Über die mehrdimensionale Geometrie.

Die abstrakte Wissenschaft kennt keine Grenzen.
Graßmann, Ausdehnungslehre.

I. Historische Orientierung.

Nur selten gelingt es der reinen Mathematik, über den Kreis ihrer Jünger hinaus Interesse hervorzurufen, und in diesen seltenen Fällen ereilt sie noch meist das Verhängnis, mißverstanden zu werden. So geschah es mit der Rektifikation der Kreislinie, mit der Trisektion des Winkels, so droht es noch heute mit der wunderbaren Schöpfung Graßmann's und Riemann's, mit der Geometrie n-facher Mannigfaltigkeiten zu geschehen. Der Laie vermutet in diesem Falle metaphysische Hypothesen, wo kühne Verallgemeinerungen unternommen werden, für die Ergebnisse der reinen, deductiven Geometrie fahndet er nach Objekten der Sinnenwelt, kurz er nimmt Abstraktion für Spekulation.

Allerdings ist das mathematische Problem eines n-dimensionalen Raumes zuerst vom Philosophen in Angriff genommen worden. Bereits vor etwa drei Jahrhunderten trägt Henry More meist mit einer gewissen Ängstlichkeit die Annahme einer vierten Dimension, einer Dimension der Geisterwelt vor,[1]) erregt aber damit wenig Beifall bei den zeitgenössischen Forschern. Trotzdem glimmte seither das Problem an der Gemarkung von Mathematik und Philosophie fort und derselbe Leibnitz, der More in einem Briefe an Clarke wegwerfend einen »im übrigen« (d'ailleurs) von guten Absichten geleiteten Mann nennt, erwähnt selbst gelegentlich der Abhandlung seiner geometrischen Charakteristik die Berechtigung, Dinge in den Bereich der Geometrie zu ziehen, die außerhalb unseres Vorstellungskreises liegen. »Je nai qu' une remarque à ajouter, c'est que je vois qu'il est possible, d'étendre la caractérique jusqu'aux choses qui ne sout pas sujettes à l'imagination, mais,« fügt er wenige Zeilen später hinzu, »cela est trop important et va trop loin pour que je me puisse expliquer là-dessus en peu de paroles.«[2]) Kant hat sodann durch seine bewunderungswürdigste Leistung, durch die Unterscheidung zwischen dem Ding an sich und seiner Erscheinung, die Möglichkeit geboten, sich mit Gebilden ohne Rücksicht auf ihre reale Existenz zu beschäftigen. Allerdings sind seine

[1]) Zimmermann: Henry More und die vierte Dimension des Raumes. Akad. d. Wissensch. in Wien, phil.-hist. Klasse, Bd. 98.
[2]) citiert aus Graßmann: geometrische Analyse.
[3]) z. B. Helmholz u. Hartmann.

Hypothesen über den Raum noch keineswegs endgiltig von der Wissenschaft acceptiert: namhafte Philosophen und Naturforscher wenden sich entschieden gegen dieselben. Insbesondere hat Kant's Behauptung, der Raum sei a priori gegeben, vielfach Widerspruch gefunden, doch vollzieht oder erleichtert er zumindest durch diese These den Übergang zu einer polydimensionalen, streng aprioristischen, absoluten Geometrie. Über die reale Existenz der 4. Dimension äußert er behutsam genug: »so viel zur Zeit noch bemerkt worden, ist kein Raum gefunden worden, der mehr als drei Abmessungen hätte.[1])

Eine wesentliche Förderung erhielt unser Gegenstand durch die Einführung der imaginären Zahlen. Von Cardan, Descartes, Wallis hie und da erwähnt, von Euler vielfach benützt und dennoch verleugnet, — er nennt Ausdrücke wie $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$ etc. Zahlen, die nichts sind; sie sind weder größer noch kleiner als Nichts; und auch nicht einmal Nichts selbst, weswegen sie für unmöglich genommen werden müssen[2]) — wurden sie um die Wende des 18. Jahrhundertes von Gauß zu einem höchst fruchtbaren System der complexen Größen benützt. Durch die Einführung solcher nicht »realer« Zahlen und Größen in die Algebra, durch ihre graphische Darstellung war gleichsam ein Präjudiz für die mehrdimensionale Geometrie geschaffen worden, das ihr nur vorteilhaft sein konnte. Aber ebenso wie die höchst ungewohnte Denkweise mit imaginären Zahlen nur schrittweise Anerkennung selbst bei den Gelehrten von Fach finden konnte, es sei hier an die heftigen Ausfälle Dührings gegen Gauß erinnert, — ebenso oder noch zäher war und ist der Widerstand gegen die polydimensionale Geometrie. —

Graßmann[3]) hatte den Mut oder vielmehr das Unglück, ihr erster Vorkämpfer zu sein. Sein Werk wurde jedoch von den Zeitgenossen fast gar nicht beachtet, weshalb sich Graßmann von der Mathematik der Altertumforschung zuwandte. Inzwischen haben Gauß, Lobatschefsky u. s. w. den Grund zu einer absoluten Geometrie gelegt; welche Förderung dieselbe für den »höheren Raum« hatte, ist klar. Riemann[4]) und gleich darauf Helmholtz[5]) hatten inzwischen die Ideen Graßmann's, unabhängig von demselben, wenig variert, wieder aufgenommen; seither ist die mehrdimensionale Geometrie ein selbständiges Kapitel der Mathematik worden, deren Literatur heute mehrere Hunderte von Arbeiten moderner Denker umfaßt.[6])

II. Über die Existenz des mehrdimensionalen Raumes.

Die erdrückende Mehrheit dieser Arbeiten läßt die Frage, ob dem höher-dimensionalen Raum Realität zukomme, unbeantwortet, die ganze

---

[1]) Citiert aus Kant, Kritik der reinen Vernunft, Reclam-Ausgabe p. 50; übrigens hat Kaut in der zweiten Ausgabe 1887 selbst diese verklausulierte Bemerkung unterdrückt.

[2]) Euler, Vollständige Anleitung zur Algebra, 1770, citiert aus der Reclam-Ausgabe, p. 61.

[3]) Graßmann's Ausdehnungslehre 1844.

[4]) Riemann: Über die Hypotesen, dte der Geometrie zugrunde liegen. 1856.

[5]) Helmholtz: Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen. 1866.

[6]) Ein Verzeichnis findet sich in Schlegel: Sur le developpement et l'état actuel de la Géometrie á n Dimensions. Enseign. Math; 1900.

Theorie wird sozusagen jenseits von Existenz und Nicht-Existenz abgeleitet. Schon Graßmann betont ausdrücklich den rein abstrakten Charakter seiner Untersuchungen, er behandelt eine von allen räumlichen Anschauungen gelöste rein mathematische Wissenschaft; die Stereometrie ist ihm sonach nur eine specielle Anwendung auf den unserer Sinnenwelt zugänglichen Raum. Für ihn sind Punkt, Gerade, Ebene u. s w. »Elemente,« die er glücklich mit den Elementen der Kombinationslehre vergleicht, wo ja auch nicht über »Existenz« oder Beschaffenheit spekuliert wird. Die Hypothesen, die in der neueren Physik aufgestellt werden, wollen ja auch nicht mehr Abbilder der Wirklichkeit sondern nur ihre Analogien sein. Daher kann eine Hypothese heute nicht mehr als »falsch« erklärt und durch eine »richtige« ersetzt werden, man kann vielmehr nach Bedarf anstatt einer angenommenen Analogie eine praktischere, den Erscheinungen sich noch besser anschmiegende Analogie, die auch nur in unseren Gedanken existiert, einführen. Ebenso existieren die vierte Dimension und die Gesetze der vierdimensionalen Größen nicht im Raume, nicht in der Anschauung, sondern im Verstande oder — im »Abstraktionsgebiet.«[1])

Durch reine Gedankenprocesse sind wir seit Langem schon imstande, uns einen Raum dreier Dimensionen zu konstruieren, der von dem Raume, zu dem wir lediglich durch Heranziehung der Sinne gelangen würden, wesentlich verschieden ist. So erdenkt sich Lobatschewsky eine »Pangeometrie«, in der man durch einen Punkt mehr als eine Parallele zu einer gegebenen Geraden ziehen kann. Die Summe der Winkel eines Dreiecks der Pangeometrie ist kleiner als 180°.[2]) Strenge genommen ist aber selbst der alte ehrwürdige Euclid'sche Raum nicht adäquat dem Raum unserer Wahrnehmungen.[3]) So zum Beispiel ist der wahrgenommene Raum auch vom freiesten Berggipfel aus betrachtet endlich, während die Euclid'sche Geometrie einen abstrakten, unendlichen Raum annimmt. Ohne zu verkennen, »daß die empirische Beobachtung der Mathematik große Dienste leistet, muß doch zugestanden werden, daß der Rohstoff, den uns die sinnlichen Eindrücke liefern, durch unseren Geist verarbeitet wird, und daß das subjektive Element in der reinen Mathematik den Vorrang vor dem objektiven hat.«[4]) In der Tat: Haben wir nicht einen vollkommen klaren Begriff von der geraden Linie, ohne sie je streng in der Natur angetroffen zu haben? Alles in Allem genommen ist also der Raum der Sinnenwelt keine Denknotwendigkeit, die von der Erfahrung nicht bestätigten oder gar ihr widersprechenden dreidimensionalen und mehrdimensionalen Ausdehnungen repräsentieren immerhin Denkmöglichkeiten.

Sowie aber die Denkmöglichkeit der n-fachen Mannigfaltigkeit feststeht, kann man dieselbe den Operationen der logischen Denkgesetze

---

[1]) Scheffler, Irrige Ansichten über den vierdimensionalen Raum, Zeitschrift für math.-naturw. Unterricht, Bd. 11.

[2]) Lobatschewsky: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Berlin 1840.

[3]) Hartwig nennt ihn am VIII. deutsch-österreichischen Mittelschultage ein Zerrbild der Wirklichkeit.

[4]) Veronese: Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen, übersetzt von Schepp, Leipzig 1894, p. XV.

unterwerten. Dadurch entsteht die Metageometrie,[1]) eine in sich abgeschlossene Wissenschaft, die von der Außenwelt ebensowenig eine Anleihe machen muß wie die Algebra. Wir unterwerfen ja auch Potenzen mit gebrochenen Exponenten unbekümmert um ihre Deutung den formellen Gesetzen des Rechnens.

Dabei hat es aber auch an beachtenswerten Versuchen nicht gefehlt, der vierten Dimension Realität zu verleihen. Um dieselben würdigen zu können, müssen wir vorerst den zwei- und eindimensionalen Raum näher betrachten. Helmholtz erinnert daran, daß Wesen, die verurteilt wären, in der zweiten Dimension eingesponnen zu sein, sogenannte »plattgedrückte Intelligenzen«, der dritten Dimension unbedingt jede Realität absprechen müßten. Für diese Flächenwesen wären die uns geläufigen Euclid'schen Axiome auf den Kopf gestellt. Zwischen je zwei Punkten wäre auch dann eine kürzeste Linie möglich, doch müsste dieselbe nicht notwendig eine Gerade sein — Helmholtz nennt sie eine geradeste Linie. Ja noch mehr: Während Ebenen-Bewohner immer, Kegelflächen- und Cylinderflächen-Bewohner nur bei sehr specieller Wahl der beiden Punkte zur Geraden vordringen, fehlt der Begriff der Geraden dem Ellipsoid-Bewohner überhaupt. »Schon in dem einfachen Falle der Kugel würden zwischen je zwei Polen sich unendlich viele geradeste Linien legen lassen, paralelle geradeste Linien würde man gar nicht ziehen können, und die Summe der Winkel im Dreieck würde von zwei Rechten verschieden sein; jene Wesen würden ihren Raum ebenfalls unbegrenzt, aber endlich ausgedehnt finden, und bei der Ausbildung einer Geometrie würden sie andere geometrische Axiome haben als wir, aber sie könnten noch immer ihre Raumgebilde beliebig auf der Kugel verschieben ohne deren Dimension zu ändern.«[2]) Aber selbst diese Verschiebung hört auf bei den Flächen nichtkonstanter Krümmung. Auf dem Hyperboloide zum Beispiel kann der einfachste Linienzug nicht ohne Biegung, Zerrung, Dehnung fortbewegt werden. Ganz zu geschweigen von den Flächen mit Ecken und Kanten. Um ein Dreieck vom Kegelmantel auf die Kegelbasis zu bringen, müssen erst seine Seiten an der Peripherie des Grundkreises gebrochen und sofern sie nicht Erzeugenden des Kegels angehören, gerade gebogen werden. Noch durchsichtiger wird das, worauf es hier ankommt, bei Gebilden erster Dimensionen. Auf der Geraden läßt sich ohneweiters ohne jede Deformation die Strecke AB verschieben, ebenso das Bogenstück AB auf der Kreisperipherie gleicher Krümmung. Aber schon auf der Ellipse wird die Verschiebung nur durch Zerrung des Bogenteilchens möglich. Also wieder geht die Verschiebung ohne Deformation nur auf Gebilden mit konstantem Krümmungsmaße vor sich. Die Gerade — im zweidimensionalen Raume die Ebene — sind specielle Fälle mit dem Krümmungsmaße Null.

Nun lehrt uns die Anschauung, daß die Verschiebungen in unserem dreidimensionalen Raume ohne jede nachweisbare Deformation erfolgen, daraus folgern wir, daß unser Raum ein konstantes Krümmungs-

---

[1]) Der Name wurde ursprünglich ironisch von Gegnern dieser Disciplin gebraucht, jedoch vom Helmholtz acceptiert. Vergl. Helmholtz: Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze. Gesammelte Werke Bd. 2, p. 640.

[2]) Königsberger: Hermann v. Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik. Heidelberg 1895.

maß besitze. Weil gerade so wie für die Ebene der Satz, durch einen Punkt ist nur eine Parallele zu einer Geraden möglich, bisher auch erfahrungsgemäß für den Raum Giltigkeit hat, so setzen wir das räumliche Krümmungsmaß mit Recht gleich 0. Den Raum, den wir wahrnehmen, hat also gemäß den bis heute gesammelten Erfahrungstatsachen das konstante Krümmungsmaß Null. Aber der physische Raum muß nicht notwendig mit dem Raume der Anschauung, der mit unseren Sinnen erfaßt, Sinnestäuschungen unterworfen ist, übereinstimmen. »Der physische Raum und der Raum der Anschauung könnten sich zu einander auch verhalten wie der wirkliche Raum zu seinem Abbild in einem Konvexspiegel.«[1]) Wir könnten ja auch der plattgedrückten »Kugelintelligenz« Gläser aufsetzen, wodurch die Kugelflächen sich auf ihrer Netzhaut als Ebene abbilden, projezieren würde. Es wäre also voreilig zu behaupten, der pseudosphärische Raum sei nicht vorhanden; er ist nur unseren Sinnen nicht zugänglich. Wäre das menschliche Auge anders organisiert, so würden wir einen anderen »äußeren« Raum sehen, dem wir andere Axiome unterlegen müßten. — Aber nicht einmal das konstante Krümmungsmaß Null ist von der Erfahrung über jeden Zweifel hinaus sichergestellt .... »aber das Resultat der geometrischen und astronomischen Messungen, welche uns die Winkelsumme eines Dreiecks nur nahezu und streng gleich zwei rechten Winkeln ergeben können, berechtigt uns offenbar nur zu schließen, daß das Krümmungsmaß unseres Raumes sehr klein ist; daß es in Wirklichkeit verschwindet, läßt sich nicht beweisen ....«[2]) Dem Raume ein Krümmungsmaß beilegen, heißt eigentlich schon, die nächst höhere, also vierte Dimension einführen, denn jedes Gebilde hat Krümmungsmaße nur in Bezug auf die nächst höhere Dimension — die krumme ebene Linie nur in Bezug auf die durchgelegte Ebene, die krumme Fläche nur in Bezug auf den Raum. Um das Krümmungsmaß des Raumes an einer Stelle festzustellen, müßte es nach Riemann empirisch durch Messung festgestellt werden, das heißt: wir müßten einen eudklid'schen Raum durchlegen, uns selbst den Standpunkt in dieser vierten Dimension erwählen und untersuchen, wie groß der Radius der Kugel sei, die an der betreffenden Stelle möglichst viele Punkte des dreidimensionalen Raumes enthält. Der reciproke Wert dieses Radius gibt uns dann ein Maß der Krümmung des Raumes. Diese Kugel ist selbstverständlich hiebei als Körper, nicht als Oberfläche zu denken. Daß wir der Kugel, die ganz in der vierten Dimension verläuft und unseren Raum nur quasi streift, in unserer Erfahrung noch nie begegnet sind und mit angestrengtesten Vorstellungsversuchen nicht beikommen können, ist kein stichhältiger Grund gegen ihre mögliche Existenz.

In überaus launiger Weise bespricht Fechner[3]) die Möglichkeit einer vierten Dimension. »Würde man,« sagt er, »ein zweidimensionales Wesen — etwa einen Schatten[4]) — im dreidimensionalem Raume fortbewegen, so würde dasselbe diese Ortsveränderung sich nur als Zeit-

---

[1]) Helmholtz: Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze, Bd. II. p. 652.

[2]) Königsberger. Helmholtz' Untersuchungen.

[3]) Fechuer. Kleinere Schriften: p. 260. u. s. w., herausgegeben unter dem Pseudonym Dr. Mises.

[4]) In einem anderen Aufsatze desselben Werkchens unterhält sich Fechner mit dem Gedanken, dem Schatten Bewußtsein zuzuschreiben.

veränderung zu Bewußtsein bringen können.« »Umgekehrt,« schließt Fechner weiter, »erklärt sich jede Zeitveränderung, die wir warnehmen, aus dem Mangel unserer Sinneswerkzeuge, die Bewegung, die wir tatsächlich durch den vierdimensionalen Raum machen, als Ortsveränderungen zu erkennen.«

Köstlich ist es, wie Fechner diesen Gedanken weiter ausspinnt. Die jeweilige Beschaffenheit der Welt, alle Ereignisse sind ihm nur Querschnitte des vierdimensionalen Prismas, das wir längs seiner Höhe durchwandern. Speise und Trank stehen von Distanz zu Distanz bereit, wir müssen nur beim Vorbeireisen darnach langen. Die noch bizarreren Erörterungen Zoellner's und der mathematischen Spiritisten mögen besser ganz außer Betracht bleiben. Naturgemäß konnten solche zu weit getriebene Analogien nicht ohne Zurückweisung bleiben, wenn schon die Polemik dann und wann mehr leidenschaftlich als wissenschaftlich wurde. ». . . . . Gegen alle solche Versuche (es ist die Rede vom vier- und fünfdimensionalen System) muß man sich wahren,« schreibt Lotze,[1]) »sie sind Grimassen der Wissenschaft, die durch völlig nutzlose Paradoxien das gewöhnliche Bewußtsein einschüchtern und über sein gutes Recht in der Begrenzung der Begriffe täuschen.« Noch 1880 spricht Gilles[2]) in schärfsten Worten der Ausdehnungslehre jedwede Berechtigung ab, sie trage die Denkwidrigkeit an der Stirne, ihre Anhänger seien Bahnbrecher des Aberglaubens! — Bei diesen Meinungsverschiedenheiten war es das für die Sache Ersprießlichste, unbekümmert um Auslegungen die abstrackte Geometrie abzuleiten, ihre Sätze unabhängig von der Realität, unter lediglicher Beachtung des Satzes vom Widerspruch zu formulieren.

III. Ueber die polydimensionalen Körper.

Hatte man eine Abstrakte Ausdehnung vierter Ordnung geschaffen, so galt es nunmehr, dieselben mit Gebilden zu beleben; und da ist es äußerst anziehend zu verfolgen, wie mannigfach die zu diesem Behufe eingeschlagenen Wege waren, wie dieselben Ideen fast gleichzeitig unabhängig von einander von den Mathematikern der verschiedenen Länder und verchiedenen Richtungen (Analytiker und Synthetiker) erfaßt und ausgestaltet wurden, wie sehr die Ergebnisse ihrer Untersuchungen übereinstimmten. — Durège[3]) geht vom Begriffe des »einfachen« Körpers aus, seine Methode ist die synthetische. Er nimmt ein überall konvexes ebenes Polygon an, dessen Ecken gerade Linien in den Raum hinaus beschreiben. Die Endpunkte dieser Geraden mögen wieder in einer Ebene liegen. Ein auf diese Weise erzeugter Körper möge mit Durège ein einfacher Körper genannt werden. Es ist leicht einzusehen, daß wenn die vom ersten konvexen Polygon in den Raum gesandten Geraden unter einander parallel sind und das abschließende ebene Polygon ebenfalls parallel zum Ursprungs- Polygon gelegt wird, ein spezieller Fall des einfachen Körpers, das Prisma resultiert. Schneiden sich die ausgesandten Strahlen in einem Punkte des Raumes, so degeneriert das

---

[1]) Lotze: Logik p. 217. citiert aus Veronese.
[2]) Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht. XI. 1880 p. 5.—24.
[3]) Durège: Ueber Körper von vier Dimensionen. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, math.-naturw. Klasse, 1881.

zweite Polygon zu einem Punkte, der einfache Körper ist zur Pyramide geworden. — Die Anzahl der Begrenzungsstücke des ersten Polygons werde mit n bezeichnet, die des zweiten Polygons mit N und die des ganzen einfachen Körpers mit n'. —

Die angehängten Indices 0, 1, 2 sollen jeweils besagen, ob Ecken, Kanten oder Flächen gemeint werden. — Dann ist

$$\begin{aligned} n'_0 &= n_0 + N_0 \\ n'_1 &= n^1 + N_1 + n_0 \\ n'_2 &= 2 + n_1 \end{aligned} \tag{1}$$

daraus folgt

$$n'_0 - n'_1 + n'_2 = N_0 - N_1 + 2 \tag{2}$$

Da aber das Polygon ebensoviel Seiten als Ecken hat, so muß man $N_0 = N_1$ setzen und die Formel (2) geht über in

$$n'_0 - n'_1 + n'_2 = 2 \tag{3}$$

Diese Gleichung ist aber nichts anderes als die Euler'sche Relation, allerdings nur abgeleitet für den besonderen Fall eines Durège'schen Körpers.

Die Übertragung der vorstehenden Betrachtung auf Körpern von vier Dimensionen geht nun zwanglos vor sich: An Stelle des konvexen Polygons gehen wir nunmehr vom konvexen Polyeder aus. Von jedem Eckpunkte desselben rage eine Gerade in die vierte Dimension hinein. Je zwei dieser Geraden, die von den Endpunkten einer Kante des ursprünglichen Polyeders ausgehen, mögen in derselben Ebene und alle diejenigen, die von den Eckpunkten ein und derselben Fläche beschrieben werden, im nämlichen Raume liegen. Den Abschluß dieser Geraden bilde neuerdings ein Polyeder. Dasselbe kann zu einem Punkte degenerieren, wir haben sodann eine vierdimensionale Pyramide erhalten; die Kanten, die den vierdimensionalen Raum durchschreiten, können zu einander parallel verlaufen, das abschließende Polyeder also durch Parallelverschiebung des ursprünglichen erzeugt worden sein; wir erhalten auf diese Weise das vierdimensionale Prisma. Den allgemeinen Fall des so entstehenden vierdimensionalen Körpers nennen wir wieder einen einfachen Körper, diesmal vierter Dimension. Analog wie früher bezeichnen wir mit n N und n' die Zahl der Begrenzungsstücke des ursprünglichen Polyeders, des Gesammt-Gebildes und unterscheiden durch die Indices 0, 1, 2, 3, ob wir es mit Punkten, Kanten, Flächen oder Begrenzungskörpern zu tun haben.

Dann gelten die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha) \quad & n'_0 &= n_0 + N_0 \\ &\beta) \quad & n'_0 &= n_1 + N_1 + n_0 \\ &\gamma) \quad & n'_2 &= n_2 + N_2 + n_1 \\ &\delta) \quad & n'_3 &= 2 + n_2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Da nun für das abschließende Polyeder die Euler'sche Relation gilt: $N_0 - N_1 + N_2 = 2$, so erhalten wir, wenn wir aus der Summe von α und γ . . . . β und δ subtrahieren

$$n'_0 - n'_1 + n'_2 - n'_3 = 0 \tag{5}$$

Diese Gleichung (5) ist demnach die Euler'sche Relation für den vierdimensionalen Raum. Nun kann man wieder den ganzen vierdimensionalen Körper, Rudel[1]) und Hopf[2]) nennen ihn den Allkörper, zur Entstehung des einfachen fünfdimensionalen Körpers benützen — die Durchführung macht nunmehr keine Schwierigkeiten mehr — und gelangt zur Gleichung

$$n'_0 - n'_1 + n'_2 - n'_3 + n'_4 = 2, \qquad (6$$

allgemein daher:

$$\left.\begin{aligned} n'_0 - n'_1 + n'_2 - n'_3 + \ldots\ldots - n'_{2r+1} &= 0 \\ \text{und } n'_0 - n'_1 + n'_2 - \ldots\ldots\ldots + n'_{2r} &= 2 \end{aligned}\right\} (7)$$

Dieser Form des Euler'schen Satzes haftet aber noch der Mangel an, zwischen pardimensionalen und unpardimensionalen Raume zu unterscheiden. Um diesem Übelstande zu begegnen, betrachten wir das Gebilde, für welches eben die Beziehung ihrer Grenzgebilde — Zahl eruiert werden soll, selbst als »ein« Grenzgebilde, dann ist beispielsweise für das Polyeder der Satz in folgender Form zu schreiben:

$$E - Ka + F - Kö = 1$$

oder mit Verwertung der Durège'schen Bezeichnung

$$n'_0 - n'_1 + n'_2 - n'_3 = 1 \qquad (8)$$

wobei n'_3, die Anzahl der begrenzenden dreidimensionalen Gebilde, gleich 1 zu setzen ist. Für den vierdimensionalen Körper lautet dann die Relation

$$n'_0 - n'_1 + n'_2 - n'_3 + n'_4 = 1$$

und für den K dimensionalen Körper:

$$n'_0 - n'_1 + n'_2 - n'_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \pm n'_K = 1$$

oder unter Verwendung des Summensymbols:

$$\sum_{i=o}^{i=K} \overline{(-1)}^{\,i}\, n'_i = 1. \qquad (9)$$

Erwähnenswert wäre noch, daß diese Relation auch in den minderdimensionalen Räumen Giltigkeit behält. Für die Strecke, dem eindimensionalen Körper, ist die Eckenzahl 2, die Kantenzahl 1, und tatsächlich ist

$$2 - 1 = 1$$

Für das ebene geschlossene Polygon, z. B. für das Sechseck, ist 6 die Ecken —, 6 die Kanten —, 1 die Flächenzahl, und richtig ist wieder

$$6 - 6 + 1 = 1.$$

---

[1]) Rudel: Vom Körper höherer Dimension. Kaiserslautern 1882.

[2]) Hopf: Eine Wahrheit von der Gasse. Pädagogium, herausgegeben von Dittes, XVII. Jahrgang p. 35. — Dieser kleine humorvolle Aufsatz ist besonders geeignet, beim Laien Interesse für den Gegenstand hervorzurufen.

Einen wesentlich anderen, übrigens auch synthetischen Weg hat Rudel in dem obzitierten Schriftchen eingeschlagen, um die multiplen Ausdehnungen mit Gebilden zu bevölkern. Er benützt hiezu fruchtbar das Prinzip der Projektion. Nehmen wir ein ebenes geschlossenes Polygon und projezieren wir alle Endpunkte desselben von einem außerhalb gelegenen Punkte aus, so erhalten wir die Pyramide, einen Durège'schen einfachen Körper mit degeneriertem Abschlußpolygon. Ebenso können wir nur ein Polyeder als Projektion auffassen, dessen Projektionszentrum außerhalb dieses Raumes, also im vierdimensionalen Raume gelegen ist. — Rudel gelangt zu genau demselben erweiterten Euler'schen Satz wie Durège. Er geht noch einen Schritt weiter, indem er die Eigenschaften der einzelnen Allkörper beschreibt, vom Neigungswinkel zweier je in einer Ebene zusammenstoßender Körper spricht, von der umschriebenen Kugel u. s. w. Bei diesen beiden Entstehungsarten geht man noch von Sätzen und Gebilden der Erfahrung aus, was Grassmann und neuerdings Veronese ganz vermieden haben. Der vierdimensionale Raum, den wir soeben besprochen haben, war ein Euklidischer, der, den Veronese seinen Untersuchungen zugrunde legt, ist ein absoluter. Scharly[1]) schlägt vor, für derlei absolute Betrachtungen den Ausdruck »Raum« behufs Verhütung jedes Mißverständnisses ganz zu vermeiden und lieber von dreifachen, vierfachen, ... n fachen Continuen zu sprechen.

Veronese[2]) läßt nun aus einem einfachen Continium ein zweifaches entstehen, indem das ganze einfache Continium als ein Element aufgefaßt und mehrere solcher neuer Elemente aneinandergereiht werden. — Durch Zusammenfassung des ganzen zweifachen Continiums als ein Element kommt man zum dreifachen und durch Fortsetzung dieses Verfahrens zum vierfachen . . . . n fachen Continium.

IV. Analytische Geometrie.

Ebenso wie ein Punkt, der in einer Ausdehnung dritter Stufe liegt, durch 3 Koordinaten eindeutig bestimmt ist, so ist er in dem n-dimensionalen Raume durch n Koordinaten festgesetzt. Wir gehen eben hier von der Annahme aus, zu der wir durch Analogie aus dem zwei- und dreidimensionalen Raume berechtigt sind, daß durch einen Punkt der n^{ten} Dimension n zu einander senkrechte Gerade möglich sind; dieselben stellen ein System von Koordinatenaxen vor. Die Distanzformel lautet nunmehr

$$\delta = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \ldots\ldots + (x_n - x'_n)^2},$$

oder in kürzerer Schreibweise

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=m} (x_i - x'_i)^2}, \qquad (1)$$

wobei die Koordinaten der beiden Endpunkte mit $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n$, beziehungsweise mit $x'_1\ x'_2 \ldots\ldots x'_n$ bezeichnet wurden.

---

[1]) Im Jahresprogramm des Außiger Gymnasiums.

[2]) Veronese: Grundzüge ds. p. 62 n. 196.

Nennen wir die laufenden Koordinaten $\xi_1\ \xi_2 \ldots . \xi_n$, so ist die Gleichung einer Geraden, die durch 2 Punkte geht.[1])

$$\frac{\xi_1 - \varkappa_1}{\varkappa^1 - \varkappa'^1} = \frac{\xi_2 - \varkappa_2}{\varkappa_2 - \varkappa'_2} = \ldots = \frac{\xi_n - \varkappa_n}{\varkappa_n - \varkappa'_n} \qquad (2)$$

Allgemein lautet jetzt die Gleichung einer Geraden:

$$\begin{array}{l} A'_1\,\xi_1 + A'_1\,\xi_2 + \ldots\ldots + A_1^{(n)}\,\xi_n = B_1 \\ A'_2\,\xi_1 + A''_2\,\xi_2 + \ldots\ldots + A_2^{(n)}\,\xi_n = B_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A'_n\,\xi_1 + A''_n\,\xi_2 + \ldots\ldots + A_n^{(n)}\,\xi_n = B_n, \end{array} \qquad (3)$$

jede Gleichung des Gleichungssystems (3) stellt das einfachste Gebilde der nächst niedrigen Stufe vor, was für $n = 3$ und $n = 2$ ohneweiters verifiziert werden kann. Daher stellt auch

$$Aq + By + Cz + Dn = E$$

die Gleichung unseres (eudklid'schen) Raumes im Allraum, d. h. im Raume vierter Dimension vor. Die Gleichung der Kugel lautet nunmehr:

$$\xi^2_1 + \xi^2_2 + \ldots\ldots + \xi_n{}^2 = r^2 \qquad (4)$$

die Mittelpunktsgleichung des n—1 dimensionalen Gebildes zweiter Ordnung ist

$$a_1\,\xi^2_1 + a_2\,\xi^2_2 + \ldots\ldots + a_n\,\xi^2_n = r^2 \qquad (5)$$

Setzen wir in (5) $n = 2$, so erhalten wir unsere Kegelschnitte, und für $n = 3$ die Flächen zweiter Ordnung. Für ein Linienelement haben wir aus (1)

$$ds = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} d\,\xi^2_i}$$

und für ein Flächen-Element, besser gesagt für ein Begrenzungs-Element[2])

$$df = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{i=n} \left\{\frac{d\,\xi_n}{d\,\xi_i}\right\}^2} \qquad (6)$$

Für n=1 gehen diese vier Formeln in die wohlbekannten Formeln für Kreis und Kugel über.

Durch die analytische Geometrie, auf höhere Räume angewandt, haben wir nunmehr ein Mittel, allen arithmetischen Ausdrücken eine geometrische Bedeutung zu unterlegen, was wir bisher nur bei Gleichungen bis zu drei Unbekannten imstande waren. Ebenso lassen sich algebraische Ausdrücke höherer als dritter Dimension zwanglos ins Geometrische übersetzen. So ist uns a. b. c. d. ein Körper vierter Stufe,

[1]) **Czuber: Ueber die Differentialquotienten von Funktionen mehrerer Variabeln: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, math. naturw. Klasse, 1892 Wien.**

[2]) **Biermann: Über die regelmäßigen Körper höherer Dimension. Sitzungsberichte der Akademie der Wissensch. math.-naturw. Klasse, Wien 1884.**

der durch Bewegung eines Spath's[3]) längs einer in den vierdimensionalen Raum auf unserem Raume senkrecht stehenden Geraden parallel zur ursprünglichen Lage des Spathes ensteht. Überhaupt werden wohl algebraische Ausdrücke, die nicht durch den zwei- und dreidimensionalen Raum interpretiert werden konnten, viel zur Ausgestaltung der Lehre vom höheren Raum beigetragen haben.

a^4 ist uns jetzt der Inhalt eines Allwürfels, a^n der des Würfels n^{ter} Stufe; die Diagonale eines Allwürfels ist, nachdem die Diagonale des Quadrates $a\sqrt{2}$, die des Würfels $a\sqrt{3}$ beträgt, jedenfalls

$$d = a\sqrt{4} = 2a \tag{7}$$

Für den Würfel n^{ter} Stufe ist die Diagonale

$$d = a\sqrt{n} \tag{8}$$

Damit sind aber die Qadratwurzeln aller Zahlen geometrisch interpretiert. — Aber auch für andere Körper höherer Stufe lassen sich Berechnungen machen. Der Inhalt der Allpyramide kann aus dem Inhalte des Dreiecks $\mathfrak{J} = \frac{gh}{2}$ und der dreidimensionalen Pyramide $\mathfrak{J} = \frac{Bh}{3}$ abgeleitet werden; er ist

$$\mathfrak{J} = \frac{Vh}{4} \tag{9}$$

wobei V das Volumen derjenigen dreidimensionalen Pyramide oder allgemeiner desjenigen dreidimensionalen Körpers bedeutet, der für unsere höhere Pyramide gleichsam Basis ist. Für die Pyramide n^{ter} Stufe gewinnen wir die Inhaltsformel

$$\mathfrak{J} = \frac{V_{n-1} \cdot h}{n} \tag{10}$$

Die Bedeutung von V_{n-1} dürfte kaum eine nähere Erklärung erheischen. Allerdings wäre es schwierig, eine solche Formel direkt beweisen zu wollen, und schon von Formel (9) sagt Fechner: »Was werden das für perspektivische Zeichnungen sein müssen, wenn es gelten wird, zu beweisen, daß das Prisma von vier Dimensionen sich in vier Pyramiden gleichen Inhalts zerlegen lasse.«[2])

Besonderes Interesse beansprucht noch der specielle Fall der einfachsten, das ist der dreiseitigen Pyramide: Nennen wir die Seite des Dreiecks h_1 die daraufgefällte Höhe h_2, so ist der Inhalt des Dreiecks $\frac{h_1 \cdot h_2}{2}$. Die auf das Dreieck gefällte Höhe der dreiseitigen Pyramide nennen wir h_3, der Pyramideninhalt ist $\frac{h_1\, h_2\, h_3}{1\; 2\; 3}$. Auf dieselbe wird

---

[1]) Die von Grassmann anstatt des unförmigen Ausdrucks Parallelopiped eingeführte Bezeichnung.

[2]) Fechner: Kleinere Schriften, p. 260.

in einem Punkte die Höhe h_4 in den vierdimensionalen Raum hinein errichtet, der Inhalt der so entstehenden vierdimensionalen Pyramide ist $\mathcal{J} = \frac{h_1\, h_2\, h_3\, h_4}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$. — Der Inhalt der einfachsten n— dimensionalen Pyramide nimmt somit die Formen $\mathcal{J} = \frac{h_1\, h_2 \ldots\ldots h_n}{1.\ 2. \ldots\ldots n}$ oder

$$J = \prod_{i=1}^{i=n} \frac{h_i}{n!} \tag{11}$$

Eine solche übersichtliche Form gewinnt die Darstellung des Inhalts durch rechtwinklige Koordinaten unter Zuhilfenahme der Determinanten. Danach ist der Inhalt des Dreieckes

$$J = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

der Inhalt der Pyramide

$$J = \frac{1}{2.3} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

woraus für den Inhalt der Allpyramide

$$J = \frac{1}{2.3.4} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & t_5 \end{vmatrix}.$$

Für die Pyramide n^{ter} Stufe kommen wir zur Formel

$$J = \frac{1}{n'!} \begin{vmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \ldots\ldots & X_{1n} \\ 1 & X_{21} & X_{2} & \ldots\ldots & X_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \ldots\ldots & X_{nn} \end{vmatrix} \tag{12}$$

Hiebei bedeuten die ersten Indices den 1. 2. . . . . n. Punkt, die zweiten die 1. 2. . . . n^{te} Koordinate des jeweiligen Punktes.

V. Der regelmässige Körper.

Unter den Gebilden in den höheren Räumen haben diejenigen, die man ihrer Analogie mit den Platonischen Körpern halber die regelmäßigen Körper nennt, hervorragendes Interesse erregt. Puchta[1]) hat dieselben auf analytischem, Rudel[2]) auf synthetischem Wege bestimmt. Unter einem regelmäßigen Körper n^{ter} Dimension versteht man ein Gebilde, daß von lauter kongruenten regelmäßigen Körpern $\overline{n-1}^{ter}$ Dimension derart eingeschlossen wird, daß in jeder Ecke, Kante, ... endlich in jedem Grenzgebilde $n-2^{ter}$ Dimension eine endliche Anzahl und gleichviele begrenzende Körper $\overline{n-1}^{ter}$ Dimension zusammenstoßen. Der regelmäßige Körper von der geringsten Flächenzahl ist bekanntlich das Tetraëder; der regelmäßige Allkörper, der von der geringsten Zahl von Körpern begrenzt ist, heißt analog Alltetraëder, er entsteht durch Projektion eines Tetraëders aus einem Punkte, der in der vierten Dimension liegt. Das Alltetraeder hat demnach vier und ein, also fünf Punkte, wird von fünf, nämlich dem ursprünglichen Tetraeder und jenen vier Tetraedern, die sich auf den Begrenzungsseiten des ursprünglichen aufbauen, begrenzt. Zehn ist die Zahl der Kanten, ebenso groß ist die Zahl der Flächen. Projezieren wir dieses Alltetraeder aus einem Punkte der 5. Dimension, so kommen wir zum fünfdimensionalen und durch Fortsetung des eben geschilderten Verfahrens zum n-dimensionalen Tetraeder.

Verzeichnen wir nun die Anzahl der Ecken, Kanten, Flächen u. s. w. jedes derartigen Tetraeders, so bekommen wir

für die Linie		2	1		
für das Dreieck		3	3	1	
für das Tetraeder	4	6	4	1	
für das Alltetraeder	5	10	10	5	1,
. . . .	. . . .				

Wie man sieht, bilden diese Ziffern, wenn man in jeder Zeile die Ziffer 1 voranschickt, ein Pascal'sches Dreieck.

Ebenso können wir vom Quadrat, Würfel, Allwürfel u. s. w. zum Würfel der n^{ten} Dimension fortschreiten. Der Allwürfel ist ein vierdimensionales Prisma, dessen Basis ein Würfel ist, dessen Seitenkanten gleich den Grundkanten sind und auf dem Basis-Würfel normal stehen. Er hat demnach 16 — 8 beim Basis-Würfel, 8 beim Deckwürfel — Ecken, 32 Kanten, von denen je 12 dem Grund- und Deckwürfel angehören, während die übrigen 8 Seitenkanten sind. — Außer den je 6 Flächen des Grund- und Deckwürfels baut sich auf jede Kante des Grundwürfels eine Seitenfläche auf, im ganzen haben wir also $6 + 6 + 12 = 24$ Grenzflächen. An Begrenzungskörpern haben wir zunächst Grund- und Deckwürfel; auf jede Fläche des Grundwürfels baut sich aber ein Seitenwürfel auf, wir haben demnach 6 Seitenwürfel,

---

[1]) Puchta: Analytische Bestimmung der regelmäßigen Körper, Sitzungsberichte der Akademie, Wien, Bd. 89. u. 90.

[2]) Rudel: Vom Körper höherer Dimension, Kaiserslautern 1882.

also 8 Begrenzungswürfel. In derselben Weise wie für das höhere Tetraeder tabellarisiert erhalten wir diesmal:

für die Linie			2	1	
für das Quadrat		4	4	1	
für den Würfel	8	12	6	1	
für den Allwürfel	16	32	24	8	1
. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Demnach finden wir die Begrenzungszahl k^{ter} Dimension eines Körpers (Würfels) n^{ter} Dimension, indem wir die Begrenzungszahl k^{ter} Dimension, des Würfels nächstniedriger Dimension, also $\overline{n-1}^{\,ter}$ Dimension, mit zwei multiplizieren und zur Begrenzungszahl $\overline{k-1}^{\,ter}$ Ordnung addieren. —

Nachdem die Herstellung solcher höherer Tetraeder und Würfel unabhängig von n ist, existieren in jedem Raume gleichgiltig, welcher Dimension er ist, zumindest zwei regelmäßige Körper.

Der schon besprochene Allwürfel ist ein Allkörper, in dessen Ecken drei Würfel zusammenstoßen. Fahndet man nun nach dem Gebilde, in welchem vier solcher Körper zusammenstoßen, so tritt der Grenzfall ein, der am besten erklärt ist durch Analogien mit dem Forschen nach regelmäßigen Körpern im dreidimensionalen Raume, etwa wenn vier Quadrate oder drei regelmäßige Sechsecke zusammenstoßen.

Hier degeneriert der Körper zur Ebene, dort der Allkörper zum Körper.

Übereinstimmend mit Rudel findet Puchta folgende sechs regelmäßige Allkörper:

α) Einen von 8 Hexaedern begrenzten Körper mit 16 Eckpunkten

β) Einen von 5 Tetraedern begrenzten Körper mit 5 Eckpunkten.

γ) Einen von 16 Tetraedern begrenzten Körper mit 8 Eckpunkten.

δ) Einen von 600 Tetraedern begrenzten Körper mit 120 Eckpunkten.

ε) Einen von 120 Dodekaedern begrenzten Körper mit 600 Eckpunkten.

ζ) Einen von 24 Oktaedern begrenzten Körper mit 24 Eckpunkten.

Ein jeder Allkörper sei durch dem ihm vorgesetzten griechischen Buchstaben bezeichnet. Wie leicht einzusehen ist α dual zu γ, β dual zu sich selbst, δ dual zu ε, endlich ζ wieder dual zu sich selbst. Der fünfdimensionale höhere Körper muß von Allkörpern umgeben sein. Puchta zeigt, dass nur α und β Anlaß zu solchen Gebilden geben. Zwei dieser Gebilde, den höheren Würfel und das höhere Tetraeder, haben wir bereits eingehender besprochen, β liefert aber noch einen zweiten höheren Körper. Man kann über einer Fläche nicht nur drei, sondern auch vier Alltetraeder errichten.

Wir erhalten dadurch ein Gebilde mit 10 Eckpunkten, 40 Kanten, 80 Flächen, 80 Tetraedern und 32 Körpern β. — War das Ikosaeder schon unbrauchbar für die Erzeugung der regelmäßigen Gebilde vierter Stufe, so fällt nunmehr auch das Dodekaeder und Oktaeder für die Gebilde noch höherer Stufe außer Betracht. Die entstandenen Gebilde fünfter Stufe bezeichnen wir mit α_5, β_5 und β'_5.

α_5 ist von 10 Allkörpern α mit 32 Eckpunkten begrenzt,

β_5 ist von 6 Allkörpern β mit 6 Eckpu..kten begrenzt,

β'_5 ist von 32 Allkörpern β mit 10 Eckpunkten begrenzt.

Demnach ist α_5 zu β'_5, hingegen β_5 zu sich selbst conjugiert. η, δ, ε und ξ sind zur Bildung höherer Allkörper untauglich. Anlaß zu den Körpern in den mehr als fünfdimensionalen Räumen können also nur α_5, β_5 und β'_5 geben. — Es kann gezeigt werden, daß in dem Raume von n Dimensionen stets drei regelmäßige Körper existieren, nämlich α_n, β_n und β'_n, und daß diese im $n+1$ dimensionalen Raume drei weitere regelmäßige Körper α_{n+1}, β_{n+1}, β'_{n+1} erzeugen. Betreffs α_n und β_n (dem Tetraeder und Würfel) wurde es bereits gezeigt, β'_n ist aber für $n \geqq 5$ der reziproke Körper zu α_n, während β_n zu sich selbst reziprok ist. Zusammenfassend gibt es also in der ersten Dimension einen regelmäßigen Körper, die Strecke, im zweidimensionalen unendlich viele, die regelmäßigen ebenen convexen Polygone, im dreidimensionalen fünf, die Platonischen Körper, im vierdimensionalen und höher dimensionalen Raume drei regelmäßige Körper.

VI. Anwendungen der n dimensionalen Geometrie.

So interessant die Polygeometrie schon »als Ding an sich« ist, so hat sie der Mathematik, d. h. den übrigen Zweigen derselben, vorzüglich aber der zwei- und dreidimensionalen Geometrie manche wertvolle Hilfe gebracht. Es ist zunächst möglich worden, die heterogenen Sätze aus der Planimetrie und Stereometrie als spezielle Fälle einer höheren Einheit zu betrachten. Wenige Beispiele werden klar machen, was hier gemeint ist, indem links der allgemeine Satz, rechts dessen Anwendung auf den zwei- und dreidimensionalen Raum verzeichnet wird.

1. Jede Gerade, die zwei Punkte mit einem Raume ζ_n gemein hat, liegt ganz in demselben.	1. Jede Gerade, die zwei Punkte mit einer Ebene gemein hat liegt ganz in derselben.
2. Durch $n+1$ Punkte ist ein n dimensionaler Raum eindeutig bestimmt.	2. Durch zwei Punkte ist eine Gerade, durch drei Punkte eine Ebene eindeutig bestimmt.
3. Zwei Gebilde n^{ter} Dimension schneiden sich in einem Gebilde $n-1^{ter}$ Dimension, wenn sie beide im selben Gebilde $n+1^{ter}$ Dimension liegen.	3. Zwei Ebenen unseres Raumes schneiden sich in einer Geraden; zwei Gerade, die in derselben Ebene liegen, schneiden sich in einem Punkte.
4. $n+1$ Gebilde n^{ter} Dimension schneiden sich in einem Punkte, wenn sie in einem Gebilde $n+1^{ter}$ Dimension liegen.	4. 3. Ebenen des Raumes schneiden sich in einem Punkte, zwei Gerade der Ebene ebenso.

. . . .

Derartige Sätze ließen sich noch ins Ungemessene vermehren; so können wir uns das Phänomen erklären, daß zwei sicher kongruente Gebilde des Raumes, z. B. Handschuhe der rechten und linken Hand, Objekt und Spiegelbild u. s. w. nicht zur Deckung gebracht werden können, (symetrische Körper), indem wir annehmen, daß ebenso wie zwei ebene symetrische Figuren nur durch Drehung durch den Raum aufeinandergelegt werden könuen, dies bei symetrischen Raumgebilden nur durch Drehung durch den vierdimensionalen Raum möglich sei, und da derselbe unserem Vorstellungsvermögen unzugänglich ist, für uns unmöglich bleibe. Inwiefern sämtliche Gleichungen der Analytik spezielle Fälle einer polydimensionalen Analytik sind, wurde bereits besprochen. Die mehrdimensionale Geometrie bringt also tatsächlich manche Ordnung in das Chaos der Elementargeometrie, sie ist unter Anlehnung eines bekannten Wortes Sylvesters über die Determinanten »a Geometrie upon Geometrie.« »Elle abrège«, rühmt ihr Laisant[1]) nach, »le langage, peut dispenser de longs calculs, permettre á l'esprit de moins s'égarer dans les symboles.«

Aber auch Sätze, die mit der Geometrie in keinem rechten Zusammenhange stehen, wurden durch die Ausdehnungslehre zum Teil einfacher, zum Teil ganz neugefunden. — So verwendet Czuber den n-dimensionalen Raum zu einer neuartigen Behandlung der Differenzialquotienten von Funktionen mehrerer Variabeln und gelangt durch Verschiebung eines Punktes um $\triangle s$ im polydimensionalen Raume unter Verwendung eines n-axigen orthogonalen Koordinatensystems zur Taylor'schen Entwicklung einer Funktion mehrerer Veränderlichen. Puchta beweist mit Hilfe der Polygeometrie einen Satz aus der Theorie der Substitutionen. Die Kinematik gewann außerordentlich an Eleganz und Klarheit, indem die Zeit als vierte Koordinate eingeführt wurde. »Man sieht«, sagt Fechner, »daß der Mathematiker jetzt keine Ursache mehr hat, sich über den Zuwachs der Arbeit, den ihm die vierte Dimension macht, zu beschweren, da ihm dafür die ganze Bewegungslehre erspart ist.« Auch der Chemismus (vant t'Hoff, Bresch, Wislicenus) hat aus der Polygeometrie Nutzen gezogen.

So sehen wir durch den neuen Zweig der Mathematik die verschiedensten Kapitel der realen Wissenschaften gefördert, »de nouvelles voies sont ainsi ouvertes aux chercheurs dans des domaines inexplorés, et la Geometrie, même en restant dans son ancien domaine intuitif est fructifiée et enrichie à bien des égards«.[2])

Aber noch höher als diese handgreiflichen Vorteile, die die exakten Wissenschaften aus der mehrdimensionalen Geometrie ziehen, sind die Förderungen zu veranschlagen, die durch sie die hehre Kunst der Abstraktion erfährt. Seit Kopernikus wurde unserem Denken keine ähnliche Zumutung gestellt: Alle Erfahrungen der Sinne zu negieren, sie in Fesseln zu schlagen, um dem abstrakten Verstande einen seiner herrlichsten Triumphe zu verschaffen. Die vornehmsten Geister haben die Bedeutung des Abstraktionsvermögens der Menschen gepriesen. Eine glänzende Fähigkeit nennt sie Henri Taine, die Mutter der Religionen und Philosophie; sie allein unterscheidet den Menschen vom Tier und wieder den führenden Geist vom Durchschnittsmenschen. Abstrahieren können, heißt sich über das tägliche Leben erheben

---

[1]) Laisant: Mathematique, Euseignement, Philosophie, Paris 1900.
[2]) Schlegel: La geométrie à n Dimensions. L'Enseign. Math., Paris 1900.

können. Durch Abstraktion zur Objektivation, der hohen ethischen Forderung Schopenhauers. Die Fähigkeiten der Abstraktion zu entwickeln ist eine fundamentale Aufgabe des mathematischen Unterrichtes.

Mit der Inangriffnahme derselben muß frühzeitig begonnen werden. »Wenn der Knabe zu begreifen anfängt«, sagt Goethe,[1]) »daß einem sichtbaren Punkte ein unsichtbarer vorhergehen müsse, daß der nächste Weg zwischen zwei Punkten schon als Linie gedacht wird, ehe sie auf dem Papier mit Bleistift gezogen wird, so fühlt er einen gewissen Stolz, ein Behagen. Und nicht mit Unrecht, denn ihm ist die Quelle alles Denkens aufgeschlossen.«

UNG.-HRADISCH, den 16. Mai 1903.

Otto Simon.

---

[1]) Goethe: Maximen und Reflexionen VI.