Ein Beitrag zur Centralprojection der Kegelschnittslinien.

Von

W. v. Miorini.

(Mit einer Figur im Texte.)

In der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht von J. C. V. Hoffmann, 8. Heft vom 24. Jänner 1901, pag. 595 ff., hat Herr Prof. Dr. G. Majcen unter dem Titel: „Ein Beitrag zur projectiven Behandlung der Centralprojection“ eine Abhandlung veröffentlicht, welche die Lösung der Aufgabe zum Gegenstande hat, den geometrischen Ort sämmtlicher Projectionscentren zu bestimmen, aus welchen ein gegen die Bildebene geneigter Kreis auf diese als Kreis projiciert wird. Als Resultat ergibt sich eine gleichseitige Hyperbel, deren Ebene durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht und auf der Schnittlinie der Bildebene mit der Ebene des gegebenen Kreises normal steht. Die Ableitung dieses Ortes gründet sich auf bestimmte Eigenschaften der Kegelschnittsbüschel und der Curven dritter Ordnung.

Durch diese Abhandlung wurde der Verfasser der vorliegenden Zeilen angeregt, die erwähnte Aufgabe zu erweitern und unter Benützung der bekanntesten Sätze der neueren Geometrie, insbesondere der Sätze über Kegelschnittsbüschel, die folgende allgemeinere Aufgabe zur Auflösung zu bringen.

Gegeben ist ein fester Kegelschnitt K, eine zur Ebene ε von K nicht parallele Ebene α und in dieser ein Kegelschnitt k; es ist der geometrische Ort K_0 aller Projectionscentren O_i zu bestimmen, aus welchen K auf die Ebene α als ein zu k homothetischer Kegelschnitt k_i projiciert wird.

Im Sinne der gestellten Aufgabe ist es ohneweiters klar, dass der gegebene Kegelschnitt K — sieh die Figur — zu jedem der Kegelschnitte k_i ($i = 1, 2, 3, \ldots\ldots$) perspectivisch collinear liegt für das betreffende Projectionscentrum O_i als Collineationscentrum und für die Schnittlinie g der Ebenen ε und α als Achse, und wir können, ohne die Allgemeingiltigkeit der folgenden Betrachtungen einzuschränken, annehmen, dass der Kegelschnitt K die Ebene α in zwei reellen, auf g liegenden Punkten $\triangle$ und $\triangle_1$ schneidet. Wenn die Punkte $\triangle$ und $\triangle_1$ imaginär sind, so kann immer

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

eine zu α parallele Ebene (α) eingeführt werden, in welcher sich reelle Schnittpunkte ergeben. Ist nun die Projection von K aus dem Centrum O_i auf (α) ein zu k homothetischer Kegelschnitt, so ist offenbar auch die Projection von K aus O_i auf α zu k homothetisch, und der geometrische Ort K_0 der Centren O_i erfüllt sowohl für (α) als auch für α die gestellte Bedingung. Die Schnittpunkte $\triangle$ und $\triangle_1$ von K mit α können als Schnittpunkte von g mit K linear bestimmt werden.

Wir denken uns nun in α durch $\triangle$ und $\triangle_1$ einen zu k homothetischen Kegelschnitt k_i construiert. Es gibt unendlich viele solcher Kegelschnitte; sie bilden ein Kegelschnittsbüschel, denn alle Kegelschnitte k_i haben auf der unendlich fernen Geraden u von α zwei reelle oder imaginäre Punkte gemeinschaftlich, nämlich die Doppelpunkte der in Bezug auf alle k_i gemeinschaftlich conjugierten Punkte von u.

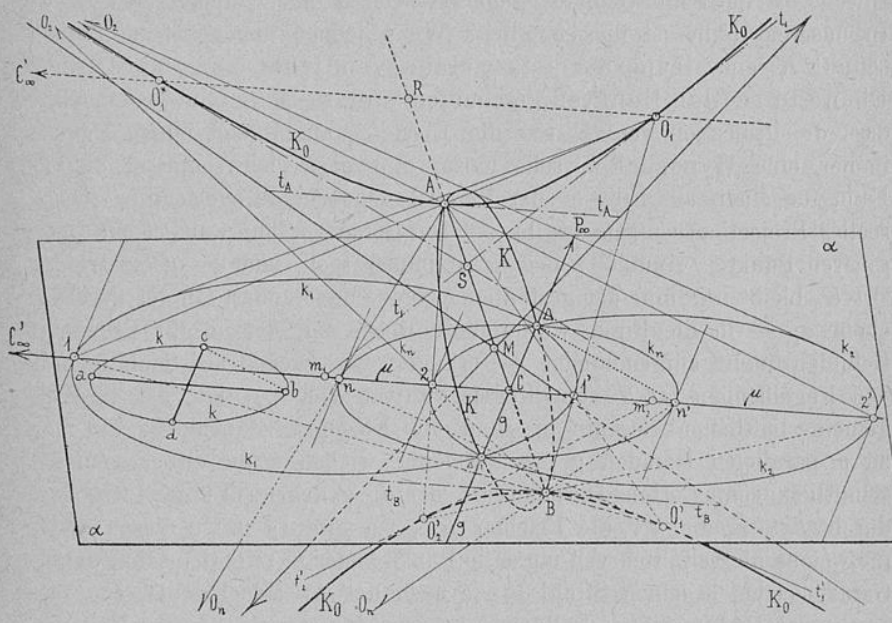
Die Mittelpunkte aller Curven eines Kegelschnittsbüschels, das eine im Unendlichen liegende gemeinschaftliche Secante hat, liegen auf einer Geraden, nämlich auf der Polaren des unendlich fernen Punktes derjenigen gemeinschaftlichen Secanten, welche die Curven des Kegelschnittsbüschels außer jener unendlich fernen noch gemeinschaftlich haben müssen. Übertragen wir diesen aus der Theorie der Kegelschnittsbüschel bekannten Satz auf unseren Fall, so ergibt sich: Die Mittelpunkte m_i aller Kegelschnitte k_i mit der gemeinschaftlichen Secanten g liegen auf der Geraden μ, der Polaren des unendlich fernen Punktes P_∞ von g in Bezug auf alle k_i. Auf dieser Polaren μ liegen somit alle zu g conjugierten Durchmesser $i\,i'$ der k_i, und der Strahl μ enthält sowohl den Halbierungspunkt C der Strecke $\triangle\,\triangle_1$ als auch die Berührungspunkte i und i' $(i = 1, 2, 3 \ldots)$ der parallel zu g an die k_i geführten Tangenten. g und μ sind auch in Bezug auf k conjugiert; um den Strahl μ auf einfachste Art zu erhalten, ist es also nur nöthig, den zu g conjugierten Durchmesser $a\,b$ von k zu bestimmen und durch C die Parallele zu $a\,b$ zu ziehen.

Durch zwei in verschiedenen Ebenen gelegene Kegelschnitte, welche eine gemeinschaftliche Secante besitzen, lässt sich immer eine Fläche zweiter Ordnung hindurchlegen. Aus diesem Grunde bestimmen in unserem Falle die Kegelschnittspaare K und k_i ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung F_i, welche den Kegelschnitt K gemeinschaftlich haben. Greifen wir auf einer der Flächen F_i den Kegelschnitt k_i heraus und denken uns durch die beiden auf F_i liegenden Curven K und k_i die zwei Verbindungskegelflächen $(K\,k_i)$ gelegt, so sind die Spitzen O_i und O_i' dieser Kegelflächen zwei von den gesuchten Projectionscentren. Um diese Kegelspitzen auf möglichst einfache Art zu bestimmen, schlagen wir folgenden Weg ein:

Auf dem Verbindungsstrahle g der Punkte $\triangle$ und $\triangle_1$ nehmen wir einen beliebigen Punkt P an — in der Figur nicht eingezeichnet — und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ziehen an die beiden auf F_i liegenden Kegelschnitte K und k_i die Tangenten; die Berührungspunkte derselben liegen in der Polarebene von P in Bezug auf F_i. Diese Polarebene enthält bekanntlich auch die Spitzen O_i und O_i' der beiden erwähnten Kegelflächen, und diese Centren O_i und O_i' ergeben sich, wenn man die Berührungspunkte der durch P an K und k_i geführten Tangenten entsprechend verbindet und diese Verbindungslinien zum Schnitt bringt. Lässt man P mit dem unendlich fernen Punkte P_∞ von g zusammenfallen, so geht die Polarebene von P in die zu g conjugierte Durchmesserebene π von F_i über; diese Polarebene enthält den zu g conjugierten Durchmesser $i\,i'$ von k_i und auch den zu g conjugierten Durch-



messer AB von K und ist somit bestimmt durch die Geraden AB und μ. Die Projectionscentren O_i und O_i' liegen in dieser Ebene π. Nachdem π die zur Geraden g in Bezug auf alle F_i gemeinschaftlich conjugierte Durchmesserebene ist, so muss der Ort K_0 der Centren O_i ein ebenes Gebilde sein. Diese Centren werden erhalten, wenn man parallel zu g an K die Tangenten legt, die Berührungspunkte A und B derselben ausmittelt und diese mit den Schnittpunktpaaren i und i', in welchen μ die k_i schneidet, verbindet, und endlich die Strahlen A_i mit Bi' und Ai' mit Bi zum Schnitt bringt.

Jedes Punktpaar i und i' ergibt zwei Centren $O_i = (Ai,\ Bi')$, $O_i' = (Ai',\ Bi)$ — in der Figur sind die Punkte und Strahlen für $i = 1, 2$ eingezeichnet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es kann nun sehr leicht bewiesen werden, dass der geometrische Ort K_0 der Projectionscentren O_i eine Kegelschnittslinie ist.

Die Schnittpunkte irgend einer Geraden mit den Curven eines Kegelschnittsbüschels bilden eine involutorische Punktreihe. In unserem Falle ist also die Punktreihe $i\,i'$ $(i = 1, 2, 3 \ldots)$ involutorisch. Entsprechende Punkte sind die Schnittpunkte eines Kegelschnittes k_i mit μ. Die Strahlenbüschel Ai und Bi', bzw. Ai' und Bi bilden wegen $i \;\overline{\wedge}\; i'$ zwei in der Ebene π liegende projectivische Strahlenbüschel, deren Erzeugnis bekanntlich ein Kegelschnitt, der geometrische Ort K_0 der Centren O_i ist.

Verschieben wir nun die Ebene α parallel zu sich selbst nach α_1 soweit, bis die Schnittpunkte $\triangle$ und $\triangle_1$ von K mit α_1 imaginär werden. In unserem Falle ist dies möglich. Wenn jedoch der gegebene Kegelschnitt K eine Hyperbel ist, welche von jeder zu α parallelen Ebene in reellen Punkten geschnitten wird, so ist es ohneweiters klar, dass die Projection von K auf die Ebene α aus irgend einem Punkte immer eine Hyperbel k_i sein muss, und dass sich somit in diesem Falle für einen als Ellipse oder Parabel gegebenen Kegelschnitt k kein reelles Projectionscentrum ergibt. — Die Gerade g, auf welcher die imaginären Punkte $\triangle$ und $\triangle_1$ liegen, ist immer reell, und der geometrische Ort K_0 bleibt im Sinne der gestellten Aufgabe unverändert. In der Parallelebene α_1 — in die Figur wurde diese Ebene mit den in ihr liegenden Gebilden nicht aufgenommen — erhalten wir wieder als Schnitte mit den Kegelflächen $(O_i K)$ ein Kegelschnittsbüschel $k_{1,i}$ mit der ideellen gemeinschaftlichen Secante g_1, und die Ebene π schneidet α_1 in der zu μ parallelen Geraden μ_1, auf welcher wie in α die zu g_1 gemeinschaftlich conjugierten Durchmesser der $k_{1,i}$ liegen. Führen wir nun durch K und die $k_{1,i}$ die Flächen $F_{1,i}$, so gibt es unter diesen zwei, für welche die Schnittcurven mit α_1 in Punkte, oder in zwei sich schneidende Geraden oder in einen Strahl — je nach der Art der Flächen $F_{1,i}$ — degenerieren. Für diesen Fall wird $k_{1,i}$ zur Indicatrix, wie man aus der Coincidenz von i und i' erkennt. Diese Berührungspunkte sind somit die Doppelpunkte D_1 und D_1' der auf μ_1 liegenden Involution $i_1\,i_1'$, gehören also auch zum Büschel der k_1, i; das Centrum der Involution ist der Schnittpunkt C_1 von g_1 mit μ_1, und es ist bekanntlich $C_1\,D_1 = C_1\,D_1'$. Der Kegelschnitt K_0 enthält jedenfalls die Doppelpunkte D_1 und D_1', sie sind somit die Schnittpunkte von K_0 mit α_1; für die Ebene α sind diese Punkte imaginär. Der Verbindungskegel von K mit der Indicatrix D_1, bzw. D_1', hat seine Spitze in D_1, bzw. D_1', somit gehören die Punkte D_1 und D_1' dem Kegeschnitt K_0 an. — $A\,B$ ist ein Durchmesser von K; die Punkte A und B gehören als Mittelpunkte der beiden den Kegelschnitt K_0 erzeugenden projectivischen Strahlenbüschel Ai und Bi' auch dem Kegelschnitt K_0 an. Weil nun $A\,B$ in der Verlängerung durch C_1

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

hindurchgeht und $C_1 D_1 = C_1 D_1'$, so müssen die Tangenten t_A und t_B in A und B an K_0 parallel zu μ sein. Auch ist zu bemerken, dass K und K_0 concentrisch sind.

Der Nachweis, dass die Tangenten t_A und t_B parallel zu μ liegen, gelingt übrigens auch einfacher ohne Benützung der Parallelebene α_1 auf folgende Weise:

Der Punkt C in α ist das Involutionscentrum von $i i'$; ihm ist bekanntlich der unendlich ferne Punkt $C'\infty$ von μ conjugiert. Dem Strahle $A C$ des Strahlenbüschels $A i$ entspricht somit der Strahl $A C'\infty$ von Bi', und weil dem Strahle AB in dem einen Büschel die Tangente an K_0 im andern entspricht, so sind t_A und t_B zu μ parallel.

Erwähnenswert ist, dass g auch zum Büschel der k_i gehört; F_i degeneriert in diesem Falle in die Ebene ε von K, und aus dieser Auffassung fließt unmittelbar die Erkenntnis, dass die Punkte A und B als Projectionscentren aufzufassen sind und somit auf K_0 liegen.

Um nun auch die Tangenten in einem beliebigen Punkte O_i von K_0 direct construieren zu können, stellen wir folgende Betrachtung an:

Zieht man in der Ebene von K_0, beispielsweise durch O_1 — sieh die Figur — eine zu μ parallele Gerade, welche K_0 in den beiden Punkten O_1 und $O_1{}^*$ schneidet, so treffen sich bekanntlich die Tangenten in O_1 und $O_1{}^*$ an K_0 in einem Punkte S des zu $O_1\, O_1{}^*$ conjugierten Durchmessers $A B$ von K_0. Bezeichnet man den Schnittpunkt des Strahles $O_1\, O_1{}^*$ mit AB durch R, so ist die Punktreihe $(R A S B)$ harmonisch. Projiciert man diese Reihe aus O_1 auf die Gerade μ in α, so erhält man die Punktreihe $(C'\infty\, 1\, m_1\, 1')$, die wieder harmonisch ist; weil nun der Punkt $C'\infty$ als Projection von R wegen des Parallelismus von $O_1\, O_1{}^*$ und μ ins Unendliche fällt, so ist $1\, m_1 = m_1\, 1'$ und somit die Projection m_1 von S der Mittelpunkt von k_1. Was für den Punkt O_1 gilt, gilt auch für jeden beliebigen Punkt O_i von K_0, und wir erhalten den Satz:

Die Tangente t_i in O_i an K_0 geht durch den Mittelpunkt m_i von k_i.

Aus diesem Satze ergibt sich unmittelbar die bereits oben erwähnte Thatsache, dass die Tangenten t_A und t_B in A und B an K_0 zu μ parallel sind.

Bei der Construction von K_0 ist es nicht nöthig, mehrere zu k homothetische Kegelschnitte k_i zu zeichnen. Es genügt, einen solchen Kegelschnitt, oder vielmehr nur dessen Schnittpunkte i und i' mit μ auszumitteln; denn aus den conjugierten Punkten i und i' und aus dem Involutionscentrum C lässt sich ohneweiters zu einem beliebigen, zweckentsprechend gewählten Punkte x der involutorisch conjugierte x' aus der Relation $Cx\, .\, Cx' = Ci\, .\, Ci'$ bestimmen.

Um den Kegelschnitt K_0 in allen Fällen leicht construieren zu können, mögen hier noch folgende Bemerkungen Aufnahme finden:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sucht man den zu g conjugierten Durchmesser AB von K und ferner den zu g parallelen Durchmesser cd und den hiezu conjugierten ab von k und zieht durch den Schnittpunkt C von AB mit α den Strahl $\mu \parallel ab$, so ist die Ebene π von K_0 bestimmt durch μ und AB. Die Tangenten t_A und t_B in A und B an K_0 sind parallel zu μ, und AB bildet somit einen Durchmesser von K und K_0; beide Kegelschnitte haben also denselben Mittelpunkt. Zu den vier Bestimmungsstücken t_A, t_B, A, B von K_0 lässt sich leicht ein fünftes ausmitteln, wodurch dann K_0 vollkommen bestimmt ist. Ein Punkt O_i von K_0 ergibt sich im Schnittpunkte der Strahlen Ai und Bi'. Die Tangente t_i in O_i an K_0 geht durch den Halbierungspunkt m_i der Strecke ii'. — Zur Construction zweier involutorisch conjugierter Punkte i und i' empfiehlt es sich mit Bezug auf die graphische Durchführung der Aufgabe aus dem Büschel der k_i jenen Kegelschnitt k_n herauszugreifen, für welchen $\triangle \triangle_1$ ein Durchmesser wird, weil dann die Schnittpunkte n und n' von k_n mit μ sich wegen der Homothetie von k und k_n aus den Beziehungen $ab : cd = nn' : \triangle \triangle'$ und $Cn = Cn'$ auf außerordentlich einfache Weise ergeben, wenn man zu dem Strahle cb durch $\triangle_1$ die Parallele $\triangle_1 n$ zieht u. s. w. Sollten die aus n und n' abgeleiteten Centren O_n und O_n' eine ungünstige Lage aufweisen oder ungenau ausfallen, so können aus n und n' mittelst der Gleichung $Ci \,.\, Ci' = Cn^2 = Cn'^2$ leicht andere Punkte bestimmt werden. Ist der geometrische Ort K_0 eine Ellipse, so ist es wohl vortheilhaft, den zu AB conjugierten Durchmesser von K_0 zu ermitteln; dieser geht durch M und liegt parallel zu μ; seine Endpunkte ergeben sich als Doppelpunkte jener Involution, welche die Strahlenbüschel Ai und Bi' auf ihm ausschneiden. Sind diese Doppelpunkte reell, so ist K_0 eine Ellipse; sind sie imaginär, so wird K_0 eine Hyperbel. Im letzteren Falle ist es immer angezeigt, die Asymptoten zu bestimmen. Diese sind bekanntlich die Doppelstrahlen zweier concentrischer projectivischer Büschel, deren Strahlen durch M gehen und zu den Strahlen Ai und Bi', bzw. Ai' und Bi parallel laufen. Erwähnenswert ist auch, dass im Falle der Existenz reeller Asymptoten von K_0 diese Asymptoten auch ohne Benützung der eben erwähnten concentrischen projectivischen Büschel gefunden werden können. Befinden sich nämlich zwei conjugierte Punkte der Involution ii' in solcher Lage, dass Ax und Bx' parallel sind, so rückt O_x in die Unendlichkeit, und man erhält in diesem Punkte O_x die Richtung der einen Asymptote von K_0. Ist aber $Ax \parallel Bx'$, so

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

steht $Cx : Cx' = CA : CB$. Hiezu gesellt sich noch die aus der involutorischen Beziehung fließende Gleichung: $Cx . Cx' = Cn . Cn'$. Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Wurzelpaare Cx, Cx' und Cy, Cy', u. zw.:

$$Cx = \sqrt{\frac{CA . Cn . Cn'}{CB}} = - Cy,$$

$$Cx' = \sqrt{\frac{CB . Cn . Cn'}{CA}} = - Cy'.$$

Man erkennt, dass für diese Punkte x und x' $Ax \parallel Bx'$ und $Ay' \parallel By$ wird; es ergeben sich hiedurch die unendlich fernen Punkte von K_0, also jene Projectionscentren Ox und Ox', für welche die projicierenden Kegel $(O K)$ in Cylinder übergehen. Damit erscheint auch die Aufgabe gelöst:

Für einen festen Kegelschnitt K und eine feste Ebene α die Richtung der Erzeugenden jener projicierenden Cylinderfläche zu bestimmen, durch welche K auf α als ein zu einem gegebenen Kegelschnitt k homothetischer Kegelschnitt projiciert wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf