

## Zyklische Kollineationen.

Von Professor **Gustav Sigmund**.

Eine Kollineation heißt zyklisch von der Periode  $n$ , wenn sie auf die Punkte des Raumes  $n$ -mal hintereinander angewendet, diese in sich selbst überführt. Die analytischen Bedingungen hierfür sollen hier aufgestellt werden. Führt man für die Kollineation das Zeichen  $K$  ein, so erhält man durch beliebig oftmalige Anwendung von  $K$  eine Gruppe von unendlich viel Kollineationen:

$$K^0 = 1, K, K^2, K^3, \dots$$

Es kann nun eintreten, daß die Gruppe nur endlich viel Transformationen enthält, indem eine Potenz z. B.  $K^{n+1}$  dieselben Gleichungen besitzt wie  $K$ :

$$\begin{aligned} K^{n+1} &= K \\ K^{n+1} K^{-1} &= K \cdot K^{-1} = 1 \text{ oder} \\ K^n &= 1, \end{aligned}$$

d. h.  $K$   $n$ -mal hintereinander angewendet gibt die Identität und ist daher zyklisch mit der Periode  $n$ . Es ist die eigentliche Periode, wenn  $n$  die kleinste Zahl ist, die  $K^n = 1$  macht. Angenommen für  $n_0 < n$  wäre auch schon  $K^{n_0} = 1$  und das wäre die kleinste Zahl, für die dies eintritt. Wir dividieren  $n$  durch  $n_0$ :

$$\begin{aligned} n &= q n_0 + n_1, \text{ wobei } n_1 < n_0. \\ K^n &= K^{q n_0 + n_1} = (K^{n_0})^q K^{n_1} = K^{n_1} = 1 \end{aligned}$$

Dies widerstreitet der Voraussetzung, daß  $n_0$  die kleinste Zahl sei, die  $K$  periodisch macht; daher muß  $n_1 = 0$  sein. Erniedrigt sich mithin  $n$  auf eine kleinere Periode, so muß diese ein Teiler von  $n$  sein.

Bleibt bei der Kollineation  $K$  irgendein Gebilde unverändert, so bleibt es auch bei jeder Potenz  $K^r$  unverändert.

### A. Ebene Kollineationen.

#### 1.

Die Gleichungen der Kollineation in homogenen Punktkoordinaten lauten:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 \\ \mu x_2' &= a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 \\ \mu x_3' &= a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 \end{aligned} \quad (1)$$

Bezeichnen wir  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta$  und die entsprechenden Unter-

determinanten mit  $\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{matrix}$  und  $\frac{\Delta}{\mu} = \lambda$ , so lautet die Umkehrung:

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \alpha_3 x_3' \\ \lambda x_2 &= \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \beta_3 x_3' \\ \lambda x_3 &= \gamma_1 x_1' + \gamma_2 x_2' + \gamma_3 x_3' \end{aligned} \quad (1')$$

Damit die Umkehrung eindeutig sei, nehmen wir  $\Delta \neq 0$  an. Wir werden nur solche Kollineationen betrachten. Die inverse Transformation ist also wieder eine Kollineation, wie es ja nach der Gruppeneigenschaft sein muß.

Jede gerade Linie geht bei der Umformung wieder in eine gerade Linie über:

$a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0$  verwandelt sich nach (1') in:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\lambda} (\alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \alpha_3 x_3') + \frac{b}{\lambda} (\beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \beta_3 x_3') + \\ + \frac{c}{\lambda} (\gamma_1 x_1' + \gamma_2 x_2' + \gamma_3 x_3') = 0 \text{ oder} \end{aligned}$$

$$(a \alpha_1 + b \beta_1 + c \gamma_1) x_1' + (a \alpha_2 + b \beta_2 + c \gamma_2) x_2' + (a \alpha_3 + b \beta_3 + c \gamma_3) x_3' = 0.$$

Führen wir entsprechend den Punktkoordinaten in der Ebene auch homogene Linienkoordinaten  $u_1, u_2, u_3$  ein, so stellen sich die Gleichungen, nach denen sie vertauscht werden, nach der soeben durchgeführten Umformung der Geraden so dar:

$$\begin{aligned} \tau u_1' &= \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 + \gamma_1 u_3 \\ \tau u_2' &= \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 + \gamma_2 u_3 \\ \tau u_3' &= \alpha_3 u_1 + \beta_3 u_2 + \gamma_3 u_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Setzt man  $\tau = \frac{\Delta}{\sigma}$ , so bekommt man für die Umkehrung:

$$\begin{aligned} \sigma u_1 &= a_1 u_1' + a_2 u_2' + a_3 u_3' \\ \sigma u_2 &= b_1 u_1' + b_2 u_2' + b_3 u_3' \\ \sigma u_3 &= c_1 u_1' + c_2 u_2' + c_3 u_3' \end{aligned} \quad (2')$$

Man bezeichnet diese Systeme als die transponierten Systeme (1). Die Determinante von (2') ist auch  $\Delta$ .

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Kollineation ist die Invarianz des Doppelverhältnisses von vier entsprechenden Elementen. Es genügt dies für das Strahlenbüschel nachzuweisen, da diese Eigenschaft für die Punktreihe dann als notwendige Folge von selbst gilt. Es seien vier Strahlen des Büschels

$$a + \sigma b = 0 \quad (3)$$

gegeben, wobei  $a$  und  $b$  lineare homogene Funktionen von  $x_1, x_2$  und  $x_3$  sind. Transformiert man mittels (1'), so entsteht:

$$a' + \sigma b' = 0 \quad (3')$$

wobei  $a'$  und  $b'$  homogene lineare Funktionen in  $x_1', x_2'$  und  $x_3'$  sind.  $a' = 0, b' = 0$  sind die Bilder von  $a = 0, b = 0$ ; die Büschel (3) und (3') sind mithin projektiv, d. h. die Doppelverhältnisse entsprechender Strahlen sind gleich. Man nennt daher die Kollineationen auch projektive Verwandtschaften.

2.

Soll ein Punkt in sich selbst übergeführt werden, so muß  $x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : x_3'$  sein. Durch Einsetzen in die Gleichungen (1) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} (a_1 - \varrho) x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 &= 0 \\ a_2 x_1 + (b_2 - \varrho) x_2 + c_2 x_3 &= 0 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 + (c_3 - \varrho) x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Diese Gleichungen lassen sich nur dann für nichtverschwindende Werte von  $x$  befriedigen, wenn  $\varrho$  der kubischen Gleichung

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_1 - \varrho & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \varrho & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \varrho \end{vmatrix} = 0 \text{ genügt.}$$

Für sich selbst entsprechende Gerade erhält man auf dieselbe Weise die Gleichungen:

$$\begin{aligned} (a_1 - \sigma) u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 &= 0 \\ b_1 u_1 + (b_2 - \sigma) u_2 + b_3 u_3 &= 0 \\ c_1 u_1 + c_2 u_2 + (c_3 - \sigma) u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4')$$

Da verschwindende Werte von  $u$  keinen Sinn ergeben, so hat man

$$D' \equiv \begin{vmatrix} a_1 - \sigma & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \sigma & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

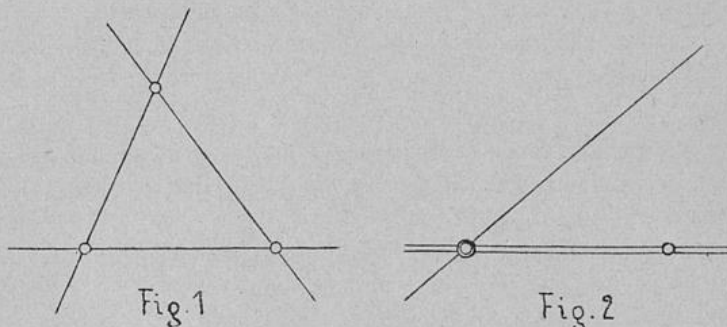
Es ist nun aber  $D = D'$ . Es gibt also zu jeder Wurzel von  $D$  einen invarianten Punkt und eine invariante Gerade. Denn setzt man die

Wurzel in (4) und (4') ein, so reduzieren sich beide Gleichungssysteme auf nur zwei Gleichungen und bestimmen als Schnittpunkt zweier Geraden oder als Verbindungslinie zweier Punkte die invarianten Gebilde.

$D=0$  ist eine kubische Gleichung. Wir erhalten drei Wurzeln und daher auch drei Doppelpunkte und drei Doppellinien. Letztere müssen durch die Doppelpunkte gehen; denn wäre dies nicht der Fall, so müßten ihre Schnittpunkte weitere invariante Punkte sein, was aber nicht sein kann. Da  $\varrho^3$  und  $\sigma^3$  den Koeffizienten  $-1$  haben, so hat die Gleichung stets drei endliche Wurzeln. In bezug auf diese können folgende Fälle eintreten:

Klassen von Kollineationen in der Ebene.

1. Alle drei Wurzeln seien reell und voneinander verschieden. Man erhält als invariante Figur (Fig. 1) ein Dreieck.



a) Zwei der Wurzeln seien konjugiert imaginär. Man erhält als invariante Figur einen reellen und zwei konjugiert imaginäre Punkte und eine reelle und zwei konjugiert imaginäre Gerade. Invariante Figur ist also ein Punkt und eine nicht durch ihn gehende Gerade. Letztere trägt die imaginären Doppelpunkte, ersterer die beiden imaginären Doppelgeraden.

2. Die Gleichung  $D=0$  habe eine Doppelwurzel. Bezeichnet man mit  $D_{ik}$  die Unterdeterminante der  $i$ . Zeile und  $k$ . Kolonne von  $D$ , so lautet die analytische Bedingung für das Eintreten einer Doppelwurzel:

$$D_{11} + D_{22} + D_{33} = 0.$$

Nehmen wir an, es verschwinden nicht alle Unterdeterminanten von  $D$ , so liefert die Doppelwurzel einen doppelt zu zählenden festen Punkt und die einfache Wurzel einen gewöhnlichen festen Punkt. Das System (4) liefert ebenso zwei Doppellinien, von denen eine doppelt zu zählen ist (Fig. 2). Man kann sich diesen Fall durch Grenzübergang aus 1 erhalten denken, indem zwei Eckpunkte des invarianten Dreiecks zusammenfallen.

3. Die Gleichung  $D=0$  besitze wieder eine Doppelwurzel, für die jedoch alle Unterdeterminanten verschwinden sollen. Diese Wurzel in das System (4) eingesetzt, reduziert dieses auf eine einzige Gleichung, die jetzt den Ort der festbleibenden Punkte darstellt. Außerdem gibt die einfache Wurzel einen weiteren invarianten Punkt. Das System (4) liefert für die Doppelwurzel eine einzige Gleichung. Es ist die Gleichung eines Strahlenbüschels, dessen Strahlen Doppellinien sein müssen. Außerdem liefert die dritte Wurzel eine weitere Doppellinie. Diese muß mit der punktweise festbleibenden Geraden zusammenfallen; denn wäre dies nicht der Fall, so entstünden durch Schnitt dieser Geraden mit dem Strahlenbüschel weitere  $\infty^1$  Doppelpunkte, was jedoch nicht sein kann. Man erhält so den Fall der Zentralkollineation (Fig. 3).

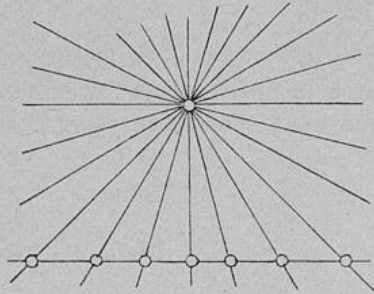


Fig. 3

4.  $D=0$  habe eine dreifache Wurzel, für die jedoch die Unterdeterminanten nicht verschwinden sollen. Man erhält einen dreifach zu zählenden invarianten Punkt und eine dreifach zu zählende invariante Gerade. Die Gerade geht durch den Punkt (Fig. 4). Es ist der Grenzfall, wenn alle drei Ecken und alle drei Seiten des invarianten Dreiecks zusammenfallen.



Fig. 4

5.  $D=0$  besitze eine dreifache Wurzel, für die auch alle Unterdeterminanten verschwinden sollen. Die Gleichung (4) reduziert sich dann auf eine einzige Gleichung und man erhält  $\infty^1$  Doppelpunkte, die auf einer Geraden angeordnet sind. (4') gibt  $\infty^1$  Doppellinien eines Strahlenbüschels. Da der Scheitel desselben ein invarianter Punkt ist, so muß er auf jener punktweise festbleibenden Geraden liegen. Wir erhalten somit einen ausgearteten Fall von Zentralkollineation (Fig. 5).

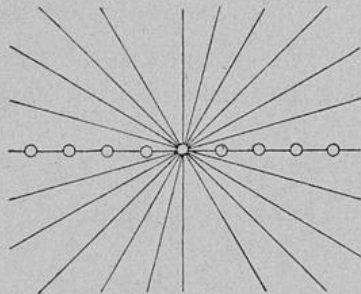


Fig. 5

6. Verschwinden bei einer dreifachen Wurzel auch die Unterdeterminanten ersten Grades, so gibt dies:

$$\begin{aligned} a_1 &= \varrho, & b_1 &= 0, & c_1 &= 0 \\ a_2 &= 0, & b_2 &= \varrho, & c_2 &= 0 \\ a_3 &= 0, & b_3 &= 0, & c_3 &= \varrho \end{aligned}$$

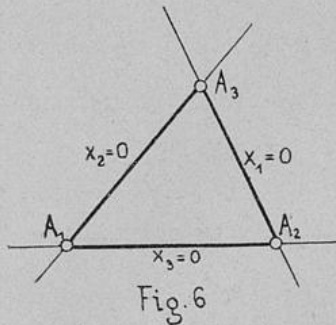
Die Gleichungen (1) nehmen dann die Form an:

$$\begin{aligned} u x_1' &= q x_1 \\ u x_2' &= q x_2 \\ u x_3' &= q x_3 \end{aligned}$$

Man erhält somit die Identität.

3.

Eine Ursache einer raschen und schönen Lösung einer jeden Aufgabe in analytischer Behandlung ist die passende Wahl der Koordinaten und des Koordinatensystems. Da wir bei der Bestimmung der invarianten Figur auf ein Dreieck gestoßen sind, werden wir Dreieckskoordinaten einführen. Für die sechs Arten der Kollineation sollen nun die Gleichungen in Dreieckskoordinaten gesondert abgeleitet werden.



1. Zum Koordinatendreieck wählen wir das invariante Dreieck (Fig. 6). Zur Bestimmung der Gleichungen der Kollineation für diesen Fall benutzen wir die Strahlenbüschel in den Ecken. Sie gehen in projektive über:

$$(A_3) \dots x_1 + \lambda x_2 = 0 \text{ geht über in } (A_3)' \dots x_1 + \mu x_2 = 0.$$

Die allgemeinste projektive Beziehung zwischen zwei Büscheln mit gemeinsamen Scheitel ist gegeben durch:

$$\mu = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$$

Für die Doppelstrahlen gilt:

$$\begin{aligned} c\lambda^2 + (d - a)\lambda - b &= 0 \\ \lambda &= \frac{(a - d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c} \end{aligned}$$

Bei dem Büschel (A) sind die Doppelstrahlen gegeben durch:  $\lambda = 0$  und  $\lambda = \infty$ . Damit eine Wurzel 0 auftritt, muß  $b = 0$  sein und damit die andere  $\infty$  wird, muß  $c = 0$  sein; mithin besteht zwischen  $\lambda$  und  $\mu$  der Zusammenhang:  $\mu = \frac{a\lambda}{d}$ .

$$\text{Wir setzen } \frac{\lambda}{\mu} = \frac{q_1}{q_2}.$$

Die Büschel  $(A_1) \dots x_2 + q x_3 = 0$  und  $(A_2) \dots x_3 + v x_1 = 0$  gehen genau so über in  $(A_1)' \dots x_2 + \sigma x_3 = 0$  und  $(A_2)' \dots x_3 + z x_1 = 0$ .

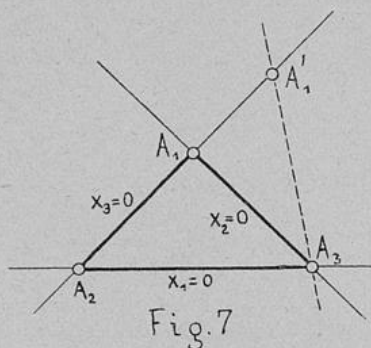
Setzen wir die Verhältnisse der Parameter  $\frac{\rho}{\sigma} = \frac{\rho_2}{\rho_3}$  und  $\frac{\nu}{\kappa} = \frac{\rho_3}{\rho_1}$ , so können wir die umgeformten Büschel auch schreiben:

$$\begin{aligned} (\rho_1 x_1) + \lambda (\rho_3 x_2) &= 0 \dots\dots (A_3)' \\ (\rho_2 x_2) + \rho (\rho_3 x_3) &= 0 \dots\dots (A_1)' \\ (\rho_3 x_3) + \nu (\rho_1 x_1) &= 0 \dots\dots (A_2)' \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß die trimetrischen Koordinaten bloß dem Verhältnis nach bestimmt sind, so ergeben sich als Gleichungen der Kollineation:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= \rho_1 x_1 \\ \mu x_2' &= \rho_2 x_2 \\ \mu x_3' &= \rho_3 x_3 \end{aligned} \quad (5)$$

Es soll noch gezeigt werden, daß diese Gleichungen wirklich eine projektive Transformation darstellen. Zu diesem Zwecke genügt es zu zeigen, daß vier Punkte und ihre Bildpunkte dasselbe Doppelverhältnis besitzen. Die vier Punkte  $P(y_1, y_2, y_3)$ ,  $Q(z_1, z_2, z_3)$ ,  $R(y_1 + m z_1, \dots, \dots)$  und  $S(y_1 + n z_1, \dots, \dots)$  haben das Doppelverhältnis  $\{PQRS\} = \frac{n}{m}$ . Mittels (5) gehen die Punkte über in



$$\begin{aligned} P' \left( \frac{y_1'}{\rho_1}, \frac{y_2'}{\rho_2}, \frac{y_3'}{\rho_3} \right), Q' \left( \frac{z_1'}{\rho_1}, \frac{z_2'}{\rho_2}, \frac{z_3'}{\rho_3} \right), R' \left( \frac{y_1'}{\rho_1} + m \frac{z_1'}{\rho_1}, \dots, \dots \right) \\ \text{und } S' \left( \frac{y_1'}{\rho_1} + n \frac{z_1'}{\rho_1}, \dots, \dots \right). \end{aligned}$$

Auch diese vier Punkte haben das Doppelverhältnis  $\{P'Q'R'S'\} = \frac{n}{m}$ .

2. Hier bleiben zwei Gerade und zwei Punkte fest. Wir legen das Koordinatendreieck so in die invariante Figur, daß nur die Seite  $x_2=0$  keine Doppellinie ist (Fig. 7).

Der Strahlenbüschel  $(A_2)$  wird genau wie beim letzten Fall in den projektiven verwandelt:

$$(A_2) \dots x_1 + \lambda x_3 = 0 \text{ geht über in } (A_2)' \dots \rho_{12} x_1 + \lambda (\rho_3 x_3) = 0.$$

Der Büschel  $(A_3)$  wird so in sein Bild transformiert, daß es projektiv ist und mit dem ursprünglichen Büschel bloß den Doppelstrahl  $x_1 = 0$  besitzt:

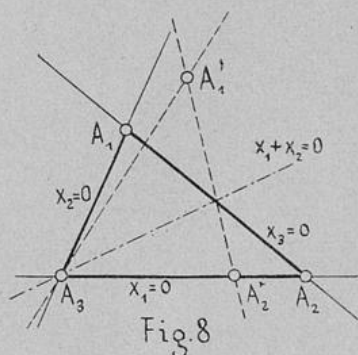
$$(A_3) \dots x_1 + \mu x_2 = 0 \text{ geht über in } (A_3)' \dots x_1' + \nu x_2' = 0.$$

Damit die beiden Büschel für  $\mu = 0$  den einzigen Doppelstrahl  $x_1 = 0$  ergeben, muß nach einer früheren Bemerkung  $\mu = \frac{av}{cv+a}$  sein.

Wir setzen daher  $\mu = \frac{q_{12} \nu}{q_{12} + \nu}$ .

$(A_3)'$  kann jetzt so geschrieben werden:

$$q_{12} x_1 + \nu(x_1 + q_{12} x_2) = 0.$$



Daraus erhalten wir für die Gleichungen unter Berücksichtigung eines Proportionalitätsfaktors:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= q_{12} x_1 \\ \mu x_2' &= x_1 + q_{12} x_2 \\ \mu x_3' &= q_3 x_3 \end{aligned} \quad (6)$$

3. Hier ist ein Punkt und eine Gerade durch ihn invariant. Wir wählen das Koordinatendreieck so, daß der Eckpunkt  $A_3$  und die Seite  $x_1 = 0$  unverändert bleiben (Fig. 8).

Der Büschel  $(A_3)$  geht in den projektiven  $(A_3)'$  über, so daß beide Büschel nur den Strahl  $x_1 = 0$  gemeinsam haben. Man hat daher:

$$(A_3) \dots x_1 + \lambda x_2 = 0 \text{ geht über in } (A_3)' \dots q x_1 + \lambda(x_1 + q x_2) = 0.$$

Der Büschel  $(A_2)$  geht in den projektiven  $(A_2)'$  über. Da diese beiden Büschel den Strahl  $A_2 A_2'$  entsprechend gemein haben, sind sie perspektiv. Die Perspektivitätsachse wird eine Gerade durch den Doppelpunkt  $A_3$  sein, da die beiden entsprechenden Strahlen  $A_2 A_3$  und  $A_2' A_3$  durch die Kollineation auseinander so entstehen, daß nur der Punkt  $A_3$  festbleibt. Man kann die Perspektivitätsachse beliebig durch  $A_3$ , am einfachsten als die Gerade  $x_1 + x_2 = 0$  annehmen. Dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit; denn es kann das zugehörige Koordinatendreieck so gewählt werden, daß die Perspektivitätsachse in jene Gerade fällt.

Der Büschel  $(A_2) \dots x_1 + \lambda x_3 = 0$  ist mithin perspektiv zu  $(A_2)' \dots q x_1 + \lambda x_3' = 0$ . Das Erzeugnis der beiden Büschel muß in zwei Gerade zerfallen: in die Perspektivitätsachse und den entsprechend gemeinsamen Strahl:

$$x_1 x_3' - q x_1 x_3 = x_1(x_1 + x_2); \quad x_3' = x_1 + x_2 + q x_3.$$



Daher ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= \varrho x_1 \\ \mu x_2' &= x_1 + \varrho x_2 \\ \mu x_3' &= x_1 + x_2 + \varrho x_3 \end{aligned} \quad (7)$$

4. Beim Fall der Zentralkollineation legen wir das Koordinatensystem in ein invariantes Dreieck hinein (Fig. 9).

Der Strahlenbüschel  $(A_3) \dots x_1 + \lambda x_2 = 0$  muß in den identischen  $x_1' + \mu x_2' = 0$  übergehen, d. h. es muß  $\frac{\lambda}{\mu} = 1$  sein. Die Büschel  $(A_1)$  und  $(A_2)$  transformieren sich wie früher so, daß zwei Doppelstrahlen vorhanden sind. Berücksichtigt man diese Umstände, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= \varrho_{12} x_1 \\ \mu x_2' &= \varrho_{12} x_2 \\ \mu x_3' &= \varrho_3 x_3 \end{aligned} \quad (8)$$

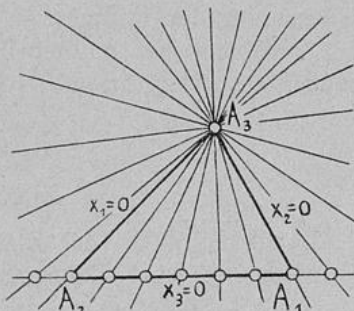


Fig. 9

5. Wir legen hier das Grunddreieck so in die invariante Figur, daß bloß die Seite  $x_2 = 0$  und der Punkt  $A_1$  nicht fest bleiben (Fig. 10). Der Strahlenbüschel  $(A_2)$  bleibt unverändert:

$(A_2) \dots x_1 + \lambda x_3 = 0$  muß daher übergehen in  $(\varrho x_1) + \lambda (\varrho x_3) = 0$ .

Die Beziehung zwischen den  $x_2$ -Koordinaten erhält man, wenn man das Büschel  $(A_3)$  betrachtet, das in ein projektives, konlokales mit dem einzigen Doppelstrahl  $x_1 = 0$  umgeformt wird, oder aus den beiden Büscheln  $(A_1)$  und  $(A_1)'$ , die perspektiv sind, da sie den Strahl  $A_1 A_1'$  entsprechend gemein haben:

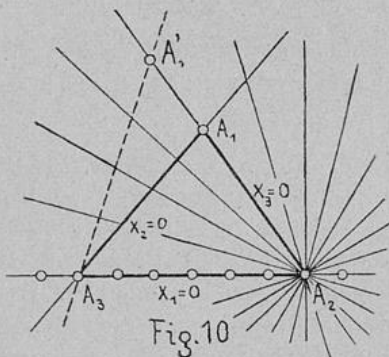


Fig. 10

$$\begin{aligned} (A_1') \dots x_2 + \lambda x_3 &= 0 \\ (A_1) \dots x_2' + \lambda \varrho x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_3 x_2' - \varrho x_3 x_2 = x_1 x_3; \quad x_2' = x_1 + \varrho x_2.$$

Man hat daher

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= \varrho x_1 \\ \mu x_2' &= x_1 + \varrho x_2 \\ \mu x_3' &= \varrho x_2 \end{aligned} \quad (9)$$

6. Man erhält die Identität mit den bekannten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= \varrho x_1 \\ \mu x_2' &= \varrho x_2 \\ \mu x_3' &= \varrho x_3 \end{aligned} \tag{10}$$

4.

Wir untersuchen nun für die einzelnen Fälle gesondert die  $n$ -malige Wiederholung der Kollineation  $K$ .

1. Wendet man auf den Punkt  $(x_i)$  die Gleichungen (5)  $n$ -mal hintereinander an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mu^n x_1^{(n)} &= \varrho_1^n x_1 \\ \mu^n x_2^{(n)} &= \varrho_2^n x_2 \\ \mu^n x_3^{(n)} &= \varrho_3^n x_3 \end{aligned}$$

Damit der  $n$ -mal der Umformung unterworfenene Punkt wieder in die Anfangslage zurückkehrt, muß sein:

$$\begin{aligned} \mu^n x_1^{(n)} &= a x_1 \\ \mu^n x_2^{(n)} &= a x_2 \\ \mu^n x_3^{(n)} &= a x_3 \end{aligned}$$

wobei  $a$  eine beliebige Zahl ist. Die Größen  $\varrho$  müssen also den Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} \varrho_1^n &= a \\ \varrho_2^n &= a \\ \varrho_3^n &= a \end{aligned}$$

Damit also die Kollineation periodisch sei, müssen die  $\varrho$   $n$ te Wurzeln aus einer beliebig wählbaren Größe  $a$  sein. Es ist hier mithin eine allgemeine Periode  $n$  möglich. Da es aber bloß eine oder bei geradem  $n$  zwei reelle Wurzeln der Gleichung  $\varrho^n - a = 0$  gibt, so werden zwei der Wurzeln konjugiert imaginär sein müssen und die dritte wird reell sein. Es sind bloß zwei konjugiert imaginäre Wurzeln dieser Gleichung verwendbar, weil die drei Größen  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$  und  $\varrho_3$  gleichzeitig Wurzeln der kubischen Gleichung  $D = 0$  sein müssen, wie noch gezeigt werden wird. Wir erkennen somit, daß im Fall 1  $a$ , wo ein Doppelpunkt und eine nicht durch ihn gehende Doppellinie vorhanden ist,  $K$  durch gewisse Bedingungen zyklisch mit der Periode  $n$  gemacht werden kann.

2. Nach den Gleichungen (6) ergibt sich für einen  $n$ -mal umgeformten Punkt:

$$\begin{aligned} \mu^n x_1^{(n)} &= \varrho_{12}^n x_1 \\ \mu^n x_2^{(n)} &= n \cdot \varrho_{12}^{n-1} x_1 + \varrho_{12}^n x_2 \\ \mu^n x_3^{(n)} &= \varrho_3^n x_3 \end{aligned}$$

Damit der Punkt wieder in den ursprünglichen übergeht, müßte sein:

$$\begin{aligned} \varrho_{12}^n &= a \\ n \varrho_{12}^{n-1} &= 0 \\ \varrho_3^n &= a \end{aligned}$$

Die ersten beiden Bedingungen sind hier nicht erfüllbar; daher kann dieser Fall nie eine zyklische Kollineation ergeben.

3. Die Gleichungen (7)  $n$ -mal angewendet ergeben:

$$\begin{aligned} \mu^n x_1^{(n)} &= \varrho^n x_1 \\ \mu^n x_2^{(n)} &= n \varrho^{n-1} x_1 + \varrho^n x_2 \\ \mu^n x_3^{(n)} &= \left( n \varrho^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \varrho^{n-2} \right) x_1 + n \varrho^{n-1} x_2 + \varrho^n x_3. \end{aligned}$$

Für den Fall der Periodizität ergäbe sich:

$$\begin{aligned} \varrho^n &= a \\ n \varrho^{n-1} &= 0 \\ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \varrho^{n-2} &= 0. \end{aligned}$$

Diese Bedingungen lassen sich für ein von Null verschiedenes  $n$  nicht erfüllen.

4. Aus den Gleichungen (8) der Zentralkollineation folgert man leicht, daß sie zyklisch sein kann. Es braucht bloß bestehen:

$$\begin{aligned} \varrho_{12}^n &= a \\ \varrho_3^n &= a \end{aligned}$$

Für reelle Zentralkollineationen folgt, daß  $\varrho_{12}$  und  $\varrho_3$  die beiden reellen Werte der  $n^{\text{ten}}$  Wurzel aus  $a$  darstellen. Es muß daher  $n$  gerade sein. Wir werden später bei der Untersuchung der Periode 2 sehen, daß die reelle Zentralkollineation, sobald sie überhaupt zyklisch ist, immer die Periode 2 besitzt.

5. Die  $n$ -malige Anwendung der Gleichungen (9) ergibt:

$$\begin{aligned} \mu^n x_1^{(n)} &= \varrho^n x_1 \\ \mu^n x_2^{(n)} &= n \varrho^{n-1} x_1 + \varrho^n x_2 \\ \mu^n x_3^{(n)} &= \varrho^n x_3. \end{aligned}$$

Dieser Fall kann nicht zyklisch werden.

6. Die Identität hat natürlich jede Periode und braucht daher nicht näher untersucht zu werden.

## 5.

Es soll nun auf möglichst einfache Weise der Zusammenhang zwischen den Konstanten der Kollineation in der Form (1) und den Konstanten  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$  in den Formen (5) bis (9) festgestellt werden. Sind

die drei Größen  $\varrho_i$  voneinander verschieden, wie im Fall (1), so sind die neuen Koordinaten den früheren mit dem Faktor  $\varrho$  proportional:

$$x_1' = \varrho x_1, \quad x_2' = \varrho x_2, \quad x_3' = \varrho x_3.$$

Setzt man dies im Gleichungssystem (1) ein, so erhält man drei homogene lineare Gleichungen, die, da sie für alle Punkte der Ebene gelten, das Verschwinden der Determinante zur Folge haben müssen:

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_1 - \varrho & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \varrho & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Dies gibt eine kubische Gleichung für  $\varrho$ . Man erhält somit drei Werte und diese müssen die drei Größen  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$  und  $\varrho_3$  sein, wie sie in den Gleichungen (5) bis (9) auftreten. Auch in allen besonderen Fällen liefert die Gleichung die zugehörigen Werte. Denn dort, wo diese Gleichung eine Doppel- oder dreifache Wurzel besitzt, dort enthalten auch die Gleichungen der Kollineation zwei oder nur eine Konstante.

Die obige Gleichung lautet ausführlich geschrieben mit Verwendung der früheren Bezeichnung:

$$\varrho^3 - (a_1 + b_2 + c_3)\varrho^2 + (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)\varrho - \Delta = 0.$$

Es bestehen daher zwischen den Konstanten von (1) und den von (5) bis (9) die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 &= a_1 + b_2 + c_3 \\ \varrho_1 \varrho_2 + \varrho_1 \varrho_3 + \varrho_2 \varrho_3 &= \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 \\ \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 &= \Delta \end{aligned} \quad (11)$$

Für eine Doppelwurzel der Gleichung  $D=0$  bleiben diese Beziehungen bestehen, nur daß  $\varrho_1 = \varrho_2$  wird; dasselbe gilt für dreifache Wurzeln.

## 6.

1. Wenn wir von der Identität absehen, so haben wir gefunden, daß bloß die Zentralkollineation und die allgemeine Kollineation, bei der ein Punkt und eine nicht durch ihn gehende Gerade festbleibt, periodisch sein können. Wir wollen zuerst die periodische Zentralkollineation näher untersuchen. Sie hat auf das invariante Dreieck bezogen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= \varrho_{12} x_1 \\ \mu x_2' &= \varrho_{12} x_2 \\ \mu x_3' &= \varrho_3 x_3 \end{aligned}$$

Die Gleichung  $D=0$  hat hier eine Doppelwurzel  $\varrho_{12}$  und eine einfache Wurzel  $\varrho_3$ . Diese müssen für die Periode  $n$   $n^{\text{te}}$  Wurzeln aus irgend-einer Größe  $a$  sein. Bezeichnet man in Hinkunft den reellen positiven

Wert von  $\sqrt[n]{a}$  mit  $\alpha$ , so sind die  $n$  Wurzeln der Gleichung  $q^n - a = 0$ :  
 $\alpha \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}}$  für  $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ . Bei geradem  $n$  bestehen zwei reelle  
 Wurzeln: für  $k=0$ ,  $+\alpha$  und für  $k=\frac{n}{2}$ ,  $\alpha e^{\pi i} = -\alpha$ . Alle übrigen  
 Wurzeln sind imaginär und es gehören immer zwei konjugiert imaginäre  
 zusammen:  $\alpha e^{\frac{2k\pi i}{n}}$  und  $\alpha e^{-\frac{2k\pi i}{n}}$ .

Bei der von uns betrachteten Zentralkollineation muß  $q_{12}$ , weil es  
 eine Doppelwurzel der kubischen Gleichung ist, entweder  $+\alpha$  oder  $-\alpha$   
 sein. Wir erhalten somit zwei Möglichkeiten. In beiden Fällen muß  $n$   
 gerade sein. Nach den Gleichungen (11) erhalten wir somit zyklische  
 Zentralkollineationen, wenn die Konstanten von (1) folgende Bedingungen  
 erfüllen:

$$\begin{array}{l} a_1 + b_2 + c_3 = +\alpha \qquad a_1 + b_2 + c_3 = -\alpha \\ a_1 + \beta_2 + \gamma_3 = -\alpha^2 \text{ oder } a_1 + \beta_2 + \gamma_3 = -\alpha^2 \\ \Delta = -\alpha^3 \qquad \qquad \qquad \Delta = +\alpha^3 \end{array} \quad (12)$$

Es soll jetzt gezeigt werden, daß diese Bedingungen immer die  
 Periode 2 ergeben. Zu diesem Zwecke bilden wir die Aufeinander-  
 folge zweier Kollineationen in den Formen (1). Es ist dies zugleich ein  
 Beweis für die Richtigkeit der obigen Bedingungen, die ja dann auf  
 zwei ganz verschiedene Weisen abgeleitet erscheinen.

$$\mu x'_i = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 \quad (i=1, 2, 3).$$

Läßt man auf den Punkt  $(x'_i)$  wieder  $K$  wirken, so entsteht der  
 Punkt  $(x''_i)$ :

$$\begin{aligned} \mu^2 x''_i = & (a_i a_1 + b_i a_2 + c_i a_3) x_1 + (a_i b_1 + b_i b_2 + c_i b_3) x_2 + \\ & + (a_i c_1 + b_i c_2 + c_i c_3) x_3 \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen müssen, soll die Periode 2 bestehen, auf die  
 Identität führen:

$$\begin{array}{l} a_1 a_1 + b_1 a_2 + c_1 a_3 = a \\ a_1 b_1 + b_1 b_2 + c_1 b_3 = 0 \\ a_1 c_1 + b_1 c_2 + c_1 c_3 = 0 \\ \hline a_2 a_1 + b_2 a_2 + c_2 a_3 = 0 \\ a_2 b_1 + b_2 b_2 + c_2 b_3 = a \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 + c_2 c_3 = 0 \\ \hline a_3 a_1 + b_3 a_2 + c_3 a_3 = 0 \\ a_3 b_1 + b_3 b_2 + c_3 b_3 = 0 \\ a_3 c_1 + b_3 c_2 + c_3 c_3 = a \end{array}$$

Diese neun Bedingungsgleichungen lassen sich auf drei wesentliche  
 zurückführen; bildet man aus den neun Funktionen eine dreigliedrige  
 Determinante, so zerlegt sie sich nach der Multiplikationsregel:

$$\Delta^2 = a^3.$$

Es sind also zwei Fälle zu unterscheiden:

$$a) \quad \mathcal{A} = +\sqrt{\alpha^3} = \alpha^{\frac{3}{2}}$$

Faßt man von den obigen Gleichungen die ersten drei, dann die zweiten und dritten drei für sich zusammen, so erhält man mit Berücksichtigung der früheren Bezeichnungweise:

$$\begin{array}{lll} \alpha a_1 = \alpha_1 & \alpha a_2 = \beta_1 & \alpha a_3 = \gamma_1 \\ \alpha b_1 = \alpha_2 & \alpha b_2 = \beta_2 & \alpha b_3 = \gamma_2 \\ \alpha c_1 = \alpha_3 & \alpha c_2 = \beta_3 & \alpha c_3 = \gamma_3 \end{array}$$

Diese neun Gleichungen ersetzen die oberen. Wie man sieht, lassen sich immer drei der neun unbekanntenen Koeffizienten durch die anderen sechs ausdrücken. Daraus folgt, daß es nur drei wesentliche Gleichungen zwischen ihnen geben kann, aus denen man ja dann immer drei durch die anderen sechs ausrechnen kann.

Wir addieren jetzt die drei Gleichungen des Systems, die nicht gleich 0 sind:

$$a_1^2 + b_2^2 + c_3^2 + 2b_1a_2 + 2a_3c_1 + 2b_3c_2 = 3\alpha^2.$$

Um links ein vollständiges Quadrat zu erhalten, addieren wir auf beiden Seiten die entsprechenden Polynome:

$$(a_1 + b_2 + c_3)^2 = 3\alpha^2 + 2(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3).$$

Eine weitere Gleichung zwischen diesen Größen ergibt sich nach früherem:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_2 + c_3)\alpha &= \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = u \\ u^2 - u \cdot 2\alpha^2 - 3\alpha^4 &= 0 \\ u &= (1 \pm 2)\alpha^2, \text{ also} \end{aligned}$$

$$a) \quad \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = 3\alpha^2 \text{ und } \beta) \quad \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = -\alpha^2 \\ \alpha_1 + b_2 + c_3 = 3\alpha \quad \alpha_1 + b_2 + c_3 = -\alpha.$$

Die ersten Gleichungen kommen nicht in Betracht, da sie für die Identität gelten. Man erkennt dies, wenn man in das System (11)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = +\alpha$  setzt.

Führt man dieselbe Rechnung für

$$b) \quad \mathcal{A} = -\sqrt{\alpha^3} = -\alpha^{\frac{3}{2}} \text{ durch, so erhält man:}$$

$$\begin{aligned} (a_1 + b_2 + c_3)^2 &= 3\alpha^2 + 2(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) \\ (a_1 + b_2 + c_3)\alpha &= -(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) = u \\ u^2 + u \cdot 2\alpha^2 - 3\alpha^4 &= 0 \\ u &= (-1 \pm 2)\alpha^2. \end{aligned}$$

Das gibt die beiden Fälle:

$$a) \quad \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = +3\alpha^2 \text{ und } \beta) \quad \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = -\alpha^2 \\ \alpha_1 + b_2 + c_3 = -3\alpha \quad \alpha_1 + b_2 + c_3 = +\alpha$$

Die Gleichungen unter  $\alpha$ ) sind wieder nur für die Identität verwendbar. Man überzeugt sich davon, wenn man in das System (11)  $q_1 = q_2 = q_3 = -\alpha$  einsetzt.

Die Bedingungen, die wir unter  $\alpha, \beta$ ) und  $b, \beta$ ) erhalten haben, sind genau dieselben die für die Zentralkollineation erfüllt werden müssen, damit sie periodisch werde. Sie geben gleichzeitig, von der Identität abgesehen, die einzige Möglichkeit, daß die kollineare Verwandtschaft involutorisch werde. Man erhält somit den Satz:

Jede reelle Zentralkollineation, die überhaupt periodisch ist, besitzt die Periode 2 und soll eine Kollineation involutorisch sein, so muß es eine Zentralkollineation sein. Alle diese involutorischen Zentralkollineationen erhält man, indem man die Koeffizienten der Kollineation den einen oder den anderen der drei Bedingungen (12) unterwirft.

2. Es ist nun noch der Fall zu betrachten, wo ein Punkt und eine nicht durch ihn gehende Gerade invariant bleibt.

Wir müssen drei verschiedene  $n^{\text{te}}$  Wurzeln aus der Größe  $\alpha$  betrachten. Man erhält wieder zwei Unterfälle. Ist  $n$  ungerade, so kann man zwei konjugiert imaginäre Werte und  $+\alpha$  nehmen. Ist  $n$  gerade, so kann man auch noch  $-\alpha$  und zwei konjugiert imaginäre Wurzeln verwenden. In beiden Fällen muß  $n > 2$  sein, damit zwei konjugiert imaginäre Wurzeln vorhanden sein können. Man erhält:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad a_1 + b_2 + c_3 &= \left(2 \cos \frac{2k\pi}{n} + 1\right) \alpha \\ \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 &= \left(2 \cos \frac{2k\pi}{n} + 1\right) \alpha^2 \\ \Delta &= \alpha^3. \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad a_1 + b_2 + c_3 &= \left(2 \cos \frac{2k\pi}{n} - 1\right) \alpha \\ \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 &= \left(-2 \cos \frac{2k\pi}{n} + 1\right) \alpha^2 \\ \Delta &= -\alpha^3. \end{aligned} \tag{13'}$$

Die Beziehungen (13) geben für gerades und ungerades  $n$ , (13') nur für gerades  $n$  die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Koeffizienten von (1) für allgemein zyklische Kollineationen mit der Periode  $n$ . Es ist noch zu beachten, daß für die eigentliche Periode  $n$ ,

$k$  relativ prim gegen  $n$  sein muß, damit die zugehörige Wurzel  $\alpha e^{\frac{2k\pi i}{n}}$  eine primitive Wurzel sei, d. h. zur kleinsten Potenz  $n$  erhoben gleich  $\alpha$  werde. Würde dies nicht verlangt, so würde sich möglicherweise die Periode  $n$  auf einen ihren Teiler erniedrigen.

Es sei noch erwähnt, daß die obigen Bedingungen den einzig möglichen Fall der Periodizität für  $n > 2$  für eine beliebige räumliche Affinität

mit endlichem Doppelpunkt vorstellen. Legt man nämlich diesen Doppelpunkt in den Koordinatenanfangspunkt, so stellen die Gleichungen (1) für  $\mu=1$  eine solche Affinität dar, wenn man  $x_i$  und  $x_i'$  als räumliche dreiachsige Koordinaten von Punkt und Bildpunkt auffaßt. Da aber  $\mu$  als willkürliche Konstante jeden beliebigen Wert annehmen kann, so gelten für diesen Fall die gleichen Entwicklungen.

Eine der drei Bedingungen für das Eintreten der Periodizität der Kollineation ist  $\mathcal{A} = \pm a^3$ . Dies läßt sich leicht erklären. Führen wir die Transformation (1) zweimal hintereinander aus, so entsteht wieder eine lineare Transformation derselben Art, deren Determinante, wie wir gesehen haben,  $\mathcal{A}^2$  ist. Dies gilt genau so für weitere Wiederholung der Transformation. Führen wir sie also  $n$ -mal hintereinander aus, so entsteht eine lineare Transformation, deren Determinante  $\mathcal{A}^n$  ist. Soll nun nach  $n$ -maliger Anwendung die Identität herauskommen, so muß  $\mathcal{A}^n = a^3$  sein, da die Determinante der letzteren  $a^3$  ist. Da für eine reelle Transformation die Koeffizienten in (1) reell sein müssen und deshalb ihre Determinante als durch die vier Grundrechnungsarten aus diesen reellen Größen erzeugt auch reell sein muß, muß also für eine zyklische Kollineation  $\mathcal{A} = \pm \sqrt[n]{a^3} = \pm a^{\frac{3}{n}}$  sein. Das Minuszeichen kann nur dann stehen, wenn  $n$  gerade ist. Auch bei den räumlichen Kollineationen wird uns aus demselben Grunde für die Periodizität die Bedingung  $\mathcal{A} = \pm a^4$  entgegentreten.

7.

Von Bahnkurven kann man eigentlich nur bei infinitesimalen Transformationen sprechen. Wenn man von der infinitesimalen Transformation zur endlichen übergeht, werden die Bahnkurven in der Art weiter bestehen, daß alle ihre Punkte bei beliebig oftmaliger Anwendung der Transformation auf ihnen verbleiben, sich allerdings auf ihnen sprunghaft weiter bewegen. Es gelingt nun, für die zyklischen Kollineationen Linien zu finden, die sich genau so verhalten. Wir wollen sie wegen dieses Zusammenhanges Bahnkurven der Kollineation nennen.

Um die Bahnkurven der zyklischen Kollineation mit der allgemeinen Periode  $n > 2$  zu bestimmen, beweisen wir zuerst zwei Hilfssätze:

1. Jede periodische Kollineation  $K_n$  wird durch irgendeine beliebige andere Kollineation  $K$  in eine Kollineation  $K'_n$  mit derselben Periode  $n$  transformiert:

Denn hat  $K_n$  die Periode  $n$ , so heißt dies:

$$K_n^n = 1.$$

Transformiert man  $K_n$  mittels  $K$ :

$$K^{-1} K_n K = K'_n.$$



Bildet man:

$$K_n'^2 = K^{-1} K_n \underbrace{K K^{-1}} K_n K = K^{-1} K_n^2 K$$

$$K_n'^3 = K^{-1} K_n^2 \underbrace{K K^{-1}} K_n K = K^{-1} K_n^3 K.$$

Durch  $n$ -malige Wiederholung dieses Vorganges erhält man:

$$K_n'^n = K^{-1} K_n^n K = K^{-1} K = 1.$$

Somit ist auch  $K_n'$  zyklisch mit der Periode  $n$ .

2. Es gibt  $\infty^2$  Kollineation  $K$ , die einen Kegelschnitt in einen Kreis, einen beliebigen Punkt und eine beliebige Gerade in bestimmte gleichartige Elemente umformen.

Da es  $\infty^8$  Kollineationen in der Ebene gibt, so wird durch acht Gleichungen zwischen den Koeffizienten der Transformation eine einzige festgelegt. Die Bedingung, daß der Kegelschnitt in einen Kreis übergeht, gibt zwei Gleichungen: Die Koeffizienten in der transformierten Gleichung bei  $x^2$  und  $y^2$  müssen gleich sein und der Koeffizient des Gliedes mit  $xy$  muß verschwinden. Soll ein Punkt in einen bestimmten anderen übergehen, so liefert dies zwei weitere Gleichungen für die Konstanten und ebenso gibt die Bedingung, eine Gerade soll in eine gewisse andere übergehen, weitere zwei Gleichungen. Man erhält somit im ganzen sechs Gleichungen zwischen den Konstanten der Kollineation und somit  $\infty^2$  zugehörige Kollineationen.

Wir nehmen nun an,  $K_n$  führe die Punkte  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  zyklisch ineinander über. Ist  $n \geq 3$ , so läßt  $K_n$  einen reellen Punkt  $A$  und zwei konjugiert imaginäre Punkte  $B$  und  $\Gamma$  unverändert. Die Punkte  $a_i$  müssen natürlich alle voneinander verschieden sein. Denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man immer  $K_n^v$  so bestimmen, daß für dieselbe die beiden zusammenfallenden Punkte ein Doppelpunkt wäre und diese Transformation hätte außer den drei angegebenen Doppelpunkten noch einen weiteren vierten und wäre daher die Identität.

Da die Kollineation die Büschel projektiv transformiert, gilt

$$a_1 (a_2 a_3 \dots a_n) \overline{\wedge} a_2 (a_3 a_4 \dots a_n a_1) \overline{\wedge} a_3 (a_4 a_5 \dots a_2) \overline{\wedge} \text{ usw.}$$

Betrachtet man zwei der  $n$  Kegelschnitte, die je zwei der aufeinanderfolgenden Strahlenbüschel erzeugen, so müssen diese durch die Doppelpunkte  $A, B$  und  $\Gamma$  gehen\*).

Bestimmen wir jetzt eine Kollineation  $K$ , die einen dieser Kegelschnitte in einen Kreis verwandelt,  $A$  invariant läßt und die invariante Gerade von  $K_n$  in die unendlich ferne Gerade umformt.

Transformieren wir  $K_n$  mittels  $K$ , so erhalten wir nach dem 1. Satz wieder eine periodische Kollineation:  $K_n' = K^{-1} K_n K$ .

\*) Reye, Geometrie der Lage, 2. Bd., 11. Vortrag.

Bei dieser Transformation gehen alle oben bestimmten  $n$  Kegelschnitte in Kreise über, da ja die beiden Punkte  $B$  und  $\Gamma$ , durch die sie alle hindurchgehen, in die imaginären Kreispunkte übergehen. Gehen die Punkte  $a_1 a_2 \dots a_n$  durch  $K$  in  $a_1' a_2' \dots a_n'$  über, so gilt jetzt:

$$a_1' (a_2' a_3' \dots a_n') \cong a_2' (a_3' \dots a_n' a_1') \cong a_3' (a_4' \dots a_2') \cong \text{usw.}$$

Projiziert man also von einem der  $n$  Punkte  $a_1' a_2' \dots a_n'$  die übrigen, so erhält man lauter kongruente Büschel. Daraus folgt aber, daß die Punkte  $a_1' a_2' \dots a_n'$  auf dem Umfange eines Kreises in gleichen Abständen liegen müssen. Da die Kollineation  $K_n$  den Punkt  $A$  fest läßt und obige Schlüsse für alle Punkte der Ebene gelten, so ist  $K_n$  die Rotation um  $A$ . Es ist mithin auf  $\infty^2$ fache Weise möglich, jede zyklische Kollineation  $K_n$  mittels einer Kollineation  $K$  in eine gewöhnliche Rotation überzuführen.

Damit nun ein Strahl nach  $n$ -maliger Drehung in seine ursprüngliche Lage zurückkehre, muß der Drehungswinkel  $\delta = \frac{2k\pi}{n}$  sein, wobei  $k$  relativ prim gegen  $n$  sein muß. Die Bahnkurven sind hier Kreise, auf denen die Punktzyklen in den Ecken von lauter regelmäßigen  $n$ -Ecken angeordnet sind.

Transformieren wir diese Rotation mittels  $K^{-1}$  wieder zurück, so erhalten wir die ursprünglich betrachtete Kollineation  $K_n$ . Die Bahnkurven gehen in Ellipsen über, auf denen die Punkte  $a_1 a_2 \dots a_n$  zyklisch projektive Punktreihen bilden, und zwar liegen auf jedem Kegelschnitt  $\infty^1$  verschiedene zyklisch projektive Punktgruppen. Da das Verhältnis zwischen Pol und Polare durch die Kollineation nicht geändert wird, und da  $A$  und die unendlich ferne Gerade bei der Rotation in dieser Beziehung stehen, so folgt weiter:

Die Punktzyklen liegen auf den Kegelschnitten eines Kegelschnittsbüschels mit den imaginären Grundpunkten  $B$  und  $\Gamma$ , für die  $A$  und  $g$  Pol und Polare sind. Jeder der Punkte  $B$  und  $\Gamma$  ist doppelt zu zählen, weil in ihnen die imaginären Geraden erster Art  $AB$  und  $A\Gamma$  von jedem Kegelschnitt des Büschels berührt werden.

Auch bei nichtperiodischen Kollineationen können Kegelschnitte in sich transformiert werden. Es ist nämlich möglich, bei Kollineationen mit einem invarianten Dreieck,  $K$  so zu bestimmen, daß ein Kegelschnitt in sich transformiert wird. Es zeigt sich dann, daß auch ein ganzes Kegelschnittsbüschel in sich transformiert wird; es sind dies alle jene Kegelschnitte, die zwei Seiten des Hauptdreiecks in den Schnittpunkten mit der dritten Seite berühren\*). Diese Transformationen werden jedoch im allgemeinen nicht periodisch sein. Verlangt man aber, daß sie periodisch werden, so müssen sie die Periode 2 haben, da die projektiven Punkt-

\*) Doehlemann, Geometrische Transformationen, S. 183.

zyklen auf den Kegelschnitten zwei reelle Doppelpunkte besitzen. Es schneiden sich dann aber entsprechende Gerade in der Achse der Involution, das ist in der einen Seite des invarianten Dreiecks. Man erhält also die involutorische Zentralkollineation. Führt mithin die Zentralkollineation einen Kegelschnitt in sich selbst über, so muß er involutorisch auf sich bezogen sein und die ganze Kollineation besitzt die Periode 2. Es gibt nun  $\infty^2$  invariante Dreiecke bei der Zentralkollineation; denn die  $\infty^1$  Doppelpunkte können auf  $\infty^2$  verschiedene Weise mit dem Zentrum der Kollineation zu invarianten Dreiecken zusammengefaßt werden. Es gibt daher  $\infty^2$  Kegelschnittsbüschel, die die zyklische Zentralkollineation in sich transformiert. Eine involutorische Zentralkollineation führt daher  $\infty^3$  Kegelschnitte in sich selbst über, nämlich alle, die den Mittelpunkt und die Achse als Pol und Polare besitzen\*).

Wir können jetzt zusammenfassend sagen:

Jede zyklische Kollineation  $K_n$  hat entweder die Geraden eines Strahlenbüschels oder bei anderer Zusammenfassung  $\infty^3$  Kegelschnitte zu Bahnkurven; dann ist die Periode gleich 2 und wir haben eine Zentralkollineation vor uns; oder bei höherer Periode ein Kegelschnittsbüschel mit vier imaginären Grundpunkten. Auf den Kegelschnitten dieses Büschels liegen die Punktzyklen so angeordnet, daß je zwei dieser Punktreihen projektive Reihen bilden.

### B. Räumliche Kollineationen.

In den folgenden Betrachtungen wird derselbe Weg eingeschlagen wie bei den ebenen Kollineationen. In Punkt 1 stellen wir einige allgemeine Eigenschaften fest, in Punkt 2 bestimmen wir die invarianten Gebilde und teilen darnach die Kollineationen in 13 Klassen, in Punkt 3 legen wir das Koordinatensystem möglichst in das invariante Gebilde und erkennen dabei die Möglichkeit der Periodizität. Nachdem wir dann in Punkt 5 die Beziehung zwischen den Konstanten im Parallelkoordinatensystem und im allgemein projektiven Koordinatensystem bestimmt haben, erhalten wir im letzten Punkt 6 die Bedingungen für die Periodizität der räumlichen Kollineationen.

#### 1.

Die Gleichungen der Kollineation in homogenen Punktkoordinaten lauten:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 \\ \mu x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 \\ \mu x_3' &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 \\ \mu x_4' &= a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 \end{aligned} \quad (1)$$

\*) Doehleemann, Geometrische Transformationen, S. 184.

Bezeichnen wir wie in der Ebene die Determinante der Koeffizienten der rechten Seite mit  $\Delta$  und die zugehörigen Unterdeterminanten mit

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{array} \text{ und}$$

setzen wir  $\frac{\Delta}{\mu} = \lambda$ , so lautet die zu (1) inverse Transformation:

$$\lambda x_i = \alpha_{1i} x'_1 + \alpha_{2i} x'_2 + \alpha_{3i} x'_3 + \alpha_{4i} x'_4 \dots (i=1, 2, 3, 4) \quad (1')$$

Berücksichtigt man die Bedeutung von  $\lambda$ , so zeigt sich, daß die inverse Transformation nur dann eindeutig ist, wenn  $\Delta \neq 0$  ist. Dies setzen wir in Hinkunft immer voraus. Die inverse Transformation ist dann wieder eine Kollineation; überhaupt bilden die Kollineationen eine 15gliedrige unendliche kontinuierliche Gruppe.

Jede Ebene geht wieder in eine Ebene über.

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0 \text{ geht über in} \\ u_1 (\alpha_{11} x'_1 + \alpha_{21} x'_2 + \alpha_{31} x'_3 + \alpha_{41} x'_4) + u_2 (\dots) + u_3 (\dots) + u_4 (\dots) = 0 \text{ oder} \\ x'_1 \sum_1^4 \alpha_{1i} u_i + x'_2 \sum_1^4 \alpha_{2i} u_i + x'_3 \sum_1^4 \alpha_{3i} u_i + x'_4 \sum_1^4 \alpha_{4i} u_i = 0. \end{aligned}$$

Dies ist wieder ein homogener linearer Ausdruck in  $x'_i$  und stellt daher eine Ebene dar. Führt man homogene Ebenenkoordinaten  $u_1, u_2, u_3, u_4$  ein, so findet man nach letzterem leicht das Gesetz, nach dem sie geändert werden:

$$\tau u'_i = \alpha_{i1} u_1 + \alpha_{i2} u_2 + \alpha_{i3} u_3 + \alpha_{i4} u_4 (i=1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

Setzt man für die willkürliche Konstante  $\tau = \frac{\Delta}{\sigma}$  so erhält man für die Umkehrung:

$$\sigma u_i = \alpha_{1i} u'_1 + \alpha_{2i} u'_2 + \alpha_{3i} u'_3 + \alpha_{4i} u'_4 (i=1, 2, 3, 4) \quad (2')$$

Die Gleichungen (2') unterscheiden sich von den Gleichungen (1) außer in den Veränderlichen nur dadurch, daß die Koeffizienten  $\alpha_{ik}$  statt nach Horizontalreihen nach Vertikalreihen in der Determinante  $\Delta$  angeordnet sind.

Eine Gerade geht vermöge der Transformation wieder in eine Gerade über, da ja die Gerade als Schnittlinie zweier Ebenen aufgefaßt werden kann.

Bei der räumlichen Kollineation bleibt das Doppelverhältnis von vier entsprechenden Elementen erhalten. Genau wie in der Ebene kann man hier zeigen; daß das Doppelverhältnis von vier Ebenen des Büschels  $a + \lambda b = 0$  sich nicht ändert. Es geht in den projektiven Ebenenbüschel  $a' + \lambda b' = 0$  über. Dasselbe gilt natürlich für den Strahlenbüschel und

die Punktreihe. Man kann dies direkt beweisen, oder als Folgerung aus der Projektivität entsprechender Ebenenbüschel ableiten. Zwei Ebenen, die sich bei der Raumkollineation entsprechen, sind durch eine ebene Kollineation aufeinander bezogen. Denn jede Gerade der einen Ebene wird in eine Gerade der anderen Ebene übergeführt, wobei die Doppelverhältnisse von vier Elementen erhalten bleiben.

2.

Für die invarianten Punkte erhält man:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \varrho) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 &= 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \varrho) x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 &= 0 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (a_{33} - \varrho) x_3 + a_{34} x_4 &= 0 \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + (a_{44} - \varrho) x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Diese Gleichungen geben nur dann von Null verschiedene Werte, wenn die Determinante verschwindet:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Wir erhalten entsprechend den vier Wurzeln dieser Gleichung vier Doppelpunkte der räumlichen Kollineation.

Ähnlich findet man vier Doppelebenen:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \mu) u_1' + a_{21} u_2' + a_{31} u_3' + a_{41} u_4' &= 0 \\ a_{12} u_1' + (a_{22} - \mu) u_2' + a_{32} u_3' + a_{42} u_4' &= 0 \\ a_{13} u_1' + a_{23} u_2' + (a_{33} - \mu) u_3' + a_{43} u_4' &= 0 \\ a_{14} u_1' + a_{24} u_2' + a_{34} u_3' + (a_{44} - \mu) u_4' &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Man erhält für  $\mu$  dieselbe Bedingungsgleichung für die Doppelebenen wie oben. Es wird zu jedem Doppelpunkt eine bestimmte Doppelebene gehören, nämlich die, welche vermöge derselben Wurzel der Gleichung vierten Grades  $D=0$  aus dem Gleichungssystem (4) folgt.

Es seien nun  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung  $D=0$ . Setzen wir in das System (3) den Wert  $\varrho_1$  und in das System (4) den Wert  $\varrho_2$  und multiplizieren wir noch (3) jeweils mit  $u_1, u_2, u_3, u_4$  und (4) ebenso mit  $-x_1, -x_2, -x_3, -x_4$ , so entsteht durch Zusammenfassen, wenn wir in (4) statt  $u_i'$   $u_i$  setzen:

$$(\varrho_2 - \varrho_1) (x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4) = 0.$$

Wenn  $\varrho_1 \neq \varrho_2$ , so muß der zweite Faktor verschwinden, d. h. der Punkt  $(x_i)$  liegt in der Ebene  $(u_i)$ . Je zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörende Doppelemente liegen mithin ineinander. Je zwei Doppelemente, die aus gleichen Wurzeln hervorgehen, liegen im allgemeinen

nicht ineinander; denn dann ist in obiger Gleichung der erste Faktor gleich Null.

Betrachtet man nun zwei Wurzeln  $q_i$  und läßt sie sich einander immer mehr nähern, indem man die Glieder der Determinante sich allmählich ändern läßt. Bei dieser Wertänderung der beiden Wurzeln gegeneinander, werden sich auch die zugehörigen Punkte gegeneinander bewegen. Denn es müssen die Punkte zusammenfallen, wenn dasselbe die Wurzeln tun. Jeder der beiden Punkte liegt immer in der Ebene, die zur anderen Wurzel gehört. Läßt man nun die beiden Punkte ganz zusammenfallen — die Gleichung  $D=0$  hat dann eine Doppelwurzel — so werden auch beide Ebenen zusammenfallen, da ja Punkt und Ebene von denselben Wurzelgrößen abhängen. Da nun bei diesem Grenzübergang stets der eine Punkt die Ebene, die zum anderen gehört, enthält, wird beim Zusammenfallen der beiden Punkte der sich ergebende doppelt zu zählende invariante Punkt der Kollineation in der zur selben Doppelwurzel gehörenden invarianten Ebene liegen. Ähnlich könnte man für dreifache und vierfache Wurzeln schließen, so daß man hat:

Für mehr als einfache Wurzeln der Gleichung  $D=0$  liegen die entsprechenden invarianten Gebilde in vereinigter Lage.

In bezug auf die Wurzeln der Gleichung  $D=0$  können nun folgende 14 Fälle eintreten:

#### Arten von Kollineationen im Raume.

1. Die vier Wurzeln seien reell und verschieden. Das invariante Gebilde ist ein Tetraeder. Es reduzieren sich nämlich für jede Wurzel die vier Gleichungen (3) auf nur drei wesentliche. Diese bestimmen einen invarianten Punkt als Schnittpunkt von drei Ebenen. Ähnliches gilt für das Gleichungssystem (4).

a) Zwei der vier verschiedenen Wurzeln seien konjugiert imaginär. Man erhält zwei reelle und zwei konjugiert imaginäre Punkte, deren Verbindungslinie reell ist. Die Gleichungen (4) geben zwei reelle und zwei konjugiert imaginäre Doppelebenen, deren Schnittlinie reell ist. Die beiden imaginären Punkte liegen in den reellen Doppelebenen, da sie zu verschiedenen Wurzeln gehören. Sie müssen daher auf der Schnittgeraden der reellen Doppelebenen liegen. Aus dem gleichen Grunde schneiden sich die beiden imaginären Ebenen nach der Verbindungslinie der beiden reellen Punkte. Man erhält als invariantes Gebilde ein Tetraeder, von dem bloß zwei Ecken, zwei Seiten und zwei Gegenkanten reell sind (Fig. 11).

b) Alle vier Wurzeln seien imaginär, und zwar je zwei davon konjugiert. Es gibt zwei reelle Doppelgeraden, die sowohl als Verbindungslinie zweier konjugiert imaginärer Punkte, als auch als Schnittlinie der zum anderen Paar komplexer Wurzeln gehörenden konjugiert imaginären

Ebenen aufgefaßt werden können. Vom invarianten Tetraeder sind bloß zwei Gegenkanten reell.

2. Die Gleichung  $D=0$  habe eine Doppelwurzel. Für sie sollen nicht alle Unterdeterminanten dritten Grades von  $D$  verschwinden. Man erhält drei invariante Punkte und drei invariante Ebenen, von denen ein Punkt und eine Ebene doppelt zu zählen ist. Der doppelt zu zählende Punkt liegt im Schnitt der drei invarianten Ebenen, weil nur er in der derselben Wurzel entsprechenden Ebene liegen kann. Die doppelt zu zählende invariante Ebene ist in Fig. 12 schraffiert.

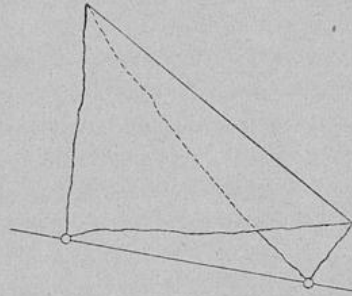


Fig. 11

3.  $D=0$  habe wieder eine Doppelwurzel, während die beiden anderen verschieden sein sollen. Für die Doppelwurzel mögen auch die Unterdeterminanten dritten Grades verschwinden. Setzen wir dann die Doppelwurzel in (3) ein, so reduzieren sich die vier Gleichungen auf zwei wesentliche und bestimmen somit eine gerade Linie, die jetzt punktweise festbleiben muß. (4) liefert ebenso ein invariantes Ebenenbüschel. Die Punktreihe und das Ebenenbüschel müssen, als zu einer Doppelwurzel gehörend, ineinander liegen. Dies kann auf dreierlei Art geschehen. Entweder indem die Punktreihe zum Ebenenbüschel perspektiv, in der Achse oder in einer Ebene des Büschels liegt. Die letzten beiden Fälle können nicht eintreten, weil die beiden, den einfachen Wurzeln entsprechenden, invarianten Punkte auf der Achse des Ebenenbüschels liegen müssen. Die den einfachen Wurzeln entsprechenden Doppelenen gehen nach früherem durch die Punktreihe und durch den zur anderen einfachen Wurzel gehörenden Doppelpunkt (Fig. 13).

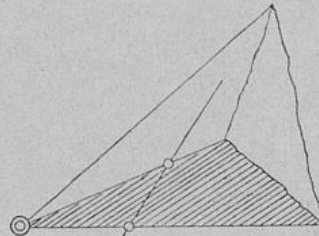


Fig. 12

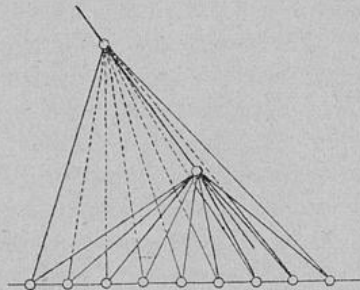


Fig. 13

a) Die beiden einfachen Wurzeln können konjugiert imaginär sein. Dann sind die beiden Doppelpunkte und Doppelenen konjugiert imaginär. Es bleibt als invariantes Gebilde ein Ebenenbüschel und eine dazu perspektiv liegende Punktreihe übrig.

4. Die Gleichung  $D=0$  habe zwei Doppelwurzeln, so daß für keine die Unterdeterminanten verschwinden. Wir erhalten zwei invariante Ebenen und auf jeder einen unveränderlichen Punkt. Diese müssen auf der Schnittlinie der beiden Ebenen liegen. Denn wäre dies nicht der

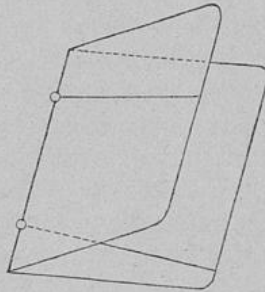


Fig. 14

Fall, so wäre die Schnittlinie eine invariante Gerade und müßte zwei reelle oder imaginäre Doppelpunkte tragen, so daß es im ganzen vier invariante Punkte gäbe. Es gibt in jeder Ebene noch eine invariante Gerade, da in den Doppelsebenen ebene Kollineationen, wie sie in Punkt 2 unter 2 behandelt wurden, bestehen (Fig. 14).

a) Die beiden Doppelwurzeln seien konjugiert imaginär. Es sind dann die beiden doppelt zu zählenden Ebenen konjugiert imaginär. Dasselbe gilt von den beiden Doppelpunkten. Man erhält als reelles invariantes Gebilde eine Gerade.

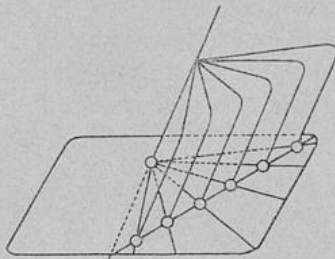


Fig. 15

5. Es seien wieder zwei Doppelwurzeln vorhanden. Für die eine  $\varphi_1$  sollen auch die Unterdeterminanten dritten Grades verschwinden, für die andere aber nicht.  $\varphi_1$  liefert dann eine punktweise festbleibende Gerade und ein invariantes Ebenenbüschel. Die andere Doppelwurzel gibt eine invariante Ebene mit einem darin liegenden Punkt. Die Punktreihe muß zum Ebenenbüschel perspektiv liegen; denn wäre dies nicht der Fall und läge sie z. B. in der Achse, so würde dies noch weitere  $\infty^1$  invariante Punkte zur Folge haben, da dann auf allen Doppelsebenen Zentralkollineationen entstehen würden. Dies trifft jedoch nicht zu (Fig. 15).

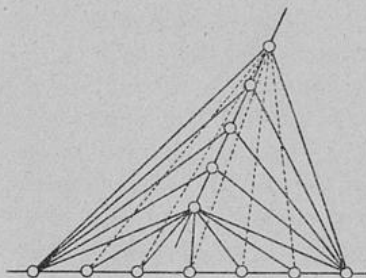


Fig. 16

6.  $D=0$  habe zwei Doppelwurzeln und für beide verschänden die Unterdeterminanten dritten Grades. Jede Doppelwurzel ergibt eine invariante Punktreihe und einen invarianten Ebenenbüschel. Die beiden Punktfolgen liegen in den Achsen der beiden Ebenenbüschel (Fig. 16). Die Verbindungslinie irgend zweier entsprechender Punkte schneiden die beiden Achsen, da durch jeden Punkt eine Treffgerade der beiden



Achsen der Ebenenbüschel existiert und diese eine Doppelgerade sein muß. Ebenso schneiden zwei einander entsprechende Ebenen sich nach einer Schnittgeraden, die gleichfalls beide Achsen trifft. Wir erhalten also hier neben den beiden punktweise festbleibenden Geraden noch  $\infty^2$  weitere Doppelgerade, die einen Strahlenkomplex erster Ordnung und erster Klasse bilden.

a) Es können nun beide Wurzeln konjugiert imaginär werden. Die beiden punktweise festbleibenden Geraden sind dann imaginäre Gerade zweiter Art, d. h. solche, die weder einen reellen Punkt, noch eine reelle Ebene tragen. Dann besteht auch der Strahlenkomplex reell, da die beiden Geraden konjugiert imaginär sind und als solche trägt jede  $\infty^1$  imaginäre Punkte, die den anderen zugeordnet, konjugiert imaginär sind und daher reelle Verbindungslinien haben.

7. Es sei eine dreifache Wurzel vorhanden. Man erhält als invariantes Gebilde einen dreifach zu zählenden Punkt und durch ihn eine

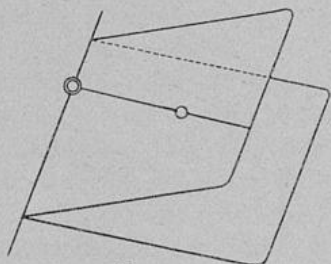


Fig. 17

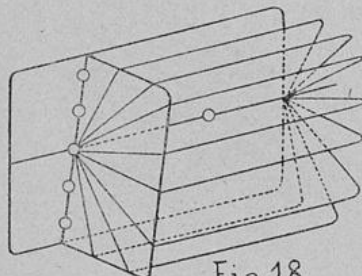


Fig. 18

ebensolche Ebene, ferner in dieser Ebene liegend einen einfachen Doppelpunkt und durch den dreifachen Punkt eine einfache Doppalebene (Fig. 17).

8.  $\varrho$  sei eine dreifache Wurzel, für die auch die Unterdeterminanten dritten Grades verschwinden sollen. Man erhält eine invariante Punktreihe und einen invarianten Punkt, und ebenso aus dem Gleichungssystem (4) einen invarianten Ebenenbüschel und eine invariante Ebene. Die invariante Punktreihe liegt in der invarianten Ebene, da sie zu verschiedenen Wurzeln gehören. Die Punktreihe kann daher nicht in der Achse des Ebenenbüschels liegen. Dagegen muß der invariante Punkt in ihr liegen. Läge nun die Punktreihe perspektiv zum Ebenenbüschel, so würde im Schnittpunkt der invarianten Ebene mit der Achse des Ebenenbüschels ein weiterer invarianter Punkt entstehen, was jedoch nicht sein kann. Daher muß die Punktreihe in einer Ebene des Büschels liegen. (Fig. 18.)

9. Für die dreifache Wurzel  $\varrho$  verschwinden außer den Unterdeterminanten dritten Grades auch die zweiten Grades. Die Gleichungen (3) und (4) reduzieren sich in diesem Fall für die dreifache Wurzel auf eine

einzigste Gleichung. Man erhält somit eine punktweise festbleibende Ebene und ein elementweise festbleibendes Strahlenbündel. Die zweite Wurzel liefert eine Doppelebene und einen Doppelpunkt. Letzterer fällt mit dem Scheitel des Strahlenbündels, erstere mit der punktweise invarianten Ebene zusammen. Es ist dies der Fall der Zentralkollineation.

10. Die Gleichung  $D=0$  habe eine vierfache Wurzel. Wir erhalten als invariantes Gebilde einen vierfach zu zählenden unveränderlichen Punkt und eine vierfach zu zählende feste Ebene, die den Punkt enthält.

11. Die Gleichung habe wieder eine vierfache Wurzel, für die auch die Unterdeterminanten dritten Grades verschwinden sollen. Es bleibt eine Punktreihe punktweise und ein Ebenenbüschel ebenenweise unverändert. Die Punktreihe kann nun in zweierlei Art mit dem Ebenenbüschel vereinigt liegen:

Entweder die Punktreihe liegt in der Achse des Ebenenbüschels (Fig. 19) oder

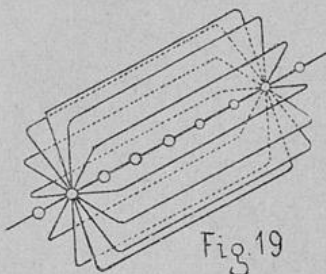


Fig. 19

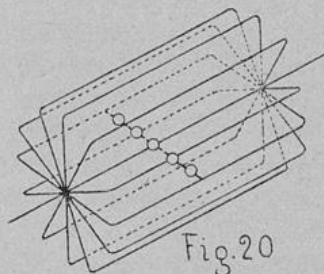


Fig. 20

12. die Punktreihe liegt in einer Ebene des Büschels (Fig. 20); beide Fälle sind möglich; welcher von ihnen eintritt, kann nur eine Untersuchung lehren. Die ebene Kollineation in den Doppelebenen im Fall 11 sind ausgeartete Zentralkollineationen. Hier gilt dasselbe von der Ebene, in der die Punktreihe liegt. Die anderen Doppelebenen tragen ebene Kollineationen, wie sie in Punkt 2 unter 4 besprochen wurden.

13. Die Gleichung  $D=0$  habe wieder eine vierfache Wurzel, für die außer den Unterdeterminanten dritten Grades auch die zweiten Grades verschwinden. Invariant bleibt hier eine Ebene punktweise und ein Strahlenbündel elementweise. Der Scheitel des letzteren, der ein invarianter Punkt ist, muß den  $\infty^2$  unveränderlichen Punkten der Ebene angehören; denn wäre dies nicht der Fall, so müßten wir noch einen invarianten Punkt durch eine weitere Wurzel erhalten, was jedoch nicht sein kann. Wir haben hier den Fall einer ausgearteten Zentralkollineation vor uns, wenn nämlich das Zentrum in die Kollineationsebene fällt.

14.  $\varrho$  sei eine vierfache Wurzel, für die alle Unterdeterminanten, auch die vom ersten Grade, verschwinden.

Man erhält aus dem Gleichungssystem (3)  $q = a_{11}$ ,  $q = a_{22}$ ,  $q = a_{33}$ ,  $q = a_{44}$ ; alle andern Werte  $a_{ik}$  sind Null.

Die Gleichungen der Kollineation nehmen die Form an:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= q \cdot x_1 \\ \mu x_2' &= q \cdot x_2 \\ \mu x_3' &= q \cdot x_3 \\ \mu x_4' &= q \cdot x_4. \end{aligned}$$

Es ist dies die Identität.

3.

Wir stellen nun die Kollineation in räumlichen projektiven Punkt-koordinaten dar. Zum Koordinatentetraeder wählen wir das invariante Tetraeder, und wo ein solches nicht vorhanden ist, legen wir das Koordinatentetraeder in das invariante Gebilde passend hinein. Wir haben wieder dieselben Fälle zu berücksichtigen.

1. Hier ist das invariante Gebilde ein Tetraeder; wir machen es zum Koordinatentetraeder (Fig. 21). Wir können die Gleichungen der Kollineation leicht aus dem Umstande ableiten, daß die Ebenenbüschel, die die Kanten des festen Tetraeders tragen, sich in projektive Büschel so verwandeln, daß die beiden Tetraederebenen, die diese Kante bilden, Doppelebenen der Projektivität sind. Wenden wir dies auf die vier Ebenenbüschel an, so ergeben sich die Gleichungen der Kollineation in der Form:

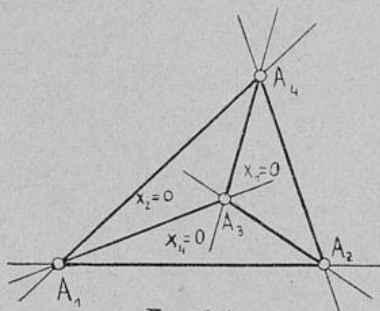


Fig. 21

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= q_1 x_1 \\ \mu x_2' &= q_2 x_2 \\ \mu x_3' &= q_3 x_3 \\ \mu x_4' &= q_4 x_4 \end{aligned} \tag{5}$$

Damit nun die Verwandtschaft in diesem Fall zyklisch sei, brauchen bloß die  $q_i$   $n^{\text{te}}$  Wurzeln aus einer beliebigen Zahlengröße  $a$  sein. Da es nicht vier voneinander verschiedene reelle  $n^{\text{te}}$  Wurzeln aus  $a$  gibt, sondern höchstens zwei, so wird bloß der Fall 1 a) und 1 b) periodisch sein können. Eine räumliche Kollineation, die ein reelles Tetraeder invariant läßt, kann daher nie zyklisch sein.

2. Wir legen das Koordinatentetraeder in das invariante Gebilde so hinein, daß nur eine Seitenfläche keine Doppelebene der Transformation ist (Fig. 22). Die Ebenenbüschel  $(A_2 A_3)$ ,  $(A_2 A_4)$  und  $(A_1 A_2)$  sind projektiv mit ihren umgeformten und besitzen jeweils zwei Doppelebenen.

$$(A_2 A_3) \dots x_1 + \lambda x_4 = 0 \text{ geht über in } x_1 + \left(\frac{q_4}{q_{12}} \lambda\right) x_4 = 0$$

$$(A_2 A_4) \dots x_1 + \kappa x_3 = 0 \text{ geht über in } x_1 + \left(\frac{q_3}{q_{12}} \kappa\right) x_3 = 0$$

$$(A_1 A_2) \dots x_3 + \nu x_4 = 0 \text{ geht über in } x_3 + \left(\frac{q_4}{q_3} \nu\right) x_4 = 0.$$

Dagegen hat der Ebenenbüschel  $(A_3 A_4) \dots x_1 + \lambda x_2 = 0$  mit seinem umgeformten nur eine Doppelebene  $x_1 = 0$ .

Hat letzterer die Gleichung  $x_1' + \mu x_2' = 0$ ,

so lautet die Bedingung hierfür  $\lambda = \frac{q_{12} \mu}{q_{12} + \mu}$ .

Der Büschel  $(A_3 A_4)$  kann daher auch geschrieben werden:

$$(q_{12} x_1) + \mu (x_1 + q_{12} x_2) = 0.$$

Bedenkt man noch, daß  $x_i$  und  $x_i'$  bloß Verhältniskoordinaten sind, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= q_{12} x_1 \\ \mu x_2' &= x_1 + q_{12} x_2 \\ \mu x_3' &= q_3 x_3 \\ \mu x_4' &= q_4 x_4 \end{aligned} \quad (6)$$

Für  $n$ -malige Wiederholung bekommt man, wenn man  $\mu^n = \tau$  setzt:

$$\begin{aligned} \tau x_1^{(n)} &= q_{12}^n x_1 \\ \tau x_2^{(n)} &= n q_{12}^{n-1} x_1 + q_{12}^n x_2 \\ \tau x_3^{(n)} &= q_3^n x_3 \\ \tau x_4^{(n)} &= q_4^n x_4. \end{aligned}$$

Hier kann mithin nie Periodizität eintreten.

3. Der Ebenenbüschel  $(A_3 A_4) \dots x_1 + \lambda x_2 = 0$  bleibt hier invariant (Fig. 23). Geht er in  $x_1' + \mu x_2' = 0$  über, so muß  $\frac{\lambda}{\mu} = 1 = \frac{q_{12}}{q_{12}}$  gesetzt werden.

Die Ebenenbüschel an den anderen Kanten werden in projektive mit zwei Doppelebenen umgeformt. Man erhält daher

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= q_{12} x_1 \\ \mu x_2' &= q_{12} x_2 \\ \mu x_3' &= q_3 x_3 \\ \mu x_4' &= q_4 x_4 \end{aligned} \quad (7)$$

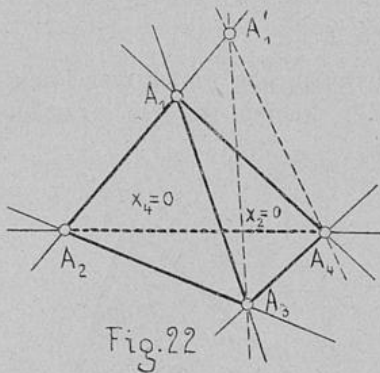


Fig. 22

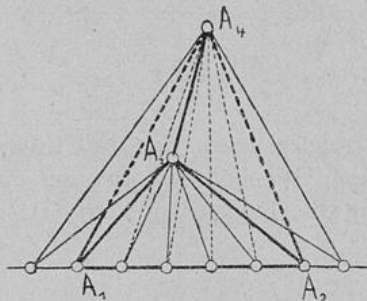


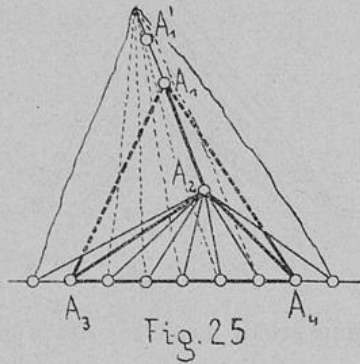
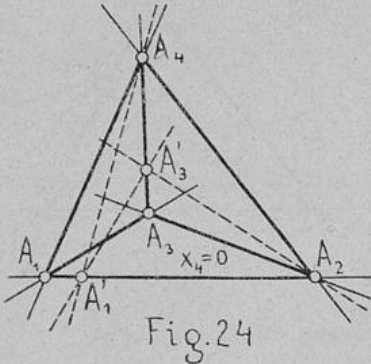
Fig. 23

Dieser Fall der Kollineationen kann mitunter periodisch sein. Es brauchen nur die drei Größen  $\varrho_{12}$ ,  $\varrho_3$  und  $\varrho_4$   $n^{\text{te}}$  Wurzeln aus  $a$  sein.

4. Wir legen das Koordinatentetraeder so in die beiden invarianten Ebenen, die außer der Schnittgeraden noch je eine weitere invariante Gerade tragen, daß  $x_1=0$ ,  $x_3=0$ , die Punkte  $A_3$ ,  $A_4$  und die Kanten  $A_2A_1$  und  $A_4A_3$  invariant bleiben (Fig. 24). Der Ebenenbüschel  $(A_2A_4)$  geht in einen projektiven mit den zwei Doppelebenen  $x_1=0$ ,  $x_3=0$  über und gibt die Beziehung  $x_1'=ax_1$ ,  $x_3'=bx_3$ . Der Büschel  $(A_3A_4)$  geht in einen projektiven mit der einzigen Doppelebene  $x_1=0$  über. Daher

$$\text{geht } x_1 + \lambda x_2 = 0 \text{ über in } ax_1 + \lambda(x_1 + ax_2) = 0.$$

Dasselbe gilt von dem Büschel  $(A_1A_2)$ . Es hat mit dem transformierten die einzige Doppelebene  $x_3=0$ :



$$x_3 + \lambda x_4 = 0 \text{ geht daher über in } bx_3 + (x_3 + bx_4) = 0.$$

Da sich auch hier wie in der Ebene die Konstanten in der Darstellung mittels projektiver Koordinaten als die Wurzeln der Gleichung  $D=0$  ergeben werden und in diesem Fall diese Gleichung nach der Voraussetzung zwei Doppelwurzeln  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  hat, so müssen sie gleich  $a$  und  $b$  sein.

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= \varrho_1 x_1 \\ \mu x_2' &= x_1 + \varrho_1 x_2 \\ \mu x_3' &= \varrho_2 x_3 \\ \mu x_4' &= x_3 + \varrho_2 x_4 \end{aligned} \tag{8}$$

Diese Gleichungen können nie zyklische Kollineationen darstellen; denn dann müßte sein:

$$\begin{aligned} \varrho_1^n &= a & \varrho_2^n &= a \\ n \varrho_1^{n-1} &= 0 & n \varrho_2^{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Diese Bedingungen lassen sich außer für  $n=0$  nicht erfüllen.

5. Hier ist die Ebene  $A_2A_3A_4$  und der Ebenenbüschel  $A_1A_2$  invariant (Fig. 25). Da letzterer lauter Doppelebenen enthält, die Punkte

sich also in den Ebenen durch die Kante  $A_1 A_2$  verschieben, so muß für die Koordinaten  $x_3, x_4$ , die den Abständen von den Ebenen  $A_1 A_2 A_3$  und  $A_1 A_2 A_4$  proportional sind, gelten:  $\frac{x_3}{x_4} = \frac{x_3'}{x_4'}$ .

Der Büschel  $(A_2 A_3)$  geht in einen projektiven Büschel über, so daß zwei Doppelebenen bestehen:

$$(A_2 A_3) \dots x_1 + \lambda x_4 = 0 \text{ geht daher über in } \varrho_1 x_1 + \lambda \varrho_2 x_4 = 0.$$

$(A_3 A_4)$  wird so in einen projektiven Büschel umgeformt, daß nur eine Doppelebene  $x_1 = 0$  besteht:

$$(A_3 A_4) \dots x_1 + \lambda x_2 = 0 \text{ geht über in } \varrho_1 x_1 + \lambda (x_1 + \varrho_1 x_2) = 0.$$

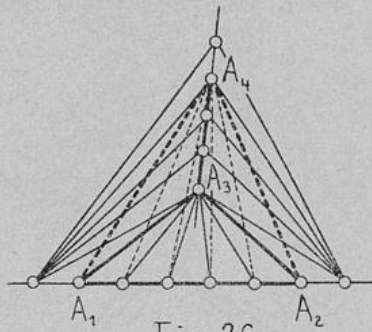


Fig. 26

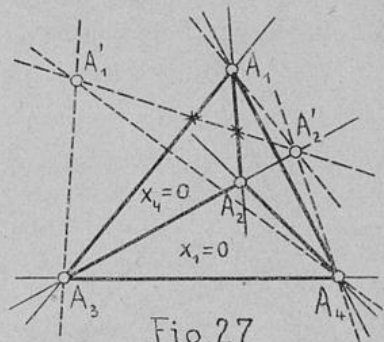


Fig. 27

Man erhält somit für die Kollineation die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= \varrho_1 x_1 \\ \mu x_2' &= x_1 + \varrho_1 x_2 \\ \mu x_3' &= \varrho_2 x_3 \\ \mu x_4' &= \varrho_2 x_4 \end{aligned} \tag{9}$$

Auch hier kann Periodizität nie eintreten, da  $\varrho_1^n = a$  und  $n \varrho_1^{n-1} = 0$  nur für  $n = 0$  eintritt.

6. Es bleiben zwei Gegenkanten des Koordinatentetraeders punktweise und die zugehörigen Ebenenbüschel ebenenweise invariant (Fig. 26). Da sich die Punkte in den Ebenen des einen Büschels und auch in den Ebenen des zweiten Büschels bewegen müssen, gilt:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= \varrho_1 x_1 \\ \mu x_2' &= \varrho_1 x_2 \\ \mu x_3' &= \varrho_2 x_3 \\ \mu x_4' &= \varrho_2 x_4 \end{aligned} \tag{10}$$

Für periodische Transformationen muß  $\varrho_1^n = a$  und  $\varrho_2^n = a$  sein.

7. Hier bleiben die beiden Ebenen  $x_1 = 0, x_4 = 0$  und die Punkte  $A_3$  und  $A_4$  invariant (Fig. 27).  $(A_2 A_3)$  und der projektive entsprechende Ebenenbüschel haben zwei Doppelebenen:

$$(A_2 A_3) \dots x_1 + \lambda x_4 = 0 \text{ geht über in } a x_1 + \lambda b x_4 = 0.$$

Der Büschel  $(A_3 A_4)$  geht in einen projektiven über mit der einzigen Doppelebene  $x_1 = 0$ :

$$(A_3 A_4) \dots x_1 + \lambda x_2 = 0 \text{ geht über in } a x_1 + \lambda (x_1 + a x_2) = 0.$$

Zur weiteren Bestimmung kann man den Büschel  $(A_2 A_4)$  betrachten. Da er mit seinem projektiven Bild  $(A_2' A_4)'$  die Ebene  $A_2 A_3 A_4$  entsprechend gemein hat, so sind die beiden Ebenenbüschel in perspektiver Lage. Da die beiden perspektiven Büschel in der Beziehung von Original und Bild stehen und die entsprechend gemeine Ebene  $A_2 A_3 A_4$  eine Doppelebene ist, in der die Doppelgerade  $A_3 A_4$  liegt, so kann nur diese Linie als der Schnitt der beiden Büscheln entsprechend gemeinen Ebene aufgefaßt werden. Es muß daher die Perspektivitätsebene durch  $A_3 A_4$  gehen. Wir können sie noch beliebig annehmen und tun dies am einfachsten in der Form:  $x_1 + x_2 = 0$

$$(A_2 A_4) \dots x_1 + \lambda x_3 = 0$$

$$(A_2' A_4)' \dots a x_1 + \lambda x_3' = 0.$$

Das Erzeugnis der beiden projektiven Büschel ist nun:

$$x_1 x_3' - a x_1 x_3 = x_1 (x_1 + x_2)$$

$$x_3' = x_1 + x_2 + a x_3$$

$a$  ist die dreifache,  $b$  die einfache Wurzel von  $D = 0$ .

$$\mu x_1' = \varrho x_1$$

$$\mu x_2' = x_1 + \varrho x_2$$

$$\mu x_3' = x_1 + x_2 + \varrho x_3$$

$$\mu x_4' = \varrho_4 x_4.$$

(11)

Hier kann Periodizität nicht eintreten.

8. Außer dem Büschel  $(A_2 A_4)$ , der Punktreihe  $A_2 A_3$ , bleibt noch der Punkt  $A_4$  und die Ebene  $x_4 = 0$  invariant (Fig. 28). Der Büschel

$(A_2 A_4)$  ist invariant; daher ist  $\frac{x_1}{x_3} = \frac{x_1'}{x_3'}$ .

$(A_2 A_3)$  transformiert sich projektiv so, daß zwei Doppelebenen entstehen:

$$(A_2 A_3) \dots x_1 + \lambda x_4 = 0 \text{ geht über in } a x_1 + \lambda b x_4 = 0.$$

$(A_3 A_4)$  verwandelt sich so in sein projektives Bild, daß nur  $x_1 = 0$  Doppelebene ist:

$$(A_3 A_4) \dots x_1 + \lambda x_2 = 0 \text{ geht über in } a x_1 + \lambda (x_1 + a x_2) = 0.$$

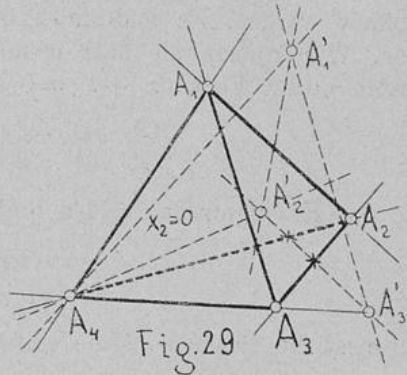
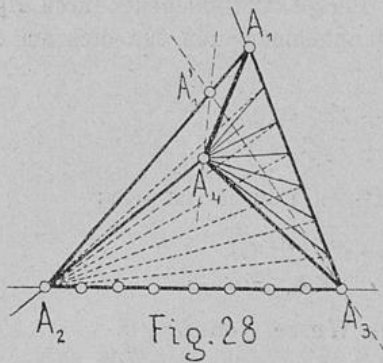
$a$  ist die dreifache Wurzel  $\varrho$ ,  $b$  die einfache Wurzel  $\varrho_4$  der Gleichung  $D = 0$ . Mithin erhält man:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= \varrho x_1 \\ \mu x_2' &= x_1 + \varrho x_2 \\ \mu x_3' &= \varrho x_3 \\ \mu x_4' &= \varrho_4 x_4 \end{aligned} \quad (12)$$

Periodizität ist hier ausgeschlossen.

9. Wir haben den Fall der Zentralkollineation vor uns. Das ganze Koordinatentetraeder ist hier invariant. Die Ebene  $x_4 = 0$  sei die Kollineationsebene,  $A_4$  das Kollineationszentrum. Die Ebenenbüschel  $(A_1 A_4)$ ,  $(A_2 A_4)$  und  $(A_3 A_4)$  sind invariant; daher ist:  $x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : x_3'$ .

Betrachtet man noch eines der drei Ebenenbüschel an den anderen Kanten, so transformiert sich jedes in ein projektives, so daß zwei Doppelebenen bestehen:



$$(A_2 A_3) \dots x_1 + \lambda x_4 = 0 \text{ geht über in } \varrho x_1 + \lambda \varrho_4 x_4 = 0.$$

Die Gleichungen der Zentralkollineation stellen sich mithin so dar:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= \varrho x_1 \\ \mu x_2' &= \varrho x_2 \\ \mu x_3' &= \varrho x_3 \\ \mu x_4' &= \varrho_4 x_4 \end{aligned} \quad (13)$$

Dieser Fall wird dann periodisch sein, wenn  $\varrho^n = \varrho_4^n = a$  ist.

10. Hier bleibt bloß die Ebene  $x_1 = 0$  und der Punkt  $A_4$  invariant (Fig. 29). Der Ebenenbüschel  $(A_3 A_4)$  hat mit seinem entsprechenden projektiven Büschel die Ebene  $x_1 = 0$  gemeinsam:

$$(A_3 A_4) \dots x_1 + \lambda x_2 = 0 \text{ geht über in } \varrho x_1 + \lambda (x_1 + \varrho x_2) = 0.$$

Der Büschel  $(A_2 A_4)$  geht in den projektiven Büschel  $(A_2' A_4')$  über. Da der Punkt  $A_2'$  sich nicht aus der Doppelebene herausbewegt, so haben die beiden Büschel dieselbe entsprechend gemein und müssen daher perspektiv sein. Da die beiden Büschel durch die Kollineation auseinander hervorgehen und die Perspektivitätsebene durch die Schnittlinie ent-



sprechender Ebenen geht, so muß sie hier durch die in der Doppelebene enthaltene Kante  $A_3 A_4$  gehen. Sie kann als eine beliebige Ebene des Büschels  $(A_3 A_4)$  angenommen werden, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen. Wir wählen sie als die Ebene  $x_1 + x_2 = 0$ , um die Gleichungen frei von unnötigen Konstanten zu bekommen.

$$\begin{aligned} (A_2 A_4) \dots x_1 + \lambda x_3 &= 0 \\ (A_2' A_4)' \dots \rho x_1 + \lambda x_3' &= 0. \end{aligned}$$

Das Erzeugnis der beiden Büschel ist:

$$\begin{aligned} x_1 x_3' - \rho x_1 x_3 &= x_1 (x_1 + x_2) \\ x_3' &= x_1 + x_2 + \rho x_3. \end{aligned}$$

Betrachtet man noch die beiden Büschel  $(A_2 A_3)$  und sein Bild  $(A_2' A_3)'$ , so sind sie wieder perspektiv, da sie die Ebene  $x_1 = 0$  entsprechend gemein haben. Die Perspektivitätsebene ist irgendeine Ebene durch  $A_4$ , da dieser Punkt ein Doppelpunkt der entsprechend gemeinen Ebene ist. Ohne die Allgemeinheit zu stören, nehmen wir die Perspektivitätsebene in der Form an:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Man hat dann:

$$\begin{aligned} (A_2 A_3) \dots x_1 + \lambda x_4 &= 0 \\ (A_2' A_3)' \dots \rho x_1 + \lambda x_4' &= 0. \end{aligned}$$

Das Erzeugnis ist

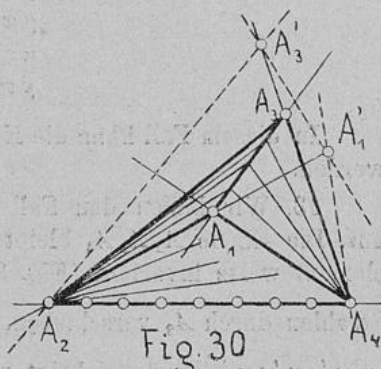
$$x_1 x_4' - \rho x_1 x_4 = x_1 (x_1 + x_2 + x_3)$$

Man erhält somit

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= \rho x_1 \\ \mu x_2' &= x_1 + \rho x_2 \\ \mu x_3' &= x_1 + x_2 + \rho x_3 \\ \mu x_4' &= x_1 + x_2 + x_3 + \rho x_4. \end{aligned} \tag{14}$$

Auch hier ist die Periodizität ausgeschlossen.

11. Die Gerade  $A_2 A_4$  bleibt punktweise, der Ebenenbüschel  $(A_2 A_4)$  ebenenweise invariant. In jeder Doppelebene liegt ein invarianter Strahlenbüschel, dessen Scheitel auf der Punktreihe liegen. In der Ebene  $A_1 A_2 A_4$  sei es der Strahlenbüschel mit dem Scheitel  $A_2$ , in der Ebene  $A_2 A_3 A_4$  sei der Scheitel in  $A_4$  (Fig. 30). Aus der Transformation des Ebenenbüschels  $(A_2 A_4)$ , das in das identische übergeht, und den beiden Büscheln  $(A_1 A_2)$  und  $(A_3 A_4)$ , die in ihre projektiven Bilder



übergehen, indem dabei bloß eine einzige Doppelebene  $x_3 = 0$  und  $x_1 = 0$  auftritt, kann man die Gleichungen ableiten.

Man erhält:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= \varrho x_1 \\ \mu x_2' &= x_1 + \varrho x_2 \\ \mu x_3' &= \varrho x_3 \\ \mu x_4' &= x_3 + \varrho x_4 \end{aligned} \tag{15}$$

Auch in diesem Fall kann die Kollineation nicht periodisch werden.

12. Hier bleiben die Gerade  $A_3 A_4$  und der Ebenenbüschel  $(A_2 A_3)$  elementweise invariant (Fig. 31).

Da die Punkte in den Ebenen dieses Büschels transformiert werden, so gilt:  $\frac{x_1}{x_4} = \frac{x_1'}{x_4'}$ . Der Büschel  $(A_3 A_4)$  geht so in seinen projektiven Bildebenenbüschel über, daß es eine einzige Doppelebene  $x_2 = 0$  gibt:

$$(A_3 A_4) \dots x_2 + \lambda x_1 = 0 \text{ geht also über in } \varrho x_2 + \lambda(x_2 + \varrho x_1) = 0.$$

Die beiden Büschel  $(A_1 A_2)$  und  $(A_1' A_2)'$ , die als entsprechende Büschel der Kollineation projektiv sein müssen, sind hier wie ersichtlich perspektiv, da sie die Ebene  $A_1 A_2 A_3$  entsprechend gemein haben. Entsprechende Ebenen müssen sich nach Geraden schneiden, die die punktweise festbleibende Gerade  $A_3 A_4$  treffen. Es muß daher die Perspektivitätsebene durch diese Gerade gehen. Ohne die Allgemeinheit zu stören, wählen wir  $x_2 = 0$  als Perspektivitätsebene und wir erhalten:

$$\begin{aligned} (A_1 A_2) \dots x_3 + \lambda x_4 &= 0 \\ (A_1' A_2)' \dots x_3' + \lambda \varrho x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Das Erzeugnis der Büschel ist nun daher  $x_3' x_4 - \varrho x_3 x_4 = x_2 x_4$ .

$$x_3' = x_2 + \varrho x_3.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= x_2 + \varrho x_1 \\ \mu x_2' &= \varrho x_2 \\ \mu x_3' &= x_2 + \varrho x_3 \\ \mu x_4' &= \varrho x_4 \end{aligned} \tag{16}$$

In diesem Fall kann die Kollineation, wie man sieht, nicht periodisch werden.

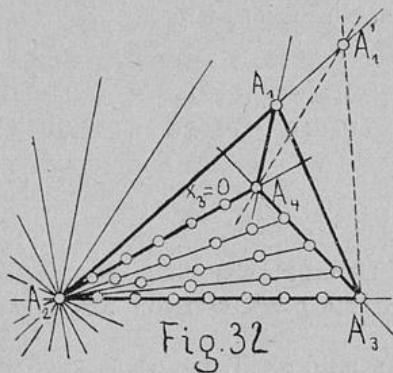
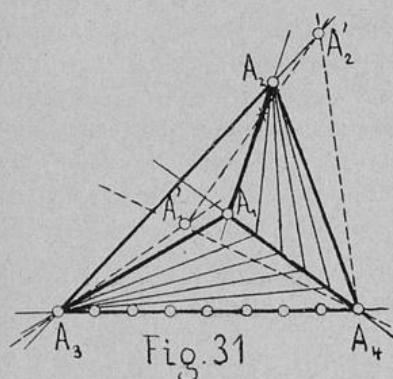
13. Wir haben den Fall der ausgearteten Zentralkollineation vor uns. Die Ebene  $A_2 A_3 A_4$  bleibt punktweise und das Strahlenbündel  $(A_2)$  elementweise invariant (Fig. 32). Da alle Punkte des Raumes sich auf Strahlen durch  $A_2$  verschieben, so ist  $\frac{x_1}{x_1'} = \frac{x_3}{x_3'} = \frac{x_4}{x_4'}$  oder  $x_1 : x_3 : x_4 = x_1' : x_3' : x_4'$ . Berücksichtigt man ferner, daß der Büschel  $(A_3 A_4)$  so in

seinen projektiven Bildebenenbüschel übergeht, daß die Ebene  $x_1 = 0$  die einzige Doppalebene ist, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= \varrho x_1 \\ \mu x_2' &= x_1 + \varrho x_2 \\ \mu x_3' &= \varrho x_3 \\ \mu x_4' &= \varrho x_4 \end{aligned} \quad (17)$$

Auch hier kann die Kollineation nicht zyklisch werden.

Schließen wir den Fall der Identität als trivial aus, so ergibt sich, daß bloß diejenigen Arten räumlicher Kollineationen zyklisch sein können, die unter 1., 3., 6. und 9. besprochen wurden.



4.

Wie in der Ebene kann man auch im Raume die Beziehungen zwischen den Koeffizienten  $\varrho_i$  und  $a_{ik}$  aufstellen. Da auch die homogenen Tetraederkoordinaten eines Punktes proportional den Abständen von den Tetraederebenen sind und da wir das Koordinatentetraeder in das invariante hineingelegt, oder dort, wo es nicht ganz invariant war, die einzelnen Tetraederseiten wieder in ihrer Lage zu den invarianten festgelegt haben, stellt sich die Beziehung zwischen Punkt und Bildpunkt allgemein so dar:  $x_i' = \varrho \cdot x_i$  d. h. der Punkt ändert seine Entfernung mit dem Faktor  $\varrho$  infolge der kollinearen Transformation. Setzen wir  $x_i'$  in das System (1) ein, so zieht das Nichtverschwinden der  $x_i$  das Verschwinden der Determinante  $D$  nach sich. Es ist dies eine biquadratische Gleichung für  $\varrho$  und sie kann zur Bestimmung der Größen  $\varrho_i$  verwendet werden. Dort, wo die Gleichung mehrfache Wurzeln hat, spezialisiert sich die Kollineation auf eine der zwölf betrachteten Arten und in ihrer Darstellung in allgemeinen projektiven Koordinaten treten immer gerade so viel verschiedene Konstante auf, als die zugehörige Gleichung  $D=0$  Wurzeln hat. Um die Gleichung  $D=0$  ausführlich

schreiben zu können, führen wir neben den früheren noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = A_{12} \\ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{23} \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{13} \\ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = A_{24} \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = A_{14} \\ \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = A_{34} \end{array}$$

Die Gleichung  $D=0$  lautet dann:

$$\varrho^4 - (a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}) \varrho^3 + (A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{23} + A_{24} + A_{34}) \varrho^2 - (a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}) \varrho + \mathcal{A} = 0.$$

Da sich die Koeffizienten als Funktionen der Wurzeln darstellen lassen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} \\ \varrho_1 \varrho_2 + \varrho_1 \varrho_3 + \varrho_1 \varrho_4 + \varrho_2 \varrho_3 + \varrho_2 \varrho_4 + \varrho_3 \varrho_4 &= A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{23} + A_{24} + A_{34} \\ \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 + \varrho_1 \varrho_2 \varrho_4 + \varrho_1 \varrho_3 \varrho_4 + \varrho_2 \varrho_3 \varrho_4 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} \\ \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 \cdot \varrho_4 &= \mathcal{A}. \end{aligned}$$

5.

Es ergab sich, daß eine Kollineation nur dann zyklisch ist, wenn die Werte  $\varrho$   $n^{\text{te}}$  Wurzeln aus einer beliebigen Größe  $\alpha$  sind. Wir be-

zeichnen die  $n^{\text{ten}}$  Wurzeln aus  $\alpha$  wie früher mit  $+\alpha \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}}$  ( $k=0,1,2,\dots,n-1$ ).

1. Die vier Werte  $\varrho_i$  sind alle voneinander verschieden. Ist noch  $n$  gerade, so erhält man eine zyklische Kollineation, wenn folgendes zutrifft:

$$\varrho_1 = +\alpha, \varrho_2 = -\alpha, \varrho_3 = \alpha e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \varrho_4 = \alpha e^{-\frac{2k\pi i}{n}}.$$

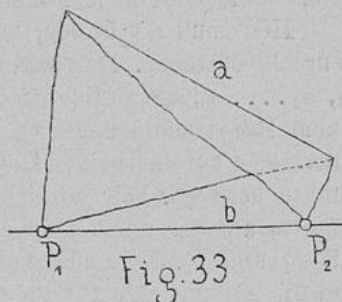
Bestehen also zwischen den Koeffizienten einer Kollineation in der Form (1) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} &= 2\alpha \cos \frac{2k\pi}{n} \\ A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{23} + A_{24} + A_{34} &= 0 \\ a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} &= -2\alpha^3 \cos \frac{2k\pi}{n} \\ \mathcal{A} &= -\alpha^4 \end{aligned} \tag{18}$$

so erhält man eine zyklische Kollineation mit gerader Periode  $n$ , von der Art wie sie unter 1a) besprochen wurde. Liegt nun eine solche zyklische Kollineation  $K_n$  vor, so bleiben bei ihr zwei Ebenen des Büschels ( $\alpha$ ) und zwei Punkte  $P_1, P_2$  der Punktreihe  $b$  invariant (Fig. 33). Betrachten wir einen beliebigen Punkt  $a_1$ , so wird derselbe der Reihe nach in die Punkte  $a_2, a_3 \dots a_n$  zyklisch übergehen. In einer zykli-

schen Projektivität von  $n$  Elementen existieren nur dann reelle Doppelpunkte, wenn  $n=2$  ist\*). Es muß also die Verwandtschaft  $K_n$  die Ebenen des Büschels ( $a$ ) und die Punkte der Reihe  $b$  involutorisch paaren. Sollen nun die  $n$  Punkte  $a_1, a_2, \dots, a_n$  voneinander verschieden sein, so müssen die Punkte  $a_1, a_3, \dots, a_{n-1}$  in einer Ebene  $E_1$  und die Punkte  $a_2, a_4, \dots, a_n$  in einer anderen Ebene  $E_2$  des Büschels ( $a$ ) liegen, so zwar, daß diese Ebenen von den Doppelebenen harmonisch getrennt sind. Dieser Umstand verlangt in Übereinstimmung mit unserer Rechnung, daß  $n=2p$  gerade sein muß. Betrachten wir nun die Transformation  $K_n^2$ , so sind bei ihr die Ebenen  $a_1, a_3, \dots, a_{2p-1}$  und  $a_2, a_4, \dots, a_{2p}$  invariant. Gleichzeitig verwandelt sie die Punkte  $a_1, a_3, \dots, a_{2p-1}$  und ebenso  $a_2, a_4, \dots, a_{2p}$  zyklisch ineinander. Sie hat daher die Periode  $p$ . Ist nun  $p \geq 3$ , so werden die Punkte  $a_1, a_3, \dots, a_{2p-1}$  und  $a_2, a_4, \dots, a_{2p}$  zyklisch projektive Punktgruppen auf Kegelschnitten  $k_1$  und  $k_2$  beschreiben.

Projizieren wir sie aus  $P_1$ , so erhält man zwei Kegel  $K_1$  und  $K_2$ , die identisch sein müssen. Denn wäre dies nicht der Fall, so würden sich  $K_1$  und  $K_2$  in vier reellen, teilweise oder ganz imaginären Strahlen schneiden, die Doppelstrahlen der Transformation  $K_n$  sein müßten. Man bekäme so fünf Doppelstrahlen durch  $P_1$ , was aber nicht sein kann. Ebenso muß der Doppelpunkt  $P_2$  die beiden



Kegelschnitte  $k_1$  und  $k_2$  durch einen einzigen Kegel projizieren.  $P_1$  sowohl wie  $P_2$  trägt ein Kegelbüschel. Für jeden Kegel sind  $a$  und  $b$  harmonische Polare und das Tetraeder, das durch  $P_1$  und  $P_2$  und die beiden imaginären Doppelpunkte von  $a$  bestimmt ist, ist Polartetraeder. Je ein Kegel des einen und ein Kegel des anderen Büschels schneiden sich in zwei Kegelschnitten. Diese enthalten abwechselnd die aus dem Punkt  $a_1$  durch wiederholte Anwendung von  $K_n$  hervorgegangenen Punkte. Die Periode ist für jeden beliebigen Punkt des Raumes  $n$ , mit Ausnahme der Punkte der beiden Doppelebenen, für die sie sich auf  $\frac{n}{2}$  erniedrigt und der Punkte der Doppelgeraden  $b$ , für die sie gleich 2 ist.

Im Falle  $n=4$  reduzieren sich die beiden Kegel auf Ebenen. Die Kollineation  $K_n^2$  ist dann geschart involutorisch, welcher Fall noch besprochen werden wird.

Es kann nun zweitens noch der Fall eintreten, daß alle vier  $n^{\text{ten}}$  Wurzeln aus  $a$  imaginär sind:

\*) Doehlemann, Geometrische Transformationen, S. 90.

$$Q_1 = \alpha e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad Q_2 = \alpha e^{-\frac{2k\pi i}{n}}, \quad Q_3 = \alpha e^{\frac{2k_1\pi i}{n}}, \quad Q_4 = \alpha e^{-\frac{2k_1\pi i}{n}}.$$

Wenn daher die Konstanten der Kollineation in der Form (1) die Bedingungen erfüllen

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} &= 2\alpha \left( \cos \frac{2k\pi}{n} + \cos \frac{2k_1\pi}{n} \right) \\ A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{23} + A_{24} + A_{34} &= \\ &= 2\alpha^2 \left( 1 + \cos \frac{2(k+k_1)\pi}{n} + \cos \frac{2(k-k_1)\pi}{n} \right) \quad (19) \\ a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} &= 2\alpha^3 \left( \cos \frac{2k\pi}{n} + \cos \frac{2k_1\pi}{n} \right) \\ A &= \alpha^4 \end{aligned}$$

so erhält man eine zyklische Kollineation vom Fall 1 b), bei der zwei windschiefe Gerade fest bleiben.

Hier muß  $n \geq 5$  sein, weil sonst nicht vier verschiedene imaginäre Wurzeln bestehen. Man kann nun zeigen, daß in diesem Falle die Punkte  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , die durch wiederholte Anwendung von  $K_n$  entstehen, auf einem Hyperboloid liegen\*). Betrachtet man die ursprüngliche und Bildpunktreihe auf den beiden Doppelgeraden, so müssen sie imaginäre Doppelpunkte besitzen. Wir bezeichnen dieselben, um von ihnen sprechen zu können, auf der einen Doppelgeraden mit  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$ , auf der anderen mit  $P_1$  und  $P_2$ . Es sind jetzt die beiden Linien  $\Pi_1 P_1, \Pi_2 P_2$  einerseits und  $\Pi_1 P_2$  und  $\Pi_2 P_1$  andererseits zwei konjugiert imaginäre Gerade. Sie bestimmen mit dem Punkte  $a_1$  ein reelles Hyperboloid. Die Erzeugenden der einen Schar sind die reellen Treffgeraden von  $\Pi_1 P_1$  und  $\Pi_2 P_2$ , die außerdem noch die reelle Treffgerade von  $a_1$  zu  $\Pi_1 P_2$  und  $\Pi_2 P_1$  schneiden. Letztere beiden Geraden bestimmen mit dem Punkt  $a_1$  die andere Erzeugendenschar. Die Regelfläche  $H_1$  enthält auch die oben genannten Paare konjugiert imaginärer Geraden. Durch  $K_n$  geht das Hyperboloid in ein zweites  $H_2$  über, das auch die vier imaginären Geraden und  $a_2$  enthält. Liegt  $a_2$  auf  $H_1$ , so liegen alle weiteren Punkte auch auf  $H_1$  und diese Fläche wäre eine bei der Transformation invariante Fläche und könnte mit dem Namen Bahnfläche bezeichnet werden, da alle Punkte, die auf ihr angenommen werden, durch die Kollineation  $K_n$  nicht zum Verlassen der Fläche gebracht werden können. Läge nun  $a_2$  z. B. außerhalb  $H_1$ , so müßte  $H_2$  ganz außerhalb von  $H_1$  liegen, da sich die beiden Flächen in vier imaginären Erzeugenden schneiden müssen. Wir erhielten dann durch Anwendung von  $K_n$   $H_3$ , das durch  $a_3$  bestimmt ist und auch außerhalb  $H_2$  und  $H_1$  liegen müßte, und so weiter schließend fände man, daß  $a_n$  außerhalb  $H_2$  und  $a_1$ , das aus  $a_n$  mittels

\*) Lüroth, Math. Annalen, Bd. 13.

$K_n$  sich ergibt, auch außerhalb  $H_2$  liegen müßte. Das ist aber gegen unsere Voraussetzung, daß  $H_2$  außerhalb von  $H_1$  liege. Auf dieselbe Weise kann man die Annahme,  $a_2$  und damit  $H_2$  liege im Innern von  $H_1$  widerlegen. Es folgt also, daß sich jeder Punkt auf einem Hyperboloid durch die vier imaginären Erzeugenden bewegt. Man erhält so ein Büschel von Hyperboloiden, für das die beiden Doppelgeraden harmonische Polaren sind, und bei dem, da sich alle Flächen in vier imaginären Erzeugenden schneiden, keine zwei der dem Büschel angehörenden Flächen sich schneiden.

2. Wir fanden im Punkt 3, daß der unter 3. besprochene Fall periodisch werden kann. Bei ihm treten für  $q$  eine Doppelwurzel und zwei einfache Wurzeln auf. Sollen diese Größen  $n^{\text{te}}$  Wurzeln aus  $a$  sein, so sind zwei Fälle möglich:

Die Doppelwurzel ist  $+\alpha$  oder  $-\alpha$ . Letzteres kann nur bei geradem  $n$  eintreten. Die beiden anderen Wurzeln sind in beiden Fällen konjugiert imaginär.

Wenn also die Koeffizienten einer Kollineation der Form (1) die Bedingungen

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} &= 2\alpha \left(1 + \cos \frac{2k\pi}{n}\right) \\ A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{23} + A_{24} + A_{34} &= 2\alpha^2 \left(1 + 2\cos \frac{2k\pi}{n}\right) \quad (20) \\ \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \alpha_{44} &= 2\alpha^3 \left(1 + \cos \frac{2k\pi}{n}\right) \\ A &= \alpha^4 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} &= 2\alpha \left(-1 + \cos \frac{2k\pi}{n}\right) \\ A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{23} + A_{24} + A_{34} &= 2\alpha^2 \left(1 - 2\cos \frac{2k\pi}{n}\right) \quad (21) \\ \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \alpha_{44} &= 2\alpha^3 \left(-1 + \cos \frac{2k\pi}{n}\right) \\ A &= \alpha^4 \end{aligned}$$

erfüllen, so erhalten wir eine zyklische Kollineation von der Art, wie sie in Punkt 2 unter 3 a) besprochen wurde. Es bleibt dabei ein Ebenenbüschel und eine dazu perspektiv liegende Punktreihe unverändert. Die Punktzyklen  $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$  liegen auf Ebenen des invarianten Büschels und zwar für  $n > 2$  auf Kegelschnitten, wie von der Ebene her bekannt ist. Man erhält somit als Bahnkurven lauter Kegelschnittsbüschel in den Ebenen des invarianten Ebenenbüschels und hat nur eine oftmalige Wiederholung der allgemein zyklischen Kollineation der Ebene. Man hat

hier wie dort zweierlei Bedingungen für die Periodizität, wobei die einen für beliebiges  $n$ , die anderen bloß für gerades  $n$  gelten. Die  $\infty^2$  Kegelschnittsbüschel setzen sich zu einem Büschel von Flächen zweiter Ordnung zusammen, für den die Achse des invarianten Büschels und die invariante Punktreihe harmonische Polaren sind.

3. Weiter fanden wir, daß der Fall 6 Periodizität zuläßt. Für  $\varrho$  ergaben sich zwei Doppelwurzeln. Es können wieder zwei Fälle eintreten: Die beiden Doppelwurzeln sind entweder  $+\alpha$  und  $-\alpha$  oder zwei konjugiert imaginäre Werte  $\alpha e^{\frac{2k\pi i}{n}}$  und  $\alpha e^{-\frac{2k\pi i}{n}}$ .

Genügen daher die Koeffizienten von (1) den Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} &= 0 \\ A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{23} + A_{24} + A_{34} &= -2\alpha^2 \\ \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \alpha_{44} &= 0 \\ \Delta &= +\alpha^4 \end{aligned} \quad (22)$$

so haben wir es mit einer zyklischen Kollineation vom Fall 6 zu tun, deren Periode  $n=2$  ist.

Man spricht dann von einem geschart involutorischen Raum. Es bleiben bei demselben, wie in Punkt 2 gezeigt wurde, zwei Ebenenbüschel mit den Achsen elementweise invariant. Alle Ebenen des Büschels sind somit Doppelebenen und tragen als solche ebene kollineare Verwandtschaften, die hier Zentralkollineationen sind. Jeder Büschel enthält also  $\infty^1$  ebene Zentralkollineationen. Soll nun der geschart kollineare Raum periodisch sein, so müssen auch die Verwandtschaften in den Doppelebenen periodisch sein. Das sind aber Zentralkollineationen und die können, wie gezeigt wurde, nur die Periode 2 haben. Also folgt, daß der geschart kollineare Raum, wenn überhaupt periodisch, nur involutorisch sein kann. Man kann sich diesen Raum leicht konstruieren. Wenn die Achsen  $u, v$  gegeben sind, so sind alle entsprechenden Punkte des geschart involutorischen Raumes durch dieselben harmonisch getrennt. Man hat daher auf jeder Geraden des Strahlenkomplexes eine Involution, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte der Geraden mit den Achsen  $u, v$  sind.

Sind die beiden Doppelwurzeln konjugiert imaginär, so ergibt sich:

Lassen die Koeffizienten einer Kollineation in der Form (1) die Bedingungen zu:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} &= 4\alpha \cos \frac{2k\pi}{n} \\ A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{23} + A_{24} + A_{34} &= 2\alpha^2 \left( 2 + \cos \frac{4k\pi}{n} \right) \\ \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \alpha_{44} &= 4\alpha^3 \cos \frac{2k\pi}{n} \\ \Delta &= +\alpha^4 \end{aligned} \quad (23)$$



so ist sie vom Typus 6a), hat überhaupt kein reelles Doppelgebilde und hat die Periode  $n$ .  $n$  muß mindestens 3 sein, denn für  $n=2$  gibt es keine imaginären Wurzeln von  $a$ . Die Bahnkurven sind also hier gerade Linien, die einen Strahlenkomplex erster Ordnung und erster Klasse bilden.

4. Endlich kann noch die Zentralkollineation periodisch werden. Aus demselben Grunde wie beim geschart involutorischen Raume ist auch hier die Periode  $n=2$ .  $D=0$  hat eine dreifache und eine einfache Wurzel. Es können wieder zwei Fälle eintreten: Entweder die dreifache Wurzel ist  $+\alpha$ , dann ist die einfache  $-\alpha$ , oder sie ist  $-\alpha$ , und dann ist die einfache  $+\alpha$ . Man hat daher:

Bestehen zwischen den Koeffizienten der Kollineation (1) die Beziehungen:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} &= 2\alpha \\ A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{23} + A_{24} + A_{34} &= 0 \\ \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \alpha_{44} &= -2\alpha^3 \\ \Delta &= -\alpha^4 \end{aligned} \quad (24)$$

oder

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} &= -2\alpha \\ A_{12} + A_{13} + A_{14} + A_{23} + A_{24} + A_{34} &= 0 \\ \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \alpha_{44} &= 2\alpha^3 \\ \Delta &= -\alpha^4 \end{aligned} \quad (25)$$

so hat man eine involutorische Zentralkollineation vor sich.

Zusammenfassung der Ergebnisse:

Zyklisch kollineare Raumverwandtschaften erhält man, wenn die Koeffizienten in der Darstellung (1) die Bedingungen erfüllen:

1. Die Gleichungen (24) oder (25). Es ergeben sich dann involutorische Zentralkollineationen ( $n=2$ ).

2. Die Gleichungen (22). Man bekommt den geschart involutorischen Raum ( $n=2$ ).

3. Die Gleichungen (20) oder (21). Letztere ergeben nur gerade Perioden. Man erhält zyklische Kollineationen ( $n \geq 3$ ) vom Fall 3a). Die Punktzyklen liegen auf Kegelschnitten, die in den Ebenen des invarianten Ebenenbüschels liegen und daselbst Kegelschnittsbüschel bilden. Letztere kann man zu einem Büschel von Flächen zweiter Ordnung zusammensetzen.

4. Die Gleichungen (23). Es ergeben sich zyklische Kollineationen ( $n \geq 3$ ) vom Fall 6a). Die Punktzyklen liegen auf Strahlen eines Strahlenkomplexes erster Ordnung und erster Klasse mit imaginären Leitgeraden.

5. Die Gleichungen (18). Man erhält zyklische Kollineationen ( $n \geq 4$ ) vom Fall 1a) mit gerader Periode. Die Punktzyklen liegen abwechselnd

auf zwei Kegelschnitten, deren Gesamtheit zu zwei Kegelbüscheln zweiter Ordnung zusammengesetzt werden können. Für  $n=4$  erniedrigen sie sich auf zwei Ebenenbüschel.

6. Die Gleichungen (19). Es ergeben sich zyklische Kollineationen ( $n \geq 5$ ) vom Fall 1 *b*). Die Punktzyklen liegen auf Hyperboloiden, die zusammen ein Büschel von Hyperboloiden bilden. Je zwei Flächen des Büschels schneiden sich nicht reell und die beiden Doppelgeraden der Transformation sind für jede Fläche harmonische Polare.