Die kürzeste Linie auf dem Paraboloid.

Die Gleichung konfokaler Paraboloide kann in der Form geschrieben werden:

$$1) \qquad f(\lambda) = \frac{x^2}{a_1 + \lambda} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda} - 2z - \lambda = 0$$

Setzen wir voraus, es sei $a_1 > a_2$, und geben wir dem Parameter λ Werte grösser als $-a_2$, dann stellt diese Gleichung elliptische Paraboloide dar, deren Achse die z-Achse ist, deren Scheitel auf der z-Achse liegen und die nach der positiven z-Achse hin offen sind. Liegt dagegen der Wert des Parameters λ zwischen $-a_2$ und $-a_1$, so bestimmt diese Gleichung hyperbolische Paraboloide, deren Achse die z-Achse ist und deren Scheitel auf der negativen z-Achse liegen. Besitzt endlich der Parameter λ Werte kleiner als $-a_1$, so stellt diese Gleichung wieder elliptische Paraboloide dar, die aber nach der negativen z-Achse hin offen sind.

Betrachten wir daher $f(\lambda) = 0$ als eine kubische Gleichung für λ, und bezeichnen wir ihre drei Wurzeln, die sämtlich reell sind, mit

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3,$$

so sind ihre Intervalle bestimmt durch

$$+\infty > \lambda_1 > -a_2 > \lambda_2 > -a_1 > \lambda_3 > -\infty$$

Es ist dann

$f(\lambda_1) = 0$ die Gleichung eines positiven elliptischen Paraboloids,
$f(\lambda_2) = 0$ die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloids,
$f(\lambda_3) = 0$ die Gleichung eines negativen elliptischen Paraboloids.

Um aus diesen drei Gleichungen $x\ y\ z$ als Funktionen von $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ zu bestimmen, könnten wir $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ in die Gleichung 1) einsetzen und das System

$$\frac{x^2}{a_1 + \lambda_k} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda_k} - 2z - \lambda_k = 0 \qquad k = 1, 2, 3$$

nach x y z auflösen. Wir können aber auch sagen, da $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ Wurzeln der Gleichung 1) sind, dass in Bezug auf λ die identische Gleichung gelten muss

$$2)\qquad \frac{x^2}{a_1+\lambda}+\frac{y^2}{a_2+\lambda}-2z-\lambda=\frac{(\lambda_1-\lambda)\,(\lambda_2-\lambda)\,(\lambda_3-\lambda)}{(a_1+\lambda)\,(a_2+\lambda)}$$

Multiplizieren wir auf beiden Seiten mit $a_1+\lambda$ und setzen dann $\lambda=-a_1$, so erhalten wir

$$x^2=\frac{(\lambda_1+a_1)\,(\lambda_2+a_1)\,(\lambda_3+a_1)}{a_2-a_1}$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich

$$y^2=\frac{(\lambda_1+a_2)\,(\lambda_2+a_2)\,(\lambda_3+a_2)}{a_1-a_2}$$

Setzen wir in

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda_1}+\frac{y^2}{a_2+\lambda_1}-2z-\lambda_1=0$$

die für x^2 und y^2 gefundenen Werte ein, so folgt:

$$2z=-(\lambda_1+\lambda_2+a_2+\lambda_3+a_1)$$

Soll nun die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten, die auf einer gegebenen Fläche liegen, gefunden werden, so muss für den Bogen s

$$\delta s=0$$

sein. Es ist aber

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

Aus den Gleichungen

$$3)\qquad \begin{aligned} x^2&=\frac{(\lambda_1+a_1)\,(\lambda_2+a_1)\,(\lambda_3+a_1)}{a_2-a_1}\\ y^2&=\frac{(\lambda_1+a_2)\,(\lambda_2+a_2)\,(\lambda_3+a_2)}{a_1-a_2}\\ 2z&=-(\lambda_1+\lambda_2+a_1+\lambda_3+a_2)\end{aligned}$$

bestimmen wir die Differentiale dx und dy durch Differentiation der Logarithmen der beiden ersten Gleichungen und dz durch Differentiation der dritten Gleichung, wir erhalten

$$4)\qquad \begin{aligned} \frac{2\,dx}{x}&=\frac{d\lambda_1}{\lambda_1+a_1}+\frac{d\lambda_2}{\lambda_2+a_1}+\frac{d\lambda_3}{\lambda_3+a_1}\\ \frac{2\,dy}{y}&=\frac{d\lambda_1}{\lambda_1+a_2}+\frac{d\lambda_2}{\lambda_2+a_2}+\frac{d\lambda_3}{\lambda_3+a_2}\\ 2\,dz&=-(d\lambda_1+d\lambda_2+d\lambda_3)\end{aligned}$$

Das vierfache Quadrat des Bogenelements ds wird demnach:

$$\begin{aligned} 4\,ds^2=\,&d\lambda_1^2\left(\frac{x^2}{(\lambda_1+a_1)^2}+\frac{y^2}{(\lambda_1+a_2)^2}+1\right)\\ &+d\lambda_2^2\left(\frac{x^2}{(\lambda_2+a_1)^2}+\frac{y^2}{(\lambda_2+a_2)^2}+1\right)\end{aligned}$$

$$+ d\lambda_3^2 \left(\frac{x^2}{(\lambda_3 + a_1)^2} + \frac{y^2}{(\lambda_3 + a_2)^2} + 1 \right)$$

$$+ 2\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \left(\frac{x^2}{(\lambda_1 + a_1)\,(\lambda_2 + a_1)} + \frac{y^2}{(\lambda_1 + a_2)\,(\lambda_2 + a_2)} + 1 \right)$$

$$+ 2\, d\lambda_1\, d\lambda_3 \left(\frac{x^2}{(\lambda_1 + a_1)\,(\lambda_3 + a_1)} + \frac{y^2}{(\lambda_1 + a_2)\,(\lambda_3 + a_2)} + 1 \right)$$

$$+ 2\, d\lambda_2\, d\lambda_3 \left(\frac{x^2}{(\lambda_2 + a_1)\,(\lambda_3 + a_1)} + \frac{y_2}{(\lambda_2 + a_2)\,(\lambda_3 + a_2)} + 1 \right)$$

Greifen wir aus dem Flächensystem 1. die Flächen heraus:

$$\frac{x^2}{\lambda_1 + a_1} + \frac{y^2}{\lambda_1 + a_2} - 2z - \lambda_1 = 0$$

und

$$\frac{x^2}{\lambda_2 + a_1} + \frac{y^2}{\lambda_2 + a_2} - 2z - \lambda_2 = 0$$

so ergiebt die Subtraktion:

$$\frac{x_2}{(\lambda_1 + a_1)\,(\lambda_2 + a_1)} + \frac{y^2}{(\lambda_1 + a_2)\,(\lambda_2 + a_2)} + 1 = 0$$

d. h. der Koeffizient von $2\, d\lambda_1\, d\lambda_2$ ist Null. In ähnlicher Weise folgt, dass auch die Koeffizienten von $2\, d\lambda_1\, d\lambda_3$ und $2\, d\lambda_2\, d\lambda_3$ verschwinden müssen.

Auch aus den Gleichungen 3) würde sich sofort ergeben:

$$\frac{x^2}{(\lambda_1 + a_1)\,(\lambda_2 + a_1)} + \frac{y^2}{(\lambda_1 + a_2)\,(\lambda_2 + a_2)} + 1 = \frac{\lambda_3 + a_1}{a_2 - a_1} + \frac{\lambda_3 + a_2}{a_1 - a_2} + 1 = 0$$

und entsprechend für die beiden anderen Koeffizienten.

Differenzieren wir die Gleichung 2 nach λ und setzen darauf bez. $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$, so erhalten wir

$$\frac{x^2}{(\lambda_1 + a_1)^2} + \frac{y^2}{(\lambda_1 + a_2)^2} + 1 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\,(\lambda_3 - \lambda_2)}{(a_1 + \lambda_1)\,(a_2 + \lambda_1)}$$

$$\frac{x^2}{(\lambda_2 + a_1)^2} + \frac{y^2}{(\lambda_2 + a_2)^2} + 1 = \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)\,(\lambda_1 - \lambda_2)}{(a_1 + \lambda_2)\,(a_2 + \lambda_2)}$$

$$\frac{x^2}{(\lambda_3 + a_1)^2} + \frac{y^2}{(\lambda_3 + a_2)^2} + 1 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)\,(\lambda_2 - \lambda_3)}{(a^1 + \lambda_3)\,(a_2 + \lambda_3)}$$

und daher:

$$4\, ds^2 = d\lambda_1^2\, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\,(\lambda_3 - \lambda_1)}{(\lambda_1 + a_1)\,(\lambda_1 + a_2)} + d\lambda_2^2\, \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)\,(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_2 + a_1)\,(\lambda_2 + a_2)} + d\lambda_3^2\, \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)\,(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_3 + a_1)\,(\lambda_3 + a_2)}$$

Für das positive elliptische Paraboloid ist λ_1 konstant, demnach $d\lambda_1 = 0$ und

5) $$ds^2 = d\lambda_2^2\, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\,(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_2 + a_1)\,(\lambda_2 + a_2)} + d\lambda_3^2\, \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)\,(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_3 + a_1)\,(\lambda_3 + a_2)}$$

Es soll nun s oder $\int ds$ ein Minimum werden. Diese Forderung ist dieselbe, die erfüllt werden muss, wenn die Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes bestimmt werden soll, der sich infolge eines anfänglichen Stosses auf einer gegebenen Oberfläche bewegt, ohne dass andere Kräfte auf ihn einwirken. Jacobi hat in seinen Vorlesungen über Dynamik in dieser Weise die Bestimmung der kürzesten Linie auf dem dreiachsigen Ellipsoid durchgeführt. Nach seinem Vorgange drücken wir die lebendige Kraft T durch λ_2, λ_3, $\lambda'_2 = \frac{d\lambda_2}{dt}$, $\lambda'_3 = \frac{d\lambda_3}{dt}$ aus und erhalten für 2T die Formel:

$$2\,T = \frac{1}{4}\,(M_2\,\lambda'^2_2 + M_3\,\lambda'^2_3)$$

wobei $$M_2 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\,(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_2 + a_1)\,(\lambda_2 + a_2)}, \qquad M_3 = \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)\,(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_3 + a_1)\,(\lambda_3 + a_2)}$$

Hieraus bilden wir:

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda'_2} = \frac{1}{4}\,M_2\,\lambda'_2 = \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \lambda'_3} = \frac{1}{4}\,M_3\,\lambda'_3 = \frac{\partial W}{\partial \lambda_3}$$

$$\lambda'_2 = \frac{4}{M_2}\,\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}, \qquad \lambda'_3 = \frac{4}{M_3}\,\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}$$

$$2\,T = \frac{4}{M_2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 + \frac{4}{M_3}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2$$

Die Gleichung $$T = h$$

liefert demnach die partielle Differentialgleichung

$$T = \frac{2\,(\lambda_2 + a_1)\,(\lambda_2 + a_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)\,(\lambda_2 - \lambda_3)}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 + 2\,\frac{(\lambda_3 + a_1)\,(\lambda_3 + a_2)}{(\lambda_3 - \lambda_1)\,(\lambda_3 - \lambda_2)}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2 = h$$

oder 6) $$\frac{(\lambda_2 + a_1)\,(\lambda_2 + a_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 - \frac{(\lambda_3 + a_1)\,(\lambda_3 + a_2)}{\lambda_3 - \lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2 = \frac{1}{2}\,h\,(\lambda_2 - \lambda_3)$$

Diese partielle Differentialgleichung zerfällt in die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{(\lambda_2 + a_1)\,(\lambda_2 + a_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 = \frac{h}{2}\,(\lambda_2 + \beta)$$

$$\frac{(\lambda_3 + a_1)\,(\lambda_3 + a_2)}{\lambda_3 - \lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2 = \frac{h}{2}\,(\lambda_3 + \beta)$$

Die Konstante β ist, da $\frac{h}{2}\,(\lambda_2 + \beta)$ positiv, $\frac{h}{2}\,(\lambda_3 + \beta)$ negativ, h aber positiv sein muss, an die Bedingung gebunden

$$\lambda_2 + \beta > 0 \quad , \quad \lambda_3 + \beta < 0$$

$$-\lambda_2 < \beta < -\lambda_3$$

Als vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung 6) ergiebt sich nun:

$$W = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,h}\left\{\int d\lambda_2 \sqrt{\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\,(\lambda_2 + \beta)}{(\lambda_2 + a_1)\,(\lambda_2 + a_2)}} + \int d\lambda_3 \sqrt{\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)\,(\lambda_3 + \beta)}{(\lambda_3 + a_1)\,(\lambda_3 + a_2)}}\right\}$$

Hieraus erhalten wir die Gleichung der kürzesten Linie, wenn wir $\frac{\partial W}{\partial \beta}$ = const. setzen; es ist aber

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,h}\left\{\int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(\lambda_2 + a_1)\,(\lambda_2 + a_2)\,(\lambda_2 + \beta)}} + \int d\lambda_3 \sqrt{\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{(\lambda_3 + a_1)\,(\lambda_3 + a_2)\,(\lambda_3 + \beta)}}\right\}$$

und daher die Gleichung der kürzesten Linie auf dem elliptischen Paraboloid

$$\text{const} = \int^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{\frac{\lambda - \lambda_1}{(\lambda + a_1)\,(\lambda + a_2)\,(\lambda + \beta)}} + \int^{\lambda_3} d\lambda \sqrt{\frac{\lambda - \lambda_1}{(\lambda + a_1)\,(\lambda + a_2)\,(\lambda + \beta)}}$$

Für den Bogen s der kürzesten Linie leitet Jacobi die Beziehung ab

$$s = \frac{1}{\sqrt{2h}}\,W$$

und demnach erhalten wir für die Länge des Bogens

$$s = \frac{1}{2}\left\{\int^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda + \beta)}{(\lambda + a_1)\,(\lambda + a_2)}} + \int^{\lambda_3} d\lambda \sqrt{\frac{(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda + \beta)}{(\lambda + a_1)\,(\lambda + a_2)}}\right\}$$

Setzen wir noch $\lambda_1 = 0$, so ergeben sich für die kürzeste Linie auf dem positiven elliptischen Paraboloid

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} - 2z = 0$$

die Gleichungen:

$$7)\qquad \text{const} = \int^{\lambda_2} \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda\,(\lambda + a_1)\,(\lambda + a_2)\,(\lambda + \beta)}} + \int^{\lambda_3} \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda\,(\lambda + a_2)\,(\lambda + a_2)\,(\lambda + \beta)}}$$

$$8)\qquad 2s = \int^{\lambda_2} \frac{\lambda\,(\lambda + \beta)\, d\lambda}{\sqrt{\lambda\,(\lambda + a_1)\,(\lambda + a_2)\,(\lambda + \beta)}} + \int^{\lambda_3} \frac{\lambda\,(\lambda + \beta)\, d\lambda}{\sqrt{\lambda\,(\lambda + a_1)\,(\lambda + a_2)\,(\lambda + \beta)}}$$

Es fragt sich, was die Konstante β bedeutet. Bekanntlich sind die Krümmungslinien des Paraboloids

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} - 2z = 0$$

die Schnittlinien desselben mit dem Systeme der dazu konfokalen und orthogonalen Flächen

$$\frac{x^2}{a_1 + \lambda_k} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda_k} - 2z - \lambda_k = 0 \qquad k = 2, 3$$

Für $\lambda_2 =$ const. erhalten wir alle Krümmungslinien, welche durch den Schnitt mit den hyperbolischen Paraboloiden gebildet werden, für $\lambda_3 =$ const. alle Schnittlinien mit den negativen elliptischen Paraboloiden. Wir nennen die ersteren Krümmungslinien der ersten Art, die letzteren Krümmungslinien der zweiten Art,

Nach Gleichung 5) gilt aber für ein Bogenelement ds auf dem positiven elliptischen Paraboloid

$$4\,ds^2 = (\lambda_2 - \lambda_3)\left\{\frac{\lambda_2\,d\lambda_2^2}{(\lambda_2 + a_1)\,(\lambda_2 + a_2)} - \frac{\lambda_3\,d\lambda_3^2}{(\lambda_3 + a_1)\,(\lambda_3 + a_2)}\right\}$$

und demnach für die Bogenelemente ds_2 und ds_3 der Krümmungslinien

$$4\,ds_2^2 = -\frac{\lambda_3\,(\lambda_2 - \lambda_3)\,d\lambda_3^2}{(\lambda_3 + a_1)\,(\lambda_3 + a_2)}$$

$$4\,ds_3^2 = \frac{\lambda_2\,(\lambda_2 - \lambda_3)\,d\lambda_2^2}{(\lambda_2 + a_1)\,(\lambda_2 + a_2)}$$

Aus 7) folgt aber

$$\frac{\lambda_2\,d\lambda_2^2}{(\lambda_2 + a_1)\,(\lambda_2 + a_2)\,(\lambda_2 + \beta)} = \frac{\lambda_3\,d\lambda_3^2}{(\lambda_3 + a_1)\,(\lambda_3 + a_2)\,(\lambda_3 + \beta)}$$

folglich

$$\frac{4\,ds_3^2}{(\lambda_2 - \lambda_3)\,(\lambda_2 + \beta)} = -\frac{4\,ds_2^2}{(\lambda_2 - \lambda_3)\,(\lambda_3 + \beta)}$$

$$-\beta = \frac{\lambda_2\,ds_2^2 + \lambda_3\,ds_3^2}{ds^2}$$

Die vom Punkte $\lambda_2\,\lambda_3$ ausgehende kürzeste Linie bildet mit den durch diesen Punkt laufenden Krümmungslinien Winkel, die sich zu 90^0 ergänzen; ist demnach α der Winkel, welchen das Bogenelement ds_2 der Krümmungslinie erster Art mit dem Bogenelement ds der kürzesten Linie einschliesst, so gilt

$$\frac{ds_2}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{ds_3}{ds} = \sin\alpha$$

und

$$9) \qquad -\beta = \lambda_2\,\cos^2\alpha + \lambda_3\,\sin^2\alpha$$

Die Konstante β bestimmt also die Richtung der kürzesten Linie.

Die Formeln 7) und 8) für die kürzeste Linie ändern sich wesentlich, wenn wir $a_1 = a_2$ werden lassen, wenn also das Paraboloid in ein Rotationsparaboloid übergeht, dessen Gleichung:

$$x^2 + y^2 - 2\,a_1\,z = 0$$

ist. Nehmen wir zunächst a_1 und a_2 noch verschieden an, so können wir setzen

$$\lambda_2 = -(a_1 \sin^2\varphi + a_2 \cos^2\varphi)$$

Es wird dann

$$\lambda_2 + a_1 = (a_1 - a_2)\cos^2\varphi$$

$$\lambda_2 + a_2 = -(a_1 - a_2)\sin^2\varphi$$

$$\lambda_2 + \beta = \beta - (a_1 \sin^2 \varphi + a_2 \cos^2 \varphi)$$

$$d\lambda_2 = -2(a_1 - a_2) \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi$$

$$d\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2}{(\lambda_2 + a_1)\ \lambda_2 + a_2)\ (\lambda_2 + \beta)}} = -2\, d\varphi \sqrt{\frac{a_1 \sin^2 \varphi + a_2 \cos^2 \varphi}{\beta - (a_1 \sin_2 \varphi + a_2 \cos^2 \varphi)}}$$

Für $a_1 = a_2$ geht die rechte Seite über in

$$-2\, d\varphi \sqrt{\frac{a_1}{\beta - a_1}}$$

und die Gleichung 7) verwandelt sich in

$$\text{const} = -2 \sqrt{\frac{a_1}{\beta - a_1}} \int d\varphi + \int \frac{d\lambda_3}{\lambda_3 + a_1} \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \beta}}$$

oder 10) $$\text{const} = -2 \sqrt{\frac{a_1}{\beta - a_1}}\, \varphi + \int^{\lambda_3} \frac{d\lambda}{\lambda + a_1} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + \beta}}$$

Um den Wert des zweiten Integrals zu ermitteln, setzen wir

$$\frac{\lambda_3 + \beta}{\lambda} = u^2 \quad \text{oder} \quad \lambda_3 = -\frac{\beta}{1 - u^2}$$

so dass sich ergiebt

$$\lambda_3 + a_1 = -a_1 \frac{u^2 + \frac{\beta - a_1}{a_1}}{1 - u^2},$$

$$d\lambda_3 = -\frac{2\beta\, u\, du}{1 - u^2}$$

$$\int \frac{d\lambda_3}{\lambda_3 + a_1} \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \beta}} = \frac{2\beta}{a_1} \int \frac{du}{(1 - u^2) \left(\frac{\beta - a_1}{a_1} + u^2\right)}$$

$$= 2 \int \frac{du}{1 - u^2} + 2 \int \frac{du}{\frac{\beta - a_1}{a_1} + u^2}$$

$$= \lg \frac{1 + u}{1 - u} + 2 \sqrt{\frac{a_1}{\beta - a_1}} \operatorname{arc\,tg} \left(u \sqrt{\frac{a_1}{\beta - a_1}} \right).$$

Setzen wir für u den ursprünglichen Wert ein, so folgt

$$\int \frac{d\lambda_3}{\lambda_3 + a_1} \sqrt{\frac{\lambda_3 + a_1}{\lambda_3}} = \lg \frac{1 + \sqrt{\frac{\lambda_3 + \beta}{\lambda_3}}}{1 - \sqrt{\frac{\lambda_3 + \beta}{\lambda_3}}} + 2 \sqrt{\frac{a_1}{\beta - a_1}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{\lambda_3 + \beta}{\lambda_3}} \cdot \sqrt{\frac{a_1}{\beta - a_1}} \right).$$

und Gleichung 10) geht über in

11) $$\text{const} = -2 \sqrt{\frac{a_1}{\beta - a_1}}\, \varphi + \lg \frac{1 + \sqrt{\frac{\lambda_3 + \beta}{\lambda_3}}}{1 - \sqrt{\frac{\lambda_3 + \beta}{\lambda_3}}} + 2 \sqrt{\frac{a_1}{\beta - a_1}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda_3 + \beta}{\lambda_3}} \sqrt{\frac{a_1}{\beta - a_1}}$$

Die Ausdrücke der laufenden Koordinaten für die Punkte der Oberfläche nehmen jetzt die Form an

$$12)\qquad \begin{aligned} x^2 &= -a_1(\lambda_3 + a_1)\cos^2\varphi \\ y^2 &= -a_1(\lambda_3 + a_1)\sin^2\varphi \\ 2z &= -(\lambda_3 + a_1) \end{aligned}$$

es ist also φ die Länge gemessen von der xz Ebene aus.

Der grösste Wert, den λ_3 in 10) annehmen kann, ist $\lambda_3 = -\beta$; bezeichnen wir für diesen besonderen Fall die Länge mit φ_0, so ist

$$\text{const} = -2\sqrt{\frac{a_1}{\beta - a_1}}\,\varphi_0$$

und die Gleichung der kürzesten Linie

$$13)\qquad \varphi - \varphi_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta - a_1}{a_1}}\ \lg\frac{\sqrt{\lambda_3} + \sqrt{\lambda_3 + \beta}}{\sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_3 + \beta}} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\lambda_3 + \beta}{\lambda_3}}\sqrt{\frac{a_1}{\beta + a_1}}$$

Die Richtung der kürzesten Linie ist bestimmt durch die Beziehung 9, die wir in folgender Form schreiben können

$$\operatorname{tg}^2\alpha = -\frac{\lambda_2 + \beta}{\lambda_3 + \beta} = -\frac{\beta - a_1}{\lambda_3 + \beta}$$

Nimmt β seinen kleinsten Wert an, $\beta = a_1$, so wird $\alpha = 0$ für jeden Wert von λ_3 mit Ausnahme von $\lambda_3 = -\beta = -a_1$; die kürzesten Linien werden Meridiane, sie fallen zusammen mit den Krümmungslinien der ersten Art. Für $\lambda_3 = -\beta = -a_1$ wird $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{0}{0}$, α kann jeden Wert annehmen; das ist aber selbstverständlich, denn fü $\lambda_3 = -a_1$ wird $x = y = z = 0$, also der Nullpunkt der Fläche.

Ist $\beta > a_1$, so wird für $\lambda_3 = -\beta$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \infty \quad \text{oder} \quad \alpha = 90^0$$

die kürzeste Linie berührt die durch den Wert $\lambda_3 = -\beta$ bestimmte Krümmungslinie der zweiten Art; es ist demnach der in 13) auftretende Winkel φ_0 die Länge des Berührungspunktes der bestimmten kürzesten Linie mit dem Parallelkreise $\lambda_3 = -\beta$.

Für die Bogenlänge erhalten wir aus 8)

$$2s = -2\sqrt{a_1(\beta - a_1)}\int d\varphi + \int\frac{\sqrt{\lambda_3(\lambda_3 + \beta)}}{\lambda_3 + a_1}\,d\lambda_3$$

und mit Benutzung des Wertes von φ in 10).

$$2(s - s_0) = -\int\sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \beta}}\,d\lambda_3$$

wo das Vorzeichen so zu wählen ist, dass $2(s - s_0)$ positiv wird.

Benutzen wir wieder die Substitution

$$\frac{\lambda_3 + \beta}{\lambda_3} = u^2$$

so wird

$$\int \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_3+\beta}}\, d\lambda_3 = -2\beta \int \frac{du}{(1-u^2)^2} = -\frac{\beta}{2}\left(\frac{2u}{1-u^2} + \lg \frac{1+u}{1-u}\right)$$

oder

$$14)\qquad 2(s-s_0) = \sqrt{\lambda_3(\lambda_3+\beta)} + \frac{1}{2}\,\beta \lg \frac{\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_3+\beta}}{\sqrt{\lambda_3}-\sqrt{\lambda_3+\beta}}$$

wobei der Bogen von $\lambda_3 = -\beta$ aus gerechnet worden ist; es ist $2(s-s_0)$ proportional dem Bogen einer gewissen Parabel.

Durch die Gleichungen 12, 13, 14 ist die kürzeste Linie auf dem Rotationsparaboloid vollständig bestimmt.

Greifen wir den speciellen Fall heraus $\sqrt{\frac{\beta-a_1}{a_1}} = 1$, oder $\beta = 2a_1$, so geht Gleichung 13) über in

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{2} \lg \frac{\sqrt{\lambda_3}+\sqrt{\lambda_3+2a_1}}{\sqrt{\lambda_3}-\sqrt{\lambda_3+2a_1}} + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda_3+2a_1}{\lambda_3}}$$

Mit abnehmendem λ_3 nähert sich $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda_3+2a_1}{\lambda_3}}$ dem Werte 45^0, der erste Teil dagegen wächst in's Unendliche an; somit wächst der Winkel φ über alle Grenzen, wenn λ_3 bis $-\infty$ abnimmt. Die kürzeste Linie verläuft demnach derart, dass ihre Projektion auf die xy Ebene eine Spirale von unzählig vielen Windungen darstellt.

Wir kehren zurück zur Bestimmung der kürzesten Linie auf dem Paraboloid, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} - 2z = 0$$

ist; es gilt die Gleichung

$$15)\qquad \text{const.} = \int^{\lambda_2} \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)(\lambda+\beta)}} + \int^{\lambda_3} \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)(\lambda+\beta)}}$$

$$-\lambda_2 < \beta < -\lambda_3$$

Der kleinste Wert, den β annehmen kann, ist $\beta = a_2$; für diesen Fall muss $\lambda_2 = -a_2$ werden und infolge der Gleichungen 3) $y = 0$; die kürzeste Linie wird der Hauptschnitt in der xz Ebene. Für $\beta = a_1$ und $\lambda_3 = -a_1$ muss zufolge 15) auch $\lambda_2 = -a_1$ werden. Aus den Gleichungen 3) folgt für die rechtwinkligen Koordinaten dieses Punktes $\lambda_2 = \lambda_3 = -a_1$

$$x^2 = 0,\ \ y^2 = a_2(a_1-a_2),\ \ 2z = a_1 - a_2$$

Das sind aber die Koordinatenwerte für die beiden Nabelpunkte des elliptischen Paraboloids; es laufen demnach die kürzesten Linien, für welche die Integrationskonstante $\beta = a_1$ ist, durch einen der beiden Nabelpunkte. Der seitliche Hauptschnitt in der yz Ebene ist diejenige dieser kürzesten Linien, welche beide Nabelpunkte zugleich enthält.

Wir wollen uns jetzt von einem Punkte $\lambda_2^0\ \lambda_3^0$ aus die beiden kürzesten Linien, die durch die Nabelpunkte laufen, gezeichnet denken. Die Winkel, welche diese Linien in dem Punkte $\lambda_2^0\ \lambda_3^0$ mit der Krümmungslinie der ersten Art bilden, sind bestimmt durch

$$\mathrm{tg}^2\alpha = -\frac{\lambda_2^0 + a_1}{\lambda_3^0 + a_1}$$

so dass sich für α ergiebt

$$\alpha = \mathrm{arc\,tg}\left(\pm\sqrt{-\frac{\lambda_2^0 + a_1}{\lambda_3^0 + a_1}}\right)$$

das heisst aber, die Krümmungslinie der ersten Art bildet mit den beiden kürzesten Linien gleiche Winkel. Nun steht die Krümmungslinie der zweiten Art im Punkte $\lambda_2^0\ \lambda_3^0$ rechtwinklig auf derjenigen der ersten Art; daher schliesst auch diese Krümmungslinie mit den beiden kürzesten Linien gleiche Winkel ein und wir finden: Die durch einen Punkt gelegten Krümmungslinien halbieren die Winkel, welche die von diesem Punkte aus nach den beiden Nabelpunkten laufenden kürzesten Linien mit einander bilden.

Setzen wir in 15) $\beta = a_1$, so geht die Gleichung über in

$$\mathrm{const} = \int^{\lambda_2}\frac{d\lambda}{\lambda + a_1}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + a_2}} \mp \int^{\lambda_3}\frac{d\lambda}{\lambda + a_1}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + a_2}}$$

Das doppelte Vorzeichen bei einem der beiden Integrale ist erforderlich, um die Gleichung für die beiden kürzesten Linien auszudrücken. Welches von beiden Zeichen zu wählen ist, ergiebt folgende Ueberlegung. Durch die beiden Hauptschnittsebenen wird die Oberfläche des Paraboloids in 4 gleiche Teile zerlegt. Wir ziehen die Linien in einem solchen Teile in Betracht; N_1 und N_2 seien die beiden Nabelpunkte und zwar soll N_1 diesem Teile angehören; ist P der Punkt $\lambda_2^0\ \lambda_3^0$, so wird bei der Fortbewegung eines Punktes auf PN_1 λ_2 wachsen und λ_3 abnehmen oder umgekehrt je nach der Bewegungsrichtung, dagegen werden bei der Bewegung auf PN_2 λ_2 und λ_3 gleichzeitig wachsen oder abnehmen. Für PN_1 haben wir demnach beide Integrale mit verschiedenem Vorzeichen, für PN_2 mit gleichem Vorzeichen zu nehmen.

Beim Durchgange der kürzesten Linie durch eine der Hauptschnittsebenen geht λ_2 aus dem Wachsen in das Abnehmen und umgekehrt über.

Beide Integrale sind elementare; behufs der Integration setzen wir:

$$\sqrt{\frac{\lambda_2 + a_2}{\lambda_2}} = u, \quad \varepsilon\sqrt{\frac{\lambda_3 + a_2}{\lambda_3}} = v \qquad \varepsilon = \pm 1$$

und erhalten für das erste der beiden Integrale

$$\int\frac{d\lambda_2}{\lambda_2 + a_1}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + a_2}} = -2a_2\int\frac{du}{(1-u^2)(a_1 - a_2 - a_1 u^2)}$$

$$= -\frac{2a_2}{a_1 - a_2}\int\frac{du}{(1-u^2)\left(1 - \frac{a_1 - a_2}{a_1}u^2\right)}$$

$$\int \frac{d\lambda_2}{\lambda_2 + a_1} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + a_2}} = 2 \int \frac{du}{1 - u^2} - \frac{2a_1}{a_1 - a_2} \int \frac{du}{1 - \frac{a_1}{a_1 - a_2} u^2}$$

$$= \lg \frac{1 + u}{1 - u} - \sqrt{\frac{a_1 - a_2}{a_1}} \lg \frac{1 + \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}\, u}{1 - \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}\, u}$$

In gleicher Weise lässt sich das zweite Integral entwickeln, so dass wir erhalten

$$\text{const} = \lg \frac{1+u}{1-u} - \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}} \lg \frac{1 + \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}\, u}{1 - \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}\, u} - \lg \frac{1 + \varepsilon v}{1 - \varepsilon v} + \sqrt{\frac{a_1 - a_2}{a_1}} \lg \frac{1 + \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}\, \varepsilon v}{1 - \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}\, \varepsilon v}$$

oder

$$\text{const} = \lg \frac{1 + u}{1 - u} \cdot \frac{1 - \varepsilon v}{1 + \varepsilon v} - \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}} \lg \frac{1 + \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}\, u}{1 - \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}\, u} \cdot \frac{1 - \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}\, \varepsilon v}{1 + \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}\, \varepsilon v}$$

Für $\lambda_2 = \lambda_3 = - a_1$ wird $u = \varepsilon v$ und demnach const $= 0$; die Gleichung der kürzesten Linie lautet daher:

$$16) \qquad \frac{1 + u}{1 - u} \cdot \frac{1 - v}{1 + v} = \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}\, u}{1 - \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}\, u} \cdot \frac{1 - \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}\, \varepsilon v}{1 + \sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}\, \varepsilon v} \right)^{\sqrt{\frac{a_1}{a_1 - a_2}}}$$

Für die Bogenlänge würde sich ergeben

$$2s = \int^{\lambda_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + a_2}}\, d\lambda + \int^{\lambda_3} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + a_2}}\, d\lambda$$

$$17) \qquad 2(s - s_0) = a_2 \left[\frac{u}{1 - u^2} - \frac{\varepsilon v}{1 - v^2} + \frac{1}{2} \lg \frac{1 + u}{1 - u} \frac{1 - \varepsilon v}{1 + \varepsilon v} \right]$$

wenn wir den Bogen von einem Nabelpunkte aus messen.

Es bleibt uns noch übrig, die beiden Fälle

$$\beta < a_1 \text{ und } \beta > a_1$$

zu behandeln. Um zunächst zu untersuchen, wie sich dieselben unterscheiden, differenzieren wir die Gleichung

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = - \frac{\lambda_2 + \beta}{\lambda_3 + \beta}$$

nach β; wir erhalten

$$\frac{\partial \operatorname{tg}^2 \alpha}{\partial \beta} = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{(\lambda_3 + \beta)^2}$$

also einen positiven Wert, d. h. α wächst mit wachsendem β. Ziehen wir nun von einem Punkte $\lambda_2\ \lambda_3$ aus eine kürzeste Linie, so ist $-\lambda_2$ der kleinste Wert, den wir β beilegen können; für diesen Wert wird aber $\alpha = 0$; es berührt die kürzeste Linie die durch den Punkt $\lambda_2\,\lambda_3$ gehende Krümmungslinie der ersten Art. Wächst β von $-\lambda_2$ bis a_1, so wächst der absolute Wert des Winkels α von Null bis zu demjenigen Werte α_0, unter welchem die durch die Nabelpunkte N_1 und N_2 von $\lambda_2\,\lambda_3$ aus gezogenen kürzesten Linien gegen die Krümmungslinie der ersten Art $\lambda_2 = \text{const}$ geneigt sind. Wächst β weiter von a_1 bis $-\lambda_3$, so nimmt α zu von α_0 bis 90^0; es berührt für $\beta = -\lambda_3$ diese kürzeste Linie die durch den Punkt $\lambda_2\,\lambda_3$ gehende Krümmungslinie der zweiten Art. Zu jedem β gehören zwei Werte α, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Es gilt demnach allgemein der Satz, dass durch jeden Punkt P auf dem positiven elliptischen Paraboloid zwei kürzeste Linien gezeichnet werden können, die demselben Werte β entsprechen; diese Linien laufen in den Winkelraum (bez. Scheitelwinkelraum) $N_1\,P\,N_2$ hinein, wenn $\beta < a_1$, jedoch in den Nebenwinkelraum, wenn $\beta > a_1$ ist. Die Krümmungslinien halbieren die von den beiden kürzesten Linien gebildeten Winkel.

Die Gleichung 15) führt jetzt auf elliptische Integrale. Nehmen wir als untere Integrationsgrenze $-a_1$ an, so wird

$$\text{const} = \int_{-a_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda + a_1)(\lambda + a_2)\,\lambda + \beta)}} + \int_{-a_1}^{\lambda_3} \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda + a_1)(\lambda + a_2)(\lambda + \beta)}}$$

Für den Fall

$$a_1 > \beta > a_2$$

ist $-\beta$ der kleinste mögliche Wert für λ_2, da $\lambda_2 + \beta$ immer positiv bleiben muss; wir erhalten

$$\text{const} = \int_{-\beta}^{\lambda_2} \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda + a_1)(\lambda + a_2)(\lambda + \beta)}} + \int_{-a_1}^{\lambda_3} \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda + a_1)(\lambda + a_2)(\lambda + \beta)}}$$

Zur Transformation dieser Integrale benutzen wir die Substitutionen

$$\text{18)} \qquad x_2 = \frac{a_1 - a_2}{\beta - a_1}\,\frac{\lambda_2 + \beta_1}{\lambda_2 + a_1} \qquad \text{und} \qquad x_3 = \frac{\beta}{a_1}\,\frac{\lambda_3 + a_1}{\lambda_3 + \beta}$$

oder

$$\lambda_2 = -\frac{\beta(a_1 - a_2)(1 - k^2 x_2)}{(a_1 - a_2) - (\beta - a_2)\,x_2} \qquad \lambda_3 = -\frac{a_1 \beta (1 - x_3)}{\beta - a_1 x_3}$$

$$\lambda_2 + a_1 - \frac{(a_1 - a_2)(a_1 - \beta)}{(a_1 - a_2) - (\beta - a_2)\,x_2} \qquad \lambda_3 + a_1 = -\frac{a_1 (a_1 - \beta)\,x_3}{\beta - a_1 x_3}$$

$$\lambda_2 + a_2 = -\frac{(a_1 - a_2)(\beta - a_2)(1 - x_2)}{(a_1 - a_2) - (\beta - a_2)\,x_2} \qquad \lambda_3 + a_2 = -\frac{\beta(a_1 - a_2)(1 - k^2 x_3)}{\beta - a_1 x_3}$$

$$\lambda_2 + \beta = \frac{(a_1 - \beta)(\beta - a_2)\,x_2}{(a_1 - a_2) - (\beta - a_2)\,x_2} \qquad \lambda_3 + \beta = -\frac{\beta(a_1 - \beta)}{\beta - a_1 x_3}$$

$$d\lambda_2 = \frac{(a_1 - a_2)(a_1 - \beta)(\beta - a_2)\,dx_2}{[(a_1 - a_2) - \beta - a_2)\,x_2]^2} \qquad d\lambda_3 = \frac{-a_1 \beta (a_1 - \beta)\,dx_3}{(\beta - a_1 x_3)^2}$$

$$k^2 = \frac{a_1(\beta - a_2)}{\beta(a_1 - a_2)}$$

Die Gleichung für die kürzeste Linie nimmt dann die Gestalt an

$$\text{const} = -\frac{\beta}{\sqrt{\beta(a_1 - a_2)}} \int_0^{x_2} \frac{(1-k^2 x)\,dx}{(1-mx)\sqrt{x(1-x)(1-k^2 x)}}$$

$$\mp \frac{a_1}{\sqrt{\beta(a_1 - a_2)}} \int_0^{x_3} \frac{(1-x)\,dx}{(1-nx)\sqrt{x(1-x)(1-k^2 x)}}$$

wo

$$m = \frac{\beta - a_2}{a_1 - a_2}, \quad n = \frac{a_1}{\beta}$$

und wenn wir

$$x_2 = \sin^2\varphi \qquad \text{und} \qquad x_3 = \sin^2\psi$$

einführen, so folgt:

$$\text{const} = -\frac{\beta}{\sqrt{\beta(a_1 - a_2)}} \int_0^{\varphi} \frac{(1-k^2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{(1-m\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} \mp \frac{a_1}{\sqrt{\beta(a_1 - a_2)}} \int_0^{\psi} \frac{(1-\sin^2\psi)\,d\psi}{(1-n\sin^2\psi)\,\Delta\psi}$$

$$\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}, \quad \Delta\psi = \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}$$

Zur weiteren Entwickelung setzen wir noch

$$19) \qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u \qquad \text{und} \qquad \pm \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta\psi} = v$$

Dann wird

$$\text{const} = -\frac{\beta}{\sqrt{\beta(a_1 - a_2)}} \int_0^{u} \frac{\Delta^2 \operatorname{am} u}{1 - m\sin^2\operatorname{am} u}\,du - \frac{a_1}{\sqrt{\beta(a_1 - a_2)}} \int_0^{v} \frac{\cos^2\operatorname{am} v}{1-n\sin^2\operatorname{am} v}\,dv$$

Da in dem ersten der beiden elliptischen Integrale dritter Gattung $-m$ ein negativer echter Bruch ist, dessen Wert zwischen 0 und $-k^2$ liegt, so setzen wir

$$m = k^2\sin^2\operatorname{am} a$$

Daraus folgt

$$\sin^2\operatorname{am} a = \frac{\beta}{a_1}$$

$$\cos^2\operatorname{am} a = \frac{a_1 - \beta}{a_1}$$

$$\operatorname{tg}^2\operatorname{am} a = \frac{\beta}{a_1 - \beta}$$

$$\Delta^2\operatorname{am} a = \frac{a_1 - \beta}{a_1 - a_2}$$

$$\operatorname{tg}\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a = \frac{\beta}{\sqrt{\beta(a_1 - a_2)}}$$

und daher

$$\frac{\beta}{\sqrt{\beta(a_1 - a_2)}} \int_0^u \frac{\varDelta^2 \operatorname{am} u}{1 - m \sin^2 \operatorname{am} u} \, du = \int_0^u \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a \, \varDelta \operatorname{am} a \, \varDelta^2 \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u} \, du$$

Das ursprüngliche Integral dritter Gattung hat die Form

$$\Pi(u, a) = \int_0^u \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \, \varDelta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 u} \, du = u \frac{\partial}{\partial a} \lg \Theta(a + \frac{1}{2} \lg \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

Durch Kombination von $\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$ mit $\Theta_2(a)$ geht dasselbe über in

$$\int_0^u \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a \, \varDelta \operatorname{am} a \, \varDelta^2 \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u} = - u \frac{\partial}{\partial a} \lg \Theta_2(a) - \frac{1}{2} \lg \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

so dass wir erhalten:

$$- \frac{\beta}{\sqrt{\beta(a_1 - a_2)}} \int_0^u \frac{\varDelta^2 \operatorname{am} u}{1 - m \sin^2 \operatorname{am} u} \, du = u \frac{\partial}{\partial a} \lg \Theta_2(a) + \frac{1}{2} \lg \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

Es ist aber

$$\cos \operatorname{am} a = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\Theta_2(a)}{\Theta(a)}$$

Durch logarithmische Differentiation ergiebt sich

$$- \operatorname{tg} \operatorname{am} a \, \varDelta \operatorname{am} a = \frac{\partial \lg \Theta_2(a)}{\partial a} - \frac{\partial \lg \Theta(a)}{\partial a} = \frac{\beta}{\sqrt{\beta(a_1 - a_2)}}$$

$$\frac{\partial \lg \Theta_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial \lg \Theta(a)}{\partial a} - \frac{\beta}{\sqrt{\beta(a_1 - a_2)}}$$

und

$$- \frac{\beta}{\sqrt{\beta(a_1 - a_2)}} \int_0^u \frac{\varDelta^2 \operatorname{am} u}{1 - m \sin^2 \operatorname{am} u} \, du = u \left(- \frac{\beta}{\sqrt{\beta(a_1 - a_2)}} + \frac{\partial \lg \Theta(a)}{\partial a} \right) + \frac{1}{2} \lg \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

$$= u \left(- \frac{\beta}{\sqrt{\beta(a_1 - a_2)}} + Z(a) \right) + \frac{1}{2} \lg \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

Der Parameter a ist zufolge

$$m = k^2 \sin^2 \operatorname{am} a$$

definiert durch

$$\sin^2 \operatorname{am} a = \frac{\beta}{a_1}$$

oder

$$a = \int_0^{\sqrt{\frac{\beta}{a_1}}} \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1 - \mathfrak{z}^2)(1 - k^2 \mathfrak{z}^2)}}$$

In dem zweiten Integrale

$$\frac{a_1}{\sqrt{\beta(a_1-a_2)}} \int_0^v \frac{\cos^2 am\, v}{1-n \sin^2 am\, v}\, dv$$

liegt $-n$ zwischen -1 und $-\infty$; wir setzen deshalb

$$n = k^2 \sin^2 am\,(b + i K')$$

folglich

$$\sin^2 am\,(b+iK') = \frac{a_1-a_2}{\beta-a_2} = \frac{1}{k^2 \sin^2 am\, b}$$

$$\sin^2 am\, b = \frac{\beta}{a_1}$$

daher $b = a$ und

$$n = k^2 \sin^2 am\,(a + i K')$$

$$\sin^2 am\,(a+iK') = \frac{a_1-a_2}{\beta-a_2}$$

$$\cos^2 am\,(a+iK') = \frac{\beta-a_1}{\beta-a_2}$$

$$tg^2 am\,(a+iK') = \frac{a_1-a_2}{\beta-a_1}$$

$$\Delta^2 am\,(a+iK') = \frac{\beta-a_1}{\beta}$$

$$\frac{k^2 \sin am\,(a+iK') \cos am\,(a+iK')}{\Delta\, am\,(a+iK')} = \frac{a_1}{\sqrt{\beta(a_1-a_2)}}$$

und daher, wenn wir einstweilen $a + i K' = b$ setzen,

$$\frac{a_1}{\sqrt{\beta(a_1-a_2)}} \int_0^v \frac{\cos^2 am\, v}{1-n \sin^2 am\, v}\, dv = \int_0^v \frac{k^2 \sin am\, b \cos am\, b \cos^2 am\, v}{\Delta\, am\, b\,(1-K^2 \sin^2 am\, b \sin^2 am\, v)}\, dv$$

Durch Kombination von $\frac{\Theta(v-b)}{\Theta(v+b)}$ mit $\Theta_3(b)$ geht das oben erwähnte ursprüngliche Integral über in

$$\int_0^v \frac{k^2 \sin am\, b \cos am\, b \cos^2 am\, v}{\Delta\, am\, b\,(1-k^2 \sin^2 am\, b \sin^2 am\, v)}\, dv = -v \frac{\partial}{\partial b} \lg \Theta_3(b) - \frac{1}{2} \lg \frac{\Theta(v-b)}{\Theta(v+b)}$$

Da aber

$$\Delta\, am\, b = \sqrt{k'} \frac{\Theta_3(b)}{\Theta(b)}$$

so ergiebt sich

$$\frac{\partial \lg \Theta_3(b)}{\partial b} = \frac{\partial \lg \Theta(b)}{\partial b} - \frac{a_1}{\sqrt{\beta(a_1-a_2)}} = Z(b) - \frac{a_1}{\sqrt{\beta(a_1-a_2)}}$$

und $$-\frac{a_1}{\sqrt{\beta(a_1-a_2)}}\int_0^v \frac{\cos^2 am\, v}{1-n\sin^2 am\, v}\,dv = v\left(-\frac{a_1}{\sqrt{\beta(a_1-a_2)}}+\frac{\partial \lg\Theta(b)}{\partial b}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\lg\frac{\Theta(v-b)}{\Theta(v+b)} = v\left(-\frac{a_1}{\sqrt{\beta(a_1-a_2)}}+Z(a+iK')\right)+\frac{1}{2}\lg\frac{\Theta(v-a-iK')}{\Theta(v+a+iK')}$$

Die Gleichung der kürzesten Linie heisst demnach

20) $$\text{const} = u\left(-\frac{\beta}{\sqrt{\beta(a_1-a_2)}}+Z(a)\right)+v\left(-\frac{a_1}{\sqrt{\beta(a_1-a_2)}}+Z(a+iK')\right)$$
$$+\frac{1}{2}\lg\frac{\Theta(u-a)\;\Theta(v-a-iK')}{\Theta(u+a)\;\Theta(v+a+iK')}$$

Nun bestehen aber folgende Beziehungen

$$Z(v+iK') = -\frac{\pi i}{2K}+\frac{\cos am\, u\;\Delta am\, u}{\sin am\, u}+Z(u)$$

$$\Theta(v+iK') = \frac{i\sqrt{k}}{\sqrt[4]{q}}\,e^{-\frac{\pi i v}{2K}}\sin am\, v\,\Theta(v)\quad,\; q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

Daraus erkennen wir, dass

21) $$Z(a+iK') = -\frac{\pi i}{2K}+\frac{\cos am\, a\;\Delta am\, a}{\sin am\, a}+Z(a)$$
$$= -\frac{\pi i}{2K}+\frac{a_1-\beta}{\sqrt{\beta(a_1-a_2)}}+Z(a)$$

und $$\Theta(v+a+iK') = \frac{i\sqrt{k}}{\sqrt[4]{q}}\,e^{-\frac{\pi i(v+a)}{2K}}\sin am(v+a)\,\Theta(v+a)$$

Da aber $\Theta(u) = \Theta(-u)$ ist, so erhellt, dass

$$\Theta(v-a-iK') = \frac{i\sqrt{k}}{\sqrt{q}}\,e^{-\frac{\pi i(a-v)}{2K}}\sin am(a-v)\,\Theta(a-v)$$

Durch Division ergiebt sich

$$\frac{\Theta(v-a-iK')}{\Theta(v+a+iK')} = e^{\frac{\pi i v}{K}}\frac{\sin am(a-v)\;\Theta(a-v)}{\sin am(a+v)\;\Theta(a+v)}$$

und 22) $$\frac{1}{2}\lg\frac{\Theta(v-a-iK')}{\Theta(v+a+iK')} = \frac{\pi i v}{2K}+\frac{1}{2}\lg\frac{\sin am(a-v)\;\Theta(a-v)}{\sin am(a+v)\;\Theta(a+v)}$$

Setzen wir diesen Wert und den für $Z(a + iK')$ gefundenen Wert in die Gleichung 20) der kürzesten Linie ein, so erhalten wir

$$23)\qquad \text{const} = (u+v)\left(Z(a) - \frac{\beta}{\sqrt{\beta\,(a_1 - a_2)}}\right) + \frac{1}{2}\lg \frac{\Theta(a-u)\,\Theta(a-v)\,\sin am\,(a-v)}{\Theta(a+u)\,\Theta(a+v)\,\sin am\,(a+v)}$$

oder wenn wir sin am durch Θ Funktionen ersetzen

$$\text{const} = (u-v)\left(Z(a) - \frac{\beta}{\sqrt{\beta\,(a_1 - a_2)}}\right) + \frac{1}{2}\lg \frac{\Theta(a-u)\,\Theta_1(a-v)}{\Theta(a+u)\,\Theta_1(a+v)}$$

Die Bogenlänge ist bestimmt durch

$$2s = \int_{-\beta}^{\lambda_2} \frac{\lambda(\lambda+\beta)\,d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)(\lambda+\beta)}} \pm \int_{-a_1}^{\lambda_3} \frac{\lambda(\lambda+\beta)\,d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)(\lambda+\beta)}}$$

Führen wir statt λ_2 und λ_3 wiederum die Variablen x_2 und x_3 ein durch die oben benutzten Substitutionen 18), so nimmt die Gleichung die Form an

$$2s\,\frac{\sqrt{\beta\,(a_1-a_2)}}{a_1-\beta} = -\frac{\beta(\beta-a_2)}{a_1-a_2}\int_0^{x_2}\frac{x(1-k^2x)\,dx}{(1-mx)^2\sqrt{x(1-x)(1-k^2x}} \pm a_1\int_0^{x_3}\frac{(1-x)\,dx}{(1-nx)^2\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

oder, wenn wir wieder

$$x_2 = \sin^2\varphi\,,\quad x_3 = \sin^2\psi$$

setzen,

$$2s\,\frac{\sqrt{\beta\,(a_1-a_2)}}{a_1-\beta} = -\frac{2\beta\,(\beta-a_2)}{a_1-a_2}\int_0^{\varphi}\frac{\sin^2\varphi\,(1-k^2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{(1-m\sin^2\varphi)^2\,\varDelta\varphi} \pm 2a_1\int_0^{\psi}\frac{(1-\sin^2\psi)\,d\psi}{(1-n\sin^2\psi)^2\,\varDelta\psi}$$

$$= 2a_1\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - 2(2a_1-\beta)\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-m\sin^2\varphi)\,\varDelta\varphi} + 2\,(a_1-\beta)\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-m\sin^2\varphi)^2\,\varDelta\varphi}$$

$$\pm\, 2\beta\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{(1-n\sin^2\psi)\,\varDelta\psi} \pm 2\,(a_1-\beta\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{(1-n\sin^2\psi)^2\,\varDelta\psi}$$

Um die Integrale, deren Nenner die Form $(1-p\sin^2\sigma)^2$ besitzt, zu reduzieren, gehen wir aus von der Identität

$$\frac{\sin\sigma\,\cos\sigma\,\varDelta\sigma}{1-p\sin^2\sigma} = \int_0^{\sigma}\frac{d\,\frac{\sin\sigma\,\cos\sigma\,\varDelta\sigma}{1-p\sin^2\sigma}\,d\sigma}{d\sigma}$$

Die Differentiation ausgeführt ergiebt

$$\frac{\sin\sigma\cos\sigma\,\Delta\sigma}{1-p\sin^2\sigma}=\int\limits_0^\sigma\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}\left[\frac{2p\,\sin^2\sigma\cos^2\sigma\,\Delta^2\sigma}{(1-p\,\sin^2\sigma)^2}+\frac{\cos^2\sigma\,\Delta^2\sigma-\sin^2\sigma\,\Delta^2\sigma-k^2\sin^2\sigma\,\cos^2\sigma}{1-p\,\sin^2\sigma}\right]$$

$$=\int\limits_0^\sigma\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}\;\frac{1-2\sin^2\sigma+p\sin^2\sigma-2k^2\sin^2\sigma+3k^2\sin^4\sigma-p\,k^2\sin^6\sigma}{(1-p\sin^2\sigma)^2}$$

$$=\int\limits_0^\sigma\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}\;\frac{k^2(1-p\sin^2\sigma)^3+(2p-p^2-3k^2+2p\,k^2)(1-p\sin^2\sigma)+2(p^2-p+k^2-p\,k^2)}{p^2(1-p\sin^2\sigma)^2}$$

$$=\int\limits_0^\sigma\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}\left[\frac{k^2(1-p\,\sin^2\sigma)}{p^2}+\frac{p(2-p)+k^2(2p-3)}{p^2(1-p\sin^2\sigma)}+\frac{2(p-1)\,(p-k^2)}{p^2\,(1-p\sin^2\sigma)^2}\right]$$

Daraus folgt

$$\frac{2(p-1)\,(p-k^2)}{p^2}\int\limits_0^\sigma\frac{d\sigma}{(1-p\sin^2\sigma)^2\,\Delta\sigma}=\frac{\sin\sigma\cos\sigma\,\Delta\sigma}{1-p\sin^2\sigma}-\frac{k^2}{p^2}\int\limits_0^\sigma(1-p\sin^2\sigma)\,\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$$

$$-\frac{p(2-p)+k^2(2p-3)}{p^2}\int\limits_0^\sigma\frac{d\sigma}{(1-p\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma}$$

Nun ist aber

$$\int\limits_0^\sigma(1-p\sin^2\sigma\,\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}=\int\limits_0^\sigma\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}-p\int\limits_0^\sigma\frac{\sin^2\sigma\,d\sigma}{\Delta\sigma}$$

$$=\int\limits_0^\sigma\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}-\frac{p}{k^2}\int\limits_0^\sigma\frac{1-\Delta^2\sigma}{\Delta\sigma}\,d\sigma$$

$$=\left(1-\frac{p}{k^2}\right)\int\limits_0^\sigma\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}+\frac{p}{k^2}\int\limits_0^\sigma\Delta\sigma\,d\sigma$$

Wir erhalten demnach

$$\frac{2(p-1)\,(p-k^2)}{p^2}\int\limits_0^\sigma\frac{d\sigma}{(1-p\sin^2\sigma)^2)\,\Delta\sigma}=\frac{\sin\sigma\,\cos\sigma\,\Delta\sigma}{1-p\sin^2\sigma}-\left(\frac{k^2}{p^2}-\frac{1}{p}\right)\int\limits_0^\sigma\frac{d\sigma}{\Delta\sigma}-\frac{1}{p}\int\limits_0^\sigma\Delta\sigma\,d\sigma$$

$$-\frac{p(2-p)+k^2(2p-3)}{p^2}\int\limits_0^\sigma\frac{d\sigma}{(1-p\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma}$$

Setzen wir für p und σ die entsprechenden Werte ein, so folgt

$$\frac{2(a_1-\beta)^2}{\beta(\beta-a_2)}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-m\sin^2\varphi)^2\,\varDelta\varphi} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\varDelta\varphi}{1-m\sin^2\varphi} - \frac{(a_1-a_2)(a_1-\beta)}{\beta(\beta-a_2)}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \frac{a_1-a_2}{\beta-a_2}\int_0^{\varphi}\varDelta\varphi\,d\varphi$$

$$+ \frac{(a_1-\beta)(3a_1-a_2-\beta)}{\beta(\beta-a_2)}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-m\sin^2\varphi)\,\varDelta\varphi}$$

und

$$\frac{2(a_1-\beta)^2}{a_1(a_1-a_2)}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{(1-n\sin^2\psi)^2\,\varDelta\psi} = \frac{\sin\psi\cos\psi\,\varDelta\psi}{1-n\sin^2\psi} + \frac{\beta}{a_1}\,\frac{a_1-\beta}{a_1-a_2}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\varDelta\psi} - \frac{\beta}{a_1}\int_0^{\psi}\varDelta\psi\,d\psi$$

$$- \frac{(a_1-\beta)(3\beta-a_1-a_2)}{a_1(a_1-a_2)}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{(1-n\sin^2\psi)\,\varDelta\psi}$$

Mit Benutzung dieser Werte geht die Gleichung 24) über in

$$25)\quad 2\sigma\,\frac{\sqrt{\beta(a_1-a_2)}}{a_1-\beta} = (a_1+a_2)\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \frac{\beta(a_1-a_2)}{a_1-\beta}\int_0^{\varphi}\varDelta\varphi\,d\varphi - (a_1+a_2-\beta)\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-m\sin^2\varphi)\,\varDelta\varphi}$$

$$\pm\ \beta\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\varDelta\psi} \mp \frac{\beta(a_1-a_2)}{a_1-\beta}\int_0^{\psi}\varDelta\psi\,d\psi \pm (a_1+a_2-\beta)\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{(1-n\sin^2\psi)\,\varDelta\psi}$$

$$+ \frac{\beta(\beta-a_2)}{a_1-\beta}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\varDelta\varphi}{1-m\sin^2\varphi} \pm \frac{a_1(a_1-a_2)}{a_1-\beta}\,\frac{\sin\psi\cos\psi\,\varDelta\psi}{1-n\sin^2\psi}$$

Führen wir die in 19) definierten Grössen u und v ein, so wird

$$2s\,\frac{\sqrt{\beta(a_1-a_2)}}{a_1-\beta} = (a_1+a_2)\,u - \frac{\beta(a_1-a_2)}{a_1-\beta}\,E(u) - (a_1+a_2-\beta)\left[u + \frac{\sqrt{\beta(a_1-a_2)}}{a_1-\beta}\,\Pi(u,a)\right]$$

$$+ \beta v - \frac{\beta(a_1-a_2)}{a_1-\beta}\,E(v) + (a_1+a_2-\beta)\left[v - \frac{\sqrt{\beta(a_1-a_2)}}{a_1-\beta}\,\Pi(v, a+iK')\right]$$

$$+ \frac{\beta(\beta-a_2)}{a_1-\beta}\,\frac{\sin am\,u\cos am\,u\,\varDelta am\,u}{1-m\sin^2 am\,u} + \frac{a_1(a_1-a_2)}{a_1-\beta}\,\frac{\sin am\,v\cos am\,v\,\varDelta am\,v}{1-n\sin^2 am\,v}$$

Zufolge der Beziehungen 21, 22, 23 lässt sich dieser Ausdruck zusammenziehen in

$$2(s-s_0)\sqrt{\beta(a_1-a_2)} = \beta a_2(u+v) + \beta(a_1-a_2)(E(u)+E(v)) - \beta(\beta-a_2)\,\frac{\sin am\,u\cos am\,u\,\varDelta am\,u}{1-m\sin^2 am\,u}$$

$$- a_1(a_1-a_2)\,\frac{\sin am\,v\cos am\,v\,\varDelta am\,v}{1-n\sin^2 am\,v}$$

Es ist aber

$$\beta(\beta-a_2\,\frac{\sin am\,u\cos am\,u\,\varDelta am\,u}{1-n\sin^2 am\,u} = \beta(a_1-a_2)\,\frac{k^2\sin am\,u\cos am\,u\,\varDelta am\,u\sin^2 am\,a}{1-k^2\sin am\,a\sin^2 am\,u}$$

$$= \beta(a_1-a_2)\left[Z(u) - \tfrac{1}{2}Z(u-a) - \tfrac{1}{2}Z(u+a)\right]$$

$$a_1(a_1-a_2)\frac{\sin\operatorname{am}v\cos\operatorname{am}v\,\Delta\operatorname{am}v}{1-n\sin^2\operatorname{am}v}=\beta(a_1-a_2)\frac{k^2\sin\operatorname{am}v\cos\operatorname{am}v\,\Delta\operatorname{am}v\sin^2\operatorname{am}(a+iK')}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(a+iK')\sin^2\operatorname{am}v}$$

$$=\beta(a_1-a_2)\left[Z(v)-\tfrac{1}{2}Z(v-a-iK')-\tfrac{1}{2}Z(v+a+iK')\right]$$

Benutzen wir ausserdem die Relation

$$E(u)=\frac{E}{K}u+Z(u)$$

so ergiebt sich schliesslich

$$2(s-s_0)\sqrt{\beta(a_1-a_2)}=\beta\left[a_2+(a_1-a_2)\frac{E}{K}\right](u+v)+\tfrac{1}{2}\beta(a_1-a_2)\Big[Z(u-a)+Z(u+a)$$
$$+Z(v-a-iK')+Z(v+a+iK')\Big]$$

Für den Fall $\beta > a_1$ würden sich dieselben Gleichungen ergeben, nur die Konstanten würden sich ändern.

Wir schreiten zur Bestimmung der kürzesten Linie auf dem hyperbolischen Paraboloid

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda_2}+\frac{y^2}{a_2+\lambda_2}-2z-\lambda_2=0$$

Für dasselbe ist $\lambda_2=\text{const}$, demnach $d\lambda_2=0$ und

$$4\,ds^2=d\lambda_1^2\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{(\lambda_1+a_1)(\lambda_1+a_2)}+d\lambda_3^2\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}{(\lambda_3+a_1)(\lambda_3+a_2)}$$

In gleicher Weise wie bei dem elliptischen Paraboloid folgen hieraus für die kürzeste Linie die Gleichungen

$$26)\qquad \text{const}=\int^{\lambda_1}d\lambda\sqrt{\frac{\lambda-\lambda_2}{(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)(\lambda+\beta)}}\pm\int^{\lambda_3}d\lambda\sqrt{\frac{\lambda-\lambda_2}{(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)(\lambda+\beta)}}$$

$$27)\qquad 2s=\int^{\lambda_1}d\lambda\sqrt{\frac{(\lambda-\lambda_2)(\lambda+\beta)}{(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)}}\pm\int^{\lambda_3}d\lambda\sqrt{\frac{(\lambda-\lambda_2)(\lambda+\beta)}{(\lambda+a_1)(\lambda+a_2)}}$$

Die Konstante β ist der Bedingung unterworfen

$$\lambda_1+\beta>0\qquad\qquad \lambda_3+\beta<0$$

oder

$$-\lambda_1<\beta<-\lambda_3$$

ihre Bedeutung bleibt dieselbe; sie bestimmt die Richtung der kürzesten Linie.

Auf der Oberfläche des hyperbolischen Paraboloids liegen wiederum zwei sich orthogonal schneidende Systeme von Krümmungslinien; $\lambda_1=\text{const.}$ bedeutet die Krümmungslinien, welche durch den Schnitt mit konfokalen, positiven elliptischen Paraboloiden gebildet werden; wir nennen sie Krümmungslinien der ersten Art; $\lambda_3=\text{const.}$ dagegen liefert als Schnittkurven des hyperbolischen Paraboloids mit den konfokalen negativen elliptischen Paraboloiden die Krümmungslinien der zweiten Art. Ist α der Winkel, welchen das Bogenelement ds_1 der Krümmungslinie der ersten Art mit dem Bogenelement ds der kürzesten Linie einschliesst, so folgt

$$-\beta = \lambda_1 \cos^2\alpha + \lambda_3 \sin^2\alpha$$

$$\text{28)} \qquad tg^2\alpha = -\frac{\lambda_1+\beta}{\lambda_3+\beta}$$

Für $\beta = a_2$ geht die Gleichung 26) über in

$$\text{const} = \int \frac{d\lambda_1}{\lambda_1 + a_2} \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + a_1}} \pm \int \frac{d\lambda_3}{\lambda_3 + a_2} \sqrt{\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3 + a_1}}$$

Nehmen wir $\lambda_2 = -c$ an und setzen wir

$$\frac{\lambda_1 + c}{\lambda_1 + a_1} = u^2 \qquad \frac{\lambda_3 + a_1}{\lambda_3 + c} = v^2$$

so ergiebt sich

$$\text{const} = -\frac{2(a_1 - c)}{c - a_2} \int \frac{u^2\,du}{(1-u^2)(1-m^2u^2)} \pm 2\,\frac{a_1-c}{a_1-a_2} \int \frac{dv}{(1-v^2)(1-n^2v^2)}$$

wobei

$$m^2 = \frac{a_1 - a_2}{c - a_2}\ , \quad n^2 = \frac{c - a_2}{a_1 - a_2}$$

Durch Ausführung der Integration erhalten wir

$$\text{const} = \lg\frac{1+u}{1-u} - \frac{1}{m}\lg\frac{1+mu}{1-mu} \pm \lg\frac{1+v}{1-v} \mp n\lg\frac{1+nv}{1-nv}$$

oder

$$\text{29)} \qquad \text{const} = \lg\frac{1+u}{1-u} \cdot \frac{1 \pm v}{1 \mp v} - n\lg\frac{1+mu}{1-mu}\,\frac{1 \pm nv}{1 \mp nv}$$

Hieraus folgt aber, dass, wenn die kürzeste Linie durch den Anfangspunkt geht, $\lambda_1 = \text{const} = -a_2$ sein muss; zufolge 3) und 28) wird in diesem Falle die kürzeste Linie der vertikale Hauptschnitt.

Die Gleichung, welche sich für $\beta = a_1$ aus 26) durch Jntegration ergiebt, kann sich von 29) nur in den Konstanten unterscheiden und es muss die durch den Anfangspunkt laufende kürzeste Linie zusammenfallen mit dem seitlichen Hauptschnitt. Für $\beta = -\lambda_2$ nimmt 26) die Gestalt an

$$\text{const} = \int \frac{d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda_1 + a_1)(\lambda_1 + a_2)}} \pm \int \frac{d\lambda_3}{\sqrt{(\lambda_3 + a_1)(\lambda_3 + a_2)}}$$

Setzen wir einstweilen

$$\lambda_1 + a_2 = r^2 \qquad \lambda_3 + a_1 = -\varrho^2$$

so wird

$$\text{const} = \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 + a_1 - a_2}} \mp \int \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + a_1 - a_2}}$$

$$\text{const} = \lg\left(r + \sqrt{r^2 + a_1 - a_2}\right) \mp \lg\left(\varrho + \sqrt{\varrho^2 + (a_1 - a_2)}\right)$$

oder
$$\left(\sqrt{r^2+a_1-a_2}+r\right)\left(\sqrt{\varrho^2+a_1-a_2}+\varrho\right)=c$$
$$\left(\sqrt{r^2+a_1-a_2}+r\right)\left(\sqrt{\varrho^2+a_1-a_2}-\varrho\right)=c'$$

Wenn wir für r und ϱ die ursprünglichen Werte wieder einführen, so gehen diese Ausdrücke über in
$$\left(\sqrt{\lambda_1+a_1}+\sqrt{\lambda_1+a_2}\right)\left(\sqrt{-(\lambda_3+a_1)}+\sqrt{-(\lambda_3+a_2)}\right)=c$$
$$\left(\sqrt{\lambda_1+a_1}+\sqrt{\lambda_1+a_2}\right)\left(\sqrt{-(\lambda_3+a_1)}-\sqrt{-(\lambda_3+a_2)}\right)=c'$$

Durch eine kleine Umformung gehen aus diesen die beiden Gleichungen hervor
$$\sqrt{-(\lambda_1+a_1)(\lambda_3+a_1)}+\sqrt{-(\lambda_1+a_2)(\lambda_3+a_2)}=C$$
$$\sqrt{-(\lambda_1+a_1)(\lambda_3+a_1)}-\sqrt{-(\lambda_1+a_2)(\lambda_3+a_2)}=C'$$

die sich zufolge 3) reduzieren lassen auf
$$\frac{x}{\sqrt{\lambda_2+a_1}}+\frac{y}{\sqrt{-(\lambda_2+a_2)}}=C$$
$$\frac{x}{\sqrt{\lambda_2+a_1}}-\frac{y}{\sqrt{-(\lambda_2+a_2)}}=C'$$

wenn wir $\sqrt{a_1-a_2}$ mit in die Konstanten aufnehmen.

Diese Gleichungen stellen aber gerade Linien dar, die den Asymptotenebenen des hyperbolischen Paraboloids parallel laufen. Wir finden demnach, dass durch jeden Punkt auf dem hyperbolischen Paraboloid als kürzeste Linien zwei Gerade gezeichnet werden können, von denen die eine der einen Asymptotenebene, die andere der anderen parallel ist. Aus
$$\operatorname{tg}^2\alpha=-\frac{\lambda_1+\beta}{\lambda_3+\beta}=-\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2}$$

ergiebt sich für den Winkel, den eine solche Gerade mit der Krümmungslinie der ersten Art bildet
$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\left(\pm\sqrt{-\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2}\right)}\right)$$

Es werden demnach die Winkel der beiden von dem Punkte P ausgehenden Geraden durch die in diesem Punkte gezeichneten Krümmungslinien halbiert.

Der specielle Fall $C=C'=0$ liefert die beiden durch den Anfangspunkt gehenden Geraden des horizontalen Hauptschnitts.

Zur weiteren Untersuchung können wir die beiden Fälle unterscheiden
$$\beta \gtrless -\lambda_2$$

Aus
$$\frac{\partial\,\operatorname{tg}^2\alpha}{\partial\beta}=\frac{\lambda_1-\lambda_3}{(\lambda_3+\beta)^2}$$

geht hervor, dass mit wachsendem β der Winkel α wächst. Lassen wir demnach von einem Punkte $\lambda_1\ \lambda_3$ eine kürzeste Linie ausgehen, so wird zufolge

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{\lambda_1 + \beta}{\lambda_3 + \beta}$$

für $\beta = -\lambda_1$ der Winkel $\alpha = 0$; die kürzeste Linie berührt die durch den Punkt $\lambda_1\ \lambda_3$ gezeichnete Krümmungslinie der ersten Art. Wächst β von $-\lambda_1$ bis $-\lambda_2$, so nimmt der absolute Wert von α zu bis zu demjenigen Winkel α, welchen die beiden durch den Punkt $\lambda_1\ \lambda_3$ gehenden Geraden mit der Krümmungslinie der ersten Art bilden; wächst schliesslich β von $-\lambda_2$ bis $-\lambda_3$, so nimmt α zu bis 90^0 und in diesem Falle $\beta = -\lambda_3$ berührt die kürzeste Linie die dem Punkte $\lambda_1\ \lambda_3$ zugehörige Krümmungslinie der zweiten Art.

Jede der Krümmungslinien, welche durch den Punkt $\lambda_1\ \lambda_3$ gelegt werden können, besteht aus zwei getrennten Zweigen; diese schneiden sich in vier Punkten $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$, von denen jeder in einem Quadranten liegt. Es sollen $P_1\ P_2$ auf $\lambda_1 =$ const., $P_1\ P_4$ auf $\lambda_3 =$ const. sich vorfinden. Die durch die Punkte P_1 und P_2 gehenden geraden Linien treffen sich in der Parabel des seitlichen Hauptschnitts, so dass ein unebenes Vierseit entsteht. Für $\beta < -\lambda_2$ laufen alle von P ausgehenden kürzesten Linien in dieses Vierseit (bez. Scheitelvierseit) hinein. Die den Punkten P_1 und P_4 entsprechenden Geraden dagegen schneiden sich auf der Parabel des vertikalen Hauptschnitts und bilden ein unebenes Vierseit, in welches (bez. Scheitelvierseit) von P aus die kürzesten Linien hineinlaufen, für welche $\beta > -\lambda_2$ ist. Da aber zu jedem β zwei Winkel α gehören, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden, so können durch jeden Punkt P zwei kürzeste Linien gezeichnet werden, die demselben Werte β entsprechen. Dieselben bilden mit den Krümmungslinien in diesem Punkte gleiche Winkel. Die Gleichungen der beiden Linien sind durch das doppelte Vorzeichen des einen Integrals unterschieden; denn finden wir bei der Fortbewegung auf der vom Punkte P unter dem Winkel α ausgehenden kürzesten Linie, dass λ_1 und λ_3 gleichzeitig wachsen oder abnehmen, so wird für die dem Winkel $-\alpha$ entsprechende Linie λ_1 wachsen und λ_3 abnehmen oder λ_1 abnehmen und λ_3 wachsen. Dabei ist weiter zu beachten, dass beim Durchgange der kürzesten Linie durch die vertikale, bez. seitliche Hauptschnittsebene, λ_3 bez. λ_1 aus dem Wachsen in das Abnehmen oder umgekehrt übergeht.

Nach dieser Betrachtung schreiten wir zunächst zur Behandlung des Falles

$$c > \beta > a_2$$

wenn wir wiederum $\lambda_2 = -c$ annehmen. Um die elliptischen Integrale 26) auf die Normalform zu bringen, führen wir statt λ_1 und λ_3 neue Variable x_1 und x_3 ein durch die Beziehungen

$$30)\qquad x_1 = \frac{a_1 - \beta}{a_1 - a_2} \cdot \frac{\lambda_1 + a_2}{\lambda_1 + \beta}\,, \quad x_3 = \frac{c - a_2}{a_1 - a_2}\, \frac{\lambda_3 + a_1}{\lambda_3 + c}$$

Dann wird die Gleichung der kürzesten Linie

$$\text{const} = \sqrt{\frac{c - a_2}{a_1 - \beta}} \int_0^{x_1} \frac{(1 - k^2 x)\, dx}{(1 - mx) \sqrt{x(1-x)(1-k^2 x)}} + \frac{a_1 - c}{\sqrt{(a_1 - \beta)(c - a_2)}} \int_0^{x_3} \frac{dx}{(1 - nx) \sqrt{(1-x)(1-k^2 x)}}$$

$$m = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - \beta}\,, \quad n = \frac{a_1 - a_2}{c - a_2}\,, \quad k^2 = \frac{(a_1 - a_2)(c - \beta)}{(a_1 - \beta)(c - a_2)}$$

oder wenn wir

$$x_1 = \sin^2\varphi \qquad x_3 = \sin^2\psi$$

einführen

$$\text{const} = \frac{c-\beta}{\sqrt{(c-a_2)\,(a_1-\beta)}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{\beta-a_2}{\sqrt{(c-a_2)\,(a_1-\beta)}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1-m\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}$$

$$\pm \frac{a_1-c}{\sqrt{(c-a_2)\,(a_1-\beta)}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{(1-n\sin^2\psi)\,\Delta\psi}$$

Da sowohl **m** als n grösser als **1** sind, setzen wir

$$31) \qquad m = k^2\sin^2\operatorname{am}(a+iK')\ , \quad n = k^2\sin^2\operatorname{am}(b+iK')$$

$$\frac{a_1-a_2}{a_1-\beta} = k^2\sin^2\operatorname{am}(a+iK') = \frac{1}{\sin^2\operatorname{am}a}\,,\ \frac{a_1-a_2}{c-a_2} = k^2\sin^2\operatorname{am}(b+iK') = \frac{1}{\sin^2\operatorname{am}b}$$

$$\sin^2\operatorname{am}a = \frac{a_1-\beta}{a_1-a_2} \qquad \sin^2\operatorname{am}b = \frac{c-a_2}{a_1-a_2}$$

$$\cos^2\operatorname{am}a = \frac{\beta-a_2}{a_1-a_2} \qquad \cos^2\operatorname{am}b = \frac{a_1-c}{a_1-a_2}$$

$$\operatorname{tg}^2\operatorname{am}a = \frac{a_1-\beta}{\beta-a_2} \qquad \operatorname{tg}^2\operatorname{am}b = \frac{c-a_2}{a_1-c}$$

$$\Delta^2\operatorname{am}a = \frac{\beta-a_2}{c-a_2} \qquad \Delta^2\operatorname{am}b = \frac{a_1-c}{a_1-\beta}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}a}{\Delta\operatorname{am}a} = \frac{\sqrt{(c-a_2)\,(a_1-\beta)}}{\beta-a_2} \qquad \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}b}{\Delta\operatorname{am}b} = \frac{\sqrt{(a_1-\beta)\,(a-a_2)}}{a_1-c}$$

Setzen wir noch

$$32) \qquad \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u \quad \text{und} \quad \mp\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\psi} = v$$

so ergiebt sich

$$\text{const} = \frac{c-\beta}{\sqrt{(c-a_2)\,(a_1-\beta)}}\,u + \frac{\beta-a_2}{\sqrt{(c-a_2)\,(a_1-\beta)}}\left(u - \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}a}{\Delta\operatorname{am}a}\,\Pi\,(u,\,a+iK')\right)$$

$$\mp \frac{a_1-c}{\sqrt{(c-a_2)\,(a_1-\beta)}}\left(v - \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}b}{\Delta\operatorname{am}b}\,\Pi\,(v,\,b+iK')\right)$$

oder

$$\text{const} = \frac{c-a_2}{\sqrt{(c-a_2)\,(a_1-\beta)}}\,u - \frac{a_1-c}{\sqrt{(c-a_1)\,(a_1-\beta)}}\,v - \Pi\,(u,\,a+iK') + \Pi\,(v,\,b+iK')$$

oder

$$\text{const} = \frac{c-\beta}{\sqrt{(c-a_2)\,(a_1-\beta)}}\,u - \Pi(u,a) - \tfrac{1}{2}\lg\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)}{\sin\operatorname{am}(a+u)} + \Pi\,(v,b) + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\sin\operatorname{am}(b-v)}{\sin\operatorname{am}(b+v)}$$

Aus der Beziehung

$$\sin \mathrm{am}\,(K-u) = \sin \mathrm{coam}\, u = \frac{\cos \mathrm{am}\, u}{\varDelta \,\mathrm{am}\, u}$$

geht aber hervor, dass

$$\sin^2 \mathrm{am}\,(K-b) = \frac{\cos^2 \mathrm{am}\, b}{\varDelta^2 \mathrm{am}\, b} = \frac{a_1-\beta}{a_1-a_2} = \sin^2 \mathrm{am}\, a$$

oder

$$K-b = a$$

gesetzt werden kann. Die Transcendente $\Pi(u, a)$ geht demnach über in

$$\Pi(u, K-b) = -\Pi(u, b) + \frac{k^2 \sin \mathrm{am}\, b \, \cos \mathrm{am}\, b}{\varDelta \,\mathrm{am}\, b}\, u - \tfrac{1}{2} \lg \frac{\varDelta \,\mathrm{am}\,(b-u)}{\varDelta \,\mathrm{am}\,(b+u)}$$

$$= -\Pi(u, b) + \frac{c-\beta}{\sqrt{(c-a_2)(a_1-\beta)}}\, u - \tfrac{1}{2} \lg \frac{\varDelta \,\mathrm{am}\,(b-u)}{\varDelta \,\mathrm{am}\,(b+u)}$$

und da

$$\lg \frac{\sin \mathrm{am}\,(K-b-u)}{\sin \mathrm{am}\,(K-b+u)} = -\lg \frac{\cos \mathrm{am}\,(b-u)}{\cos \mathrm{am}\,(b+u)} + \lg \frac{\varDelta \,\mathrm{am}\,(b-u)}{\varDelta \,\mathrm{am}\,(b+u)}$$

so folgt

$$33)\qquad \mathrm{const} = \Pi(u, b) + \Pi(v, b) + \tfrac{1}{2} \lg \frac{\cos \mathrm{am}\,(b-u)}{\cos \mathrm{am}\,(b+u)}\, \frac{\sin \mathrm{am}\,(b-v)}{\sin \mathrm{am}\,(b+v)}$$

oder

$$\mathrm{const} = (u+v)\, Z(b) + \tfrac{1}{2} \lg \frac{\Theta(u-b)\ \Theta(v-b)\ \cos \mathrm{am}\,(b-u) \sin \mathrm{am}\,(b-v)}{\Theta(u+b)\ \Theta(v+b)\ \cos \mathrm{am}\,(b+u) \sin \mathrm{am}\,(b+v)}$$

Drücken wir sin am und cos am durch die Jacobi'schen Funktionen Θ_1 und Θ_2 aus, so erhalten wir schliesslich für die Gleichung der kürzesten Linie

$$34)\qquad \mathrm{const} = (u+v)\, Z(b) + \tfrac{1}{2} \lg \frac{\Theta_2(b-u)\ \Theta_1(b-v)}{\Theta_2(b+u)\ \Theta_1(b+v)}$$

Die Grösse b ist definiert durch

$$b = \int_0^{\sqrt{\frac{c-a_2}{a_1-a_2}}} \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(1-\mathfrak{z}^2)(1-k^2\mathfrak{z}^2)}}$$

Für

$$a_1 > \beta > c$$

würden die Substitutionen

$$35)\qquad x_1 = \frac{\beta-c}{\beta-a_2}\, \frac{\lambda_1+a_2}{\lambda_1+c}\ ,\quad x_3 = \frac{a_1-a_2}{\beta-a_2}\, \frac{\lambda_3+\beta}{\lambda_3+a_1}$$

zu dem Resultate führen

$$36)\qquad \mathrm{const} = (u+v)\, Z(a) + \tfrac{1}{2} \lg \frac{\Theta_1(a-u)\ \Theta_2(a-v)}{\Theta_1(a+u)\ \Theta_2(a+v)}$$

Die Parameter a und b sind durch die Beziehung verbunden

$$\sin^2 \mathrm{am}\, a + \sin^2 \mathrm{am}\, b = 1.$$

Wird $\beta < a_2$, so haben wir in 34) nur β und a_2 zu vertauschen, während für $\beta > a_1$ dieser Tausch in 36) zwischen β und a_1 einzutreten hat.

Die Bogenlänge der kürzesten Linie wird in den Specialfällen $\beta = a_1$, $\beta = a_2$ und $\beta = c$ durch elementare Integrale ausgedrückt, in allen übrigen Fällen dagegen sind die Integrale elliptische; wir werden nur diese weiter entwickeln. Für $c > \beta > a_2$ nimmt die Gleichung 27) für die Bogenlänge durch die Substitutionen 30) die Form an

$$2s = \frac{\beta - a_2}{\sqrt{(c-a_2)(a_1-\beta)}}\left[(c-\beta)\int_0^{x_1}\frac{dx}{(1-mx)\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} + (\beta-a_2)\int_0^{x_1}\frac{dx}{(1-mx)^2\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}\right]$$

$$\pm \frac{a_1 - c}{\sqrt{(c-a_2)(a_1-\beta)}}\left[(c-\beta)\int_0^{x_3}\frac{dx}{(1-nx)\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} + (a_1-c)\int_0^{x_3}\frac{dx}{(1-nx)^2\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}\right]$$

$$m = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - \beta},\quad n = \frac{a_1 - a_2}{c - a_2},\quad k^2 = \frac{(a_1 - a_2)(c-\beta)}{(a_1-\beta)(c-a_2)}$$

oder, wenn wir einführen

$$x_1 = \sin^2\varphi \quad , \quad x_3 = \sin^2\psi$$

$$2s\sqrt{(c-a_2)(a_1-\beta)} = 2(\beta-a_2)(c-\beta)\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-m\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} + 2(\beta-a_2)^2\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-m\sin^2\varphi)^2\,\Delta\varphi}$$

$$\pm\; 2(a_1-c)(c-\beta)\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{(1-n\sin^2\psi)\,\Delta\psi} \pm 2(a_1-c)^2\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{(1-n\sin^2\psi)^2\,\Delta\psi}$$

Mit Benutzung der oben abgeleiteten Beziehung

$$\frac{2(p-1)(p-k^2)}{p^2}\int_0^{\sigma}\frac{d\sigma}{(1-p\sin^2\sigma)^2\,\Delta\sigma} = \frac{\sin\sigma\cos\sigma\,\Delta\sigma}{1-p\sin^2\sigma} - \left(\frac{k^2}{p^2}-\frac{1}{p}\right)\int_0^{\sigma}\frac{d\sigma}{\Delta\sigma} - \frac{1}{p}\int_0^{\sigma}\Delta\sigma\,d\sigma$$

$$-\frac{p(2-p)+k^2(2p-3)}{p^2}\int_0^{\sigma}\frac{d\sigma}{(1-p\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma}$$

verwandelt sich dieser Wert für s in

$$2s\sqrt{(c-a_2)(a_1-\beta)} = (\beta-a_2)(-a_1-a_2+c+\beta)\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-m\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}$$

$$\mp(a_1-c)(a_1+a_2-c-\beta)\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{(1-n\sin^2\psi)\,\Delta\psi} + (a_1-\beta)(\beta-a_2)\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \mp (c-a_2)(a_1-c)\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}$$

$$-(a_1-\beta)(c-a_2)\int_0^{\varphi}\Delta\varphi\,d\varphi \pm (c-a_2)(a_1-\beta)\int_0^{\psi}\Delta\psi\,d\psi$$

$$+(c-a_2)(a_1-a_2)\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-m\sin^2\varphi} \mp (a_1-\beta)(a_1-a_2)\frac{\sin\psi\cos\psi\,\Delta\psi}{1-n\sin^2\psi}$$

oder zufolge 31) und 32)

$$2s\sqrt{(c-a_2)(a_1-\beta)} = (\beta-a_2)(-a_1-a_2+c+\beta)\left(u - \frac{\sqrt{(c-a_2)(a_1-\beta)}}{\beta-a_2}\Pi(u, a+iK')\right)$$

$$+ (a_1-c)(a_1+a_2-c-\beta)\left(v - \frac{\sqrt{(c-a_2)(a_1-\beta)}}{a_1-c}\Pi(v, b+iK')\right)$$

$$+ (a_1-\beta)(\beta-a_2)u + (c-a_2)(a_1-c)v - (a_1-\beta)(c-a_2)E(u)+E(v))$$

$$+ (c-a_2)(a_1-a_2)\frac{\sin am\,u \cos am\,u \varDelta am\,u}{1-m\sin^2 am\,u} + (a_1-\beta)(a_1-a_2)\frac{\sin am\,v \cos am\,v \varDelta am\,v}{1-n\sin^2 am\,v}$$

Durch Reduktion von

$$\Pi(u, a+iK') \quad \text{und} \quad \Pi(v, b+iK') \quad \text{auf} \quad \Pi(u, a) \quad \text{und} \quad \Pi(v, b)$$

ergiebt sich

$$2s\sqrt{(c-a_2)(a_1-\beta)} = \sqrt{(c-a_2)(a_1-\beta)}\,(a_1+a_2-c-\beta)\left(\Pi(u,a) - \Pi(v,b)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\lg\frac{\sin am(a-u)}{\sin am(a+u)} - \frac{1}{2}\lg\frac{\sin am(b-v)}{\sin am(b+v)}\right)$$

$$+ (a_1-\beta)(\beta-a_2)u + (c-a_2)(a_1-c)v - (a_1-\beta)(c-a_2)\left(E(u) + E(v)\right)$$

$$+ (c-a_2)(a_1-a_2)\frac{\sin am\,u \cos am\,u \varDelta am\,u}{1-m\sin^2 am\,u} + (a_1-\beta)(a_1-a_2)\frac{\sin am\,v \cos am\,v \varDelta am\,v}{1-n\sin^2 am\,v}$$

Ersetzen wir noch a durch b—K, so folgt

$$2s\sqrt{(c-a_2)(a_1-\beta)} = -\sqrt{(c-a_2)(a_1-\beta)}\,(a_1+a_2-c-\beta)\left(\Pi(u,b) + \Pi(v,b)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\lg\frac{\cos(b-u)}{\cos(b+u)}\frac{\sin(b-u)}{\sin(b+u)}\right) + (c-a_2)(a_1-c)(u+v) - (a_1-\beta)(c-a_2)\left(E(u) + E(v)\right)$$

$$+ (c-a_2)(a_1-a_2)\frac{\sin am\,u \cos am\,u \varDelta am\,u}{1-m\sin^2 am\,u} + (a_1-\beta)(a_1-a_2)\frac{\sin am\,v \cos am\,v \varDelta am\,v}{1-n\sin^2 am\,v}$$

oder zufolge 33)

$$2\sqrt{(c-a_2)(a_1-\beta)}\,(s-s_0) = (c-a_2)(a_1-c)(u+v) - (a_1-\beta)(c-a_2)\left(E(u)+E(v)\right)$$

$$+ (c-a_2)(a_1-a_2)\frac{\sin am\,u \cos am\,u \varDelta am\,u}{1-m\sin^2 am\,u} + (a_1-\beta)(a_1-a_2)\frac{\sin am\,v \cos am\,v \varDelta am\,v}{1-n\sin^2 am\,v}$$

Es ist nun

$$(c-a_2)(a_1-a_2)\frac{\sin am\,u \cos am\,u \varDelta am\,u}{1-m\sin^2 am\,u} = (c-a_2)(a_1-\beta)\frac{k^2\sin am\,u \cos am\,u \varDelta am\,u \sin^2 am(a+iK')}{1-k^2\sin^2 am(a+iK')\sin^2 am\,u}$$

$$= (c-a_2)(a_1-\beta)\left(Z(u) - \frac{1}{2}Z(u-a-iK') - \frac{1}{2}Z(u+a+iK')\right)$$

$$(a_1-\beta)(a_1-a_2)\frac{\sin am\,v \cos am\,v \varDelta am\,v}{1-n\sin^2 am\,v} = (c-a_2)(a_1-\beta)\frac{k^2\sin am\,v \cos am\,v \varDelta am\,v \sin^2 am(b+iK')}{1-k^2\sin^2(b+iK')\sin^2 am\,v}$$

$$= (c-a_2)(a_1-\beta)\left(Z(v) - \tfrac{1}{2}Z(v-b-iK') - \tfrac{1}{2}Z(v+b+iK')\right)$$

so dass wir erhalten, wenn wir noch an Stelle der Transcendenten $E(u)$ und $E(v)$ die Funktion Z einführen

$$2\sqrt{\frac{a_1-\beta}{c-a_2}}(s-s_0)=\left((a_1-c)-(a_1-\beta)\frac{E}{K}\right)(u+v)-\frac{1}{2}(a_1-\beta)\Big(Z(u-a-iK')+Z(u+a+iK')$$

$$+Z(v-b-iK')+Z(v+b+iK')\Big)$$

Für die anderen Werte von β würden sich die Resultate nur in den Konstanten unterscheiden.

Um die laufenden Koordinaten der kürzesten Linie in dem Falle $c>\beta>a_2$ durch die Variabeln u und v auszudrücken, führen wir in 3) die Grössen x_1 und x_3 an Stelle von λ_1 und λ_3 ein; dadurch gehen diese Gleichungen über in

$$x^2=\frac{(a_1-a_2)(a_1-c)^2}{c-a_2}\quad\frac{(1-x_1)\,x_3}{(1-m x_1)(1-n x_3)}$$

$$y^2=\frac{(a_1-a_2)(\beta-a_2)(c-a_2)}{a_1-\beta}\quad\frac{x_1(1-x_3)}{(1-m x_1)(1-n x_1)}$$

$$2z-c=(a_1-a_2)\left(\frac{1-x_3}{1-n x_3}-\frac{1-x_1}{1-m x_1}\right)$$

Es ist aber

$$x_1=\sin^2\mathrm{am}\,u,\quad 1-x_1=\cos^2\mathrm{am}\,u,\qquad x_3=\sin^2\mathrm{am}\,v,\quad 1-x_3=\cos^2\mathrm{am}\,v$$

$$(1-m x_1)(1-n x_3)=(1-k^2\sin^2\mathrm{am}(a+iK')\sin^2\mathrm{am}\,u)(1-k^2\sin^2\mathrm{am}(b+iK')\sin^2\mathrm{am}\,v)$$

Benutzen wir die Beziehung

$$\left(\frac{\Theta(u)\;(\Theta(a)}{\Theta(v)}\right)^2=\frac{\Theta(u+a)\;\Theta(u-a)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\,\sin^2\mathrm{am}\,u}$$

so wird

$$(1-m x_1)(1-n x_3)=\frac{\Theta(u+a+iK')\;\Theta(u-a-iK')\;\Theta(v+b+iK')\;\Theta(v-b-iK')}{\Theta^2(u)\;\Theta^2(a+iK')\;\Theta^2(v)\;\Theta^2(b+iK')}\,\Theta^4(0)$$

$$=\frac{\Theta_1(a+u)\;\Theta_1(a-u)\;\Theta_1(b+v)\;\Theta_1(b-v)}{\Theta_1^2(a)\;\Theta_1^2(b)\;\Theta_1^2(u)\;\Theta_1^2(v)}\,\Theta^4(0)$$

$$=\frac{\Theta_2(u+b)\;\Theta_2(u-b)\;\Theta_1(v+b)\;\Theta_1(v-b)}{\Theta_2^2(b)\;\Theta_1^2(b)\;\Theta^2(u)\;\Theta^2(v)}\,\Theta^4(0)$$

Wir erhalten demnach für die laufenden Koordinaten die Werte

$$x^2=\frac{(a_1-\beta)(a_1-c)^2\;\Theta_2^2(b)\;\Theta_1^2(b)\;\Theta_2^2(u)\;\Theta_1^2(v)}{(c-\beta)\;\Theta^2(K)\;\Theta^2(0)\;\Theta_2(u+b)\;\Theta_2(u-b)\;\Theta_1(v+b)\;\Theta_1(v-b)}$$

$$y^2=\frac{(\beta-a_2)(c-a_2)^2\;\Theta_1^2(b)\;\Theta_2^2(b)\;\Theta_1^2(u)\;\Theta_2^2(v)}{(c-\beta)\;\Theta_2(K)\;\Theta^2(0)\;\Theta_2(u+b)\;\Theta_2(u-b)\;\Theta_1(v+b)\;\Theta_1(v-b)}$$

$$2z-c=\frac{(a_1-\beta)(c-a_2)\big(\Theta_1^2(b)\;\Theta_2^2(v)\;\Theta_2(u+b)\;\Theta_2(u-b)-\Theta_2^2(b)\;\Theta_2^2(u)\;\Theta_1(v+b)\;\Theta_1(v-b)\big)}{(c-\beta)\;\Theta(K)\;\Theta_2(u+b)\;\Theta_2(u-b)\;\Theta_1(v+b)\;\Theta_1(v-b)}$$