Analytische Behandlung einer Gleichung von der Form $y = \frac{f(x)}{F(x)}$, worin f(x) und F(x) Functionen dritten Grades sind.

Wenngleich die Aufgabe, die auf den folgenden Blättern behandelt werden soll, vorzugsweise mathematisches Interesse darbietet, so kann ich doch nicht umhin, zum Verständniss derselben auf eine frühere geologische Arbeit[1]) zurückzuweisen, welcher die gegenwärtige Aufgabe ihre Entstehung verdankt, und von welcher sie in gewissem Sinne eine Ergänzung bildet. Der Inhalt jener früheren Abhandlung ist in der Kürze folgender.

In der Steinkohlenformation findet sich eine ausserordentlich grosse Zahl versteinerter Baumstämme, welche auf den Schichten des sie umgebenden Gesteins senkrecht stehen. Mögen auch viele von ihnen an dem Orte ihres Vorkommens gewachsen sein, und dadurch für ihre senkrechte Stellung eine einfache Erklärung an die Hand geben, so ist doch nach dem Urtheile aller Fachleute ein grosser, wenn nicht der grösste Theil derselben durch Fluss- und Meeresströmungen an die Stelle hingetrieben worden, wo sie heut zu Tage gefunden werden. Wie aber kamen die letzteren zu ihrer sonderbaren Stellung? Die bisherigen Beantwortungen dieser Frage konnten nicht genügen, wenngleich nicht in Abrede gestellt werden soll, dass in einzelnen Fällen, unter besonders günstigen Bedingungen die Vorgänge, welche bei der einen oder andern Erklärungsweise herangezogen werden, wirklich stattgefunden haben mögen. Zur Erledigung des fraglichen Punktes suchte ich daher eine Erklärung zu geben, welcher unter Ausschluss aller zufälligen Verhältnisse lediglich auf allgemein gültige physikalische Gesetze zurückging.

Bei jedem auf einer Flüssigkeit schwimmenden Körper liegt der Schwerpunkt des Körpers und der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit so, dass ihre Verbindungslinie eine Vertikale bildet. Eine Aenderung in der gegenseitigen Lage der Schwerpunkte zieht also auch eine Aenderung in der Lage des schwimmenden Körpers nach sich. Bei einem schwimmenden Baumstamme, der, wie es bei den meisten Vorkommnissen in der Steinkohlenformation der Fall ist, keine, oder nur Rudimente von Aesten und Wurzeln besitzt, liegt der Schwerpunkt im Allgemeinen auf der Achse, der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit um ein Geringes unterhalb der Achse. Rückt nun durch irgend eine Ursache der Schwerpunkt des Stammes nach dem dickern Ende hin, so sinkt dieser Theil des Stammes tiefer ins Wasser ein, ja es kommt dieser Theil sehr leicht ganz unter Wasser zu liegen, da ja der Tiefgang der Stämme ein sehr beträchtlicher ist. Dann aber ragt der andere Theil ganz aus dem Wasser hervor und der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit wird dadurch auch fast genau auf die Achse verschoben. In dem Falle aber muss, wenn der Abstand zwischen dem Schwerpunkt des

---

1) »Physikalische Erklärung des Absatzes schwimmender Baumstämme zur Zeit der Steinkohlenbildung«, abgedruckt in dem Jahrbuch für Mineralogie etc. von Leonhardt und Geinitz, Jahrgang 1868, Seite 162 bis 182 und 282 bis 293.

Stammes und dem Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit gross genug ist, um den Widerstand des Wassers zu überwinden, der Stamm eine vertikale Stellung einnehmen.

Nun dringt in jedes auf dem Wasser liegende Stammstück etwas Wasser ein, und zwar dürfen wir in unserm Falle nur an ein Eindringen vom obern und untern Ende denken, da ja die Stämme der Kohlenformation noch mit ihrer Rinde versehen sind, diese aber dem Wasser den Eintritt versperrt oder doch im höchsten Grade erschwert. Wegen der besondern Temperaturverhältnisse, die nach Göppert zur Zeit der Steinkohlenbildung obwalteten, konnte das Eindringen des Wassers sehr schnell erfolgen, ja es konnte sogar in dem Masse, wie die pflanzliche Substanz sich zersetzte, anorganische, versteinernde Materie von beiden Enden her in den Stamm gelangen.

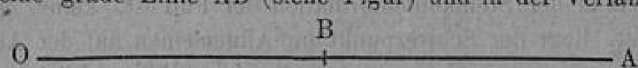
Ich suchte also zu ermitteln, erstens ob durch das allmälige Vordringen einer fremden Materie in einen Pflanzenstamm der Schwerpunkt desselben nach unten hin verschoben wird; zweitens ob eindringendes Wasser allein schon im Stande ist, die Lage des Schwerpunkts so zu verändern, dass der Stamm aus seiner ursprünglichen horizontalen Lage in die verticale übergeht, in dieser Lage schwimmt und schliesslich untersinkt.

Zur Beantwortung der ersten Frage glaubte ich zur Sicherstellung des Resultates die Mittel nicht abweisen zu dürfen, welche die Mathematik an die Hand gibt, wenngleich ich mir begreiflicherweise möglichste Einschränkung auferlegte. Die zweite Frage wurde durch eine grosse Zahl von Versuchen erledigt. Beide Fragen konnten in vollem Masse bejaht werden. Hinsichtlich dieser Versuche, sowie der Einzelheiten überhaupt muss ich natürlich auf meine frühere Arbeit verweisen; der mathematische Theil dagegen verlangt an dieser Stelle eine nähere Auseinandersetzung.

Um die Grundlage zu einer mathematischen Behandlung der ersten Frage zu gewinnen, legte ich den Baumstämmen diejenige einfache Gestalt bei, die den natürlichen Vorkommnissen am meisten entspricht, die Gestalt des abgestumpften Kegels; bestimmte hierauf zuerst die Lage des Schwerpunkts für einen solchen Stamm unter der Voraussetzung, dass der Stamm aus gleichartiger Masse gebildet sei, und sodann auch unter der Voraussetzung, dass von beiden Enden her bis zu gleicher Tiefe eine fremde Substanz in den Baumstamm eingedrungen sei.

Capitel I.

Denken wir uns eine grade Linie AB (siehe Figur) und in der Verlängerung derselben über B



hinaus einen Punkt O, setzen dabei $AO = l$, $BO = k$, so dass also $AB = l - k$ ist, nehmen wir ferner an, die Linie AB sei so belastet, dass das Gewicht eines jeden Punktes derselben proportional ist seiner Entfernung vom Punkte O in irgend einer Potenz c: so findet man die Entfernung y des Schwerpunkts der Linie AB vom Punkte O durch die der elementaren Statik entlehnte Formel: $y = \frac{c+1}{c+2} \cdot \frac{l^{c+2} - k^{c+2}}{l^{c+1} - k^{c+1}}$. Bei einem graden Kegel oder einem graden abgestumpften Kegel von homogener Masse liegt der Schwerpunkt auf der Achse, und es verhalten sich die Flächeninhalte aller Schnittkreise wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze des Kegels. Der Schwerpunkt des Kegels und der des abgestumpften Kegels fällt also zusammen mit dem Schwerpunkt der Achse, wenn wir uns jeden Punkt derselben proportional dem Quadrate seiner Entfernung von der Spitze des

Kegels belastet denken. Verstehen wir also in der obigen Formel unter k die Höhe des den abgestumpften Kegel ergänzenden Kegels, unter l die Höhe des ganzen Kegels und setzen endlich $c = 2$, so zeigt die sich ergebende Formel $y = \frac{3}{4} \cdot \frac{l^4 - k^4}{l^3 - k^3}$ die Strecke an, um die der Schwerpunkt des abgestumpften Kegels von der Spitze des Kegels entfernt ist. Etwas bequemer wird diese Formel, wenn wir für l und k die Radien der beiden Grundkreise des abgestumpften Kegels einführen. Ist nämlich R der Radius des grössern, r der des kleinern Grundkreises und α der Winkel zwischen der Seite und der Basis des Kegels, so ist $l = R \,.\, \mathrm{tang}\alpha$ und $k = r \,.\, \mathrm{tang}\alpha$; also

$$y = \frac{3}{4}\, \mathrm{tang}\alpha \,.\, \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}.$$

Diese Formel gilt also auch für einen Baumstamm von der angegebenen Gestalt, so lange er aus gleichartiger Masse besteht. Dringt aber von beiden Enden her in gleicher Tiefe eine fremde Substanz ein, so setzt sich der Stamm aus drei Stücken zusammen, welche alle drei die Gestalt abgestumpfter Kegel besitzen. Die beiden äussern dieser Abschnitte haben gleiche Höhe und gleiches specifisches Gewicht, der innere aber hat eine andere Höhe und ein anderes spezifisches Gewicht. Je mehr die fremde Substanz in den Stamm eindringt, desto mehr nimmt die Höhe der äusseren Kegel zu, während in demselben Masse die des innern Kegels abnimmt.

Zur Schwerpunktsbestimmung des veränderten Stammes haben wir nach statischem Gesetze zuerst den Schwerpunkt eines jeden der drei Abschnitte zu bestimmen, was mit Hülfe der vorhin abgeleiteten Formel ohne Weiteres zu bewerkstelligen ist. Denken wir uns dann die Masse eines jeden der drei Abschnitte in dem zugehörigen Schwerpunkte concentrirt, so erhalten wir drei auf derselben graden Linie liegende schwere Punkte, welche unter sich starr verbunden sind. Die Entfernung des Schwerpunkts dieser drei Punkte von irgend einem auf ihrer Verbindungslinie liegenden Punkte wird dann ausgedrückt durch die ebenfalls der elementaren Statik entlehnte Formel:

$$y = \frac{y_1 M_1 + y_2 M_2 + y_3 M_3}{M_1 + M_2 + M_3},$$

worin y_1, y_2, y_3 die Entfernungen der schweren Punkte von dem auf der Verbindungslinie angenommenen Punkte und M_1, M_2, M_3 die Gewichte der betreffenden Punkte bezeichnen.

Als den Punkt, von dem aus man alle Entfernungen berechnet, nehmen wir wieder die Spitze des Kegels; sind ferner R_1 und r_1 die Radien der neu hinzugetretenen Grundkreise, so ist

$$y_1 = \frac{3}{4}\, \mathrm{tang}\alpha \,.\, \frac{r_1{}^4 - r^4}{r_1{}^3 - r^3}, \quad y_2 = \frac{3}{4}\, \mathrm{tang}\alpha \,.\, \frac{R_1{}^4 - r_1{}^4}{R_1{}^3 - r_1{}^3}, \quad y_3 = \frac{3}{4}\, \mathrm{tang}\alpha \,.\, \frac{R^4 - R_1{}^4}{R^3 - R_1{}^3}.$$

Die Gewichte, welche in den drei Punkten wirken, sind gleich dem Producte aus dem Volumen der zugehörigen abgestumpften Kegel, ihrem specifischen Gewichte und dem Gewichte einer Volumeneinheit Wasser. Das Volumen V eines abgestumpften Kegels ist gleich $\frac{h}{3} \cdot \pi \cdot (R^2 + Rr + r^2)$, oder setzen wir für h das ihm gleiche $(R - r) \,.\, \mathrm{tg}\alpha$, so ist

$$V = \frac{R - r}{3} \,.\, \pi \,.\, \mathrm{tg}\alpha \,.\, (R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{3}\, \pi \,.\, \mathrm{tg}\alpha \,.\, (R^3 - r^3).$$

Bezeichnen wir ferner das specifische Gewicht der beiden äussern Kegel durch S, das des innern durch s, wobei S natürlich immer grösser ist, als s, und ist w das Gewicht einer Volumeneinheit Wasser, so wird:

$$M_1 = \tfrac{1}{3}\pi \,.\, \mathrm{tg}\alpha \,.\, (r_1{}^3 - r^3) \,.\, S \,.\, w, \quad M_2 = \tfrac{1}{3}\pi \,.\, \mathrm{tg}\alpha \,.\, (R_1{}^3 - r_1{}^3) \,.\, s \,.\, w, \quad M_3 = \tfrac{1}{3}\pi \,.\, \mathrm{tg}\alpha \,.\, (R^3 - R_1{}^3) \,.\, S \,.\, w.$$

Die Werthe von y_1, y_2, y_3 und von M_1, M_2, M_3 in die obige Formel des Schwerpunkts eingesetzt ergeben:

$$y = \frac{3}{4}\,\mathrm{tg}\alpha \frac{(r_1^4 - r^4) \,.\, S + (R_1^4 - r_1^4) \,.\, s + (R^4 - R_1^4) \,.\, S}{(r_1^3 - r^3) \,.\, S + (R_1^3 - r_1^3) \,.\, s + (R^3 - R_1^3) \,.\, S}.$$

Mittelst einer geringen Umformung verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$y = \frac{3}{4}\,\mathrm{tg}\alpha \,.\, \frac{(R^4 - r^4)S - (R_1^4 - r_1^4)(S - s)}{(R^3 - r^3)S - (R_1^3 - r_1^3)(S - s)}.$$

In dieser Gleichung nimmt mit dem Vordringen der fremden Materie R_1 stets ab, während r_1 zunimmt. Nennen wir die Tiefe, bis zu welcher der Baumstamm durchdrungen ist, t, so ist $t = (r_1 - r) \,.\, \mathrm{tg}\alpha$ und $t = (R - R_1) \,.\, \mathrm{tg}\alpha$. Aus beiden Gleichungen folgt, dass $r_1 - r = R - R_1$ ist, d. h. dass r_1 immer um dasselbe Stück zunimmt, um welches R_1 abnimmt. Somit enthält also die vorstehende Gleichung diejenigen Beziehungen, welche zwischen der Tiefe der eindringenden Substanz und der Lage des Schwerpunktes stattfinden. Bezeichnet man die Differenzen $r_1 - r$ und $R - R_1$ durch x, so ist offenbar der kleinste Werth, den x annehmen kann, gleich Null. In diesem Falle ist noch keine fremde Masse in den Stamm eingedrungen; R_1 ist also gleich R, r_1 gleich r. Von Null anfangend wächst x und erreicht seinen grössten Werth in dem Augenblicke, wo der mittlere Kegel verschwindet, und die beiden äussern zusammenstossen, mit andern Worten in dem Augenblicke, wo die von aussen eindringende Substanz den Baumstamm ganz erfüllt hat. R_1 ist dann $= r_1 = \frac{R + r}{2}$; x also $= \frac{R - r}{2}$. Sowohl wenn x seinen kleinsten, als wenn es seinen grössten Werth besitzt, stellt der abgestumpfte Kegel eine homogene Masse dar; in beiden Fällen muss also die Lage des Schwerpunkts dieselbe sein. Setzen wir in unserer Formel $x = o$ und $x = \frac{R - r}{2}$, so entsteht in der That beide Male

$$y = \frac{3}{4}\,\mathrm{tg}\alpha \,.\, \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}.$$

Ferner überzeugt man sich leicht, dass an der Stelle, wo $x = o$ ist, die Function im Zunehmen, wo $x = \frac{R - r}{2}$ ist, im Abnehmen begriffen ist. Bildet man nämlich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\,\mathrm{tg}\alpha \,.\, \frac{4[(R^3 - r^3).S - (R_1^3 - r_1^3)(S - s)](R_1^3 + r_1^3) - 3[(R^4 - r^4).S - (R_1^4 - r_1^4)(S - s)](R_1^2 + r_1^2)}{[(R^3 - r^3)S - (R_1^3 - r_1^3)(S - s)]^2} \cdot (S - s),$$

und setzt darin x einmal $= o$, und das andere Mal $= \frac{R - r}{2}$, so ist im ersten Falle $\frac{dy}{dx}$ positiv, im zweiten negativ. Dadurch ist also bewiesen, dass durch eine von beiden Enden bis zu gleicher Tiefe eindringende fremde Substanz der Schwerpunkt des Baumstammes sich nach dem dickern Ende hinbewegt, später dagegen wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt. Tiefer in die zwischen dem Eindringen der fremden Substanz und der Lage des Schwerpunkts bestehenden Verhältnisse einzugehen, insbesondere auf algebraische Weise die grösste Entfernung des Schwerpunkts von der Spitze des Kegels zu bestimmen, hielt ich nicht für passend, um nicht einen geologischen Aufsatz mehr, als unumgänglich nothwendig war, durch mathematische Untersuchungen zu belasten. Ich begnügte mich mit einer tabellarischen Uebersicht von Zahlenbeispielen, denen ich durch gewisse allgemeine Betrachtungen eine möglichst allgemeine Bedeutung zu verschaffen suchte.

Die so durch die Umstände gebotene kleine Lücke in meiner damaligen Beweisführung auszufüllen, benutze ich die gegenwärtige Gelegenheit, wobei ich allerdings wegen des dem Gegenstande anhaftenden mathematischen Interesses über die Grenzen der frühern Arbeit hinausgehend, die Frage in ihrer Allgemeinheit behandle. Hierbei schien es mir am gerathensten, eine graphische Darstellung zu ermöglichen. Ich formulire also die Aufgabe so:

Aus der Gleichung

$$y = \frac{3}{4}\,tg\alpha\,.\,\frac{(R^4 - r^4)S - (R_1{}^4 - r_1{}^4)(S - s)}{(R^3 - r^3)S - (R_1{}^3 - r_1{}^3)(S - s)},$$

wobei $(r_1 - r)\,.\,tg\alpha = (R - R_1)\,.\,tg\alpha = t$ ist, diejenige auf rechtwinkelige Achsen bezogene Curve abzuleiten, deren Abscissen t, und deren Ordinaten y sind.

Bezüglich unserer frühern Aufgabe käme diese Curve nur innerhalb der Grenzen $t = o$ und $t = \frac{R - r}{2}\cdot tg\alpha$ in Betracht.

Capitel II.

Die Gleichung $y = \frac{3}{4}\,tg\alpha\,.\,\frac{(R^4 - r^4)\,.\,S - (R_1{}^4 - r_1{}^4)(S - s)}{(R^3 - r^3)\,.\,S - (R_1{}^3 - r_1{}^3)(S - s)}$ ist zunächst so umzuwandeln, dass statt der zwei Variabeln R_1 und r_1 nur die eine Variable t vorkommt. Da $(r_1 - r)\,.\,tg\alpha = (R - R_1)\,.\,tg\alpha = t$ ist, so ist also r_1 mit $r + \frac{t}{tg\alpha}$ und R_1 mit $R - \frac{t}{tg\alpha}$ zu vertauschen. Demnach nimmt unsre Gleichung die Gestalt an:

$$y = \frac{3}{4}\,tg\alpha\,.\,\frac{\left[4(R + r)\,.\left(\frac{t}{tg\alpha}\right)^3 - 6(R^2 - r^2)\left(\frac{t}{tg\alpha}\right)^2 + 4(R^3 + r^3)\left(\frac{t}{tg\alpha}\right)\right](S - s) + (R^4 - r^4)s}{\left[2\left(\frac{t}{tg\alpha}\right)^3 - 3(R - r)\,.\left(\frac{t}{tg\alpha}\right)^2 + 3(R^2 + r^2)\left(\frac{t}{tg\alpha}\right)\right](S - s) + (R^3 - r^3)s},$$

oder wenn man Zähler und Nenner durch $(S - s)$ dividirt und gleichzeitig $\frac{s}{S - s} = p$ setzt:

$$y = \frac{3}{4}\,tg\alpha\,.\,\frac{4(R + r)\,.\left(\frac{t}{tg\alpha}\right)^3 - 6(R^2 - r^2)\left(\frac{t}{tg\alpha}\right)^2 + 4(R^3 + r^3)\left(\frac{t}{tg\alpha}\right) + (R^4 - r^4)\,.\,p}{2\,.\left(\frac{t}{tg\alpha}\right)^3 - 3(R - r\left(\frac{t}{tg\alpha}\right)^2 + 3(R^2 + r^2)\left(\frac{t}{tg\alpha}\right) + (R^3 - r^3)p}.$$

Aus den Bemerkungen von Seite 4 folgt, dass $\frac{t}{tg\alpha} = x$ ist. Nehmen wir diese Substitution vor, so erhalten wir zwar zunächst eine etwas andere Curve; jedoch empfiehlt es sich der Einfachheit halber, dieselbe für einstweilen festzuhalten, besonders da wir ja in jedem Augenblicke ohne Mühe von der neuen zur ursprünglichen Curve zurückkehren können[1]). Wir hätten es demnach mit der Curve zu thun, welche ausgedrückt wird durch die Gleichung:

$$y = \frac{3}{4}\,tg\alpha\,.\,\frac{4(R + r)x^3 - 6(R^2 - r^2)x^2 + 4(R^3 + r^3)x + (R^4 - r^4)p}{2x^3 - 3(R - r)x^2 + 3(R^2 + r^2)x + (R^3 - r^3)p}.$$

§ 1. Aus der vorstehenden Gleichung folgt zunächst, dass jedem Werthe von x nur ein einziger Werth von y entspricht.

§ 2. Setzt man $x = o$, so entsteht, wie bereits bekannt (S. 4), $y = \frac{3}{4}\,tg\alpha\,.\,\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$ als Schnittpunkt der Curve mit der Abscissen-Achse. Denselben Werth von y erhalten wir, wie ebenfalls schon

---

1) Beide Curven sind nicht wesentlich verschieden, nur der Grad der Schnelligkeit, mit der die Krümmung sich ändert, ist bei der einen Curve ein anderer, als bei der andern Curve. Setzt man z. B. in die Gleichung der Parabel $y^2 = 2px$ für $x\ \frac{\xi}{a}$ ein, so erhält man $y^2 = \frac{2p}{a}\,\xi$, also wiederum eine Parabel mit demselben Scheitel, aber mit anderer Krümmung.

bekannt ist, wenn man $x=\frac{R-r}{2}$ nimmt. Um zu sehen, ob derselbe Werth vielleicht noch einmal vorkommt, setzen wir für y $\frac{3}{4}\,tg\alpha\,.\,\frac{R^4-r^4}{R^3-r^3}$ ein, wodurch sich mit Fortschaffung der Nenner und Weglassung des auf beiden Seiten vorkommenden Factors $\frac{3}{4}\,tg\alpha$ ergibt:

$$2(R^4-r^4)x^3-3(R^4-r^4)(R-r)x^2+3(R^4-r^4)(R^2+r^2)x+(R^4-r^4)(R^3-r^3)p=4(R^3-r^3)(R+r)x^3-$$
$$-6(R^3-r^3)(R^2-r^2)x^2+4(R^3-r^3)(R^3+r^3)x+(R^3-r^3)(R^4-r^4)p.$$

Unter Vornahme der nöthigen Reductionen nimmt die Gleichung die Form an:

$$x^3-\tfrac{3}{2}(R-r)x^2+\tfrac{1}{2}(R-r)^2\,.\,x=o.$$

Man überzeugt sich nun leicht, dass ausser den bereits bekannten Werthen Null und $\frac{R-r}{2}$ auch noch $(R-r)$ für x gesetzt der Gleichung Genüge leistet.

§ 3. Legen wir dem x einen unendlich grossen positiven Werth bei, so nimmt y die Form $\frac{\infty}{\infty}$ an. Um den genauen Werth von y zu finden, haben wir Zähler und Nenner dreimal zu differentiiren. Auf diese Weise entsteht $y=\frac{3}{4}\,tg\alpha\,.\,(R+r)$. Ganz denselben Werth erhält man, wenn man für x einen unendlich grossen negativen Werth annimmt.

§ 4. Wir untersuchen ferner, ob die Curve die Abscissen-Achse schneidet; nehmen wir also $y=o$ an, so erhalten wir dadurch die Gleichung

$$\frac{4(R+r)x^3-6(R^2-r^2)x^2+4(R^3+r^3)x+(R^4-r^4)p}{2x^3-3(R-r)x^2+3(R^2+r^2)x+(R^3-r^3)p}=o.$$

Die linke Seite der Gleichung wird zu Null, wenn entweder der Zähler gleich Null und der Nenner eine unendliche Grösse, oder wenn der Nenner unendlich gross, und der Zähler eine endliche Grösse ist. Wird der Nenner unendlich gross, so wird es auch der Zähler, und y nimmt dann den vorhin gefundenen Werth $\frac{3}{4}\,tg\alpha\,.\,(R+r)$ an. Dieser Fall ist also auszuschliessen und demnach zu untersuchen, ob der Zähler zu Null werden kann, ohne dass gleichzeitig auch der Nenner verschwindet, mit andern Worten, ob Zähler und Nenner gleiche Wurzeln haben, oder nicht.

Wir dividiren zu dem Ende den Nenner in den Zähler, oder besser den durch 2 dividirten Nenner in den durch die Constante $4(R+r)$ dividirten Zähler:

$$x^3-\tfrac{3}{2}(R-r)x^2+(R^2-Rr+r^2)x+\tfrac{1}{4}(R^2+r^2)(R-r)p:x^3-\tfrac{3}{2}(R-r)x^2+\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)x+\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p=1$$
$$\underline{x^3-\tfrac{3}{2}(R-r)x^2+\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)x+\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p}$$
$$-\tfrac{1}{2}(R+r)^2x-\tfrac{1}{4}(R^2-r^2)(R+r)p$$

Den durch $-\frac{1}{2}(R+r)^2$ getheilten Rest dividiren wir in den vorigen Divisor:

$$x^3-\tfrac{3}{2}(R-r)x^2+\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)x+\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p:x+\tfrac{1}{2}(R-r)p=x^2-\tfrac{1}{2}(R-r)(3+p)x+\tfrac{1}{4}[6(R^2+r^2)+(R-r)^2(3+p)p].$$
$$\underline{x^3+\tfrac{1}{2}(R-r)px^2}$$
$$-\tfrac{1}{2}(R-r)(3+p)\,.\,x^2+\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)x$$
$$\underline{-\tfrac{1}{2}(R-r)(3+p)x^2-\tfrac{1}{4}(R-r)^2(3+p)px}$$
$$\tfrac{1}{4}[6(R^2+r^2)+(R-r)^2(3+p)p]x+\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p$$
$$\underline{\tfrac{1}{4}[6(R^2+r^2)+(R-r)^2.(3+p)p]x+\tfrac{1}{8}[6(R^2+r^2)+(R-r)^2.(3+p)p](R-r)p}$$
$$\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p+\tfrac{1}{8}[6(R^2+r^2)+(R-r)^2.(3+p)p](R-r).p$$

Der so entstandene Rest ist constant und für alle möglichen Annahmen von p, R und r von Null verschieden. Zähler und Nenner des in Rede stehenden Bruches haben also keinen gemeinsamen Theiler, mithin auch keine gemeinsame Wurzel. Zur Aufsuchung des Schnittpunkts der Kurve mit der Abscissenaxe bekommen wir dadurch die Gleichung:

$$4(R+r)x^3-6(R^2-r^2)x^2+4(R^3+r^3)x+(R^4-r^4)p=o$$

oder einfacher

$$x^3 - \tfrac{3}{2}(R-r)x^2 + (R^2 - Rr + r^2)x + \tfrac{1}{4}(R^2 + r^2)(R-r)p = 0.$$

§ 5. Zur Auflösung dieser Gleichung, welche die Form $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ hat, setzt man bekanntlich $x = \eta - \frac{a_1}{3}$; die Gleichung verwandelt sich dadurch in $\eta^3 + b\eta + c = 0$, wobei $b = -\frac{a_1^2}{3} + a_2$ und $c = \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_3$ ist. Führt man für η sodann $\varphi + \psi$ ein, so erhält man durch bekannte Entwickelungen $\varphi^3 = -\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + \frac{4}{27}b^3}$, woraus

$$\varphi = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + \frac{4}{27}b^3}}$$

sich ergibt. Die 3 Werthe von η bilden sich hieraus durch die Relationen:

$$\eta_1 = \varphi - \frac{b}{3\varphi}; \quad \eta_2 = \varphi\omega - \frac{b}{3\varphi}\,\omega^2; \quad \eta_2 = \varphi\omega^2 - \frac{b}{3\varphi}\,\omega.$$

Bilden wir für unsre Gleichung der Reihe nach die angegebenen Werthe, so erhalten wir:

$$b = -\tfrac{3}{4}(R-r)^2 + (R^2 - Rr + r^2) = \tfrac{1}{4}(R+r)^2$$

$$\begin{aligned} c &= -\tfrac{1}{4}(R-r)^3 + \tfrac{1}{2}(R-r)(R^2 - Rr + r^2) + \tfrac{1}{4}(R^2 + r^2)(R-r)p = \\ &= -\tfrac{1}{4}(R-r)[(R-r)^2 - 2(R^2 - Rr + r^2) - (R^2 + r^2)p] = \\ &= \tfrac{1}{4}(R-r)(R^2 + r^2)(1+p). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^3 &= -\tfrac{1}{8}(R-r)(R^2 + r^2)(1+p) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{16}(R-r)^2 . (R^2 + r^2)^2(1+p)^2 + \tfrac{1}{27} \cdot \tfrac{1}{16}(R+r)^6} = \\ &= \tfrac{1}{8}[-(R-r)(R^2 + r^2)(1+p) + \sqrt{(R-r)^2 . (R^2 + r^2)^2 . (1+p)^2 + \tfrac{1}{27}(R+r)^6}. \end{aligned}$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-(R-r)(R^2 + r^2)(1+p) + \sqrt{(R-r)^2 . (R^2 + r^2)^2 . (1+p)^2 + \tfrac{1}{27}(R+r)^6}}.$$

Der Ausdruck unter dem Quadratwurzelzeichen ist stets positiv und kann für keine der möglichen Annahmen von R, r und p zu Null werden. Die fragliche Gleichung hat also nur eine reelle Wurzel; die Abscissen-Achse wird demnach von der Curve auch nur in einem einzigen Punkte getroffen. Die Abscisse dieses Punktes heisst:

$$x = \tfrac{1}{2}(R-r) + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-(R-r)(R^2 + r^2)(1+p) + \sqrt{(R-r)^2 . (R^2 + r^2)^2(1+p)^2 + \tfrac{1}{27}(R+r)^6 - (R+r)^2}}$$
$$- \frac{(R+r)^2}{6\sqrt[3]{-(R-r)(R^2 + r^2)(1+p) + \sqrt{(R-r)^2 . (R^2 + r^2)^2(1+p)^2 + \tfrac{1}{27}(R+r)^6}}}.$$

§ 6. Ueber diesen Werth von x lässt sich noch folgendes Allgemeine feststellen. Die Grösse $\sqrt{(R-r)^2(R^2 + r^2)^2(1+p)^2 + \tfrac{1}{27}(R+r)^6}$ ist stets positiv und grösser als $(R-r)(R^2 + r^2)(1+p)$, aber kleiner, als $(R-r)(R^2 + r^2)(1+p) + \frac{1}{\sqrt{27}}(R+r)^3$. Es hebt sich also jedenfalls $(R-r)(R^2 + r^2)(1+p)$ gegen das vor dem Quadratwurzelzeichen stehende $-(R-r)(R^2 + r^2)(1+p)$ auf, und daraus folgt, dass φ^3, d. h. der unter dem Cubikwurzelzeichen stehende Ausdruck grösser ist, als Null, aber kleiner als $\frac{1}{\sqrt{27}}(R+r)^3$, mithin φ selbst grösser als Null, aber kleiner als $\frac{1}{\sqrt{3}}(R+r)$. Setzt man diesen zu grossen Werth von φ in die Gleichung von x, der man die kürzere Form

$$x = \frac{1}{2}(R-r) + \varphi - \frac{1}{3}\frac{(R+r)^2}{\varphi}$$

geben kann, ein, so wird der positive Theil desselben zu gross, der negative, weil φ im Nenner vorkommt, absolut genommen zu klein; mithin wird x selbst zu gross. Es ist also

$$x < \frac{1}{2}(R+r) + \frac{1}{\sqrt{3}}(R+r) - \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{(R+r)^2}{R+r} \text{ oder } x < \frac{1}{2}(R-r).$$

Nun liegt es in der Natur der ursprünglichen Schwerpunktsaufgabe, dass y innerhalb $x = o$ und $x = \frac{R-r}{2}$ nicht gleich Null werden kann, es muss also x nothwendig negativ sein, mit andern Worten, die Curve schneidet die Abscissen-Achse stets auf der negativen Seite derselben.

§ 7. Der Einfluss, den p auf die Lage des Schnittpunktes ausübt, lässt sich in folgender Weise ermitteln: $p = \frac{s}{S-s}$; da sich s innerhalb der Grenzen o und S bewegen muss, so ist p durch die Grenzen o und $+\infty$ eingeschlossen.

Von dem vorhin vorkommenden Ausdrucke $\sqrt{(R-r)^2(R^2+r^2)^2(1+p)^2+\frac{1}{27}(R+r)^6}$ sagten wir, dass er grösser sei, als $(R-r)(R^2+r^2)(1+p)$. Nehmen wir also an, er sei gleich $(R-r)(R^2+r^2)(1+p)+\varrho$, so lässt sich zeigen, dass mit zunehmenden p der Werth von ϱ stets abnimmt. Setzen wir nämlich etwa $\sqrt{m^2+n^2} = m+\varrho$, so ist $m^2+n^2 = m^2+2m\varrho+\varrho^2$, oder $n^2 = 2mr+\varrho^2$, woraus sofort ersichtlich, dass bei wachsendem m, aber gleichbleibendem n sich ϱ vermindern muss. Da sich nun in dem Ausdrucke von φ, worauf bereits hingewiesen, das von der Quadratwurzel herrührende $(R-r)(R^2+r^2)(1+p)$ gegen das vor dem Wurzelzeichen stehende $-(R-r)(R^2+r^2)(1+p)$ aufheben muss, so folgt, dass mit zunehmenden p φ abnimmt. Ist $p = o$, so ist

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(R-r)(R^2+r^2)+\sqrt{(R-r)^2(R^2+r^2)^2+\tfrac{1}{27}(R+r)^6}},$$

ist $p = \infty$, so ist $\varphi = o$. Nun ist $x = \frac{1}{2}(R-r)+\varphi-\frac{1}{3}\frac{(R+r)^2}{\varphi}$ oder $= -\left[-\frac{1}{2}(R-r)-\varphi+\frac{1}{3}\frac{(R+r)^2}{\varphi}\right]$, wobei der innerhalb der grossen Klammern stehende Ausdruck positiv ist. Ist $p = o$, so hat der positive Theil desselben seinen kleinsten, der negative seinen grössten Werth, ist $p = \infty$, so hat umgekehrt der positive Theil seinen grössten und der negative Theil seinen kleinsten Werth. Der Absolutwerth von x ist im ersten Falle am kleinsten, im zweiten Falle ist er unendlich. Denken wir uns also p von o bis ∞, oder s von o bis S zunehmen, so geht der Schnittpunkt von einer bestimmten auf der negativen Seite der X-Achse befindlichen Stelle bis zu einer auf derselben Seite der Achse gelegenen unendlichen Entfernung.

§ 8. Die Frage nach dem Schnittpunkt der Curve mit der X-Achse nöthigte uns den Zähler unserer Funktion y gleich Null zu setzen. Dadurch wurde der Gedanke nahe gelegt, auch den Nenner einmal gleich Null zu setzen. Da in diesem Falle der Zähler eine endliche Grösse ist, so würden wir auf diese Weise ermitteln, welchen Werthen von x ein unendlich grosses y entspricht. Die betreffende Gleichung lautet unter Anwendung einer kleinen Vereinfachung:

$$x^3-\tfrac{3}{2}(R-r)x^2+\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)x+\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p = o.$$

Wir bilden wieder die Werthe von b, c, φ^3 und φ:

$$\begin{aligned} b &= -\tfrac{3}{4}(R-r)^2+\tfrac{3}{2}(R^2+r^2) = \tfrac{3}{4}(R+r)^2.\\ c &= -\tfrac{1}{4}(R-r)^3+\tfrac{3}{4}(R-r)(R^2+r^2)+\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p =\\ &= -\tfrac{1}{4}(R-r)[(R^2-2Rr+r^2)-3(R^2+r^2)-2(R^2+Rr+r^2)p] =\\ &= \tfrac{1}{2}(R^3-r^3)(1+p).\\ \varphi^3 &= -\tfrac{1}{4}(R^3-r^3)(1+p)+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{4}(R^3-r^3)^2(1+p)^2+\tfrac{1}{16}(R+r)^6}\\ &= \tfrac{1}{8}[-2(R^3-r^3)(1+p)\sqrt{4(R^3-r^3)^2(1+p)^2+(R+r)^6}.\\ \varphi &= \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-2(R^3-r^3)(1+p)+\sqrt{4(R^3-r^3)^2(1+p)^2+(R+r)^6}}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck unter dem Quadratwurzelzeichen ist wiederum positiv und kann für keine Annahme von R, r und p zu Null werden. Also besitzt die vorliegende Gleichung ebenfalls nur eine reelle Wurzel. Dieselbe heisst:

$$x=\tfrac{1}{2}(R-r)+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-2(R^3-r^3)(1+p)+\sqrt{4(R^3-r^3)^2(1+p)^2+(R+r)^6}}$$
$$-\frac{1}{2}\,\frac{(R+r)^2}{\sqrt[3]{-2(R^3-r^3)(1+p)+\sqrt{4(R^3-r^3)^2(1+p)^2+(R+r)^6}}}$$

§ 9. Der Werth von $\sqrt{4(R^3-r^3)^2(1+p)^2+(R+r)^6}$ ist grösser als $2(R^3-r^3)(1+p)$, aber kleiner als $2(R^3-r^3)(1+p)+(R+r)^3$. Da sich nun wiederum dieses $2(R^3-r^3)(1+p)$ gegen das vor Quadratwurzelzeichen stehende $-2(R^3-r^3)(1+p)$ aufhebt, so ist φ grösser als Null, aber kleiner als $\tfrac{1}{2}(R+r)$. Setzt man für φ diesen zu grossen Werth $\tfrac{1}{2}(R+r)$ in die Gleichung von x, der man die kürzere Form

$$x=\frac{1}{2}(R-r)+\varphi-\frac{1}{4}\,\frac{(R+r)^2}{\varphi}$$

gegeben hat, ein: so wird der positive Theil wieder zu gross, der negative zu klein, x selbst also zu gross. Also ist

$$x<\frac{1}{2}(R-r)+\frac{1}{2}(R+r)-\frac{1}{2}\,\frac{(R+r)^2}{R+r} \text{ oder } x<\frac{1}{2}(R-r).$$

Da nun aus der Natur der ursprünglichen Schwerpunktsaufgabe auch hier wiederum hervorgeht, dass y innerhalb der Grenzen $x=o$ und $x=\frac{R-r}{2}$ nicht unendlich werden kann, so muss der Werth von x negativ sein.

§ 10. In dem Augenblicke, wo die Function $x^3-\tfrac{3}{2}(R-r)x^2+\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)x+\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p$ zu Null wird, befindet sie sich auf dem Uebergange vom Negativen zum Positiven. Setzt man nämlich diese Function gleich N und bildet die derivirte Function $\frac{dN}{dx}=3x^2-3(R-r)x+\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)$, so ist dieselbe für alle negativen Werthe von x positiv, also auch für den Werth von x, welcher die Function N zu Null macht. Der Werth von N ist demnach für negative wachsende x im Zunehmen, geht also in dem Momente, wo er gleich Null ist, von negativen zu positiven Werthen über. An dieser Stelle nun hat der Zähler der Function y, wie früher (S. 6) gezeigt worden, einen von Null verschiedenen Werth, der auch wegen der Stetigkeit des Zählers für unendlich kleine Aenderungen von x sein Zeichen nicht wechseln kann. Lässt man also den Werth von x, welcher N zu Null macht, um eine unendlich kleine Grösse zu- und abnehmen, so nimmt dadurch N im ersten Falle einen unendlich kleinen positiven, im zweiten einen unendlich kleinen negativen Werth an, y aber springt dadurch, jenachdem der Zähler positiv oder negativ ist, von einem unendlich grossen positiven zu einem unendlich grossen negativen, oder von einem unendlich grossen negativen zu einem unendlich grossen positiven Werthe über.

§ 11. Welche von diesen beiden Möglichkeiten eintritt, lässt sich auf folgende allerdings nicht ganz einfache Weise bestimmen. Für alle negativen Werthe von x (und nur um soche handelt es sich hier) ist

$$y=\tfrac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha\,.\,2(R+r)\,\frac{-x^3-\tfrac{3}{2}(R-r)x^2-(R^2-Rr+r^2)x+\tfrac{1}{4}(R^2+r^2)(R-r)p}{-x^3-\tfrac{3}{2}(R-r)x^2-\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)x+\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p}.$$

Sehen wir von dem constanten Factor ab, so sind die beiden ersten Glieder des Zählers gleich den beiden ersten Gliedern des Nenners; das dritte Glied des Zählers ist, wie ohne Weiteres in die Augen fällt, kleiner als das entsprechende Glied des Nenners, und dass von den vierten Gliedern dasselbe gilt, wird klar, sobald man für $\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p$ im Nenner $\tfrac{1}{2}(R^2+Rr+r^2)(R-r)p$ setzt. Für ein unendlich kleines negatives x kommt der Bruch bis auf eine unendlich kleine Grösse dem Werthe $\frac{\tfrac{1}{4}(R^2+r^2)(R-r)p}{\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p}$ nahe. Zähler und Nenner sind dann positiv, und der Zähler ist kleiner als der

Nenner. Durch Zunehmen des absoluten Werthes von x nehmen Zähler und Nenner ab, der Zähler aber in stärkerem Grade, als der Nenner. Schreibt man nämlich den negativen Theil des Zählers und des Nenners, von dessen Wachsen (im absoluten Sinne) das Abnehmen des Zählers und des Nenners abhängt, in der Form

$$-[x^2+\tfrac{3}{2}(R-r)x+(R^2-Rr+r^2)]x \text{ und } -[x^2+\tfrac{3}{2}(R-r)x+\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)]x,$$

so bedingt der ausserhalb der grossen Klammern stehende Factor x für beide Ausdrücke eine verhältnissmässig gleiche Vergrösserung; von den in den grossen Klammern stehenden je drei Summanden sind die ersten und zweiten gleich und nehmen in demselben Masse zu, die dritten aber sind ungleich und constant; die Zunahme ist also dort verhältnissmässig am grössten, wo der kleinste constante Summand ist, hier also im ersten Ausdruck. Wenn aber in einer Differenz, deren Werth positiv und kleiner ist, als der Werth einer anderen Differenz, der Subtrahend schneller abnimmt, als der Subtrahend der anderen Differenz, so muss auch der Werth der ersten Differenz schneller abnehmen, als der der zweiten.

Schreiben wir nun y in der Form

$$\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha(R+r)\frac{-[x^3+\tfrac{3}{2}(R-r)x^2+(R^2-Rr+r^2)x]+\tfrac{1}{4}(R^2+r^2)(R-r)p}{-[x^3+\tfrac{3}{2}(R-r)x^2+\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)x]+\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p},$$

so stellen Zähler und Nenner des hier vorkommenden Bruches zwei so beschaffene Differenzen dar, und zwar nimmt der Zähler hier in stärkerem Masse ab, als der Nenner. Es muss also auch der Zähler eher die Null passiren, als der Nenner. Ist der Zähler durch Null gegangen, so bekommt er einen negativen Werth, den er dann auch fortwährend beibehält. Während aber der Zähler jetzt absolut steigende negative Werthe annimmt, nähert sich der noch positive Nenner dem Werthe Null, y also dem Werthe $-\infty$. Ist der Nenner durch die Null durchgegangen, so nimmt auch er negative Werthe an, und y springt dann von $-\infty$ in $+\infty$ über.

§ 12. Hierdurch also ist der fragliche Punkt erledigt, und gleichzeitig erfahren wir noch, dass der Punkt der Curve, für den $y=o$ ist, näher bei dem Nullpunkt des Coordinatensystems liegt, als der Punkt, für den $y=\pm\infty$ ist.

§ 13. Von dem Einfluss, den der Werth von p auf die Abscisse, für welche $y=\pm\infty$ ist, ausübt, lässt sich mit einigen Aenderungen in den algebraischen Grössen dasselbe sagen, was auf Seite 8 bei ähnlicher Gelegenheit bereits gesagt ist.

---

§ 14. Fassen wir die bis jetzt gewonnenen Resultate zusammen, so ergibt sich folgendes[1]:

Die Curve besteht aus zwei getrennten Armen, indem durch das einmalige Verschwinden des Nenners (§ 8) y plötzlich von $-\infty$ zu $+\infty$ übergeht (§ 10 und 11). Der eine Arm beginnt also für einen bestimmten in § 8 gefundenen negativen (§ 9) Werth von x in unendlich grosser auf der negativen Seite der Y-Achse gelegenen Entfernung und steigt von da aus derart an, dass seine Richtung im Allgemeinen nach der positiven Seite der X-Achse hingeht. Die Abscisse des unendlich entfernten Punktes, mit dem der

1) Man vergleiche hierzu die am Ende des Aufsatzes angeheftete Tafel, worauf die punktirte Curve die zwischen x und y, die ausgezogene Curve dagegen die zwischen t und y bestehenden Relationen versinnbildlicht. Die relativen Werthe der vorkommenden Grössen sind so gewählt, dass $R=10$; $r=3$; $S=2{,}5$; $s=0{,}5$ und $\mathrm{tg}\alpha=20$ ist. Hieraus ergibt sich $h=140$; $l=200$; $\alpha=87^\circ 9' 10''$ und $t=20x$.

Arm beginnt, liegt um so weiter nach der negativen Seite hin, je grösser p ist (§ 13). In einem näher bei dem Nullpunkte, aber ebenfalls noch auf der negativen Seite gelegenen Punkte durchschneidet derselbe Arm die Abscissen-Achse (§ 5, 6, 7 und 12). Hierauf trifft er die Ordinaten-Achse auf der positiven Seite in einer Entfernung vom Nullpunkte, welche gleich $\frac{3}{4}$ tangα $\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$ ist (§ 2, erreicht dann durch gewisse die X-Achse jedoch nicht mehr treffende Krümmungen diesen selben Werth von y noch zweimal, das erste Mal in einem Punkte, dessen Abscisse $\frac{R - r}{2}$, das zweite Mal in einem Punkte, dessen Abscisse $(R - r)$ ist (§ 2). Während endlich im weitern Verlaufe der Curve der Werth von x bis ins Unendliche fortschreitet, nähert sich y immer mehr dem Grenzwerthe $\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha(R + r)$ (§ 3). Weder dieser Arm der Curve, noch der andere machen solche Krümmungen, dass einem Werthe von x zwei Werthe von y angehörten (§ 1).

Der zweite Arm beginnt mit demselben Abscissenwerthe in unendlich grosser auf der positiven Seite der Y-Achse liegenden Entfernung, bei welchen der erste Arm auf der andern Seite der Y-Achse in unendlich grosser Entfernung begann (§ 8—11). Im Allgemeinen ist dieser Arm von hier aus nach der negativen Seite der X-Achse hin gerichtet; er trifft weder die Y-, noch die X-Achse, senkt sich auch niemals so sehr, dass

$$y = \frac{3}{4}\mathrm{tg}\alpha\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$$

würde (§ 2) [1]) und nähert sich endlich, während x ins Unendliche nach der negativen Seite hin fortschreitet, einem Punkte, dessen Ordinate wiederum $\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha(R + r)$ ist (§ 3).

---

1) Dass $\frac{3}{4}\mathrm{tg}\alpha.\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$ wirklich kleiner ist, als $\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha.(R + r)$ lässt sich auch auf folgende Weise zeigen:

$$R^4 - r^4 : R^3 - r^3 = R + \frac{(R - r)r^3}{R^3 - r^3} = R + \frac{r^3}{R^2 + Rr + r^2} = R + r.\frac{r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

Da nun $\frac{r^2}{R^2 + Rr + r^2}$ kleiner ist, als 1, so ist $\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3} < R + r$, um so mehr also auch $\frac{3}{4}\mathrm{tg}\alpha.\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3} < \frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha(R + r)$.

Capitel III.

§ 1. Um zu weiterer Erkenntniss des Laufes der Curve zu gelangen, ist es nöthig, zu dem ersten und zweiten Differentialquotienten der Function y überzugehen. Statt der Gleichung

$$y=\tfrac{3}{4}\mathrm{tg}\alpha\,.\,\frac{4(R+r)x^3-6(R^2-r^2)x^2+4(R^3+r^3)x+(R^4-r^4)p}{2x^3-3(R-r)x^2+3(R^2+r^2)x+(R^3-r^3)p}$$

wollen wir die bereits auf Seite 10 zu Grunde gelegte

$$y=\tfrac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha\,.\,(R+r)\,.\,\frac{x^3-\frac{3}{2}(R-r)x^2+(R^2-Rr+r^2)x+\frac{1}{4}(R^2+r^2)(R-r)p}{x^3-\frac{3}{2}(R-r)x^2+\frac{3}{2}(R^2+r^2)x+\frac{1}{2}(R^3-r^3)p}$$

benutzen und ihr mittelst einer an sich deutlichen Vereinfachung die Gestalt $y=\frac{3}{2}\,\mathrm{tg}\alpha\,.(R+r).\,\frac{Z}{N}$ geben. Dann ist

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha\,.(R+r)\,.\,\frac{N\frac{dZ}{dx}-Z\frac{dN}{dx}}{N^2}=$$

$$\tfrac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha\,.\,(R+r)\,.\,\Big[\big\{x^3-\tfrac{3}{2}(R-r)x^2+\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)x+\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p\big\}.\big\{3x^2-3(R-r)x+(R^2-Rr+r^2)\big\}$$
$$-\big\{x^3-\tfrac{3}{2}(R-r)x^2+(R^2-Rr+r^2)x+\tfrac{1}{4}(R^2+r^2)(R-r)p\big\}\big\{3x^2-3(R-r)x+\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)\big\}\Big]:N^2=$$

$$\tfrac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha\,.(R+r)\,.\left[\begin{array}{r|l|l|l|l}
3 & x^5-3(R-r) & x^4+(R^2-Rr+r^2) & x^3 & \\
 & -\frac{9}{2}(R-r) & +\frac{9}{2}(R-r)^2 & -\frac{3}{2}(R-r)(R^2-Rr+r^2) & x^2 \\
 & & +\frac{3}{2}(R^2+r^2) & -\frac{9}{2}(R-r)(R^2+r^2) & +\frac{3}{2}(R^2+r^2).(R^2-Rr+r^2)\;x \\
 & & & +\frac{3}{2}(R^3-r^3)p & -\frac{3}{2}(R^3+r^3)(R-r)p \\
-3 & +3(R-r) & -\frac{3}{2}(R^2+r^2) & & \\
 & +\frac{9}{2}(R-r) & -\frac{9}{2}(R-r)^2 & +\frac{9}{4}(R-r)(R^2+r^2) & \\
 & & -3(R^2-Rr+r^2) & +3(R-r)(R^2-Rr+r^2) & -\frac{3}{2}(R^2+r^2)(R^2-Rr+r^2) \\
 & & & -\frac{3}{4}(R-r)(R^2+r^2)p & +\frac{3}{4}(R^2+r^2)(R-r)^2.p
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\frac{1}{2}(R^3-r^3)(R^2-Rr+r^2)p \\[3em]
-\frac{3}{8}(R-r)(R^2+r^2)^2.p
\end{array}\right]:N^2=\tfrac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha(R+r)\,.\big[(R+r)^2x^3-\tfrac{3}{4}(R-r)(R+r)^2\,.\,(1-p)x^2-\tfrac{3}{4}(R^2-r^2)^2.px+$$

$$\tfrac{1}{8}(R-r)^3(R+r)^2\big]:N^2=\tfrac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha\,.(R+r)^3\frac{x^3-\frac{3}{4}(R-r)(1-p)x^2-\frac{3}{4}(R-r)^2px+\frac{1}{8}(R-r)^3.p}{\big[x^3-\frac{3}{2}(R-r)x^2+\frac{3}{2}(R^2+r^2)x+\frac{1}{2}(R^3-r^3)p\big]^2}.$$

Um zum zweiten Differentialverhältnisse zu gelangen, setzen wir den im ersten Differentialverhältnisse vorkommenden Zähler gleich Z', dann ist $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha\,.(R+r)^3\,.\,\frac{Z'}{N^2}$, und daraus folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha\,.\,(R+r)^3\,.\,\frac{N^2\,.\,\frac{dZ'}{dx}-2Z'N\,.\,\frac{dN}{dx}}{N^4}=\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha\,.\,(R+r)^3\,.\,\frac{N\,.\,\frac{dZ'}{dx}-2\,.\,Z'\,.\,\frac{dN}{dx}}{N^3}.$$

Führen wir dieses aus, so entsteht:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\tfrac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha\,.\,(R+r)^3.\Big[\big\{x^3-\tfrac{3}{2}(R-r)x^2+\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)x+\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p\big\}.\big\{3x^2-\tfrac{3}{2}(R-r)(1-p)x-\tfrac{3}{4}(R-r)^2.p\big\}$$
$$-2\big\{x^3-\tfrac{3}{4}(R-r)(1-p)x^2-\tfrac{3}{4}(R-r)^2px+\tfrac{1}{8}(R-r)^3\,.\,p\big\}\big\{3x^2-3(R-r)x+\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)\big\}\Big]:N^3=$$

$$\tfrac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha.(R+r)^3 \left[\begin{array}{r|l|l|l|l|l}
x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & \\
\hline
3 & -\tfrac{3}{2}(R-r)(1-p) & -\tfrac{3}{4}(R-r)^2p & +\tfrac{3}{8}(R-r)^3p & -\tfrac{3}{8}(R^2+r^2)(R-r)^2p & -\tfrac{3}{8}(R^3-r^3)(R-r)^2p^2 \\
 & -\tfrac{3}{2}(R-r) & +\tfrac{3}{4}(R-r)^2(1-p) & -\tfrac{3}{4}(R^2+r^2)(R-r)(1-p) & -\tfrac{3}{4}(R^3-r^3)(R-r)(1-p)p & \\
 & & +\tfrac{3}{2}(R^2+r^2) & +\tfrac{3}{2}(R^3-r^3)p & & \\
-6 & +6(R-r) & -3(R^2+r^2) & +\tfrac{3}{4}(R-r)(R^2+r^2)(1-p) & +\tfrac{3}{4}(R^2+r^2)(R-r)^2p & -\tfrac{3}{8}(R-r)^3(R^2+r^2)p \\
 & +\tfrac{3}{2}(R-r)(1-p) & -\tfrac{3}{2}(R-r)^2(1-p) & -\tfrac{3}{2}(R-r)^3p & +\tfrac{3}{4}(R-r)^4p & \\
 & & +\tfrac{3}{2}(R-r)^2p & -\tfrac{3}{4}(R-r)^3p & &
\end{array}\right] : N^3 =$$

$$\tfrac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha\,.\,(R+r)^3\,.\,[-3x^5-\tfrac{3}{2}(R-r)(2p-3)x^4+\tfrac{3}{4}\{(8p-1)(R-r)^2+4Rr\}x^3+$$
$$\tfrac{3}{8}(R-r)p\{12Rr-7(R-r)^2\}x^2+\tfrac{3}{8}(R-r)^2\,.\,p\{2(R^2+Rr+r^2)p+3(R-r)^2\}x-$$
$$\tfrac{3}{8}(R-r)^3p\{(R^2+Rr+r^2)p+(R^2+r^2)\}]:N^3.$$

§ 2. In den Untersuchungen des vorigen Capitels nahmen einzelne Punkte der Curve unsere Aufmerksamkeit besonders in Anspruch. Einer derselben war der Punkt, dessen Abscisse Null, und dessen Ordinate $\frac{3}{4}\mathrm{tg}\alpha\,.\,\frac{R^4-r^4}{R^3-r^3}$ war; dieselbe Ordinate begegnete uns auch noch bei denjenigen Punkten der Curve, deren Abscissen $\frac{R-r}{2}$ und $R-r$ waren. Wir wollen nun zusehen, ob durch Einsetzung dieser drei Abscissen-Werthe in die für das erste und zweite Differentialverhältniss gefundenen Gleichungen positive oder negative Werthe erzielt werden. Bei dem ersten Differentialverhältniss ist der Factor $\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha\,.\,(R+r)^3$ stets positiv; ebenso ist der Nenner des andern Factors, da derselbe ein Quadrat ist, für alle Werthe von x positiv. Das Vorzeichen von $\frac{dy}{dx}$ ist also identisch mit dem Vorzeichen des Zählers $x^3-\frac{3}{4}(R-r)(1-p)x^2-\frac{3}{4}(R-r)^2px+\frac{1}{8}(R-r)^3p$. Ist $x=0$, so ist dieser Zähler gleich $\frac{1}{8}(R-r)^3p$, der erste Differentialquotient also positiv. Ist $x=\frac{R-r}{2}$, so lautet der Zähler $\frac{1}{8}(R-r)^3-\frac{3}{16}(R-r)^3(1-p)-\frac{3}{8}(R-r)^3p+\frac{1}{8}(R-r)^3p=-\frac{1}{16}(R-r)^3\,.\,(1+p)$, und der erste Differentialquotient ist negativ. Ist endlich $x=R-r$, so verwandelt sich der Zähler in

$$(R-r)^3-\tfrac{3}{4}(R-r)^3(1-p)-\tfrac{3}{4}(R-r)^3p+\tfrac{1}{8}(R-r)^3\,.\,p=\tfrac{1}{8}(R-r)^3\,.\,(p+2),$$

und der erste Differentialquotient wird positiv.

Auch bei dem zweiten Differentialverhältnisse kann man von dem constanten und stets positiven Factor $\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha\,.\,(R+r)^3$ absehen. Setzt man $x=o$, so wird der Zähler des übrigbleibenden Factors $=-\frac{3}{8}(R-r)^3\,.\,p\{(R^2+Rr+r^2)p+(R^2+r^2)\}$, also negativ, der Nenner wird $=\{\frac{1}{2}(R^3-r^3)p\}^3$, also positiv; folglich wird der zweite Differentialquotient für diesen Fall negativ. Unter der Annahme ferner, dass $x=\frac{R-r}{2}$ sei, wird der Zähler des zweiten Differentialquotienten gleich $-\frac{3}{32}(R-r)^5$

$$-\tfrac{3}{32}(R-r)^5(2p-3)+\tfrac{3}{32}(R-r)^3\,.\,\{(8p-1)(R-r)^2+4Rr\}+\tfrac{3}{32}(R-r)^3\,.\,p\{12Rr-7(R-r)^2\}$$
$$+\tfrac{3}{16}(R-r)^3\,.\,p\,.\{2(R^2+Rr+r^2)p+3(R-r)^2\}-\tfrac{3}{8}(R-r)^3\,.\,p\,.\{(R^2+Rr+r^2)p+(R^2+r^2)\}.$$

Lässt man hieraus die allen Summanden gemeinsame positive Grösse $\frac{3}{32}(R-r)^3$ fort, so bleibt noch:

$$-2(R-r)^2(p-1)+\{(8p-1)(R-r)^2+4Rr\}+p\{12Rr-7(R-r)^2\}+2p\{2(R^2+Rr+r^2)p$$
$$+3(R-r)^2\}-4p\{(R^2+Rr+r^2)p+(R^2+r^2)\}=$$
$$2(R-r)^2-(R-r)^2+4Rr-2(R-r)^2.p+8(R-r)^2.p+12Rrp-7(R-r)^2p+6(R-r)^2p-$$
$$-4(R^2+r^2)p+4(R^2+Rr+r^2)p^2-4(R^2+Rr+r^2)p^2=$$

$(R+r)^2.p+(R+r)^2=(R+r)^2.(p+1)$. Der Zähler ist also positiv. Der Nenner lautet durch Substitution von $\frac{R-r}{2}$:

$$[\tfrac{1}{8}(R-r)^3-\tfrac{3}{8}(R-r)^3+\tfrac{3}{4}(R^2+r^2)(R-r)+\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p]^3=(\tfrac{1}{2})^3[(R^3-r^3)p+(R-r)\{\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)-$$
$$-\tfrac{1}{2}(R-r)^2\}]^3=\tfrac{1}{8}[(R^3-r^3)p+(R-r)(R^2+Rr+r^2)]^3=[\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)(p+1)]^3,$$

ist also ebenfalls positiv. Da nun Zähler und Nenner positiv sind, so muss es auch der zweite Differentialquotient sein.

Endlich wäre $x=R-r$ zu setzen. Der Zähler ist in diesem Falle:

$$-3(R-r)^5-\tfrac{3}{4}(R-r)^5.(2p-r)+\tfrac{3}{4}(R-r)^3\{(8p-1)(R-r)^2+4Rr\}+\tfrac{3}{8}(R-r^3).p\{12Rr-7(R-r)^2\}$$
$$+\tfrac{3}{8}(R-r)^3p.\{2(R^2+Rr+r^2)p+3(R-r)^2\}-\tfrac{3}{8}(R-r)^3.p.\{(R^2+Rr+r^2)p+(R^2+r^2)\}.$$

Lässt man auch hier wieder die allen Summanden gemeinsame positive Grösse $\frac{3}{8}(R-r)^3$ fort, so bleibt noch:

$$-4(R-r)^2(2p-1)+2\{(8p-1)(R-r)^2+4Rr\}+p\{12Rr-7(R-r)^2\}+p\{2(R^2+Rr+r^2)p+$$
$$+3(R-r)^2\}-p\{(R^2+Rr+r^2)p+(R^2+r^2)\}=-(R^2+Rr+r^2)p^2+2(R^2+Rr+r^2)p^2-(R^3+r^2)p$$
$$+3(R-r)^2p+12Rrp-7(R-r)^2.p+16(R-r)^2.p-8(R-r)^2p-2(R-r)^2+8Rr+4(R-r)^2=$$

$(R^2+Rr+r^2)p^2+(3R^2+4Rr+3r^2)p+2(R+r)^2$, und diese Grösse ist positiv. Setzt man $R-r$ für x in den Nenner ein, so ergiebt sich:

$$[(R-r)^3-\tfrac{3}{2}(R-r)^3+\tfrac{3}{2}(R^2+r^2)(R-r)+\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p]^3=[(R-r)(R^2+Rr+r^2)+\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p]^3=$$
$$[(R^3-r^3)+\tfrac{1}{2}(R^3-r^3)p]^3=[(R^3-r^3)(1+\tfrac{1}{2}p)]^3.$$

Da auch diese Grösse positiv ist, so ist es auch der Bruch und weiterhin auch der zweite Differentialquotient.

§ 3. Da nun ein positives $\frac{dy}{dx}$ das Steigen der Curve, ein negatives das Fallen derselben angiebt, da ferner durch ein positives $\frac{d^2y}{dx^2}$ angezeigt wird, dass die Curve ihre convexe Seite, durch ein negatives $\frac{d^2y}{dx^2}$ dagegen, dass sie ihre concave Seite nach unten kehrt, so folgt aus den letzten Erörterungen, dass in dem Punkte, für den $x=o$ ist, die Cure im Steigen ist und ihre concave Seite der X-Achse zugewendet, dass ferner in dem Puncte, dessen Abscisse gleich $\frac{R-r}{2}$ ist, die Curve fällt und ihre convexe Seite der X-Achse zukehrt, und endlich, dass in dem Punkte, dessen Abscisse $(R-r)$ ist, die Curve wieder steigt, aber ihre convexe Seite nach der X-Achse hinkehrt.

§ 4. Wir haben im vorigen Capitel an zweiter Stelle die Werthe zu bestimmen gesucht, welche y annimmt, wenn x zu unendlich grossen Werthen übergeht, und haben gefunden, dass sowohl für ein positives, wie für ein negatives unendlich grosses x die Y-Coordinate den Werth $\frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha(R+r)$ erhält. Lässt man nun auch in den Formeln des ersten und zweiten Differentialquotienten x bis ins Unendliche hinein zu- oder abnehmen, so nähert sich der erste Differentialquotient immer mehr dem Werthe $\frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha(R+r)^3\cdot\frac{x^3}{x^6}=\frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha(R+r)^3\cdot\frac{1}{x^3}$, und der zweite Differentialquotient nähert sich immer mehr dem

Werthe $\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha(R+r)^3 \cdot \frac{-3x^5}{x^9} = -\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha(R+r)^3 \cdot \frac{3}{x^4}$. Ist also x unendlich gross und positiv, so hat $\frac{dy}{dx}$ einen unendlich kleinen positiven, $\frac{d^2y}{dx^2}$ einen unendlich kleinen negativen Werth, ist x unendlich gross und negativ, so hat $\frac{dy}{dx}$ einen unendlich kleinen negativen, und $\frac{d^2y}{dx^2}$ wiederum einen unendlich kleinen negativen Werth. Das sagt uns also: Während die Curve auf der negativen Seite der Abscissenachse aus dem Unendlichen herkommt, senkt sie sich nach dieser Achse hin und kehrt ihr die concave Seite zu, während sie dagegen auf der positiven Seite der X-Achse sich ins Unendliche hinein erstreckt, steigt sie empor und kehrt der Achse ebenfalls ihre concave Seite zu. Da $\frac{dy}{dx}$ auch die trigonometrische Tangente des Winkels bezeichnet, den die Tangente der Curve mit der Abscissenachse bildet, so folgt aus dem Vorhergehenden auch, dass für ein unendlich grosses positives oder negatives x die Tangente der Curve parallel der X-Achse wird.

§ 5. Im vorigen Capitel haben wir auch einen negativen Werth von x gefunden, für den $y = -\infty$ war, und einen andern ebenfalls negativen, aber absolut genommen kleinern Werth von x, für den $y = 0$ war. Wir hätten also auch für diese Fälle die vorhin angewandte Methode zu benutzen. Wir gelangen aber zu allgemeinern Resultaten, wenn wir an die Entwickelungen des § 11 im vorigen Capitel anknüpfend bedenken, dass von $x = 0$, oder von dem Schnittpunkte der Curve mit der Y-Achse an gerechnet y ohne Unterbrechung nach der linken Seite hin abnimmt, bis es den Werth $-\infty$ erreicht. Daraus folgt schon, dass für alle zwischen den angegebenen Grenzen befindliche Werthe von x der erste Differentialquotient, dem wir nach Seite 12 die Form

$$\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha \cdot (R+r)\frac{N\frac{dZ}{dx} - Z\frac{dN}{dx}}{N^2}$$

geben wollen, positiv ist. Der zweite Differentialquotient lautet nun

$$\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha \cdot (R+r) \cdot \frac{N\left(N\frac{d^2Z}{dx^2} - Z\frac{d^2N}{dx^2}\right) - 2\left(N\frac{dZ}{dx} - Z\frac{dN}{dx}\right)\frac{dN}{dx}}{N^3}.$$

Ferner ist

$$\frac{dZ}{dx} = 3x^2 - 3(R-r)x + (R^2 - Rr + r^2);$$

$$\frac{dN}{dx} = 3x^2 - 3(R-r)x + \tfrac{3}{2}(R^2 + r^2);$$

$$\frac{d^2Z}{dx^2} = 6x - 3(R-r);$$

$$\frac{d^2N}{dx^2} = 6x - 3(R-r).$$

Die beiden ersten Differentialquotienten von Z und N sind also für alle negativen Werthe von x positiv, die beiden zweiten negativ. Die beiden letztern sind nebenbei einander gleich. Wegen dieser Gleichheit kann man schreiben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{N(N-Z)\frac{d^2Z}{dx^2} - 2\left(N\frac{dZ}{dx} - Z\frac{dN}{dx}\right)\frac{dN}{dx}}{N^3}$$

und wegen der vorhin angegebenen Gleichung von $\frac{dy}{dx}$ auch:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(N-Z)\frac{d^2Z}{dx^2}}{N^2} - \frac{2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dN}{dx}}{N}.$$

Wie früher (Seite 9 f.) gezeigt, ist innerhalb der Grenzen $x = o$ und $y = -\infty$ der Werth von N stets positiv und Z immer kleiner, als N. Hieraus, sowie aus den vorhin hergeleiteten Beziehungen, dass nämlich $\frac{dy}{dx}$ für die in Rede stehenden Werthe von x stets positiv, $\frac{dN}{dx}$ für alle negativen Werthe von x positiv, $\frac{d^2Z}{dx^2}$ dagegen negativ ist, folgt, dass auch $\frac{d^2y}{dx^2}$ innerhalb der Grenzen $x = o$ und $y = -\infty$ fortwährend einen negativen Werth besitzt. Die Curve kehrt in diesem Theile ihres Laufes ohne Unterbrechung ihre concave Seite nach unten. Da $\frac{dy}{dx}$ immer grösser und zuletzt bei dem Verschwinden von N sogar ∞ wird, so wird auch der Winkel zwischen der Tangente und der X-Achse immer grösser, bis er bei $y = -\infty$ gleich einem Rechten wird.

§ 6. Ehe wir zu dem noch übrigen Werthe $y = +\infty$ übergehen, wollen wir eine Betrachtung einschieben, die auch für fernere Untersuchungen von Wichtigkeit ist. Es ist früher (S. 6) gezeigt worden, dass Zähler und Nenner der Function y keinen gemeinsamen Theiler, also auch keine gemeinsame Wurzel besitzen. Ferner geht aus der Auflösung der Gleichung $Z = o$ (S. 7) und $N = o$ (S. 8f.) hervor [1], dass auch Z und N für sich betrachtet keine gleichen Wurzeln besitzen. Daraus folgt nun, dass auch Zähler und Nenner von $\frac{dy}{dx}$ keine gemeinsame Wurzel enthalten. Von den in

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha\,.\,(R+r)\,.\,\frac{N\frac{dZ}{dx} - Z\frac{dN}{dx}}{N^2}$$

vorkommenden variabeln Grössen gibt es nämlich keine, welche einen gemeinsamen Theiler besässen; denn sellt man Z und N als Producte durch ihre Wurzelwerthe dar: $Z = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ und $N = (x-\mu)(x-\nu)(x-\varrho)$, worin α, β und γ die Wurzeln der Gleichung $Z = o$, μ, ν, ϱ die Wurzeln der Gleichung $N = o$ sind, und bildet darauf $\frac{dZ}{dx}$ und $\frac{dN}{dx}$, so überzeugt man sich sofort von der Richtigkeit des Gesagten. Dasselbe gilt auch noch, wenn man $\frac{d^2Z}{dx^2}$ und $\frac{d^2N}{dx^2}$ hinzuzieht. Also auch für den zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{2}\mathrm{tang}\alpha\,.\,(R+r)\cdot\frac{N\left(N\frac{d^2Z}{dx^2} - Z\frac{d^2Z}{dx^2}\right) - 2\left(N\frac{dZ}{dx} - Z\frac{dN}{dx}\right)\frac{dN}{dx}}{N^3}$ bekommen wir das Ergebniss, dass Zähler und Nenner keine gemeinsame Wurzel besitzen.

§ 7. Während y von $-\infty$ zu $+\infty$ überspringt, geht N von einem unendlich kleinen positiven zu einem unendlich kleinen negativen Werthe über. Hierbei ändert nun nach der vorstehenden Betrachtung weder bei $\frac{dy}{dx}$, noch bei $\frac{d^2y}{dx^2}$ der Zähler sein Vorzeichen. Der Nenner ist bei $\frac{dy}{dx}$ die zweite, bei $\frac{d^2y}{dx^2}$ die dritte Potenz von N. Mithin bleibt das Vorzeichen von $\frac{dy}{dx}$ ungeändert das positive, das Vorzeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ dagegen geht in das negative über; mit andern Worten: die Curve ist an der

1) Wir erhielten sowohl für die Gleichung $Z = o$, wie auch für die Gleichung $N = o$ nur einen reellen Werth, die beiden andern waren also complex und conjugirt.

Stelle, wo y mit wachsendem $x = +\infty$ wird, im Ansteigen begriffen, und kehrt ihre convexe Seite nach unten. Da in diesem Falle $\frac{dy}{dx} = +\infty$ wird, so steht die Tangente der Curve in diesem Punkte wieder senkrecht auf der x-Achse, und fällt zusammen mit der Tangente des Punktes, für den $y = -\infty$ ist. Diese Senkrechte ist also Asymptote für beide Curvenäste.

§ 8. Die beiden Punkte $y = \pm\infty$ sind die einzigen, für welche $\frac{dy}{dx}$, sowie auch $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich werden können. Wir haben uns nun auch zu fragen, für welche Werthe von x dieselben Differentialquotienten der Null gleich werden. Da, wie vorhin gezeigt, Zähler und Nenner von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ keine gemeinsamen Wurzeln haben, so treten die angeregten Fälle ein, wenn die Zähler gleich Null, oder die Nenner unendlich werden. Das unendlich werden der Nenner ist aber auch noch auszuschliessen, weil dann auch die Zähler unendlich werden, und $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ sich beziehungsweise den Seite 14 f. gefundenen Werthen $\frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha(R + r)^3 . \frac{1}{x^3}$ und $-\frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha(R + r)^3 . \frac{3}{x^4}$ nähern. Es sind also die Zähler von $\frac{dy}{dx}$ und von $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleich Null zu setzen. Demnach ist zunächst die Gleichung

$$x^3 - \tfrac{3}{4}(R - r)(1 - p)x^2 - \tfrac{3}{4}(R - r)^2 . px + \tfrac{1}{8}(R - r)^3 p = 0$$

in Bezug auf x aufzulösen.

Unter Festhaltung derselben Bezeichnungen wie auf Seite 7 ist

$$b = -\tfrac{3}{16}(R - r)^2 . (1 - p)^2 - \tfrac{3}{4}(R + r)^2 . p = -\tfrac{3}{16}(R - r)^2\{(1 - p)^2 + 4p\} = -\tfrac{3}{16}(R - r)^2 . (1 + p)^2 .$$

$$\begin{aligned} c &= -\tfrac{1}{32}(R - r)^3 . (1 - p)^3 - \tfrac{3}{16}(R - r)^3 . (1 - p) . p + \tfrac{1}{8}(R - r)^3 . p \\ &= -\tfrac{1}{32}(R - r)^3 . \{(1 - p)^3 + 6(1 - p)p - 4p\} \\ &= -\tfrac{1}{32}(R - r)^3 . (1 - p - 3p^2 - p^3) = -\tfrac{1}{32}(R - r)^3 . (1 + p) . (1 - 2p - p^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^3 &= \tfrac{1}{64}(R - r)^3 . (1 + p)(1 - 2p - p^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{32^2}(R - r)^6 . (1 + p)^2 . (1 - 2p - p^2)^2 - \frac{1}{32^2}(R - r)^6(1 + p)^6} \\ &= \tfrac{1}{64}(R - r)^3 . (1 + p) . \{(1 - 2p - p^2) + \sqrt{(1 - 2p - p^2)^2 - (1 + p)^4}\} \\ &= \tfrac{1}{64}(R - r)^3 . (1 + p\}(1 - 2p - p^2) + 2i\sqrt{(2 + p)p}. \end{aligned}$$

Es nimmt also φ^3 die Form $P + Qi$ an; in diesem Falle erhalten wir für x bekanntlich drei reelle und von einander verschiedene Werthe, nämlich

$$x_1 = -\frac{a_1}{3} + 2\sqrt{-\frac{b}{3}}\cos\frac{h}{3}$$

$$x_2 = -\frac{a_1}{3} + 2\sqrt{-\frac{b}{3}}\cos\frac{h + 2\pi}{3},$$

$$x_3 = -\frac{a_1}{3} + 2\sqrt{-\frac{b}{3}}\cos\frac{h + 4\pi}{3},$$

worin sich h durch die Beziehung $\cos h = -\frac{c}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{b}\right)^3}$ ergibt. Im vorliegenden Falle ist also

$$\cos h = \frac{1}{64}(R - r)^3(1 + p)(1 - 2p - p^2) . \sqrt{\frac{27 . 16^3}{27 . (R - r)^6 . (1 + p)^6}} = \frac{1 - 2p - p^2}{(1 + p)^2} = \frac{1 - (2p + p^2)}{1 + (2p + p^2)}.$$

Setzen wir ferner auch für a_1 und b die bekannten Werthe ein, so entsteht:

$$x_1 = \frac{1}{4}(R-r)\left\{(1-p) + 2(1+p)\cos\frac{h}{3}\right\}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(R-r)\left\{(1-p) + 2(1+p)\cos\frac{h+2\pi}{3}\right\}$$
$$x_3 = \frac{1}{4}(R-r)\left\{(1-p) + 2(1+p)\cos\frac{h+3\pi}{3}\right\}.$$

Da nun in dem Falle, dass $\frac{dy}{dx} = o$ ist, $\frac{d^2y}{dx^2}$ einen endlichen und von Null verschiedenen Werth besitzt, so entspricht jeder der drei für x gefundenen Werthe einem Maximum oder Minimum der Curve. Einer dieser Maximal- resp. Minimalpunkte liegt zwischen $x = -\infty$ und der Stelle, wo $y = \infty$ wird, weil $\frac{dy}{dx}$ innerhalb dieser Strecke sein Zeichen wechselt (vergl. Seite 14 und Seite 16). Aus demselben Grunde liegt ein zweiter zwischen $x = o$ und $x = \frac{R-r}{2}$, und der dritte zwischen $\frac{R-r}{2}$ und $(R-r)$ (vergl. Seite 13 f.). Von den drei vorhin gefundenen Werthen von x ist also einer negativ, die beiden andern sind positiv. Der negative Werth entspricht einem Minimum, weil $\frac{dy}{dx}$ bei $x = -\infty$ negativ, bei $y = \infty$ positiv ist; der erste positive gehört einem Maximum an, weil $\frac{dy}{dx}$ bei $x = o$ positiv, bei $x = \frac{R-r}{2}$ negativ ist, der zweite positive aber wieder einem Minimum, weil $\frac{dy}{dx}$ bei $x = \frac{R-r}{2}$ negativ, bei $x = (R-r)$ positiv ist.

§ 9. Die Gleichung, die uns das zweite Differentialverhältniss liefert lautet:

$$-3x^5 - \tfrac{3}{2}(R-r)(2p-3)x^4 + \tfrac{3}{4}\{(8p-1)(R-r)^2 + 4Rr\}x^3 + \tfrac{3}{8}(R-r)p\{12Rr - 7(R-r)^2\}x^2 + \tfrac{3}{8}(R-r)^2 . p\{2(R^2+Rr+r^2)p + 3(R-r)^2\}x - \tfrac{3}{8}(R-r)^3 p\{(R^2+Rr+r^2)p + (R^2+r^2)\} = o.$$

Diese Gleichung ist vom fünften Grade, lässt also eine allgemeine Lösung nicht zu. Jedenfalls hat sie eine reelle Wurzel, kann deren aber auch drei oder fünf besitzen. Jeder reellen Wurzel entspricht ein Beugungspunkt der Curve, d. h. ein Punkt, bei dem der Sinn der Kümmung sich ändert. Nun ist bei $x = -\infty$ der Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ kleiner, bei $y = +\infty$ grösser als Null. Wegen der Stetigkeit von $\frac{d^2y}{dx^2}$ innerhalb dieser Strecke muss also $\frac{d^2y}{dx^2}$ die Null passirt haben; folglich liegt ein Beugungspunkt der Curve zwischen $x = -\infty$ und $y = +\infty$. Ein zweiter Zeichenwechsel von $\frac{d^2y}{dx^2}$ tritt ein zwischen $x = o$, wo $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, und $x = \frac{R-r}{2}$, wo $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist; ein dritter endlich zwischen $x = R-r$ und $x = +\infty$, indem bei $x = (R-r)$ der Werth des Differentialquotienten positiv, bei $x = +\infty$ dagegen negativ ist. Somit ist die Existenz und im Allgemeinen auch der Ort dreier Beugungspunkte festgestellt. Dass ausserdem noch zwei Beugungspunkte vorhanden seien, ist nicht wahrscheinlich. Auch hat das Zahlenbeispiel, unter dessen Zugrundelegung die Figur auf der nachstehenden Tafel entstanden ist, durch die Anwendung des Sturm'schen Satzes nur drei Wurzelwerthe ergeben.

§ 10. Die Resultate dieses Kapitels sind demnach folgende:

1) Die Curve besitzt eine der X-Achse parallele Asymptote, welcher sich beide Curvenäste von derselben Seite her nähern, während der Werth von x nach beiden Seiten hin in die Unendlichkeit fortschreitet (§ 4).

2) Ausserdem besitzt die Curve noch drei der X-Achse parallele Tangenten, die erste zwischen $x = -\infty$ und $y = -\infty$, die zweite zwischen $x = o$ und $x = \frac{R - r}{2}$, die dritte zwischen $x = \frac{R - r}{2}$ und $x = (R - r)$ (§ 8). Der erste und dritte Berührungspunkt stellt ein Minimum, der zweite ein Maximum der Curve dar.

3) Die Curve besitzt auch eine der Y-Achse parallele Asymptote, welcher sich beide Curvenäste von verschiedener Seite her nähern, während y unendlich grosse positive und negative Werthe annimmt. (§ 5 und § 7.) Eine zweite der Y-Achse parallele Tangente kommt nicht vor.

4) Die Curve enthält drei Beugungspunkte (§ 9). Dass zuweilen auch fünf auftreten können, ist zwar nicht ausser Frage gestellt, ist jedoch nicht wahrscheinlich und daher hier ausser Betracht gelassen. Der erste Beugungspunkt liegt zwischen $x = -\infty$ und dem ersten Minimum; die Curve, die bisher ihre concave Seite der x-Achse zuwandte, kehrt von da ab auf der ganzen Länge des Curvenastes ihre convexe Seite nach unten. Der zweite Beugungspunkt liegt zwischen dem Maximum und dem Punkte, wo y zum zweiten Male gleich $\frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$ wird. Der Curvenast hatte bisher von $y = -\infty$ an die concave Seite nach unten gekehrt. Von der angegebenen Stelle an kehrt er die concave Seite nach oben bis zum dritten Beugungspunkt, welcher zwischen $x = (R - r)$ und $x = \infty$ liegt. Von da ab bleibt die concave Seite fortwährend nach unten gerichtet.

5) Niemals kann einer der Beugungspunkte auf der X-Achse liegen, oder mit einem Maximal- oder Minimalpunkte zusammentreffen, da von den Grössen y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ nicht zwei gleichzeitig zu Null werden können (§ 6). Nach § 2 kann auch ein Beugungspunkt niemals auf der Y-Achse liegen.

6) Aus Capitel I und II geht also hervor, dass die Curve im Allgemeinen die auf der folgenden Tafel gezeichnete Gestalt haben muss.

Capitel IV.

Es erübrigt jetzt noch, dass wir von der durch die Beziehungen von x und y ausgedrückten Curve zu derjenigen übergehen, die eigentlich der Zweck dieser Arbeit war. Es ist bereits früher darauf aufmerksam gemacht worden, dass diese letztere Curve im Allgemeinen dieselbe Gestalt, wie die erstere, besitzt; daher bedarf es nur der Hervorhebung einiger Punkte, um sofort ein klares Bild von dem Verlaufe derselben zu haben. Die Gleichung $t = x \operatorname{tg}\alpha$, welche den Zusammenhang beider Curven angibt, sagt, dass dieselbe Ordinate, welche in der einen Curve der Abscisse x entspricht, in der andern zu der Abscisse t oder $x \,.\, \operatorname{tg}\alpha$ gehört. Ist nun $x = \pm\infty$, so ist auch $t = \pm\infty$; folglich haben beide Curven dieselbe der X-Achse parallele Asymptote. Ist $x = o$, so ist auch $t = o$; beide

Curven schneiden also die Y-Achse in demselben Punkte. Andere correspondirende Punkte der Curve treffen nicht mehr zusammen, es sei denn, dass $tg\alpha = 1$ sei, in welchem Falle beide Curven identisch würden. Erinnern wir uns jedoch der Entstehungsweise unsrer Gleichung, so würde $tg\alpha$ stets grösser als 1 zu nehmen sein, wodurch der Absolutwerth von t stets grösser als der von x ist. Daher liegen bei der zweiten Curve alle Punkte mit negativer Abscisse weiter nach links, alle Punkte mit positiver Abscisse weiter nach rechts, als die entsprechenden der ersten Curve. Der erste Beugungspunkt, der erste Minimalpunkt, der Schnittpunkt der Curve mit der X-Achse, sowie auch die der y-Achse parallele Asymptote treten also weiter nach links, der Maximalpunkt, der zweite Minimalpunkt, die beiden andern Beugungspunkte treten weiter nach rechts. Sollte $tg\alpha$ kleiner als 1 sein, so würde das Gegentheil von dem Gesagten eintreten. Ein Blick auf die Tafel wird die nöthige Klarheit gewähren.

Zum Schlusse noch ein paar Bemerkungen über den Einfluss, den R, r und h auf die Gestalt der Curve ausüben. Lässt man R und r in demselben Masse grösser oder kleiner werden, setzt man also nR und nr an die Stelle von R und r, während h ungeändert bleibt, so gehen R_1 und r_1 in nR_1 und nr_1 über. Da wir aber $R - R_1$ oder $r_1 - r = x$ gesetzt haben, so verwandelt sich x in nx. Ferner geht $tang\alpha$, welches durch die Formel $\frac{h}{R-r}$ bestimmt ist, in $\frac{1}{n}tg\alpha$ über, t dagegen, welches gleich $x . tg\alpha$, sowie l, welches $= R . tg\alpha$ ist, bleiben unverändert.

Setzt man diese Werthe in die zwischen y und x, sowie in die zwischen y und t bestehenden Gleichungen ein, so findet man, dass y für ein nfaches x und für ein gleiches t dieselben Werthe, annimmt. Die T-Curve bleibt also durchaus unverändert, wenn R und r bei gleichbleibendem h in demselben Verhältnisse vergrössert oder verkleinert werden. Aus der X-Curve dagegen wird in diesem Falle eine neue Curve, so dass die alte und die neue Curve sich ihrer Gestalt nach im Allgemeinen wie die Figuren unserer Tafel zu einander verhalten. Bezeichnet man das neue x durch x_1, das neue y durch y_1, so ist $x_1 = y$ und $x_1 = nx$; folglich $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dx_1} = \frac{1}{n}\frac{dy}{dx}$; ferner ist $\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{n}\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$. Bei der neuen X-Curve wird also im Vergleich zur frühern X-Curve für ein gleiches y der erste Differentialquotient n mal, der zweite n^2 mal kleiner.

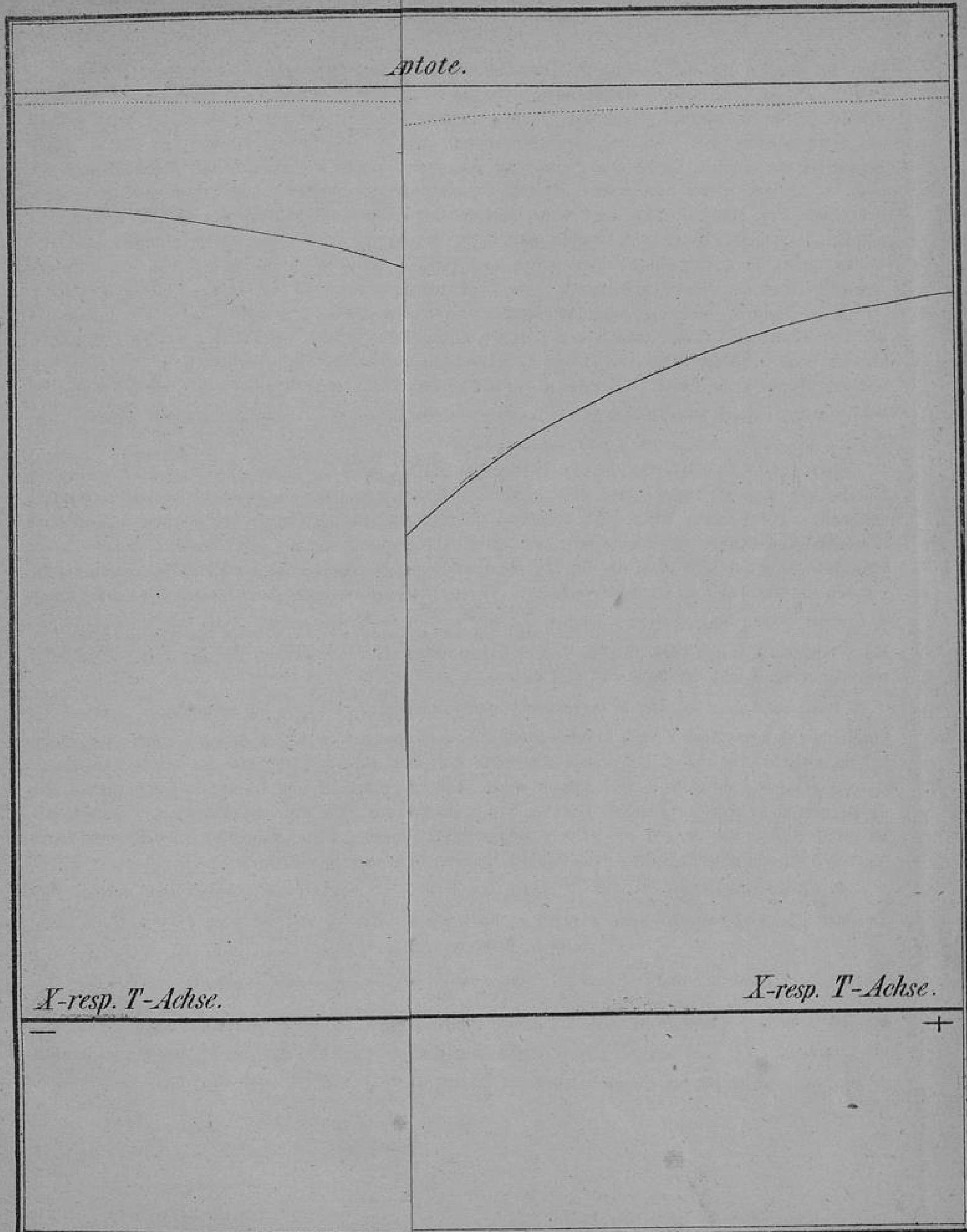
Lässt man R, r, R^1 und r^1 ungeändert, verwandelt dagegen h in nh, so geht $\frac{h}{R-r}$ in $\frac{nh}{R-r}$, mithin $tg\alpha$ in $ntg\alpha$ über. Auch l verwandelt sich in nl, sowie t in nt; x dagegen ändert sich nicht. In die zwischen x und y bestehende Gleichung hat man also nur statt $tg\alpha$ das nfache von $tg\alpha$ zu setzen, wodurch y ebenfalls n mal grösser wird. Die ursprüngliche und die neue x-Curve stehen also so zu einander, dass zu gleichen Werthen von x im letztern Falle ein nmal grösseres y gehört, als im ersten Falle. Aus der für die T-Curve aufgestellten Gleichung findet sich, dass bei der neuen Curve im Vergleich zur ursprünglichen dem nfachen t auch ein nfaches y entspricht.

Die Aenderungen von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, sowie von $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dy^2}{dt^2}$ ergeben sich ähnlich, wie vorhin. Bezeichnet man wiederum das neue x durch x_1, das neue x durch y_1 und das neue t durch t_1, so ist

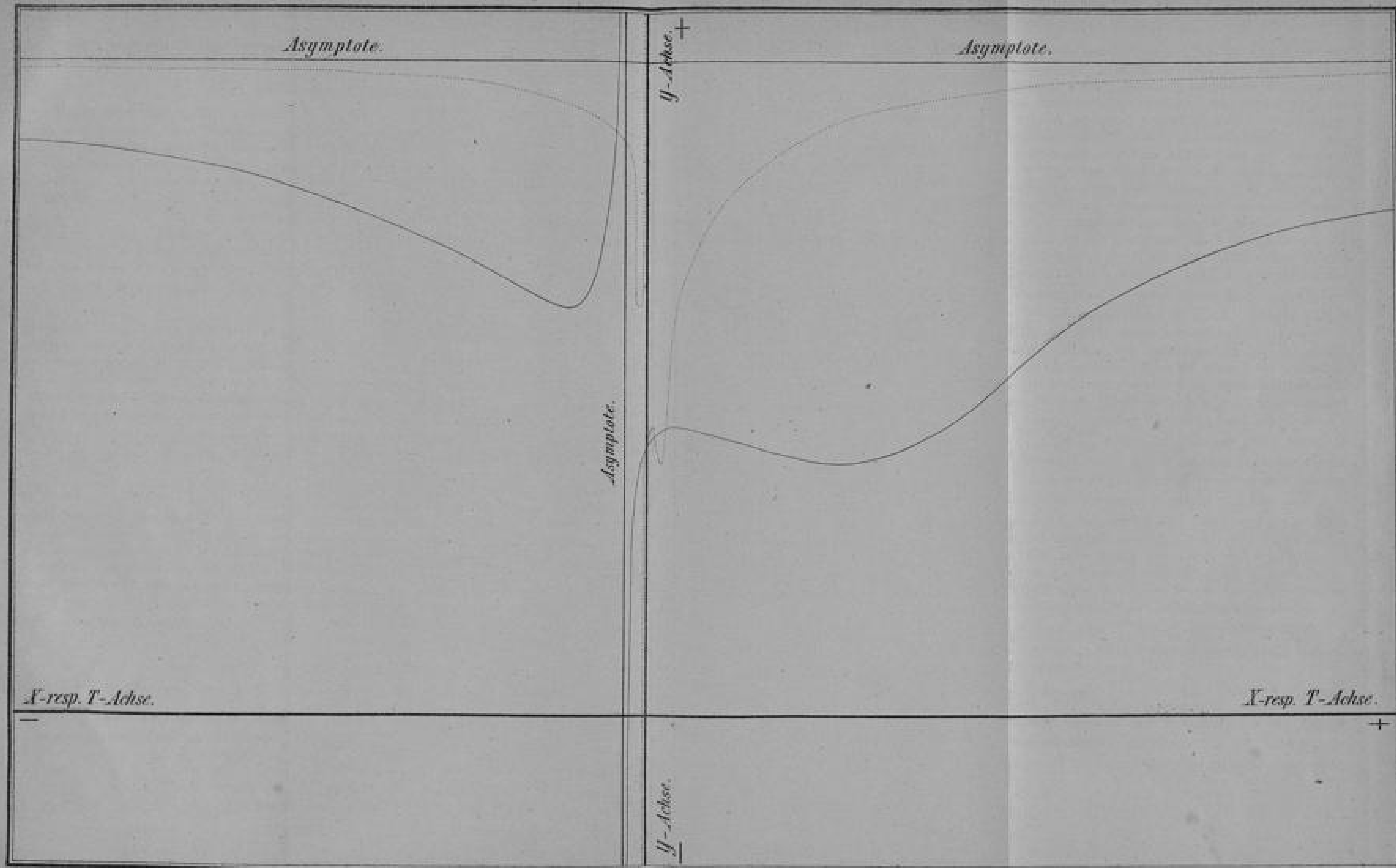
$$x_1 = x,\ y_1 = ny,\ \text{und}\ t_1 = nt.$$

Folglich ist $\frac{dy_1}{dx_1} = n\frac{dy}{dx}$, und $\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = n\frac{d^2y}{dx^2}$; ferner ist $\frac{dy_1}{dt_1} = \frac{d(ny)}{dt} \cdot \frac{dt}{dt_1} = n \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{n} = \frac{dy}{dt}$, und $\frac{d^2y_1}{dt_1^2} = \frac{1}{n}\frac{d^2y}{dt^2}$.

Bei der neuen X-Curve wird also für gleiche Werthe von x nicht nur y, sondern auch $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ nmal grösser. Bei der zugehörigen T-Curve dagegen, bei welcher für ein nfaches t auch y nmal grösser wird, bleibt für ein ebenfalls nfaches t $\frac{dy}{dt}$ ungeändert, und $\frac{d^2y}{dt^2}$ wird nmal kleiner.



ptote.
X-resp. T-Achse.
X-resp. T-Achse.
—
+


Asymptote.
Asymptote.
y-Achse. +
Asymptote.
X-resp. T-Achse.
X-resp. T-Achse.
−
+
y-Achse. −