = \int_0^x [x \psi(x) \sin x + x \chi(x) \cos x] \, d x.$$

Ist nun zuerst n eine gerade Zahl, so wäre $\psi(x)$ eine gerade Funktion vom n^{ten}, demnach $x \,.\, \psi(x)$ eine ungerade Funktion vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade und $\chi(x)$ eine ungerade Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$, demnach $x \,.\, \chi(x)$ eine gerade Funktion n^{ten} Grades. In Anwendung der Hilfsformeln (X) und (XI) erhielte man also zwei Gleichungen von der Form:

$$\int_0^x x \psi(x) \sin x \, d x = \sin x \; \Psi'(x) - \cos x \; \Psi(x)$$

$$\int_0^x x \chi(x) \cos x \, d x = \sin x \,.\, X(x) + \cos x \; X'(x);$$

$\Psi(x)$ und $X(x)$ bedeuten dabei, was aus $\Phi(x)$ entsteht, wenn $x \psi(x)$ und $x \chi(x)$ für $\varphi(x)$ gesetzt werden. $\Psi(x)$ muß daher eine ganzzahlige ungerade Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ und demnach $\Psi'(x)$ eine gerade Funktion n^{ten} Grades, demnach auch, weil $X(x)$ eine ganzzahlige gerade Funktion n^{ten} Grades, $X'(x)$ eine ungerade Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades sein. Zieht man daher zusammen:

$A_{n+1} = \sin x \, [\Psi'(x) + X(x)] - \cos x \,.\, [\Psi(x) - X'(x)]$, so ist nun, wofern der Index $n+1$ eine ungerade Zahl ist, der $\sin x$ in eine gerade Funktion n^{ten}, der $\cos x$ in eine ungerade Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades multipliziert, das Induktionsgesetz also um einen Schritt weiter bestätigt. Da dasselbe Verfahren auch in dem Falle eines ungeraden n

anwendbar ist und zum Ziele führt, ist mithin der allgemeine Nachweis erbracht, daß das bezüglich A_n aufgestellte Gesetz ohne Ausnahme giltig ist.

Nun kann man leicht den ersten Ausdruck für A_n (III) in die Gestalt eines bestimmten Integrals überführen. In der Tat gibt die partielle Integration zunächst folgende Reduktionsformel:

$$\text{XII.}\quad \int_0^1 (1-z^2)^n \,.\, z^{2k}\, dz = \frac{2k-1}{2n+2k+1} \,.\, \int_0^1 (1-z^2)^n \,.\, z^{2(k-1)}\, dz,$$

durch deren wiederholte Anwendung die Gleichung hervorgeht:

$$\text{XIII.}\quad \int_0^1 (1-z^2)^n \,.\, z^{2k}\, dz = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots\ldots(2k-1)}{(2n+3)(2n+5)\ldots\ldots(2n+2k+1)} \,.\, \int_0^1 (1-z^2)^n \,.\, dz.$$

Es ist aber $\int_0^1 (1-z^2)^n dz = \int_0^1 (1-z^2)^{n-1} dz - \int_0^1 (1-z^2)^{n-1} \,.\, z^2\, dz$ und die Hilfsformel (XII) liefert, wenn darin $(n-1)$ statt n und $k=1$ gesetzt wird, $\int_0^1 z^2\,(1-z^2)^{n-1}\, dz = \frac{1}{2n+1} \,.\, \int_0^1 (1-z^2)^{n-1}\, dz$; hienach geht die vorige Gleichung über in

$$\int_0^1 (1-z^2)^n\, dz = \frac{2n}{2n+1} \,.\, \int_0^1 (1-z^2)^{n-1}\, dz$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Formel in

$$\int_0^1 (1-z^2)^n\, dz = \frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}{3\,.\,5\,.\,7\ldots(2n+1)}.$$

Demnach erhält man die Formel (XIII) in folgender Gestalt:

$$\text{XIV.}\quad \int_0^1 (1-z^2)^n \,.\, z^{2k}\, dz = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2k-1)\,2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n+2k+1)}.$$

Betrachten wir nun das Integral

$$\int_0^1 (1-z^2)^n \,.\, \cos xz \,.\, dz$$

und ersetzen darin $\cos xz$ durch seine bekannte Reihe

$$\cos xz = 1 - \frac{x^2 z^2}{2!} + \frac{x^4 z^4}{4!} - \frac{x^6 z^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots$$

$= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k \,.\, x^{2k} \,.\, z^{2k}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots 2k}$, so daß das Integral die Gestalt annimmt:

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots 2k} \,.\, \int_0^1 (1-z^2)^n \,.\, z^{2k}\, dz,$$

so findet man sogleich bei Anwendung der Formel (XIV) die Beziehung:

$$\int_0^1 (1-z^2)^n \cos xz . dz = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k . x^{2k}}{1.2.3\ldots 2k} \cdot \frac{2.4.6\ldots 2n}{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2n+1)},$$

d. h. nach (III) und (IX) folgende Gleichung:

$$\text{XV.} \quad \psi(x) \sin x + \chi(x) \cos x = \frac{x^{2n+1}}{2.4\ldots 2n} \cdot \int_0^1 (1-z^2)^n \cos xz\, dz.$$

Hierin hat, wenn wir n als gerade Zahl voraussetzen, $\chi(x)$ die Bedeutung einer ungeraden Funktion vom Grade $(n-1)$, also die Gestalt $\chi(x) = x X(x^2)$, wenn unter $X(x^2)$ eine ganze und ganzzahlige Funktion des Grades $\frac{n}{2} - 1$ von x^2 verstanden wird.

Aus der so nach Hermite gegebenen Gleichung (XV) lassen sich mit Leichtigkeit die Sätze wieder finden, welche Lambert und Legendre bezüglich π aus anderer Quelle hergeleitet haben: daß nämlich weder π noch π^2 rational sein kann.

Denn setzt man

$\chi(x^2) = A . x^{n-2} + A_1 . x^{n-4} + \ldots\ldots + A_{\frac{n}{2}-1}$ und nimmt zunächst an, π sei rational, $\pi = \frac{b}{a}$, so ergibt sich die Gleichung (XV), wenn darin $x = \pi$ gesetzt wird:

$$-X(\pi^2) = \frac{\pi^{2n}}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \int_0^1 (1-z^2)^n \cos \pi z\, dz$$

oder

$$\text{XVI.} \quad N = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\left(\frac{b^2}{2a}\right)^n}{1.2.3\ldots n} \cdot \int_0^1 (1-z^2)^n . \cos \pi z\, dz,$$

wenn N eine ganze Zahl bedeutet. Wäre dagegen π^2 eine rationale Zahl, $\pi^2 = \frac{\beta}{\alpha}$, so fände man auf demselben Wege:

$$\text{XVII.} \quad N' = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\left(\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^n}{1.2.3\ldots n} \cdot \int_0^1 (1-z^2)^n \cos \pi z\, dz,$$ wobei N' wieder eine ganze Zahl bedeutet.

Das Integral ist kleiner als Eins, weil die Funktion unter dem Integralzeichen dauernd numerisch unter Eins bleibt, daß es nicht Null ist, läßt sich einsehen, wenn man es zerlegt in:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-z^2)^n . \cos \pi z\, dz + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z^2)^n \cos \pi z\, dz;$$

infolge des bekannten Mittelwertsatzes aus der Theorie der bestimmten Integrale läßt sich für das erste setzen:

$(1-\xi^2)^n . \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi z\, d z = (1-\xi^2)^n . \frac{1}{\pi}$; und für das zweite

$(1-\xi'^2)^n . \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos \pi z\, d z = -(1-\xi'^2)^n . \frac{1}{\pi}$; wobei

ξ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$; ξ' zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt. Da hienach $1-\xi^2 > 1-\xi'^2$ ist, kann das ganze Integral nicht verschwinden.

Die Gleichungen (XVI) und (XVII), in welchen die gerade Zahl n beliebig groß gedacht werden kann, werden aber schließlich unmöglich, wenn sie hinreichend groß gedacht wird. Denn bekanntlich nähert sich der Ausdruck $\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$, wie groß der bestimmte Wert von x auch sei, mit unendlich wachsendem n der Null; für ein hinreichend großes n werden demnach die Faktoren vor dem Integrale in den Formeln (XVI) und (XVII) beliebig klein sein; bei wachsendem n wird daher ein Augenblick eintreten, wo die rechten Seiten dieser Formeln, ohne zu verschwinden, unter die Einheit herabsinken, also keiner ganzen Zahl gleich sein können. Die Annahmen erweisen sich deshalb unzulässig.

Im bisher Gesagten haben wir die ersten Schritte auf dem von Hermite betretenen Weg getan und wollen ihn nun weiter verfolgen.

Aus jeder der Größen A_n bilden wir unbegrenzt viele andere A_n', A_n'', A_n'''......, indem wir definieren:

$$A_n' = \int_0^x A_n\, d x;\; A_n'' = \int_0^x A_n'\, d x \ldots\ldots$$

Wählen wir dabei zunächst für A_n den Ausdruck (III) in Gestalt einer Reihe:

$$A_n = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)\ldots(2k+2n+1)} . \frac{(-1)^k . x^{1+2k+2n}}{1.2.3\ldots 2k},$$

so findet sich ohne Schwierigkeit

$$A_n^i = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(2k+2)(2k+4)\ldots(2k+2n).(-1)^k x^{2k+2n+i+1}}{1.2.3.4\ldots(2k+2n+i+1)}$$

oder wenn man setzt:

$$\text{XVIII. } \mathfrak{A}_n^i = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(2k+2)(2k+4)\ldots(2k+2n).(-1)^k . x^{2k}}{1.2.3\ldots(2k+2n+i+1)}.$$

$$\text{XIX. } A_n^i = x^{2n+i+1} . \mathfrak{A}_n^i.$$

Aus der Formel (XVIII) ergibt sich, wenn darin $n+1$ statt n gesetzt wird,

$$\mathfrak{A}^i_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(2k+2)(2k+4)\ldots(2k+2n+2).(-1)^k x^{2k}}{1.2.3\ldots(2k+2n+i+1)(2k+2n+i+3)}.$$

Anderseits findet sich, wenn $\mathfrak{A}^i_n$ nach x differenziert wird, wobei das $k=0$ entsprechende Glied verschwindet,

$$\frac{d\,\mathfrak{A}^i_n}{dx} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2k(2k+2)(2k+4)\ldots(2k+2n).(-1)^k.x^{2k-1}}{1.2.3\ldots(2k+2n+i+1)}$$

oder, wenn der Summationsbuchstabe k durch $k+1$ ersetzt wird,

$$-\frac{d\,\mathfrak{A}^i_n}{dx} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(2k+2)(2k+4)\ldots(2k+2n+2).(-1)^k.x^{2k+1}}{1.2.3\ldots(2k+2n+i+1)(2k+2n+i+3)}$$

durch Vergleichung mit $\mathfrak{A}^i_{n+1}$ erhält man sogleich die Beziehung

$\mathfrak{A}^i_{n+1} = -\frac{1}{x}.\frac{d\,\mathfrak{A}^i_n}{dx}$, welche mit Rücksicht auf die Gleichung (XIX), die für jedes n besteht, leicht in die Form gebracht werden kann:

$$A^i_{n+1} = (2n+i+1)\,A^i_n - x\,\frac{d\,A^i_n}{dx}.$$

Nach den Definitionsgleichungen für die Größen A^i_n ist aber $\frac{d\,A^i_n}{dx} = A^{i-1}_n$, also nimmt die vorstehende Gleichung die Gestalt an:

$$\text{XX.}\quad A^i_{n+1} = (2n+i+1)\,A^i_n - x\,A^{i-1}_n.$$

Diese eigentümliche Rekursionsformel, welche gestattet, die Größen A höherer Ordnung, d. h. mit größeren Indizes aus denen geringerer Ordnung zu berechnen, verdient an sich volle Aufmerksamkeit. Beschränken wir uns z. B. auf den Index $i=1$, so würde sie lauten:

$$A'_{n+1} = (2n+2)\,A'_n - x\,A_n$$

und würde dazu dienen, vermittels der Größen $A\,A_1\,A_2\ldots\ldots$ allmählich die Größen A_1', A_2', $A_3'\ldots\ldots$ aus A' zu berechnen. Hier jedoch wollen wir den Gang dieser Rechnung nicht weiter verfolgen, sondern nur an die Definition der Größen A'_n wieder anknüpfen. Es war

$A'_n = \int_0^x A_n\,dx$; dies gibt, wenn für A_n jetzt der Ausdruck (IX) gesetzt wird:

$$A'_n = \int_0^x [\psi(x)\,sin\,x + \chi(x)\,cos\,x]\,dx.$$

Ähnlich den Hilfsformeln (X) und (XI) findet man auch:

(XXI.) $A'_n = \{\Psi'(x) + X(x)\}\, sin\, x + \{X'(x) - \Psi(x)\}\, cos\, x + \Psi(o) - X(o)$,
wenn gesetzt wird

$$\Psi(x) = \psi(x) - \psi''(x) + \psi''''(x) - \ldots\ldots\ldots$$
$$X(x) = \chi(x) - \chi''(x) + \chi''''(x) - \ldots\ldots\ldots$$

Wenn nun n gerade ist, so ist, wie gefunden worden, $\psi(x)$ und somit auch $\Psi(x)$ eine gerade Funktion n^{ten}, $\chi(x)$ und daher auch $X(x)$ eine ungerade Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades; daher wird der Faktor von $sin\, x$ zur Rechten in (XXI) in diesem Falle eine ungerade Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, der Faktor von $cos\, x$ hingegen eine gerade Funktion n^{ten} Grades sein. Ist im Gegenteile n ungerade, so findet sich in gleicher Weise der Faktor von $sin\, x$ als eine ungerade Funktion n^{ten}, der von $cos\, x$ als eine gerade Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.

Endlich ist $\Psi(o) - X(o)$ eine gewisse Konstante, welche C heiße. Setzt man $X'(x) - \Psi(x) = \psi_1(x)$ und $\Psi'(x) + X(x) = \chi_1(x)$, so verhalten sich $\psi_1(x)$ und $\chi_1(x)$ entsprechend den mit $\psi(x)$ und $\chi(x)$ bezeichneten Funktionen und man hat dann:

$$A'_n = \psi_1(x)\, cos\, x + \chi_1(x)\, sin\, x + C.$$

Eine neue Integration liefert uns sodann A''_n in der Form:

$$A''_n = \int_0^x \{\psi_1(x)\, cos\, x + \chi_1(x)\, sin\, x\}\, dx + Cx = \{X_1'(x) + \Psi_1(x)\}\, sin\, x +$$
$$+ \{\Psi_1'(x) - X_1(x)\}\, cos\, x + Cx + X_1(o) - \Psi_1'(o).$$

Nach der angegebenen Natur der Funktionen $\psi_1(x)$ und $\chi_1(x)$ aber ergibt sich zunächst $X_1(o) = 0$; $\Psi_1'(o) = 0$, und wenn man dann $X_1'(x) + \Psi_1(x) = \psi_2(x)$; $\Psi_1'(x) - X_1(x) = \chi_2(x)$ setzt, so verhalten sich diese Funktionen wieder ganz genau so wie $\psi(x)$ und $\chi(x)$; die vorige Gleichung erhält demnach die einfachere Gestalt:

$$A''_n = \psi_2(x)\, sin\, x + \chi_2(x)\,.\, cos\, x + Cx$$

In gleicher Weise findet man nunmehr leicht:

$$A'''_n = \psi_3(x)\,.\, cos\, x + \chi_3\, sin\, x + \frac{C}{2}x^2 + C'$$
$$A''''_n = \psi_4(x)\, sin\, x + \chi_4\, cos\, x + \frac{C}{6}x^3 + C'x \text{ usw.}$$

Man kann mit anderen Worten folgendes allgemeine Ergebnis aussprechen: Je nachdem i gerade oder ungerade ist, findet man:

$$A^i_n = \psi_i(x)\,.\, sin\, x + \chi_i(x)\, cos\, x + \varphi_i(x)$$

oder $A^i_n = \psi_i(x)\, cos\, x + \chi_i(x)\, sin\, x + \varphi_i(x)$; wobei $\psi_i(x)$ eine gerade Funktion n^{ten} oder $(n-1)^{\text{ten}}$, $\chi_i(x)$ eine ungerade Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ oder n^{ten} Grades bedeutet, je nachdem n gerade oder ungerade ist, während $\varphi_i(x)$ eine ganze Funktion von x ist, deren Grad gleichzeitig mit $i-1$ gerade oder ungerade ist.

Betrachtet man irgend zwei aufeinander folgende Glieder der Reihe A_n, A'_n, A''_n ……, z. B. der Einfachheit halber die beiden ersten:

$\psi(x) \sin x + \chi(x) . \cos x = A_n$

$\chi_1(x) \sin x + \psi_1(x) \cos x = A'_n - C$, so lassen sich die so gebildeten Gleichungen nach den Größen $\sin x$, $\cos x$ auflösen und ergeben im betrachteten Falle:

$$\sin x . R(x^2) = x\, T(x^2) + A_n . \psi_1(x) - A'_n . \chi(x)$$
$$\cos x . R(x^2) = S(x^2) - A_n . \chi_1(x) + A'_n . \psi(x), \text{ wenn}$$

$\psi(x) . \psi_1(x) - \chi(x) . \chi_1(x)$, was eine gerade Funktion von x vom Grade $2n$ ist, mit $R(x^2)$, die gerade Funktion $-C . \psi(x)$ mit $S(x^2)$, die ungerade Funktion $C . \chi(x)$ mit $x\, T(x^2)$ bezeichnet wird. Nach den für A_n, A'_n gegebenen Reihenausdrücken beginnen die nach steigenden Potenzen von x entwickelten, rechts noch außer den ersten Gliedern stehenden Produkte offenbar erst mit x^{2n+1}, beziehungsweise x^{2n+2}. Denkt man sich also die Produkte $\sin x . R(x^2)$ und $\cos x . R(x^2)$ gleichfalls nach den steigenden Potenzen von x entwickelt und vernachlässigt alle Potenzen, welche die vom Grade $2n$ übersteigen, so müssen die Entwicklungen mit den ganzen Funktionen $x . T(x^2)$, $S(x^2)$, deren Grade höchstens gleich n sind, übereinstimmen. Diesen Umstand wollen wir künftig in Kürze so ausdrücken, daß wir sagen: „$\sin x$ und $\cos x$ sind bis auf Potenzen vom Grade $2n$ den rationalen Brüchen $\frac{x\, T(x^2)}{R(x^2)}$, $\frac{S(x^2)}{R(x^2)}$, beziehungsweise gleich, welche demnach als Näherungsbrüche mit demselben Nenner bezeichnet werden können." Setzt man nun wie Lambert, ohne die Berechtigung dazu näher zu erläutern, $\frac{x}{i}$ statt x und benützt die Formel:

$$\cos\frac{x}{i} + i . \sin\frac{x}{i} = e^x,$$

so entsteht aus den Gleichungen $\sin x = \frac{x\, T(x^2)}{R(x^2)} \ldots$ und $\cos x = \frac{S(x^2)}{R(x^2)}$ ……, mit denen wir jenen Umstand ausdrücken, zugleich auch die folgende:

$$e^x = \frac{S(-x^2) + x . T(-x^2)}{R(-x^2)} \ldots\ldots \text{ oder } e^x = \frac{M(x)}{N(x)} \ldots\ldots,$$

worin $M(x)$, $N(x)$ zwei ganze Funktionen von x, der Nenner insbesondere eine ganze Funktion von x vom Grade $2n$ ist, man findet also auch für die Exponentialfunktion e^x eine bis zu demselben Grade reichende Annäherung mittels einer rational gebrochenen Funktion.

Wenn wir nun von der besonderen Beschaffenheit der Funktionen $M(x)$, $N(x)$ absehen, können wir ganz im allgemeinen sagen: die vorhergehenden Betrachtungen haben die Möglichkeit erwiesen, der Funktion e^x sich bis zu einem gewissen Grade durch einen rationalen Bruch anzunähern. Daß solche Annäherung sogar bis zu einem beliebigen Grade μ hin möglich ist, davon kann man sich leicht a priori überzeugen. Setzen wir nämlich die Gleichung an:

$e^x = \frac{M(x)}{N(x)} \ldots\ldots$ mit Vernachlässigung von Potenzen vom Grade größer als μ, d. h.

XXII. $e^x . N(x) - M(x) = \varepsilon_1 x^{\mu+1} + \varepsilon_2 x^{\mu+2} + \ldots\ldots$ und wählen die Grade der beiden Funktionen $M(x)$ und $N(x)$ gleich m, n und wird für e^x seine Reihenentwicklung eingesetzt und die linke Seite der vorigen Gleichung nach steigenden Potenzen von x entwickelt gedacht, so muß man, um der Gleichung zu genügen, die Koeffizienten von $x^0, x^1, x^2 \ldots\ldots x^\mu$ alle gleich Null setzen; erhält also $\mu + 1$ offenbar homogene Gleichungen zwischen den Koeffizienten der ganzen Funktionen $M(x)$ und $N(x)$, deren Anzahl $(m+1) + (n+1) = m + n + 2$ ist.

Werden daher m und n so gewählt, daß ihre Summe $m + n = \mu$ ist, so dienen jene Bedingungsgleichungen genau zur Bestimmung der Verhältnisse der Koeffizienten, und wenn etwa der Koeffizient der höchsten Potenz in $N(x)$ angenommen, nämlich gleich 1 gewählt wird, zur Bestimmung der Koeffizienten selbst und die Möglichkeit der Annäherung ist dadurch erwiesen.

Man kann jedoch auch mit Hermite, ausgehend von einer elementaren Integralformel, für jeden gegebenen Grad μ ohne Schwierigkeit Funktionen $\frac{M(x)}{N(x)}$ finden, welche die Annäherung leisten.

Ist nämlich $F(z)$ eine Funktion von z, die wir für unseren Zweck sogleich als ganze Funktion vom Grade μ voraussetzen und setzt man zur Abkürzung:

XXIII. $\frac{F(z)}{x} + \frac{F'(z)}{x^2} + \ldots\ldots + \frac{F^{(\mu)}(z)}{x^{\mu+1}} = \mathfrak{F}(z)$, so findet sich mittels partieller Integration die Formel:

XXIV. $\int e^{-zx} . F(z)\, dz = -e^{-zx} . \mathfrak{F}(z)$ und folglich, wenn zwischen den Grenzen ξ und Z integriert wird, die:

XXV. $\int\limits_{\xi}^{Z} e^{-zx} . F(z)\, dz = e^{-\xi x} . \mathfrak{F}(\xi) - e^{-Zx} . \mathfrak{F}(Z)$.

Werden nun ξ und Z als zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung $F(z)=0$, zwar die erste als eine $h$fache, die zweite als eine $k$fache vorausgesetzt, so verschwinden für $z=\xi$ außer der Funktion $F(z)$ auch ihre $h-1$ ersten, für $z=Z$ ihre $k-1$ ersten Ableitungen und es findet sich:

$$\mathfrak{F}(\xi)=\frac{F^h(\xi)}{x^{h+1}}+\frac{F^{h+1}(\xi)}{x^{h+2}}+\ldots\ldots+\frac{F^\mu(\xi)}{x^{\mu+1}}$$

$$\mathfrak{F}(Z)=\frac{F^k(Z)}{x^{k+1}}+\frac{F^{k+1}(Z)}{x^{k+2}}+\ldots\ldots+\frac{F^{(\mu)}(Z)}{x^{\mu+1}}, \text{ d. h.}$$

$$\mathfrak{F}(Z)=\frac{M(x)}{x^{\mu+1}};\mathfrak{F}(\xi)=\frac{N(x)}{x^{\mu+1}};$$

wenn $M(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $m=\mu-k$, $N(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $n=\mu-h$ bedeutet. Hienach nimmt die Gleichung (XXV) die Gestalt an:

$$\text{XXVI. } e^{-\xi x}.N(x)-e^{-Zx}.M(x)=x^{\mu+1}.\int\limits_\xi^Z(e^{-zx}.F[z])\,dz \quad \text{und}$$

liefert, wenn insbesondere $\xi=0$ angenommen wird, die

$$\text{XXVII. } e^{Zx}.N(x)-M(x)=x^{\mu+1}.e^{Zx}.\int\limits_0^Z e^{-zx}.F(z)\,dz;$$

denkt man sich schließlich hierin statt e^{Zx} und e^{-Zx} zur Rechten der Gleichung ihre Reihenentwicklung gesetzt und die ganze rechte Seite nach steigenden Potenzen von x entwickelt, so ist einleuchtend, daß die Entwicklung mit $x^{\mu+1}$ beginnt; demnach liefert vorstehende Gleichung eine bis zum Grade μ reichende Annäherung an die Funktion e^{Zx} durch den Bruch $\dfrac{M(x)}{N(x)}$.

Z. B.: Wenn $F(z)=z^h(z-1)^k$ und $h+k=\mu$ gewählt wird, ergibt sich aus (XXVII) die besondere Formel:

$$e^x.N(x)-M(x)=x^{\mu+1}.e^x\int_0^1 e^{-zx}z^h(z-1)^k\,dz \text{ oder noch spe-}$$

zieller, wenn $h=k$, also $\mu=2h$ ist:

$$\text{XXVIII. } e^x.N(x)-M(x)=x^{2h+1}.e^x.\int_0^1 e^{-zx}.z^h(z-1)^h\,dz;$$

die Funktionen $M(x)$ und $N(x)$ sind in diesem Falle leicht angebbar. Aus $F(z)=z^h(z-1)^h$ folgt nämlich mittels des binomischen Satzes

$$F(z)=z^{2h}-\frac{h}{1}z^{2h-1}+\frac{h(h-1)}{1.2}z^{2h-2}-\ldots\ldots+(-1)^h z^h,$$

also durch i-malige Differenzierung,

$$\overset{(i)}{F}(z)=2h(2h-1)\ldots\ldots(2h-i+1).z^{2h-i}$$

$$-\frac{h}{1}.(2h-1)\ldots\ldots(2h-i).z^{2h-i-1}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{h.(h-1)}{1.2}.(h+2)\ldots\ldots(h-i+3).(-1)^{h+2}.z^{h-i+2}+$$

$$+\frac{h}{1}(h+1)h\ldots\ldots(h-i+2).(-1)^{h+1}.z^{h-i+1}$$

$$+h.(h-1)\ldots\ldots(h-i+1).(-1)^{h}.z^{h-i}.$$

Hieraus findet sich $F^{i}(o)=0$, so lange $i<h$ ist; ferner

$$\overset{(h)}{F}(0)=(-1)^{h}.1.2.3\ldots\ldots h$$

$$\overset{(h+1)}{F}(0)=(-1)^{h+1}.\frac{h}{1}.1.2.3\ldots\ldots(h+1)$$

$$\overset{(h+2)}{F}(0)=(-1)^{h+2}.\frac{h.(h-1)}{1.2}.1.2.3\ldots\ldots(h+2) \text{ usw.}$$

allgemein für $r=0,\ 1,\ 2\ldots\ldots h$

$$\overset{(h+r)}{F}(0)=(-1)^{h+r}.\frac{h(h-1)\ldots(h-r+1)}{1.2.3\ldots r}.1.2.3\ldots\ldots(h+r).$$

Nach den Ausdrücken für $\mathfrak{F}(\xi)$, wo jetzt $\xi=0$ ist, ergibt sich also

$$\frac{N(x)}{x^{2h+1}}=\frac{(-1)^{h}.1.2.3\ldots h}{x^{h+1}}+(-1)^{h+1}.\frac{h}{1}.\frac{1.2.3\ldots(h+1)}{x^{h+2}}+$$

$$(-1)^{h+2}.\frac{h.(h-1)}{1.2}.\frac{1.2.3\ldots(h+2)}{x^{h+3}}+\ldots\ldots.$$

$$+(-1)^{2h}.\frac{1.2.3\ldots2h}{x^{2h+1}},$$ und folglich

XXIX. $$N(x)=(-1)^{h}.1.2.3\ldots h\Big[x^{h}-\frac{h}{1}(h+1)x^{h-1}+$$

$$+\frac{h(h-1)}{1.2}(h+1)(h+2)x^{h-2}+\ldots+(-1)^{h}.(h+1)(h+2)\ldots2h\Big].$$

Anderseits ist $F(-z)=z^{h}(z+1)^{h}$ und, wenn $1+z$ statt z gesetzt wird, $F(1+z)=z^{h}(z+1)^{h}$, also

$F(1+z)=F(-z)$, woraus durch i-malige Differenzierung $F^{(i)}(1+z)=(-1)^{i}.F^{(i)}(-z)$ und für $z=0$ gefunden wird

$$\overset{(i)}{F}(1)=(-1)^{i}.\overset{(i)}{F}(0):$$

Nach den Ausdrücken für $\mathfrak{F}(Z)$, wo jetzt $Z=1$ ist, wird demnach gewonnen:

$$\frac{M(x)}{x^{2h+1}}=\frac{1.2.3\ldots h}{x^{h+1}}+\frac{h}{1}.\frac{1.2.3\ldots(h+1)}{x^{h+2}}+\ldots\ldots.$$

$$+\frac{1.2.3\ldots2h}{x^{2h+1}},$$ und folglich

$$\text{XXX. } M(x) = 1.2.3\ldots h\Big[x^h + \frac{h}{1}.(h+1)x^{h-1} + \frac{h(h-1)}{1.2}$$
$$(h+1)(h+2)x^{h-2} + \ldots\ldots + (h+1)(h+2)\ldots 2h\Big].$$

Die so für $M(x)$ und $N(x)$ erhaltenen Ausdrücke lehren, daß nicht nur die Koeffizienten dieser beiden ganzen Funktionen, sondern auch noch diejenigen der Funktionen

$$\mathrm{M}(x) = \frac{M(x)}{1.2.3\ldots h}, \quad \mathrm{N}(x) = \frac{N(x)}{1.2.3.h}$$

ganze Zahlen sind und man findet aus (XXVIII) die Gleichung:

$$\text{XXXI. } e^x.\mathrm{N}(x) - \mathrm{M}(x) = \frac{x^{2h+1}}{1.2.3\ldots h}.\int_0^1 e^{(1-z)x}.z^h.(z-1)^h.dz.$$

Aus dieser aber läßt sich ohne Mühe der nach Lambert und Legendre aus anderer Quelle von uns bereits abgeleitete Satz, daß e^x irrational sei, sobald der Exponent x eine rationale Zahl ist, wiedergewinnen. Denn wäre im Gegenteile, wenn x rational, $x = \frac{r}{s}$ ist, e^x eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$, so nähme die vorige Gleichung, wie groß h auch gedacht wird, die Form an:

$$a.\mathrm{N}(x) - b\,\mathrm{M}(x) = b\,x\frac{x^{2h}}{1.2\ldots h}\int_0^1 e^{(1-z)x}.z^h.(z-1)^h.dz$$

oder auch

$$a\,N - b\,M = \frac{b\,r}{s}.\frac{\left(\frac{r^2}{s}\right)^h}{1.2.3\ldots h}\int_0^1 e^{(1-z)x}.z^h(z-1)^h\,dz,$$

wo M und N ganze Zahlen bedeuten. Links steht demnach jetzt eine ganze Zahl. Eine solche Gleichung ist aber nicht für jedes noch so große h giltig, denn weil der Faktor

$$\frac{\left(\frac{r^2}{s}\right)^h}{1.2.3\ldots h}$$ und damit auch die ganze rechte Seite mit wachsendem h gegen Null konvergiert, wird der Ausdruck zur Rechten für genügend große h, ohne Null zu werden, unter die Einheit sinken, also keiner ganzen Zahl mehr gleich sein können.

Die bisnun angestellten Betrachtungen lassen sich jedoch erheblich verallgemeinern. Es sei nämlich jetzt

$$1.\ F(z) = (z-z_0)^{m_0}.(z-z_1)^{m_1}\ldots\ldots(z-z_n)^{m_n}$$

und wir setzen noch

2. $f(z) = (z - z_0)(z - z_1) \ldots\ldots (z - z_n)$ und

3. $\mu = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots\ldots m_n$.

Aus dem allgemeinen Ausdrucke für $\mathfrak{F}(z)$ folgt dann sogleich

$$\mathfrak{F}(z_0) = \frac{N(x)}{x^{\mu+1}},\ \mathfrak{F}(z_1) = \frac{M_1(x)}{x^{\mu+1}} \ldots\ldots \mathfrak{F}(z_n) = \frac{M_n(x)}{x^{\mu+1}},$$

wo unter $N(x)$ eine ganze Funktion von x vom Grade $\mu - m_0$, unter $M_1(x)$ eine solche vom Grade $\mu - m_1$, ... unter $M_n(x)$ eine solche vom Grade $\mu - m_n$ zu verstehen ist.

Aus der Formel (XXVI) werden wir also für jeden Wert von $i = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots n$ die Gleichung erhalten:

4. $$e^{-z_i x} . N(x) - e^{-z_i x} . M_i(x) = x^{\mu+1} . \int_{z_0}^{z_i} e^{-zx} . F(z)\, dz$$

und diese gibt, wenn $z_0 = 0$ angenommen wird, die folgenden:

$$e^{z_1 x} . N(x) - M_1(x) = x^{\mu+1} . \int_0^{z_1} e^{(z_1 - z)x} . F(z)\, dz$$

$$e^{z_2 x} . N(x) - M_2(x) = x^{\mu+1} . \int_0^{z_2} e^{(z_2 - z)x} . F(z)\, dz$$

— — — — — — — — — — — — — —

$$e^{z_n x} . N(x) - M_n(x) = x^{\mu+1} \int_0^{z_n} e^{(z_n - z)x} . F(z)\, dz.$$

Da in den sämtlichen rechten Seiten derselben, wenn sie nach steigenden Potenzen von x entwickelt gedacht werden, die niedrigste Potenz $x^{\mu+1}$ sein muß, so geben diese Gleichungen eine gleichzeitige Annäherung desselben Grades an die n Exponentialgrößen $e^{z_1 x}$, $e^{z_2 x}$, $e^{z_3 x} \ldots\ldots e^{Z_n x}$ vermittels der n Näherungsbrüche:

5. $\frac{M_1(x)}{N(x)}, \frac{M_2(x)}{N(x)}, \ldots\ldots \frac{M_n(x)}{N(x)}$ mit gleichem Nenner. Mit der besonderen Wahl der Funktion $F(z)$, nämlich der Exponenten m_0, m_1 $\ldots\ldots m_n$, werden natürlich diese Näherungsbrüche sich ändern. Wir wollen z. B., indem wir alle Exponenten von gleichem Werte m nehmen, $F(z) = f(z)^m$ wählen; dieser Wahl entspricht dann ein ganz bestimmtes System von Näherungsbrüchen (5). Jedoch wird dasselbe mit anderer Wahl des m jedesmal ein anderes werden, wenn z. B. $m + 1$, $m + 2 \ldots\ldots$ für m gesetzt wird.

Es ist nun höchst beachtenswert, daß zwischen den Zählern, respektive Nennern der Näherungsbrüche dieser aufeinander folgenden Systeme ein ähnlicher Zusammenhang besteht, wie dies bei den gewöhnlichen Kettenbrüchen der Fall ist. Die Zähler nämlich und die Nenner der späteren Systeme lassen sich aus den entsprechenden

Zählern, respektive Nennern der früheren in gleichmäßiger Weise berechnen. Dieser Umstand beruht aber darauf, daß — wenn wir hinfort mit Rücksicht auf unser eigentliches Vorhaben der Unbestimmten x den Wert 1 geben — in der Reihe der Integrale $\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} . f(z)^m dz$, $\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} f(z)^{m+1} dz$, ... die späteren in bestimmter Weise aus den früheren berechnet werden können.

Die eigentümliche Art der Berechnung, wie sie Hermite nachgewiesen hat, ist folgende: Zunächst ergibt sich durch partielle Integration die Formel:

$$\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} f(z)^m dz = m \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} . f(z)^{m-1} . f'(z) dz,$$

welche mit Hilfe der bekannten Differenzialbeziehung

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - z_1} + \ldots\ldots + \frac{1}{z - z_n}$$

die Gestalt annimmt:

$$6. \qquad \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} . f(z)^m dz = m . \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} . \frac{f(z)^m}{z - z_0} dz$$

$$+ m \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \frac{f(z)^m}{z - z_1} dz + \ldots\ldots + m \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \frac{f(z)^m}{z - z_n} dz.$$

Wir wollen einer kurzen Bezeichnung halber die einzelnen Integrale zur Rechten die **Bestandteile** des auf der linken Seite stehenden Integrals nennen. Offenbar wird man nun aus diesem Integral das folgende Integral $\int_{z_0}^{Zi} e^{-z} . f(z)^{m+1} . dz$ berechnen können, wenn es möglich ist, seine Bestandteile aus den Bestandteilen des Integrals $\int_{z_0}^{Zi} e^{-z} . f(z)^m dz$ zu finden. Der Kern der ganzen Hermiteschen Betrachtung besteht nun in dem Nachweise, daß dies der Fall ist, daß nämlich für jeden Wert ξ aus der Reihe z_0, z_1, $z_2 \ldots\ldots z_n$ eine Gleichung besteht von der Form:

$$7. \qquad \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} . \frac{f(z)^{m+1}}{z - \xi} dz =$$

$$k_0 . \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} . \frac{f(z)^m}{z - z_0} dz + \ldots\ldots + k_n . \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \frac{f(z)^m}{z - z_n} dz.$$

Um diesen Nachweis zu führen, bemerken wir zuvörderst, daß die Summe

8. $$\frac{k_0}{z - z_0} + \frac{k_1}{z - z_1} + \ldots\ldots + \frac{k_n}{z - z_n} = \frac{\psi(z)}{f(z)}$$

gesetzt werden kann, wenn unter $\psi(z)$ eine ganze Funktion vom Grade n verstanden wird; aber auch umgekehrt kann bei solcher Bedeutung von $\psi(z)$ der Bruch $\frac{\psi(z)}{f(z)}$ bekanntlich in Partialbrüche zerlegt und eine Gleichung von der Form (8) gebildet werden, in welcher dann die Zähler der Partialbrüche durch die Formeln gegeben sind:

9. $$k_0 = \frac{\psi(z_0)}{f'(z_0)},\ k_1 = \frac{\psi(z_1)}{f'(z_1)} \ldots\ldots k_n = \frac{\psi(z_n)}{f'(z_n)}.$$

Hienach ist die Gleichung (7) vollständig gleichbedeutend mit der

10. $$\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} . \frac{f(z)^{m+1}}{z - \xi} dz = \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} . f(z)^m . \frac{\psi(z)}{f(z)} dz,$$

wenn $\psi(z)$ als eine ganze Funktion vom n^{ten} Grade gedacht wird. Um aber jetzt zu zeigen, daß diese Gleichung für jedes $i = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$ besteht, wenn diese Funktion $\psi(z)$ geeignet gewählt wird, genügt es offenbar nachzuweisen, daß bei unbestimmter Integration die Beziehung

$$\int e^{-z} . \frac{f(z)^{m+1}}{z - \xi} dz = \int e^{-z} . f(z)^m \frac{\psi(z)}{f(z)} dz - \Psi(z)$$

erfüllbar ist, indem man die Funktion $\Psi(z)$ so bestimmt, daß sie an den Grenzen der bestimmten Integrationen, d. h. für alle Werte z_0, $z_1, z_2 \ldots . z_n$ verschwindet; denn dann kommt man beim Übergange zur Integration zwischen den Grenzen z_0 und z_i auf die Gleichung (10) zurück. Jene Beziehung aber ist wieder mit der nachstehenden, welche durch Differenzierung daraus hervorgeht, völlig gleichwertig:

11. $$e^{-z} . \frac{f(z)^{m+1}}{z - \xi} = e^{-z} . f(z)^m . \frac{\psi(z)}{f(z)} - \Psi'(z);$$

und diese lehrt, daß $e^z . \Psi'(z)$ eine ganze durch $f(z)^{m-1}$ teilbare Funktion von z sein müßte. Diese Bedingung und zugleich auch die andere, daß $\Psi(z)$ für alle Werte $z_0 \ldots\ldots z_n$ verschwinde, wird aber erfüllt, wenn wir ansetzen:

12. $$\Psi(z) = e^{-z} . f(z)^m . \varphi(z),$$

und unter $\varphi(z)$ eine ganze Funktion verstehen. Die Gleichung (11) nimmt dann leicht die Form an:

13. $$f(z) . \frac{f(z)}{z - \xi} = \psi(z) + [f(z) - m . f'(z)]\, \varphi(z) - f(z) . \varphi'(z),$$

in welcher wir versuchen wollen, ihr durch geeignete Wahl von $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ zu genügen. Daß dies überhaupt und in ganz bestimmter Weise möglich ist, davon überzeugt man sich durch die Überlegung, daß auf der linken Seite eine ganze Funktion vom Grade $2n+1$ steht, rechts aber, wenn der Grad von $\varphi(z)$ gleich n gewählt wird, ebenfalls eine Funktion des $(2n+1)^{\text{ten}}$ Grades ist, und daß die Anzahl der Koeffizienten von $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ zusammen genommen genau $2n+2$ beträgt, so daß dieselben den $2n+2$ durch Identifizierung der beiden Seiten entstehenden Bedingungsgleichungen zu genügen imstande und dadurch bestimmt sind. Zur wirklichen Berechnung von $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ schreibt man die vorige Gleichung in der neuen Form:

$$14. \qquad \frac{f(z)}{z-\xi} = \frac{\psi(z)}{f(z)} + \left(1 - m \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right)\varphi(z) - \varphi'(z).$$

Hier steht links eine ganze Funktion, rechts aber zunächst die echt gebrochene Funktion $\frac{\psi(z)}{f(z)}$.

Demnach ist offenbar die Funktion $\varphi(z)$ so zu wählen, daß die in dem Ausdrucke $\left(1 - m \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \cdot \varphi(z) - \varphi'(z)$ enthaltene ganze Funktion gleich $\frac{f(z)}{z-\xi}$ wird. Nun ist:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{z-z_1} + \ldots\ldots + \frac{1}{z-z_n} \text{ oder wenn}$$

allgemein

15. $s_i = m \cdot (z_0^i + z_1^i + \ldots\ldots + z_n^i)$ gesetzt wird,

$$m \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \ldots\ldots;$$

setzt man daher noch

16. $\varphi(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \ldots\ldots + \alpha_n$, also

$\varphi'(z) = n\alpha_0 z^{n-1} + (n-1)\alpha_1 z^{n-2} + \ldots\ldots$, so muß schließlich derjenige Bestandteil des nach fallenden Potenzen von z entwickelten Ausdruckes

$$\left(1 - \frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \frac{s_2}{z^3}\ldots\ldots\right) \cdot (\alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \ldots\ldots)$$
$$- n\alpha_0 z^{n-1} - (n-1)\alpha_1 z^{n-2} - (n-2)\alpha_2 z^{n-3} - \ldots\ldots,$$

welcher ganze Potenzen von z enthält, gleich $\frac{f(z)}{z-\xi}$ sein.

17. Da man aber, wenn $f(z) = z^{n+1} + p_1 \cdot z^n + p_2 z^{n-1} + \ldots + p_{n+1}$ und

$$18. \qquad \xi_i = \xi^i + p_1 \xi^{i-1} + p_2 \xi^{i-2} + \ldots\ldots + p_i$$

gesetzt wird,

19. $$\frac{f(z)}{z-\xi} = z^n + \xi_1 z^{n-1} + \xi_2 z^{n-2} + \ldots\ldots + \xi_n$$

findet, so ergeben sich durch Vergleichung der entsprechenden Potenzen von z folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 - (s_0 + n)\,\alpha_0 = \xi_1 \\ \alpha_2 - (s_0 + n - 1)\,\alpha_1 - s_1\,\alpha_0 = \xi_2 \end{cases}$$ zur Bestimmung der Größen α_i, d. h. zur Bestimmung der Funktion $\varphi(z)$, und zwar ist:

20. $$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \qquad \alpha_1 = \xi_1 + s_0 + n \\ \alpha_2 = \xi_2 + (s_0 + n - 1)\,\xi_1 + (s_0 + n)\,(s_0 + n - 1) + s_1 \\ \alpha_3 = \xi_3 + (s_0 + n - 2)\,\xi_2 + \{(s_0 + n - 1)\,(s_0 + n - 2) + s_1\}\,\xi_1 + \\ (s_0 + n)\,(s_0 + n - 1)\,(s_0 + n - 2) + (2\,s_0 + 2\,n - 2)\,s_1 + s_2. \end{cases}$$

Mit Beachtung der Definition der Zeichen p_i, ξ_i findet man also allgemein α_i als eine ganze Funktion von ξ vom i^{ten} Grade, bei der der Koeffizient der höchsten Potenz 1 ist, während die übrigen ganze ganzzahlige symmetrische Funktionen der Wurzeln von $f(z) = 0$ sind. „Demnach werden sie selbst ganze Zahlen sein, wenn die Koeffizienten der Gleichung $f(z) = 0$, insbesonders also, wenn ihre Wurzeln ganze Zahlen sind." Wir schreiben nun für $\alpha_i = \varphi_i(\xi)$ und haben also

21. $\varphi(z) = z^n + \varphi_1(\xi)\,z^{n-1} + \ldots\ldots + \varphi_n(\xi)$; ferner schreiben wir, um die Abhängigkeit des $\varphi(z)$ von ξ auszudrücken, statt $\varphi(z)$ das Zeichen $\varphi(z, \xi)$. Ist so $\varphi(z)$ gefunden, so ergibt sich

$$\frac{\psi(z_0)}{f'(z_0)} = m \,.\, \varphi(z_0\,\xi), \ldots\ldots \frac{\psi(z_n)}{f'(z_n)} = m \,.\, \varphi(z_n\,\xi),$$

und daher auch

22. $$\frac{\psi(z)}{f(z)} = \frac{m\,\varphi(z_0\,\xi)}{z - z_0} + \frac{m\,\varphi(z_1\,\xi)}{z - z_1} + \ldots\ldots + \frac{m\,\varphi(z_n\,\xi)}{z - z_n}.$$

Die aus dem so gefundenen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ [(21), (22)] entspringenden Funktionen $\psi(z)$ $\Psi(z)$ erfüllen auch die Gleichung (11) und daher $\psi(z)$ auch (10), so daß sich als Gesamtergebnis herausstellt:

23. $$\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} . \frac{f(z)^{m+1}}{z - \xi}\,dz = m \,.\, \varphi(z_0\,\xi) \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} . \frac{f(z)^m}{z - z_0}\,dz + \ldots\ldots$$
$$+ \, m \,.\, \varphi(z_n\,\xi) \,.\! \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} . \frac{f(z)^m}{z - z_n}\,dz,$$

welches die Gleichung (7) ist, deren Bestand wir behauptet haben.

Die Wurzel z_i ist eine beliebige unter $z_1\,z_2 \ldots\ldots z_n$, während ξ eine der Größen z_0, $z_1 \ldots\ldots z_n$ bedeutet. Hält man nun z_i fest und läßt ξ seine Werte durchlaufen, so entstehen aus der Gleichung (23) $n + 1$ Gleichungen.

Um diese einfach zu schreiben, setzen wir:

$$24. \begin{cases} \varepsilon_m = \dfrac{1}{m!}\displaystyle\int_{z_0}^{Z_i} e^{-z} . f(z)^m \, dz \\ \varepsilon_m^h = \dfrac{1}{(m-1)!}\displaystyle\int_{z_0}^{Z_i} e^{-z} . \dfrac{f(z)^m}{z - z_h} \, dz. \end{cases}$$

Es folgt dann aus (6) vor allem

$$25. \qquad \varepsilon_m = \varepsilon_m^0 + \varepsilon_m^1 + \varepsilon_m^2 + \ldots\ldots \varepsilon_m^n.$$

Und wenn in den genannten $n+1$ Gleichungen, noch m in $m-1$ verwandelt wird, wobei wir die Bezeichnung der Koeffizienten $\varphi(z_0 z_0)$ usw. beibehalten, aber beachten müssen, daß sie bei Verwandlung des m in $m-1$ andere Werte erhalten, ohne ihren Charakter zu verlieren, so nehmen die $n+1$ Gleichungen folgende Gestalt an:

$$26. \begin{cases} \varepsilon_m^0 = \varphi(z_0 z_0)\, \varepsilon_{m-1}^0 + \varphi(z_1 z_0)\, \varepsilon_{m-1}^1 + \ldots\ldots + \varphi(z_n z_0)\, \varepsilon_{m-1}^n \\ \varepsilon_m^1 = \varphi(z_0 z_1)\, \varepsilon_{m-1}^0 + \varphi(z_1 z_1)\, \varepsilon_{m-1}^1 + \ldots\ldots + \varphi(z_n z_1)\, \varepsilon_{m-1}^n \\ — — — — — — — — — — — — — — — — \\ \varepsilon_m^n = \varphi(z_0 z_n)\, \varepsilon_{m-1}^0 + \varphi(z_1 z_n)\, \varepsilon_{m-1}^1 + \ldots\ldots + \varphi(z_n z_n)\, \varepsilon_{m-1}^n \end{cases}$$

Indem nun hierin $m = 2, 3 \ldots\ldots$ gewählt wird, gewinnt man eine Reihe von Systemen linearer Gleichungen, welche offenbar gestatten, zuletzt die Größen $\varepsilon_m^0, \varepsilon_m^1 \ldots\ldots \varepsilon_m^n$ linear auszudrücken durch die Größen $\varepsilon_1^0, \varepsilon_1^1 \ldots\ldots \varepsilon_1^n$, so daß man setzen darf:

$$27. \begin{cases} \varepsilon_m^0 = A_0\, \varepsilon_1^0 + A_1\, \varepsilon_1^1 + \ldots\ldots + A_n\, \varepsilon_1^n \\ \varepsilon_m^1 = B_0\, \varepsilon_1^0 + B_1\, \varepsilon_1^1 + \ldots\ldots + B_n\, \varepsilon_1^n \\ — — — — — — — — — — — \\ \varepsilon_m^n = L_0\, \varepsilon_1^0 + L_1\, \varepsilon_1^1 + \ldots\ldots + L_n\, \varepsilon_1^n, \end{cases}$$

Gleichungen, deren Determinante eine wichtige Eigenschaft aufweist. In der Determinante der Gleichungen (26) hat das allgemeine Glied die Gestalt $\varphi(z_i z_k) = z_i^n + z_i^{n-1} . \varphi_1(z_k) + \ldots\ldots + 1 . \varphi_n(z_k)$; infolgedessen ist die Determinante (26) das Produkt folgender 2 Determinanten:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_0^n & z_1^n & \ldots\ldots z_n^n \\ z_0^{n-1} & z_1^{n-1} & \ldots\ldots z_n^{n-1} \\ — & — & — — — — \\ z_0 & z_1 & \ldots\ldots z_n \\ 1 & 1 & \ldots\ldots 1 \end{vmatrix},$$

welche das Produkt der Wurzeldifferenzen $z_i - z_k$ vorstellt und

$$Z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots 1 \\ \varphi_1(z_0), & \varphi_1(z_1) & \ldots\ldots \varphi_1(z_n) \\ — — & — — & — — — — \\ \varphi_i(z_0), & \varphi_i(z_1) & \ldots\ldots \varphi_i(z_n) \\ — — & — — & — — — — \\ \varphi_n(z_0), & \varphi_n(z_1) & \ldots\ldots \varphi_n(z_n) \end{vmatrix}.$$

In dieser aber ist nach den über $\alpha_i = \varphi_i(\xi)$ gemachten Bemerkungen:

$$\varphi_i(z_0) = z_0^i + c_1 z_0^{i-1} + \ldots\ldots + c_{i-1} z_0 + c_i$$

$$\varphi_i(z_n) = z_n^i + c_1 z_n^{i-1} + \ldots\ldots + c_{i-1} z_n + c_i;$$ ihre $(i+1)^{\text{te}}$ Horizontalreihe entsteht also aus der (von unten gerechnet) $(i+1)^{\text{ten}}$ Horizontalreihe der Determinante Δ, indem dazu die unteren Reihen derselben mit $c_1 \ldots\ldots c_i$ multipliziert, hinzugefügt werden, ein Verfahren, welches bekanntlich den Wert von Δ nicht ändert. Mithin ist $Z = \Delta$, d. h. die Determinante von (26) hat den Wert Δ^2. Da nun die Determinante der Gleichungen (27) den Gesetzen der Zusammensetzung linearer Gleichungssysteme gemäß, das Produkt aus den Determinanten der $m-1$ aufeinander folgenden Systeme linearer Gleichungen ist, aus deren Zusammensetzung jene entstanden, so findet sich sogleich für die Determinante der Gleichungen (27) der Wert $\Delta^{2(m-1)}$. Die Wurzeln $z_0 \ldots\ldots z_n$ der Gleichung $f(z) = 0$ werden aber als voneinander verschieden vorausgesetzt; daher ist Δ und somit auch jene Determinante von Null verschieden.

Um zur Einsetzung in die Gleichungen (27) die Werte der Größen ε_v^h zu ermitteln, gehen wir aus von der Betrachtung des Integrals $\int e^{-z}.\frac{f(z)}{z-\xi}dz$, worin ξ irgendeine der Wurzeln $z_0 \ldots\ldots z_n$ ist. Man findet es aus (18) und (19) gleich:

$$\int e^{-z}.\{z^n + (\xi + p_1) z^{n-1} + (\xi^2 + p_1 \xi + p_2) z^{n-2} + \ldots\ldots + \\ + \xi^n + p_1 \xi^{n-1} + \ldots\ldots + p_n\} dz,$$

und da nach der Hermiteschen Grundformel (XXIV) gefunden wird $\int e^{-z}.z^m dz = -e^{-z}(z^m + m z^{m-1} + m(m-1) z^{m-2} + \ldots\ldots)$, kann man setzen:

$$28. \int e^{-z}.\frac{f(z)}{z-\xi}dz = -e^{-z}.\Phi(z\xi), \text{ wobei}$$

$$\Phi(z\xi) = z^n + n z^{n-1} + n(n-1) z^{n-2} + \ldots\ldots + (\xi + p_1)\{z^{n-1} + \\ + (n-1) z^{n-2} + \ldots\ldots\} + \ldots\ldots + \xi^n + p_1 \xi^{n-1} + \ldots\ldots + p_n$$ ist.

Wenn man folglich schreibt:

$\Phi(z\xi) = z^n + \varphi^1(\xi).z^{n-1} + \varphi^2(\xi) z^{n-2} + \ldots\ldots + \varphi^n(\xi)$, so wird $\varphi^i(\xi)$ eine ganze Funktion von ξ vom i^{ten} Grade sein, von deren Koeffizienten der höchste gleich 1, die übrigen ganze ganzzahlige symmetrische Funktionen der Wurzeln $z_0 \ldots\ldots z_n$, also ganze Zahlen sind, so oft die letzteren es sind. In diesem Falle werden auch alle Werte $\Phi(z_i z_k)$ ganze Zahlen sein, und aus der Zusammensetzung von $\Phi(z\xi)$ schließt man, ähnlich wie früher, daß auch die Determinante der Größen Φ gleich Δ^2, also von Null verschieden ist.

Nunmehr ergibt sich mit Rücksicht auf (24) nach der Formel (28) der Wert (29) $\varepsilon_1{}^h = e^{-z_0} . \Phi(z_0 z_h) - e^{-z_i} . \Phi(z_i z_h)$.

Wenn wir nun, um die Abhängigkeit der Größen ε_m^h von z_i anzudeuten, dafür $\varepsilon_{i\,m}^h$ setzen, so nehmen (27) folgende Gestalt an:

$$30.\quad \begin{cases} \varepsilon_{i\,m}^0 = e^{-z_0} . \alpha_0 - e^{-z_i} . \alpha_i \\ \varepsilon_{i\,m}^1 = e^{-z_0} . \beta_0 - e^{-z_i} . \beta_i \\ - - - - - - - - \\ \varepsilon_{i\,m}^n = e^{-z_0} . \lambda_0 - e^{-z_i} . \lambda_i, \text{ wobei} \end{cases}$$

$$31.\quad \begin{cases} \alpha_i = A_0 . \Phi(z_i z_0) + A_1 . \Phi(z_i z_1) + \ldots\ldots + A_n . \Phi(z_i z_n) \\ \beta_i = B_0 . \Phi(z_i z_0) + B_1 . \Phi(z_i z_1) + \ldots\ldots + B_n . \Phi(z_i z_n) \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ \lambda_i = L_0 . \Phi(z_i z_0) + L_1 . \Phi(z_i z_1) + \ldots\ldots + L_n . \Phi(z_i z_n). \end{cases}$$

So oft die Wurzeln $z_0, z_1 \ldots\ldots z_n$ als ganze Zahlen vorausgesetzt werden, werden auch diese Größen $\alpha_i, \beta_i \ldots\ldots \lambda_i$ sämtlich ganzzahlig sein. So ist nun die Grundlage gewonnen, auf der der Hermitesche Satz von der Transzendenz von e einfach erwiesen werden kann. Denn wäre e eine algebraische Zahl, d. h. Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten, so müßte eine Beziehung stattfinden von der Form:

$$32.\quad e^{z_0} . N_0 + e^{z_1} N_1 + \ldots\ldots + e^{z_n} . N_n = 0,$$

in welcher die N_i ganze, von Null verschiedene Zahlen, die Exponenten $z_0, z_1 \ldots\ldots z_n$ aber positive ganze Zahlen (Null einschließlich) wären. Nun ergibt sich aber, indem diese ganzen Zahlen zu Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ gewählt werden, aus der ersten der Gleichungen (30), wenn i die Werte 1, 2, 3 ...... n erhält:

$$\varepsilon_{1m}^0 = e^{-z_0} . \alpha_0 - e^{-z_1} . \alpha_1$$
$$\varepsilon_{2m}^0 = e^{-z_0} \alpha_0 - e^{z_2} . \alpha_2$$

.... und wenn diese Gleichungen der Reihe nach mit $e^{z_1} N_1, e^{z_2} N_2 \ldots\ldots e^{Z_n} N_n$ multipliziert und dann addiert werden, die nachstehende Gleichung:

$$e^{z_1} N_1 . \varepsilon_{1m}^0 + e^{z_2} N_2 \varepsilon_{2m}^0 + \ldots\ldots + e^{Z_n} N_n \varepsilon^0{}_{n\,m} = e^{-z_0} \alpha_0 .$$
$$(e^{z_1} N_1 + e^{z_2} N_2 + \ldots\ldots + e^{Z_n} N_n) - (\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \ldots\ldots + \alpha_n N_n).$$

Diese nimmt jedoch unter Voraussetzung des Bestandes von (32) die Form an:

33. $(\alpha_0 N_0 + \alpha_1 N_1 + \ldots\ldots + \alpha_n N_n) = -(e^{z_1} \varepsilon_{1m}^0 N_1 + + e^{z_2} \varepsilon_{2m}^0 N_2 + \ldots\ldots + e^{z_n} \varepsilon^0{}_{nm} N_n)$. Hier steht links eine ganze Zahl; da man anderseits dem Mittelwertsatze der Theorie der bestimmten Integrale gemäß setzen darf:

$$\varepsilon_{i,m}^{0} = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \frac{f(z)^m}{z - z_0} dz = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{f(\xi)^m}{\xi - z_0} \cdot \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} dz =$$

$= \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{f(\xi)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot (e^{z_0} - e^{-z_i})$, wo unter ξ ein Wert zwischen den Grenzen z_0 und z_i zu verstehen ist und da folglich mit unendlich wachsendem m der Wert von ε_{im}^{0} zugleich mit dem zweiten Faktor unendlich abnimmt, so wird die rechte Seite in (33) mit wachsendem m unter jede angebbare Größe herabsinken und damit Gleichung (33) nicht für jedes m gelten können, wenn nicht die ganze Zahl links gleich Null wird.

So gelangt man mithin zu dem System:

$$\begin{array}{l} \alpha_0 N_0 + \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \ldots\ldots + \alpha_n N_n = 0 \\ \beta_0 N_0 + \beta_1 N_1 + \beta_2 N_2 + \ldots\ldots + \beta_n N_n = 0 \\ - - - - - - - - - - - - - \\ \lambda_0 N_0 + \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 + \ldots\ldots + \lambda_n N_n = 0, \end{array}$$

welches von einem gewissen m ab dauernd bestehen muß, d. h. es muß die aus $\alpha_i \beta_i \ldots\ldots \lambda_i$ gebildete Determinante verschwinden und dies kann nicht geschehen, da ja diese Determinante, wie aus (31) zu schließen, das Produkt zweier Determinanten ist, deren eine $\Delta^{2(m-1)}$, deren andere Δ^2 ist, welche beide wie Δ selbst nicht Null sind.

Hieraus folgt die Unmöglichkeit jeder Beziehung von der Form (32) und daher auch die Transzendenz von e.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der Zahl π und beginnen mit einer allgemeinen Vorbemerkung. Während bei der Hermiteschen Untersuchung $z_0, z_1 \ldots\ldots z_n$ stets reelle Zahlen bedeuteten, wird jetzt z_0 immer gleich Null und $z_1 \ldots\ldots z_n$ als die Wurzeln einer beliebigen Gleichung n^{ten} Grades mit ganzzahligen Koeffizienten vorausgesetzt werden und demnach auch komplexe Werte bedeuten können. Schließen wir nun den Unendlichkeitspunkt der Ebene $z = \infty$ im folgenden aus, so daß die Integrationswege nicht durch ihn hindurchführen, so erhalten die ε_m, ε_m^h auch jetzt ganz bestimmte, vom Integrationswege unabhängige Werte, die freilich komplex sein werden. Trotz dieser wesentlichen Änderung des arithmetischen Verhaltens der Größen ε_m, ε_m^h werden aber doch die Beziehungen (25) und (26), sowie die daraus abgeleiteten Gleichungen (27), (30), (31) bestehen bleiben; denn sie ergeben sich aus den Formeln, die nur eine identische Umformung aussprechen und müssen somit wie für reelle so auch für komplexe Werte der Größen z in Geltung bleiben.

Da ferner $\varphi_i(\xi)$ eine ganze Funktion von ξ mit ganzzahligen Koeffizienten ist, wenn, wie vorausgesetzt, $z_1 z_2 \ldots\ldots z_n$ einer Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten Genüge leisten, so wird $\varphi(z_1 \xi)$ in diesem Falle eine ganze Funktion von ξ und z, also $\varphi(z_i z_k)$ eine ganze Funktion von z_i und z_k mit ganzzahligen Koeffizienten. Da sich dieselbe Bemerkung bezüglich der Größe $\Phi(z_i z_k)$ wiederholen läßt, werden nicht nur die Koeffizienten $A, B \ldots\ldots L$ der Gleichungen (27), sondern auch die unter (31) gegebenen Werte der Größen $\alpha_i, \beta_i \ldots\ldots \lambda_i$ ganze Funktionen der Wurzeln $z_1 \ldots\ldots z_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten sein.

Der Keim der Lindemannschen Betrachtung über die Zahl π ist nun folgende einfache Überlegung:

Läßt sich zeigen, daß e^{ξ} nicht rational sein kann, so oft ξ eine algebraische Zahl ist, so folgt aus dem Bestehen der Gleichung $e^{\pi i} = -1$ unmittelbar, daß πi und folglich auch π selbst keine algebraische, also nur eine transzendente Zahl sein kann.

Es genügt aber hiebei ξ als eine ganze algebraische Zahl anzunehmen. Denn, sei im Gegenteile ξ Wurzel der Gleichung

(a) $\xi^r + p_1 \xi^{r-1} + p_2 \xi^{r-2} + \ldots\ldots + p_r = 0$

mit rationalen Koeffizienten, so daß $p_i = \frac{q_i}{q}$ gesetzt werden kann, unter q, q_i ganze Zahlen, unter q nämlich den Generalnenner aller p_i verstanden, so leistet $\xi' = q\xi$ der Gleichung

$$\xi'^r + Q_1 \xi'^{r-1} + Q_2 \xi'^{r-2} + \ldots\ldots + Q_r = 0$$

genüge, in welcher die Koeffizienten $Q_i = q_i \cdot q^{i-1}$ sämtlich ganze Zahlen sind, ist also eine ganze algebraische Zahl. Wird aber e^{ξ} als rational angenommen, so folgt für $e^{\xi'} = (e^{\xi})^q$ dasselbe; aus dem Nachweise also, daß $e^{\xi'}$ nicht rational sein kann, sobald ξ' eine ganze algebraische Zahl ist, folgt dieselbe Unmöglichkeit für e^{ξ}, wenn ξ eine beliebige algebraische Zahl bedeutet. Hiernach dürfen wir uns im folgenden auf die Voraussetzung beschränken, daß die Koeffizienten der Gleichung (a) ganze Zahlen sind. Auch beeinträchtigen wir die Allgemeinheit nicht, wenn wir (a) als irreduktibel voraussetzen; denn wäre sie es nicht, könnte man den Ausdruck in solche Faktoren zerlegen und eine Größe ξ, welche die Gleichung erfüllt, müßte einen dieser Faktoren zu Null machen und würde daher Wurzel einer ähnlichen irreduktiblen Gleichung sein, welche der Betrachtung zugrunde gelegt werden könnte. Bezeichnet man daher mit $\xi_1 \; \xi_2 \ldots\ldots \xi_r$ die Wurzeln der jetzt als irreduktibel anzunehmenden Gleichung (a), so müssen diese alle voneinander verschieden sein, weil sonst die ganze Funktion zur Linken mit ihrer Abgeleiteten einen rationalen Faktor gemeinsam hätte, also nicht irreduktibel wäre. Die Größen

(b) $e^{\xi_1}, e^{\xi_2} \ldots\ldots e^{\xi_r}$ sind Wurzeln der Gleichung

$(Z - e^{\xi_1})(Z - e^{\xi_2}) \ldots\ldots (Z - e^{\xi_r}) = 0$, d. h. der Gleichung

(c) $Z^r + M_1 Z^{r-1} + M_2 Z^{r-2} + \ldots\ldots + M_r = 0$, deren Koeffizienten vom Vorzeichen abgesehen mit den folgenden Ausdrücken identisch sind:

(d) Σe^{ξ_1}, $\Sigma e^{\xi_1+\xi_2}$, $\Sigma e^{\xi_1+\xi_2+\xi_3}$ $\ldots\ldots$ $\Sigma e^{\xi_1+\xi_2+\ldots\ldots+\xi_r}$.

Hier ist nämlich die erste Summe die Summe der Größen (b) selbst; die zweite die Summe aller Produkte aus zweien von ihnen usw. Wird nun vorausgesetzt, daß eine der Größen (b) rational sei, etwa $e^{\xi_1} = \frac{u}{v}$, so würde die Gleichung (c), wenn $Z = \frac{u}{v}$ gesetzt wird, befriedigt und die entstehende Identität die Gestalt haben:

(e) $N_0 + N_1 . \Sigma e^{\xi_1} + N_2 . \Sigma e^{\xi_1+\xi_2} + \ldots\ldots N_r e^{\xi_1+\xi_2+\ldots\ldots+\xi_r} = 0$, in welcher die N ganze Zahlen bedeuten, welche nicht sämtlich gleich Null sind.

Zum Beweise des Lindemannschen Vorhabens bleibt demnach nur die Unmöglichkeit einer Beziehung dieser Art nachzuweisen.

Wir verfolgen hier zunächst den Fall, in welchem für jede der in den Exponenten stehenden Wurzelfunktionen $\xi_1, \xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 + \xi_2 + + \xi_3 \ldots\ldots$ die algebraisch verschiedenen Werte, welche sie bei den Permutationen der Wurzeln annehmen, auch numerisch voneinander verschieden sind. Ist nun $F(\xi_1\, \xi_2 \ldots\ldots \xi_r)$ irgendeine ganze Funktion der Wurzeln mit ganzzahligen Koeffizienten, so leisten die numerisch verschiedenen Werte derselben einer Gleichung Genüge, welche wie (a) ganzzahlig und irreduktibel ist. Da hiernach auch die Werte der Exponenten in jeder der in der Beziehung (e) auftretenden Summen die Wurzeln einer solchen Gleichung sein werden, so kann zunächst keiner aller jener Exponenten Null sein, ausgenommen etwa allein der letzte, $\xi_1 + \xi_2 + \ldots\ldots \xi_r$, welcher 0 wird, wenn in der Gleichung (a) $p_1 = 0$ wäre. Ferner aber darf man alle jene Exponenten auch als verschieden voneinander voraussetzen, nicht nur die in derselben Summe, was bereits geschehen ist, sondern auch die zu verschiedenen Summen gehörigen; denn wären zwei solche einander gleich, so müßten die irreduktiblen Gleichungen, denen sie genügen, miteinander identisch sein, also alle Wurzeln gemeinsam haben; dann wären aber jene Summen auch miteinander identisch und man könnte sie in ein einziges Glied zusammenfassen, ebenso wie früher bei $p_1 = 0$ das erste und letzte Glied und erhielte so eine andere Beziehung von ähnlicher Beschaffenheit wie (e) und könnte mit dieser genau so verfahren wie mit der ursprünglichen, wenn darin alle Exponenten von vornherein als von Null und voneinander verschieden vorausgesetzt werden.

Endlich hat irgendeine Vertauschung unter den Wurzeln ξ_1, $\xi_2 \ldots\ldots \xi_r$ nur die Wirkung, daß in jeder der Summen die Exponenten nur untereinander auf gewisse Weise gleichzeitig vertauscht werden. Nunmehr setzt man $z_1 = \xi_1 \ldots\ldots z_r = \xi_r$

(f) und bezeichnet mit $z_{r+1} \ldots\ldots z_{r+\varrho}$ die Werte, welche die Exponenten der zweiten Summe haben usw., endlich mit z_n den Exponenten $\xi_1 + \xi_2 + \ldots\ldots + \xi_r$ — der ungleich Null angenommen werden darf — so sind, wie leicht einzusehen, $z_1, z_2 \ldots\ldots z_n$ die von Null und voneinander verschiedenen Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades mit ganzzahligen Koeffizienten. Die Gleichung (e) ist mithin nur ein spezieller Fall von (XXXII) und man zieht ähnlich wie dort (XXXIII) hier die Folgegleichungen.

$$\text{(g)} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 N_0 + (\alpha_1 + \ldots\ldots + \alpha_r) N_1 + (\alpha_{r+1} + \ldots\ldots + \alpha_{r+\varrho}) N_2 + \\ \quad + \ldots\ldots + \alpha_n N_n = \xi_0 \\ \beta_0 N_0 + (\beta_1 + \ldots\ldots + \beta_r) N_1 + (\beta_{r+1} + \ldots\ldots + \beta_{r+\varrho}) N_2 + \\ \quad + \ldots\ldots + \beta_n N_n = \xi_1 \\ \gamma_0 N_0 + (\gamma_1 + \ldots\ldots + \gamma_r) N_1 + (\gamma_{r+1} + \ldots\ldots + \gamma_{r+\varrho}) N_2 + \\ \quad + \ldots\ldots + \gamma_n N_n = \xi_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_0 N_0 + (\lambda_1 + \ldots\ldots + \lambda_r) N_1 + (\lambda_{r+1} + \ldots\ldots + \lambda_{r+\varrho}) N_2 + \\ \quad + \ldots\ldots + \lambda_n N_n = \xi_n, \end{array} \right.$$

in denen zur Abkürzung gesetzt ist:

(h) $\xi_0 = \{(e^{z_1} . \varepsilon^0_{1m} + \ldots\ldots + e^{z_r} . \varepsilon^0_{rm}) N_1 + (e^{z_{n+1}} . \varepsilon^0_{r+1m} + + \ldots\ldots e^{z_{r+\varrho}} . \varepsilon^0_{r+\varrho m}) N_2 + \ldots\ldots + e^{z_n} . \varepsilon^0_{nm} N_r\}$ und $\xi_1 \ldots\ldots \xi_n$ ähnliche Bedeutung haben. Vertauscht man nun zwei Größen z_i, z_k miteinander, welche ein und derselben in (f) angegebenen Wurzelgruppe angehören, z. B. z_1 mit z_2, so geht, da allgemein:

$$\varepsilon^h_{i,m} = \frac{1}{(m-1)!} \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} . \frac{f(z)^m}{z - z_h} dz \text{ war,}$$

ε^h_{1m} in ε^h_{2m} über und umgekehrt, wenn h von 1 und 2 verschieden ist, während $\varepsilon^h_{g,m}$ dabei unverändert bleibt, wenn auch g weder 1 noch 2 ist. Es geht also z. B.

$\varepsilon^0_{1m} = e^{-z_0} \alpha_0 - e^{-z_1} \alpha_1$ in $\varepsilon^0_{2m} = e^{-z_0} . \alpha_0 - e^{-z_2} . \alpha_2$, d. h. α_1 in α_2 über und umgekehrt, während alle übrigen α ungeändert bleiben. Bei solcher Vertauschung wird also die linke Seite der Gleichungen (g) ungeändert bleiben, und zwar aller mit Ausnahme der 2. und 3.; denn bei dieser Vertauschung geht $\varepsilon^1_{1m} = \frac{1}{(m-1)!} . \int_{z_0}^{z_1} e^{-z} . \frac{f(z)^m}{z - z_1} dz$ über in

$\varepsilon^2_{2m} = \frac{1}{(m-1)!} . \int_{z_0}^{z_2} e^{-z} . \frac{f(z)^m}{z - z_2} dz$ und umgekehrt, ferner ε^1_{2m} in

ε^2_{1m} und umgekehrt, endlich, wenn $g \neq 1, 2$

$$\varepsilon^1_{g,m} = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \int_{z_0}^{z_g} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_1} dz \text{ in}$$

$$\varepsilon^2_{g,m} = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \int_{z_0}^{z_g} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_2} dz \text{ und umgekehrt, d. h. da}$$

$$\varepsilon^1_{1m} = e^{-z_0}\beta_0 - e^{-z_1}\beta_1,\ \varepsilon^2_{2m} = e^{-z_0}\gamma_0 - e^{-z_2}\gamma_2$$

$$\varepsilon^1_{2m} = e^{-z_0}\beta_0 - e^{-z_2}\beta_2,\ \varepsilon^2_{1m} = e^{-z_0}\gamma_0 - e^{-z_1}\gamma_1$$

$\varepsilon^1_{g,m} = e^{-z_0}\beta_0 - e^{-z_g}\beta_g,\ \varepsilon^2_{g,m} = e^{-z_0}\gamma_0 - e^{-z_g}\gamma_g$ ist, so vertauschen sich, wenn z_1 und z_2 vertauscht werden, gleichzeitig β_0 und γ_0, β_1 und γ_2, β_2 und γ_1, endlich, sobald g verschieden von 1 und 2 ist, auch β_g und γ_g. Offenbar werden sich dadurch die linken Seiten der zweiten und dritten Gleichung in (g) vertauschen.

Man findet also im ganzen: wenn irgend zwei derselben Gruppe (f) angehörige Größen z_i, z_k vertauscht werden, so ändern sich in den Gleichungen (g) die linken Seiten nicht bis auf zwei, die miteinander tauschen; und zwar bleibt die linke Seite der ersten jener Gleichungen immer ungeändert, da der ihr entsprechende Wert des Index h immer von i und k verschieden ist. Weil nun jede Permutation der Größen $z_1, z_2 \ldots\ldots z_n$ durch eine Reihe Vertauschungen von zwei derselben Gruppe zugehörigen Größen z_i, z_k hervorgebracht werden kann, gewinnt man sogleich das allgemeinere Ergebnis:

Bei jeder der angegebenen Permutationen bleibt die linke Seite der ersten Gleichung (g) ungeändert, die der anderen vertauschen sich nur untereinander.

Nun wissen wir aber schon, daß wie immer auch die Wurzeln $\xi_1 \ldots\ldots \xi_r$ untereinander vertauscht werden mögen, nur solche Vertauschungen zwischen den Größen $z_1, z_2 \ldots\ldots z_n$ daraus hervorgehen, wie sie eben angegeben wurden. Wir können also sagen:

Bei den Vertauschungen der Wurzeln $\xi_1 \ldots\ldots \xi_r$ bleibt die linke Seite von I. in (g) ungeändert, die n Ausdrücke in den linken Seiten der übrigen Gleichungen vertauschen sich untereinander, und daher werden Ausdrücke, welche symmetrisch daraus zusammengesetzt sind, gleichfalls ungeändert bleiben. Nach den Sätzen über symmetrische Wurzelfunktionen findet sich endlich, daß die linke Seite der ersten Gleichung (g) einer ganzen Zahl -- U — gleich, die linken Seiten der n übrigen Gleichungen aber die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades

(i) $V^n + U_1 \,.\, V^{n-1} + U_2 V^{n-2} + \ldots\ldots + U_n = 0$ sein müssen, deren Koeffizienten U_i ebenfalls ganzzahlig sind.

Die Gleichungen (g) und ihre Folgerungen bestehen für jeden Wert, welchen man m beilegen mag und werden also auch bestehen bleiben, wenn wir m unendlich wachsen lassen. Wir haben nun zu untersuchen, was dabei aus $\xi_0, \xi_1 \ldots\ldots \xi_n$ wird. Nun war in

$$\text{(j)} \qquad \int_{z_0}^{z} e^{-z} \cdot \frac{f(z)^m}{z - z_h} dz$$

der Integrationsweg, abgesehen davon, daß er im Endlichen liegt, ein ganz beliebiger; doch wollen wir ihn jetzt so wählen, daß er durch keinen der Punkte $z_1, z_2 \ldots\ldots z_n$ hindurchführe und daß seine Länge, welche l_i^h heiße, nur endlich sei. Auf diesem Wege wird dann nicht nur $f(z)$, sondern auch $\frac{e^{-z}}{z - z_h}$ endliche Werte behalten, so daß der absolute Betrag jeder dieser Funktionen auf demselben eine obere Grenze haben wird, nämlich einen endlichen Wert, der M_i^h, respektive M'^h_i heißen möge, nicht überschreiten wird. Der absolute Betrag des Integrals (j) wird dann einem einfachen Prinzip zufolge nicht größer sein können als eine leicht angebbare Grenze. Bedenkt man nämlich, daß das Integral nichts anderes ist als eine Summe von unendlich viel Summanden von der Form:

$\frac{e^{-z}}{z - z_h} \cdot f(z)^m \cdot (z_{k+1} - z_k)$, so kann sein Modul nicht größer sein als die Summe der Modulen der einzelnen Summanden, d. i.

$\Sigma \, mod. \frac{e^{-z}}{z - z_h} . \, mod . f(z)^m . \, mod . (z_{k+1} - z_k)$ und um so mehr nicht größer als

$$\Sigma M'^h_i . (M_i^h)^m . \, mod \, (z_{k+1} - z_k).$$

Nun ist aber $mod\,(z_{k+1} - z_k)$ gleich dem Abstand der beiden Kurvenpunkte z_k, z_{k+1} voneinander, d. h. gleich dem Kurvenelemente; und da letztere zusammen genommen die ganze Länge des Weges l_i^h ausmachen, findet sich endlich der absolute Betrag des Integrals nicht größer als $(M_i^h)^m . M'^h_i . l_i^h$, also

$\left| \varepsilon^h_{i\,m} \right| \overline{\overline{<}} \frac{(M_i^h)^m . M'^h_i . l_i^h}{1 . 2 . 3 \ldots (m-1)}$. Bezeichnen wir also mit M, M', l die Größen unter den Werten M_i^h, M'^h_i, l_i^h, welche allen Kombinationen h_i entsprechen, so findet man schließlich, daß die sämtlichen Größen $\varepsilon^h_{i\,m}$ ihrem absoluten Betrage nach die Grenze

$\frac{M^{m-1}}{(m-1)!} . M M' l$ nicht überschreiten. Hiebei sind M, M', l von m unabhängig und darum sinkt diese Grenze wegen ihres ersten Faktors mit unendlich wachsendem m schließlich unter jeden Grad von Kleinheit herab. Gleiches wird mit dem absoluten Betrage der Größen $\varepsilon^h_{i\,m}$ und somit auch mit den $\xi_0 \ldots\ldots \xi_n$ geschehen: für alle m, die eine gewisse Zahl μ übertreffen, wird der absolute Betrag dieser Größen beliebig klein sein, z. B. derjenige von ξ_0 kleiner als Eins. Da aber die linke Seite der ersten Gleichung (g) immer eine ganze Zahl ist, muß für alle $m > \mu$ ihr Wert Null sein. Die linken Seiten der übrigen n Gleichungen (g) waren aber die Wurzeln von (j); da diese alle beliebig klein werden für $m > \mu$, muß das gleiche auch von den Koeffizienten $U_1\ U_2 \ldots\ldots U_n$ gelten; diese werden also von einem gewissen m ab alle Null sein müssen. Dann sind es aber auch die linken Seiten von (g) selbst. Man findet also, daß für alle hinreichend großen Werte m die Gleichungen gelten:

$$\alpha_0 N_0 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r) N_1 + (\alpha_{r+1} + \ldots + \alpha_{r+\varrho}) N_2 + \ldots + \alpha_n N_r = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_0 N_0 + (\lambda_1 + \ldots + \lambda_r) N_1 + (\lambda_{r+1} + \ldots + \lambda_{r+\varrho}) N_2 + \ldots + \lambda_n N_r = 0,$$

welche doch nur stattfinden können, da die N_i nicht sämtlich Null sein sollten, wenn die aus den Größen $\alpha_i\ \beta_i \ldots\ldots \lambda_i$ gebildete Determinante verschwindet. Dies kann aber nur geschehen, wenn die Diskriminante der Gleichung mit den Wurzeln $z_1\, z_2 \ldots\ldots z_n$ verschwindet und geschieht also nicht, wenn diese Größen, wie hier vorausgesetzt, voneinander verschieden sind.

Hiemit ist die Unmöglichkeit der Beziehung (e) unter den gemachten Annahmen erwiesen.

Es wäre nun noch der Fall zu untersuchen, wo die algebraisch verschiedenen Werte der Wurzelfunktionen $\xi_1 + \xi_2$; $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \ldots\ldots$ nicht sämtlich auch numerisch ungleich sind. Dann erst wäre der Beweis für die Transzendenz von π völlig erbracht. Diesen Beweis führte viel einfacher, als Lindemann es tat, K. Weierstraß[1]) in folgender Weise:

I. Es bedeute $[z, \lambda]$ für jeden ganzzahligen, nicht negativen Wert von λ die durch die Gleichung

$\frac{[z\lambda]}{\lambda!} = \sum_{k=0}^{\lambda} \frac{z^k}{k!}$ definierte ganze Funktion λ^{ten} Grades des Argumentes z, ferner sei

$$g(z) = \sum_{\lambda=0}^{l} b_\lambda z^\lambda$$

eine beliebige ganze Funktion von z und es werde gesetzt:

$$G(z) = \sum_{\lambda=0}^{l} b_\lambda [z\lambda];$$

dann besteht die Gleichung $g(z)\, e^{-z}\, dz = d[-G(z)\, e^{-z}]$ und es ist $G(z)$ eine ganze Funktion der Veränderlichen z von demselben Grade

---

[1]) Weierstraß K., Abhandlungen aus der Funktionenlehre. Berlin 1886.

wie die Funktion $g(z)$; dabei ist durch vorstehende Gleichung $G(z)$ eindeutig definiert.

II. Es seien nun $f(z) = \sum_{v=0}^{n+1} a_v z^{n+1+v}$ und $h(z) = \sum_{v=0}^{n} c_v z^v$ zwei ganze Funktionen von z vom $(n+1)^{\text{ten}}$, respektive n^{ten} Grade; die Koeffizienten der zweiten sollen willkürlich anzunehmende Größen und die Koeffizienten der ersten nur der Beschränkung unterworfen sein, daß a_0 nicht gleich Null sein und $f(z)$ mit ihrer ersten Ableitung $f'(z)$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen darf.

Man bestimme, unter m eine beliebige positive ganze Zahl verstanden, wie in I. eine Reihe von ganzen Funktionen,

$H_0(z),\ H_1(z) \ldots\ldots H_m(z)$, welche den Gleichungen

$$h(z)\, e^{-z}\, dz = d[-H_0(z)\, e^{-z}]$$

$f'(z)\, H_{\mu-1}(z)\, e^{-z}\, dz = d[-H_\mu(z)\, e^{-z}]$ für $\mu = 1, 2 \ldots\ldots m$ genügen, dann hat man, wenn

$$h_0(z) = h(z),\ h_\mu(z) = f'(z)\, H_{\mu-1}(z)\ (\mu = 1, 2, 3 \ldots\ldots m)$$

gesetzt wird, für $\mu = 0, 1, 2 \ldots\ldots m-1$,

$$d\left(-\frac{H_\mu(z)}{(m-\mu)!} f(z)^{m-\mu} e^{-z}\right) = \frac{h_\mu(z)}{(m-\mu)!} f(z)^{m-\mu} e^{-z}\, dz - \frac{h_{\mu+1}(z)}{(m-\mu-1)!} f(z)^{m-\mu-1} e^{-z}\, dz$$

und für $\mu = m$

$$d(-H_m(z)\, e^{-z}) = h_m(z)\, e^{-z}.$$

Aus diesen $(m+1)$ Gleichungen ergibt sich, wenn man sie addiert:

$$(\alpha)\quad \frac{h(z)}{m!} . f(z)^m\, e^{-z}\, dz = d \sum_{\mu=0}^{m} \left\{-\frac{H_\mu(z)}{(m-\mu)!} f(z)^{m-\mu}\, dz\right\}.$$

Die Koeffizienten der Funktionen $[z\lambda]$ sind ganze Zahlen, die Koeffizienten von $G(z)$ mithin ganze lineare Funktionen der Größen $b_0\, b_1 \ldots\ldots b_l$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Demgemäß werden die Funktionen $H_0(z),\ H_1(z) \ldots\ldots H_m(z)$ ganze Funktionen der Größen

$$z,\ a_0,\ a, \ldots\ldots a_{n+1},\ c_0,\ c_1 \ldots\ldots c_n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten sein.

III. „Die im vorstehenden definierte Funktion $H_m(z)$ ist nie durch $f(z)$ teilbar, ausgenommen in dem Falle, wo die Größen $c_0 \ldots\ldots c_n$ sämtlich den Wert Null haben und somit jede der Funktionen $H_0(z),\ H_1(z) \ldots\ldots H_m(z)$ sich für jeden Wert von z auf Null reduziert."

Setzt man

$$\overline{H}_m(z) = \sum_{\mu=0}^{m} \left\{ \frac{H_\mu(z)}{(m-\mu)!} f(z)^{m-\mu} \right\}, \text{ so ist nach } (\alpha)$$

$$\overline{H}_m(z) - \frac{d\,\overline{H}_m(z)}{d\,z} = \frac{h(z)}{m!} . f^m(z).$$

Wenn daher die Koeffizienten der Funktion $h(z)$ nicht sämtlich Null sind, so ist $\overline{H}_m(z)$ eine ganze Funktion von z, die nicht für jeden Wert dieser Größe verschwindet und deren Grad nicht größer ist als $m(n+1)+n=(m+1)(n+1)-1$. Bezeichnet man also mit $\varrho+1$ die kleinste positive ganze Zahl, für welche $\overline{H}_m(z)$ nicht durch $\overset{\varrho+1}{f(z)}$ teilbar ist und setzt

$\overline{H}_m(z) = H^*_m(z) . f^\varrho(z)$, so ist $H^*_m(z)$ eine ganze Funktion von z, die nicht für jeden Wert von z verschwindet und $\varrho \leqq m$. Man hat dann:

$$\left[H^*_m(z) - \frac{d\,H^*_m(z)}{d\,z}\right] . f(z) - \varrho\,.\,H^*_m(z) . f'(z) = \frac{h(z)}{m!} . \overset{m-\varrho+1}{f(z)},$$

und es ist daher $\varrho\, H^*_m(z) f'(z)$ durch $f(z)$ teilbar.

Dies aber ist, da $f(z)$ und $f'(z)$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen und $H^*_m(z)$ nicht durch $f(z)$ teilbar ist, nur der Fall für $\varrho=0$; es ist also $f(z)$ kein Teiler von $\overline{H}_m(z)$ und somit auch keiner von $H_m(z)$.

IV. Bezeichnet man unter der Annahme, daß $n>1$ sei, mit z', z'' irgend zwei derjenigen Werte von z, für welche $f(z)=0$ wird, so ergibt sich aus der Gleichung (α)

$$(\beta)\quad H_m(z'') . e^{-z''} - H_m(z')\, e^{-z'} = -\int_{z'}^{z''} \frac{h(z)}{m!} f^m(z)\, e^{-z}\, d\,z.$$

Aus den Definitionsgleichungen für unsere eigens gebildeten Funktionen erhellt nun aber, daß die Funktion $H_m(z)$, bei unbestimmten Werten der Größen $c_0\, c_1 \ldots\ldots c_n$, vom $(m\,n+n)^{\text{ten}}$ Grade ist und daß in derselben die Koeffizienten von

$z^{m\,n+n}, z^{m\,n+n-1} \ldots\ldots z^{m\,n+n-(m-1)}$ beziehlich durch $a_0{}^m, a_0{}^{m-1} \ldots\ldots a_0$ teilbar sind.

Daraus folgt, daß die Funktion $a_0{}^{m\,(n-1)} . H_m(z)$ sich auf die Form

$$a_0{}^{m\,(n-1)} . H_m(z) = G(z\,m) . f(z) + g(z\,m)$$

bringen läßt, in der Art, daß $G(z\,m)$, $g(z\,m)$ beide ganze Funktionen der Größen z, a_0, $a_1 \ldots\ldots a_{n+1}$, $c_0\ c_1 \ldots\ldots c_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten werden und $g(z\,m)$ in Beziehung auf z von nicht höherem als dem n^{ten} Grade ist. Die Gleichung (β) kann also in die folgende verwandelt werden:

$$(\gamma)\quad g(z''\,m) . e^{-z''} - g(z'\,m) . e^{-z'} = -\int_{z'}^{z''} \frac{h(z)\,(a_0{}^{n-1} . f[z])^m}{m!} . e^{-z} dz.$$

Die Koeffizienten der Funktionen $H_m(z)$, $G(zm)$, $g(zm)$ sind, wie aus ihrer Bildungsweise und Definition klar, homogene, ganze lineare Funktionen der willkürlich anzunehmenden $c_0 \ldots\ldots c_n$.

Wenn daher v irgendeine der Zahlen $0, 1 \ldots\ldots n$ ist und $g_v(zm)$ die Funktion bezeichnet, in die $G(zm)$ übergeht, falls $c_v = 1$ und die übrigen c alle Null sind, so hat man

$$g(zm) = \sum_{v=0}^{n} c_v g_v(zm)$$

und es gehen aus der Gleichung (γ) die folgenden $(n+1)$ Gleichungen hervor:

$$(\delta)\quad g_v(z''m)e^{-z''} - g_v(z'm).e^{-z'} = -\int_{z'}^{z''} \frac{z^v(a_0^{n-1}.f[z])^m}{m!} e^{-z} dz$$
$$v = 0, 1 \ldots\ldots n.$$

Die Funktionen $g_v(zm)$ sind ganze Funktionen der Größen z, a_0, $a_1 \ldots\ldots a_{n+1}$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Bezeichnet man mit $G_v(zm)$ die Funktion, in welche $G(zm)$ durch die Annahme $h(z) = z^v$ übergeht, so ist

$$\begin{cases} G(zm) = \sum\limits_{v=0}^{n} c_v . G_v(zm) \\ a_0^{m(n-1)}.H_m(z) = f(z)\sum\limits_{v=0}^{n} c_v . G_v(zm) + \sum\limits_{v=0}^{n} c_v . g_v(zm) \end{cases}$$

und es ergibt sich aus der letzten Gleichung, da ja $H_m(z)$ nach III. nur dann durch $f(z)$ teilbar ist, wenn die Größen c_v sämtlich verschwinden, daß der Ausdruck $\sum\limits_{v=0}^{n} c_v g_v(zm)$ nur dann für jeden Wert von z gleich Null ist, wenn jede der Größen $c_0\ c_1 \ldots\ldots c_n$ den Wert Null hat — mit anderen Worten, daß unter den in den Gleichungen (δ) vorkommenden $(n+1)$ ganzen Funktionen von z $g_0(zm)$, $g_1(zm) \ldots\ldots g_n(zm)$ für keinen Wert von m eine lineare Abhängigkeit stattfindet.

Aus dieser Eigenschaft der Funktionen $g_v(zm)$ ergibt sich ferner: „Gibt man der Größe z irgend $(n+1)$ bestimmte Werte $z_0, z_1 \ldots\ldots z_n$, unter denen keine zwei gleiche sich befinden, so hat die Determinante

$$|\, G_v(z_\lambda m)\,| \quad (\lambda,\ v = 0, 1 \ldots\ldots n)$$

stets einen von Null verschiedenen Wert.

Wäre nämlich diese Determinante gleich Null, so würden sich $(n+1)$ Größen $c_0\ c_1 \ldots\ldots c_n$ so bestimmen lassen, daß die $(n+1)$ Gleichungen

$$\sum_{v=0}^{n} c_v g_v(z_\lambda m) = 0 \quad (\lambda = 0, 1 \ldots\ldots n)$$

beständen, ohne daß sämtliche Größen $c_0\, c_1 \ldots\ldots c_n$ den Wert Null hätten. Dann würde aber der Ausdruck $\sum_{v=0}^{n} c_v \cdot g_v(zn)$, der eine ganze Funktion der Veränderlichen z von nicht höherem als dem n^{ten} Grade ist, für jeden Wert von z verschwinden, was nach dem Vorhergehenden nicht stattfinden kann.

V. Da $\dfrac{z^v (a_0{}^{n-1} . f[z])^m}{m!} . e^{-z}$ eine (transzendente) ganze Funktion von z ist, so hat das Integral auf der Rechten der Gleichung (δ) bei gegebenen Werten von m, v, z', z'' einen vom Integrationswege unabhängigen, eindeutig bestimmten Wert, den man unter τ eine auf das Intervall (0 ...... 1) beschränkte reelle Veränderliche verstehend, in der Form:

$$\int_{,}^{1} \frac{(z''-z')(z'+[z''-z']\tau)^v \{a_0{}^{n-1} f(z'+[z''-z']\tau)\}^m}{m!} . e^{-z'-(z''-z')\tau} . d\tau$$

darstellen kann. Es läßt sich aber nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe δ eine ganze Zahl M so bestimmen, daß für jeden Wert m, der größer als M ist und für jeden der betrachteten Werte von τ:

$$\left| \frac{(z''-z')(z'+[z''-z']\tau)^v . \{a_0{}^{n-1} . f(z'+[z''-z']\tau)\}^m . e^{-z'-(z''-z')\tau}}{m!} \right| < \delta$$

und somit auch der absolute Betrag des $\displaystyle\int_{z'}^{z''} \frac{z^v (a_0{}^{n-1} . f[z])^m}{m!} e^{-z} \, dz$ kleiner als δ ist. Aus der Gleichung (δ) ergibt sich also, wenn man ihre beiden Seiten mit $e^{z''+z'}$ multipliziert,

$$(\varepsilon) \quad \lim_{m=\infty} \{g_v(z'm)\, e^{z''} - g_v(z''m)\, e^{z'}\} = 0 \quad (v = 0,\ 1 \ldots\ldots n).$$

VI. Bis jetzt sind die Koeffizienten der Funktion $f(z)$ keiner anderen Beschränkung wie der in II. angegebenen unterworfen worden. Setzt man aber jetzt noch fest, daß dieselben sämtlich gegebene ganze Zahlen sein sollen, so werden für jeden Wert der Zahl m auch die Koeffizienten der Funktionen $g_v(zm)$ alle ganze Zahlen. Man kann ferner, wenn $z_0, z_1 \ldots\ldots z_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ sind, den Gleichungen (ε) gemäß m so groß annehmen, daß jede der Differenzen

$$g_v(z_0\, m) . e^{z_\lambda} - g_v(z_\lambda m) . e^{z_0} \quad (\lambda,\ v = 0,\ 1 \ldots\ldots n)$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist als eine beliebig klein angenommene positive Größe δ. Zugleich hat dann die Determinante

$| g_v(z_\lambda m) |$ $(\lambda,\ v = 0,\ 1 \ldots\ldots n)$ einen von Null verschiedenen Wert, weil unter den z keine zwei gleich sind. Damit ist aber der Satz erwiesen: „Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades in z

mit gegebenen ganzzahligen Koeffizienten, die so beschaffen sind, daß die Gleichung $f(z) = 0$ $(n+1)$ voneinander verschiedene Wurzeln hat $(z_0, z_1 \ldots\ldots z_n)$. Dann läßt sich nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe δ, auf mannigfache Weise ein System von $(n+1)$ ganzen Funktionen $g_v(z)$ von nicht höherem als dem n^{ten} Grade, deren Koeffizienten alle ganze Zahlen sind, so bestimmen, daß erstens jede der Differenzen

$$g_v(z_0)\, e^{z\lambda} - g_v(z\lambda) \,.\, e^{z_0} \quad (\lambda_v = 0, 1 \ldots\ldots n)$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner als δ ist und zweitens die Determinante $| g_v(z\lambda) |$ $(\lambda, v = 0, 1 \ldots\ldots n)$ nicht verschwindet.

Nach diesem Satze nun ist der Beweis, daß π eine transzendente Zahl ist, leicht zu erbringen. Da nämlich $e^{\pi i} = -1$ ist und die Funktion e^x nur für solche Werte ihres Argumentes, welche ungerade Vielfache von πi sind, den Wert -1 annimmt, so kann statt des zu beweisenden Satzes auch der gesetzt werden.

„Die Größe $e^x + 1$ hat, wenn x eine algebraische Zahl ist, stets einen von Null verschiedenen Wert."

Es bedeute nun x_1 irgendeine algebraische Zahl und sei Wurzel einer Gleichung r^{ten} Grades: $x^r + c_1\, x^{r-1} + \ldots\ldots + c_r = 0$, wobei die c lauter rationale Zahlen sind und man annehmen darf, daß $r > 1$ sei, weil für $r = 1 : e^{x_1} = e^{-c_1}$ und somit eine positive Größe ist. Die vorstehende Gleichung hat dann außer x_1 noch $(r-1)$ andere Wurzeln; werden diese mit $x_2 \ldots\ldots x_r$ bezeichnet, so ist, damit der aufgestellte Satz bestehe, notwendig und hinreichend, daß die Größe $\prod_1^r (e^{x\lambda} + 1)$ einen von Null verschiedenen Wert habe. Dies aber läßt sich also zeigen:

Es seien $\xi_1\, \xi_2 \ldots\ldots \xi_r$ voneinander unabhängige Veränderliche, so hat man: $\prod_1^r (e^{\xi\lambda} + 1) = \sum_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_r} e^{\varepsilon_1 \xi_1 + \varepsilon_2 \xi_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_r \xi_r}$ $(\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_r = 0, 1)$

oder wenn man $2^r = p$ setzt und die p Funktionen

$$\varepsilon_1\, \xi_1 + \varepsilon_2\, \xi_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_r\, \xi_r \quad (\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_r = 0, 1)$$

in irgendeiner Ordnung genommen mit $\xi_0\, \xi_1 \ldots\ldots \xi_{p-1}$ bezeichnet:

$$\prod_1^r (e^{\xi\lambda} + 1) = \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{\xi\mu}.$$

Sind also $z_0\, z_1 \ldots\ldots z_{p-1}$ die Werte, welche $\xi_0\, \xi_1 \ldots\ldots \xi_{p-1}$ dadurch annehmen, daß man $\xi_1 = x_1$; $\xi_2 = x_2 \ldots\ldots \xi_r = x_r$ setzt, so ist

$$\prod_1^r (e^{x\lambda} + 1) = \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{z\mu}.$$

Die Anzahl der voneinander verschiedenen Werte, welche in der Reihe $z_0 z_1 \ldots\ldots z_{p-1}$ vorhanden sind, sei $(n+1)$ und es mögen die Ausdrücke ξ so geordnet sein, daß unter den $(n+1)$ Größen z_v keine zwei gleichen sich finden und $z_0 = 0$ ist; wobei noch zu bemerken, daß $n+1 > 1$, weil in der Reihe $z_0 z_1 \ldots\ldots z_{p-1}$ auch die Größen $x_1 \ldots\ldots x_r$ enthalten sind. Dann kann man unter z eine unbestimmte Größe verstehend, eine ganze Funktion $f(z)$ vom Grade $(n+1)$ herstellen, welche nur ganzzahlige Koeffizienten hat und für $z = z_0, z_1 \ldots \ldots z_n$ verschwindet. Es kann nämlich das Produkt $\prod\limits_0^{p-1} (z - \xi_\mu)$ dargestellt werden als ganze Funktion der Größen $z, \xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_r$ mit ganzzahligen Koeffizienten, welche sich nicht ändert, wenn die Größen $\xi_1 \ldots\ldots \xi_n$ beliebig permutiert werden und sich somit, wenn man für $\xi_1 \ldots\ldots \xi_r$ die Wurzeln einer Gleichung r^{ten} Grades mit lauter rationalen Zahlkoeffizienten einsetzt, in eine ganze Funktion p^{ten} Grades von z mit eben solchen Koeffizienten verwandelt. Es läßt sich also $\prod\limits_0^{p-1} (z - z_n)$ als ganze Funktion von (z) mit rationalen Zahlkoeffizienten darstellen; dividiert man diese Funktion dann durch den größten Teiler, den sie mit ihrer ersten Derivierten gemein hat, so ist der Quotient eine ganze Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades von z, aus der man durch Multiplikation mit einer passenden ganzen Zahl eine Funktion

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots\ldots + a_n$$

erhält, die lauter ganzzahlige Koeffizienten hat und für $z = z_0, z_1 \ldots \ldots z_n$ verschwindet.

Aus dieser $f(z)$ kann man nun nach Annahme eines beliebig kleinen positiven δ ein System von $(n+1)$ ganzen Funktionen $g_0(z)$, $g_1(z) \ldots\ldots g_n(z)$ von der in VI. angegebenen Beschaffenheit herleiten, so daß für

$$g_v(o)\, e^{z_\lambda} - g_v(z_\lambda) = \varepsilon_{\lambda v} . \delta \quad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1 \ldots\ldots n \\ v = 0, 1 \ldots\ldots n \end{pmatrix}$$

jede der Größen $\varepsilon_{\lambda v}$ dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins ist. Die Größen $g_v(z_\lambda)$ sind sämtlich algebraische Zahlen; multipliziert man jede derselben mit $a_0{}^n$, so verwandeln sich alle in g a n z e algebraische Zahlen.

Nimmt man nun δ so klein an, daß $|(p-1) a_0{}^n \delta| < 1$ ist, so ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung

$$a_0{}^n\, g_v(o) \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{z_\mu} = \sum_{\mu=0}^{p-1} a_0{}^n\, g_v(z_\mu) + \varepsilon_v, \; (v = 0, 1 \ldots\ldots n)$$

wo jede der Größen ε_v dem absoluten Betrage nach < 1 ist.

Es ist aber

$\sum_{n=0}^{p-1} a_0^{\,n}\, g_v(\xi_\mu)$ für jedes v eine symmetrische ganze Funktion der Größen $\xi_1, \ldots\ldots \xi_2 \ldots\ldots \xi_r$ mit ganzzahligen Koeffizienten; also ist die ganze algebraische Zahl

$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^{\,n}\, g_v(z_\mu)$ zugleich eine rationale, d. h. sie ist eine ganze Zahl im gewöhnlichen Sinne.

Ferner läßt sich zeigen, daß die $(n+1)$ Zahlen

$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^{\,n}\, g_v(z_\mu)$ $(v = 0,\ 1 \ldots\ldots n)$ nicht sämtlich den Wert Null haben.

Es ist nämlich $\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^{\,n} \cdot g_v(z_\mu) = \sum_{\mu=0}^{n} N_\lambda \cdot g_v(z_\lambda)$,

wo $N_0, N_1 \ldots\ldots N_n$ sämtlich positive ganze Zahlen sind; es müßte also, wenn die in Rede stehenden Zahlen alle den Wert Null hätten, die Determinante

$$|g_v(z_\lambda)| \ (\lambda,\ v = 0,\ 1 \ldots\ldots n)$$

gleich Null sein, was nicht der Fall ist. Es gibt mithin mindestens einen bestimmten Wert von v, für welchen

$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^{\,n} \cdot g_v(z_\mu)$ eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl und somit auch

$$\sum_{\mu=0}^{p-1} a_0^{\,n}\, g_v(z_\mu) + \varepsilon_v = a_0^{\,n}\, g_v(o) \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{z_\mu} = a_0^{\,n}\, g_v(o) \prod_1^r (e^{x_\lambda} + 1)$$

nicht gleich Null ist.

Daraus folgt nun unmittelbar, daß das Produkt $\prod_1^r (e^{x_\lambda} + 1)$ und somit auch jeder einzelne Faktor desselben einen von Null verschiedenen Wert hat. Damit ist jedoch dargetan, daß die Zahl πi und daher auch π selbst eine transzendente Zahl ist.

Als Corollar hiezu ergibt sich, daß die „Quadratur des Kreises" eine unlösbare Aufgabe ist, wenn verlangt wird, daß sie durch eine geometrische Konstruktion, bei der nur algebraische Kurven und Flächen zur Anwendung kommen, bewerkstelligt werde.

Durch ganz ähnliche Betrachtungen wie die vorstehenden, ist Weierstraß zu einem schon von Lindemann angeführten, jedoch nicht bewiesenen Satz von sehr allgemeinem Charakter gelangt, der die von Hermite gewonnene Erkenntnis bezüglich e in sich schließt. „Sind nämlich $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_r$ die als verschieden vorausgesetzten Wurzeln einer Gleichung $x^r + C_1 x^{r-1} + \ldots\ldots + C_r = 0$ mit rationalen Koeffizienten und $N_1, N_2 \ldots\ldots N_r$ rationale Zahlen, von denen wenigstens eine nicht Null ist, so ist die Gleichung $\sum\limits_{i=1}^{r} N_i\, e^{x_i} = 0$ unmöglich."

Dieser Satz gestattet doch wieder eine Erweiterung dahin:

„Bedeuten $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_r$ irgend r voneinander verschiedene, $X_1, X_2 \ldots\ldots X_r$ aber beliebige algebraische Zahlen, von denen wenigstens ein X nicht Null ist, dann ist die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{r} X_i\, e^{x_i} = 0 \text{ unmöglich."}$$

Wählt man z. B. $r = 2$, $X_1 = -1$, $x_2 = 0$ und ersetzt $x_1\, X_2$ durch $x_1\, X_1$, so nimmt diese unmögliche Gleichung die Form an:

$$e^x = X.$$

Diese Gleichung kann eben nicht bestehen, wenn x und X gleichzeitig algebraische Zahlen sind und $x \neq 0$ ist; demnach findet sich wieder daraus der Satz:

„Die Exponentialgröße e^x ist stets eine transzendente Zahl, wenn x eine von Null verschiedene algebraische Zahl ist."

Dieser Beweis, welchen Weierstraß im Jahre 1882 als Vereinfachung und Ergänzung des Lindemannschen geführt hat, erfuhr im Laufe der Zeit noch einige Vereinfachungen, und zwar war es zunächst David Hilbert in Königsberg, welcher im Jahre 1893 in den Göttinger Nachrichten folgenden Beweis der Transzendenz von e und π darlegte:

Man nimmt vorerst an, die Zahl e genüge einer Gleichung n^{ten} Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten:

$$a + a_1\, e + a_2\, e^2 + \ldots\ldots a_n\, e^n = 0.$$

Wird die linke Seite dieser Gleichung mit dem Integrale

$$\int_0^\infty = \int_0^\infty z^\varrho \left\{ (z-1)(z-2) \ldots\ldots (z-n) \right\}^{\varrho+1} e^{-z}.\, dz$$

multipliziert, wo ϱ eine ganze positive Zahl bedeutet, so entsteht der Ausdruck

$$a \int_0^\infty + a_1\, e \int_0^\infty + a_2\, e^2 \int_0^\infty + \ldots\ldots + a_n\, e^n \int_0^\infty, \text{ der sich}$$

in die Summe folgender beider Ausdrücke zerlegt:

$$P_1 = a \int_0^\infty + a_1\, e \int_1^\infty + a_2\, e^2 \int_2^\infty + \ldots\ldots + a_n\, e^n \int_n^\infty;$$

$$P_2 = \qquad a_1\, e \int_0^1 + a_2\, e^2 \int_0^2 + \ldots\ldots + a_n\, e^n \int_0^n.$$

Die Formel $\int_0^\infty z^\varrho\, e^{-z}\, dz = \varrho!$ zeigt, daß das $\int_0^\infty$ eine ganze rationale durch $\varrho!$ teilbare Zahl ist und ebenso leicht folgt, wenn man die Substitutionen $z = z' + 1,\ z' + 2 \ldots\ldots z' + n$ der Reihe nach anwendet, daß $e\int_1^\infty,\ e^2\int_2^\infty \ldots\ldots e^n\int_n^\infty$ ganze rationale durch $(\varrho + 1)!$ teilbare Zahlen sind.

Daher ist auch P_1 eine durch $\varrho!$ teilbare ganze Zahl, und zwar gilt die Kongruenz:

1. $\dfrac{P_1}{\varrho!} \equiv \pm a\,(n!)^{\varrho+1} \mathit{mod}\,(\varrho + 1).$

Anderseits ist, wenn mit K und k die absolut größten Werte bezeichnet werden, welche die Funktionen

$$z(z-1)(z-2)\ldots\ldots(z-n) \text{ und } (z-1)(z-2)\ldots\ldots(z-n)\,e^{-z}$$

in dem Intervalle $z = 0$ bis $z = n$ annehmen:

$$\left|\int_0^1\right| < k_0 K^\varrho,\ \left|\int_0^2\right| < 2\,k\,K^\varrho \ldots\ldots \left|\int_0^n\right| < n\,k\,.\,K^\varrho \text{ und}$$

hieraus folgt für

$K = \{\,|a_1 e| + 2\,|a_2 e^2| + \ldots\ldots + n\,|a_n e^n|\,\}\,k$ die Ungleichung

2. $|P_2| < k\,.\,K^\varrho.$

Nun bestimmt man eine ganze positive Zahl ϱ, welche erstens durch die ganze Zahl $a\,n!$ teilbar ist und für welche zweitens $k\,.\,\dfrac{K^\varrho}{\varrho!} < 1$ wird. Es ist dann $\dfrac{P_1}{\varrho!}$ wegen der Kongruenz (1) eine nicht durch $(\varrho + 1)$ teilbare und daher von Null verschiedene ganze Zahl und da außerdem $\dfrac{P_2}{\varrho!}$ wegen (2) absolut genommen kleiner als 1 wird, die Gleichung

$$\frac{P_1}{\varrho!} + \frac{P_2}{\varrho!} = \emptyset \text{ unmöglich.}$$

Man nehme nun an, π sei eine algebraische Zahl, und zwar genüge $\alpha_1 = i\pi$ einer Geichung n^{ten} Grades mit ganzzahligen Koeffizienten. Sind dann $\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ die übrigen Wurzeln dieser Gleichung, so muß, weil $1 + e^{i\pi}$ den Wert Null hat, auch der Ausdruck

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \ldots\ldots (1 + e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots\ldots e^{\beta_N} \text{ den}$$

Wert 0 haben und hierin sind die N Exponenten die Wurzeln einer Gleichung N^{ten} Grades mit ganzzahligen Koeffizienten. Sind überdies die M Exponenten $\beta_1 \ldots\ldots \beta_M$ von 0 verschieden, während die übrigen verschwinden, so sind diese die Wurzeln einer Gleichung M^{ten} Grades $f(z) = b\,z^M + b_1\ z^{M-1} + \ldots\ldots + b_M = 0$ mit ganzen rationalen

Koeffizienten, wobei insbesonders $b_M \neq 0$. Der obige Ausdruck erhält dann die Gestalt:

$a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots\ldots + e^{\beta_M}$, wo a eine ganze positive Zahl ist.

Multipliziert man diesen Ausdruck mit dem Integrale

$\int_0^\infty = \int_0^\infty z^\varrho [g(z)]^{\varrho+1} e^{-z} dz$, wo ϱ eine ganze positive Zahl bedeutet und $g(z) = b^M . f(z)$ ist, so ergibt sich uns

$a\int_0^\infty + e^{\beta_1}\int_0^\infty + e^{\beta_2}\int_0^\infty + \ldots\ldots + e^{\beta_M}\int_0^\infty$, was sich in die Summe zerlegt von

$$P_1 = a\int_0^\infty + e^{\beta_1}\int_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2}\int_{\beta_2}^\infty + \ldots\ldots + e^{\beta_M}\int_{\beta_M}^\infty$$

$$P_2 = \qquad e^{\beta_1}\int_0^{\beta_1} + e^{\beta_2}\int_0^{\beta_2} + \ldots\ldots + e^{\beta_M}\int_0^{\beta_M};$$

dabei ist allgemein das $\int_{\beta_i}^\infty$ in der komplexen z-Ebene vom Punkte $z = \beta_i$ längs einer zur Achse der reellen Zahlen parallelen Geraden bis zu $z = +\infty$ hin und das $\int_0^{\beta_i}$ vom Punkte $z = 0$ längs der geraden Verbindungslinie bis sum Punkte $z = \beta_i$ hin zu erstrecken.

Das $\int_0^\infty$ ist wieder gleich einer ganzen rationalen durch $\varrho!$ teilbaren Zahl, und zwar gilt die Kongruenz:

$$\frac{1}{\varrho!}\int_0^\infty \equiv b^{\varrho M + M} . b_M^{\varrho+1} \, mod\,(\varrho + 1).$$

Mittels der Substitution $z = z' + \beta_i$ und wegen $g(\beta_i) = 0$ ergibt sich

$$e^{\beta_i}\int_{\beta_i}^\infty = \int_0^\infty (z' + \beta_i)^\varrho \{g(z' + \beta_i)\}^{\varrho+1} e^{-z'} dz = (\varrho + 1)!\, G(\beta_i),$$

wo $G(\beta_i)$ eine ganze ganzzahlige Funktion von β_i bedeutet, deren Grad in β_i unter $\varrho M + M$ bleibt und deren Koeffizienten sämtlich durch $b^{\varrho M + M}$ teilbar sind. Da $\beta_1 \ldots\ldots \beta_M$ die Wurzeln der ganzzahligen Gleichung $f(z) = 0$ sind und durch Multiplikation mit b zu ganzen algebraischen Zahlen werden, so ist

$G(\beta_1) + G(\beta_2) + \ldots + G(\beta_M)$ notwendig eine ganze rationale Zahl.

Hieraus folgt, daß P_1 gleich einer ganzen rationalen durch $\varrho!$ teilbaren Zahl wird, und zwar gilt

3. $\frac{P_1}{\varrho!} \equiv a\, b^{\varrho M + M} . b_M^{\varrho+1} \, mod\,(\varrho + 1)$.

Anderseits ist, mit K und k die größten absoluten Beträge bezeichnet, welche $z . g(z)$ und $g(z) e^{-z}$ auf den geradlinigen Integrationsstrecken zwischen $z=0$ und $z=\beta_i$ annehmen

$$\left|\int_0^{\beta_i}\right| < \left|\beta_i\right| k . K^{\varrho} \quad (i=1,\ 2 \ldots\ldots M)$$

und hieraus folgt für

$$K = \{ |\beta_1 e^{\beta_1}| + |\beta_2 e^{\beta_2}| + \ldots\ldots + |\beta_M e^{\beta_M}| \} k$$

die Ungleichung

4. $|P_2| < k K^{\varrho}$.

Nun bestimmt man eine ganze positive Zahl ϱ, welche erstens durch $a\, b\, b_M$ teilbar ist und für welche zweitens $k \dfrac{K^{\varrho}}{\varrho!} < 1$ wird. Es ist dann $\dfrac{P_1}{\varrho!}$ wegen (3) eine nicht durch $(\varrho + 1)$ teilbare und daher notwendig von Null verschiedene Zahl und da überdies $\dfrac{P_2}{\varrho!}$ infolge der Ungleichung (4) absolut genommen kleiner als 1 wird, so ist die Gleichung

$$\frac{P_1}{\varrho!} + \frac{P_2}{\varrho!} = 0 \text{ unmöglich.}$$

Hiemit ist jedoch die Transzendenz von e und π erwiesen.

Eine Modifikation des oben geführten Hilbertschen Beweises versuchte noch im Jahre 1893 A. Hurwitz in Zürich, wobei er die Benützung von Integralen vermeidet. Kurze Zeit nach ihm, ja fast gleichzeitig gab P. Gordan in Erlangen eine Abänderung jenes Beweises, indem er nur die bekannte Reihenentwicklung der Funktion e^x benützte; aber auch diese Form des Beweises erfuhr in späterer Zeit eine leichte Vereinfachung durch V. Jamel. Schließlich gab Th. Valen einen rein arithmetisch-algebraischen Beweis des Lindemannschen Satzes, der sich jedoch von dem durch Gordan geführten nicht wesentlich unterscheidet.