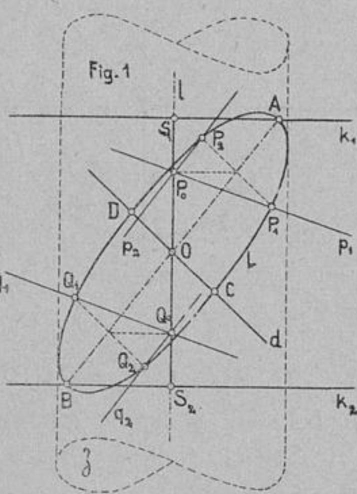
Über ein Konoid vierten Grades.

Von **Ludwig Hochmuth.**

Die Flächennormalen in den Punkten eines ebenen Schnittes einer Fläche zweiten Grades erfüllen eine Regelfläche vierten Grades, die man als Normalenfläche bezeichnet. Bei einem Zylinder sind alle Flächennormalen zu einer Ebene parallel; daher besitzen die Normalenflächen von Zylindern Richtebenen, welche zu den Mantellinien der Zylinderfläche senkrecht sind. Alle Flächennormalen eines Rotationszylinders schneiden seine Achse; diese ist somit eine Leitgerade seiner Normalenflächen. Die Normalenfläche längs eines ebenen Schnittes eines Rotationszylinders besitzt also eine Leitellipse, eine Leitgerade und eine dazu senkrechte Richtebene, ist mithin ein gerades Kegelschnittskonoid vierten Grades.

Die Ellipse L (Fig. 1) sei ein ebener Schnitt des Drehzylinders z; AB und CD sind die Bilder ihrer Achsen; l sei die Achse des Zylinders. Wir wählen auf dieser den Punkt P_0 und legen durch ihn die Richtebene. Diese schneidet die Leitellipse L in zwei Punkten P_1 und P_2, welche mit P_0 verbunden zwei Erzeugende p_1 und p_2 des Konoides liefern, die sich auf der Zylinderachse l schneiden. Diese ist somit eine Doppelgerade und die Ebene durch AB und l eine Symmetrieebene unserer Fläche. Wählen wir auf l den zu P_0 bezüglich O symmetrisch gelegenen Punkt Q_0 und legen wir durch ihn die Richtebene, so erhalten wir die Erzeugenden q_1 und q_2. Wegen der Symmetrie der Leitellipse L in bezug auf ihre



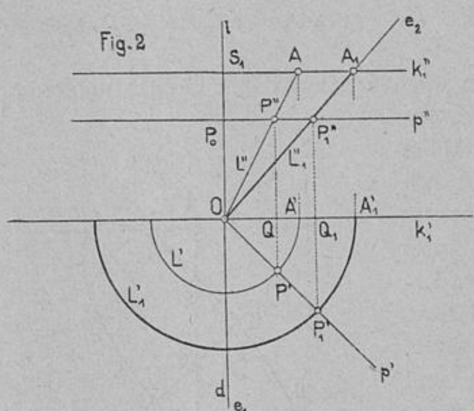
Achse CD ist die Erzeugende q_1 parallel zu p_1, und q_2 parallel zu p_2. Aus diesem Grunde ist die durch den Mittelpunkt O gelegte Richtebene eine zweite Symmetrieebene des Konoides. Je zwei zueinander parallele

Erzeugende schneiden sich auf der unendlich fernen Geraden der Richtebene; diese ist somit eine zweite Doppelgerade unserer Fläche.

Bewegt sich der Punkt P_0 auf der Doppelgeraden l nach aufwärts, so rücken die Punkte P_1 und P_2 immer näher an A heran und fallen schließlich mit A zusammen. In dieser Lage enthält die Richtebene nur eine Erzeugende k_1 und berührt die Fläche längs derselben. Dasselbe gilt für den Scheitel B der Leitellipse. Die durch A und B gehenden Erzeugenden k_1 und k_2 sind Torsallinien oder Kanten, ihre Schnittpunkte S_1 und S_2 mit l sind Kuspidalpunkte oder Spitzen des Konoides. Die auf der unendlich fernen Doppelgeraden liegenden Kuspidalpunkte sind imaginär. Bewegt sich der Punkt P_0 gegen den Punkt O hin, so nähert sich P_1 dem Punkte C, P_2 dem Punkte D. Rückt P_0 in den Punkt O, so fallen die beiden zugehörigen Erzeugenden mit der Nebenachse CD der Ellipse L zusammen. Diese ist also eine Doppelerzeugende d, in welcher die Fläche sich selbst durchschneidet. Die Ebene durch l und d ist eine dritte Symmetrieebene des Konoides.

Ebenen durch die Doppelerzeugende.

Zur Darstellung des Konoides sollen seine beiden erstgenannten Symmetrieebenen als Grund-, beziehungsweise Aufrißebene dienen. In der Fig. 2 ist nur der vor der Aufrißebene gelegene Teil der Fläche gezeichnet. L' und L'' sind die Risse der Leitellipse, p' und p'' die Bilder einer beliebigen Erzeugenden p. Wir legen durch die Doppelerzeugende d eine Ebene, deren Spuren $e_1 = d$ und e_2 sind und untersuchen die Schnittkurve dieser Ebene mit dem Konoide.



Ist P_1 der auf der Erzeugenden p liegende Punkt dieser Schnittkurve, so gelten folgende Beziehungen:

$$OP' : OP_1' = OQ : OQ_1 = P_0 P'' : P_0 P_1'' = S_1 A : S_1 A_1;$$

da $OP' = S_1 A$ ist, so gilt für jede Lage der Erzeugenden

$$OP_1' = S_1 A_1;$$

da die Strecke $S_1 A_1$ nur von der Neigung der schneidenden Ebene abhängig ist, so haben alle Punkte der Schnittkurve im Grundriß den gleichen Abstand $S_1 A_1$ vom Punkte O; d. h. der Ort der Punkte P_1' ist der um O mit dem Halbmesser OA_1' beschriebene Kreis.

Jede Ebene durch die Doppelerzeugende schneidet das Konoid nach einer Ellipse, die sich auf die Richtebene als Kreis projiziert.

Zu diesem Ergebnisse kommen wir auch durch folgende Betrachtung: Unser Konoid ist eine Fläche vierten Grades und wird von einer Ebene im allgemeinen nach einer Kurve vierter Ordnung geschnitten. Eine Ebene durch die Doppelerzeugende enthält daher außer dieser im allgemeinen noch eine Kurve zweiter Ordnung, welche eine Ellipse sein muß, da jede solche Ebene alle Erzeugenden des Konoides schneidet.

Die unendlich ferne Ebene enthält außer der zweiten Doppelgeraden noch zwei imaginäre Erzeugende, welche die absoluten Kreispunkte der Richtebene mit dem unendlich fernen Punkte der Doppelgeraden l verbinden. Somit geht der Grundriß jeder ebenen Schnittkurve durch die absoluten Kreispunkte der Grundebene. Ist daher die Schnittkurve ein Kegelschnitt, so muß ihre Projektion auf die Richtebene ein Kreis sein.

Auf dem Konoide liegt also ein System konzentrischer Ellipsen, deren Ebenen durch die Doppelerzeugende gehen und von welchen jede als Leitellipse dienen kann.

Konstruktion der Tangentialebene und ihrer Schnittlinie mit dem Konoide.

Jede Ebene durch eine Erzeugende einer Regelfläche berührt diese in einem Punkte der Erzeugenden. Insbesondere sind die beiden Tangentialebenen in einem Punkte der Doppelgeraden durch diese und die beiden durch den Punkt gehenden Erzeugenden bestimmt; somit berühren die Richtebenen die Fläche im Unendlichen.

Sei p' der Grundriß einer Erzeugenden p (Fig. 3), P ein Punkt auf ihr, in welchem die Tangentialebene zu konstruieren ist. Die erste Spur t_1 derselben ist parallel zu p'. Die Ebene durch den Punkt P und die Doppelerzeugende d schneidet das Konoid nach einer Ellipse, deren Grundriß der durch P' gezogene Kreis L' ist. Die Tangente t derselben ist die Schnittlinie der Ellipsenebene mit der gesuchten Tangentialebene des Punktes P; daher ist ihr erster Spurpunkt $T_1 = [d, t']$ ein Punkt der ersten Spur t_1.

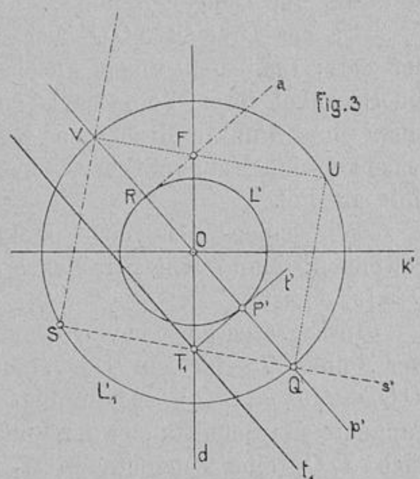


Fig. 3

Ist umgekehrt die erste Spur t_1 einer Tangentialebene gegeben, so findet man ihren Berührungspunkt, indem man die zu t_1 parallele

Erzeugende p zieht und vom Punkte $T_1 = [d, t_1]$ auf diese das Lot fällt. Der Fußpunkt desselben ist der gesuchte Berührungspunkt.

Die Tangentialebene hat außer der in ihr liegenden Erzeugenden p mit dem Konoide noch eine Kurve dritter Ordnung gemein. Um diese zu erhalten, bringen wir die Tangentialebene mit dem Büschel der Ebenen durch die Doppelerzeugende zum Schnitt. Ist s eine dieser Schnittgeraden, so ist ihr Schnittpunkt Q mit der Erzeugenden p ein Punkt der in der zugehörigen Kegelschnittsebene liegenden Ellipse, deren Grundriß der durch Q gehende Kreis L_1' ist. Diese Ellipse schneidet die Schnittlinie s noch in einem zweiten Punkte S, welcher der Schnittkurve der Tangentialebene mit dem Konoide angehört. Es handelt sich um den Ort der Punkte S, wenn s sich um T_1 dreht.

Wir zeichnen das dem Kreise L'_1, eingeschriebene Rechteck $Q\,S\,U\,V$. Dreht sich s' um T_1, so wandert Q auf p' und $U\,V$ dreht sich um den zu T_1 bezüglich O symmetrisch gelegenen Punkt F. Die Geraden $S\,V$ umhüllen mithin eine Parabel, für welche F der Brennpunkt und p' die Scheiteltangente ist. Wegen $O\,F = O\,T_1$ ist t_1 die Leitlinie dieser Parabel. Der Punkt S ist also der Fußpunkt des Lotes aus dem festen Punkte T_1 auf die Tangente SV der Parabel und der Ort der Punkte S ist die Fußpunktkurve einer Parabel für einen Punkt T_1 ihrer Leitlinie als Pol. Wir gelangen also zu folgendem Ergebnisse: Die Schnittkurve einer Tangentialebene mit dem Konoide projiziert sich auf die Richtebene als Fußpunktkurve einer Parabel für einen Punkt ihrer Leitlinie als Pol. Die zugehörige Erzeugende ist die Scheiteltangente, die erste Spur der Tangentialebene ist die Leitlinie dieser Parabel. Ihr Brennpunkt liegt stets auf der Doppelgeraden d.

Da das Dreieck $S\,Q\,O$ gleichschenklig ist, so ergibt sich beiläufig der Satz: Bleiben in einem gleichschenkligen Dreiecke der Scheitel und ein Schenkel ihrer Lage nach fest, während sich die Grundlinie um einen ihrer Punkte dreht, so beschreibt der Endpunkt des zweiten Schenkels die Fußpunktkurve einer Parabel für einen Punkt der Leitlinie als Pol.

Wir haben so folgende punktweise Konstruktion der Schnittkurve gewonnen: Man ziehe Strahlen s' durch T_1 und mache $O\,Q = O\,S$, wo $Q = [s', p']$ ist.

In Fig. 4 ist der Grundriß der vollständigen Schnittkurve gezeichnet. Der Punkt T_1 ist ein Doppelpunkt derselben. Rückt Q nach Q_1 $(O\,Q_1 = O\,T_1 = O\,Q_2)$, so vereinigt sich S mit T_1; daher ist $T_1\,Q_1$ eine Tangente der Schnittkurve im Punkte T_1. Aus dem gleichen Grunde ist auch $T_1\,Q_2$ eine Tangente in T_1 und man erkennt, daß die beiden Doppelpunktstangenten zueinander senkrecht sind.

Die zu p parallele Erzeugende des Konoides liefert einen unendlich fernen Punkt der Schnittkurve; daher ist die Schnittgerade der zugehörigen Richtebene mit der Tangentialebene eine Asymptote a derselben. Die Tangente im Punkte S wurde als Schnitt der Tangentialebene t mit der Tangentialebene des Konoides im Punkte S gewonnen. ($S' U \perp S' O$, $U V \perp S' U$, V auf t_1.)

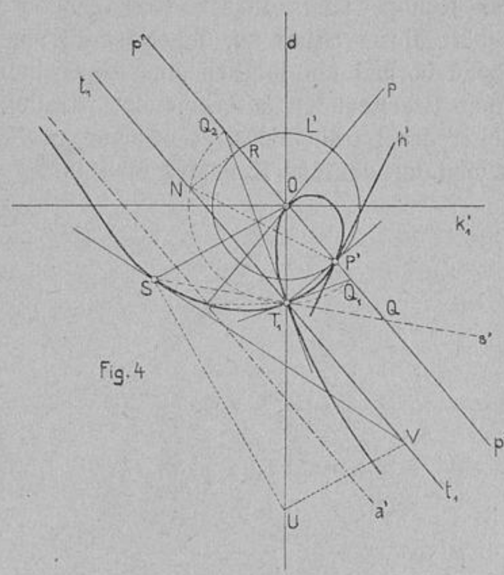


Fig. 4

Die Tangente in O ist die zu p' symmetrisch gelegene Erzeugende $\overline{p}$, welche die Asymptote a in einem Punkte schneidet, der nach der oben angegebenen punktweisen Konstruktion ein Punkt der Schnittkurve ist.

Konstruktion der Haupttangente.

Die Tangente im Berührungspunkte P der Tangentialebene an die Schnittkurve mit dem Konoide ist eine Haupttangente der Fläche. Sie kann nach der in Fig. 5 angedeuteten Tangentenkonstruktion für Fußpunktkurven leicht gezeichnet werden. In Fig. 5 bedeutet K_0 die gegebene Kurve, K ihre Fußpunktkurve für den Pol O. Kommt t_0 in eine unendlich benachbarte Lage, so verschiebt sich der zugehörige Punkt P der Fußpunktkurve unendlich wenig auf dem Kreise über $O P_0$ als Durchmesser. Die Tangente dieses Kreises ist also zugleich Tangente der Fußpunktkurve im Punkte P und somit die Diagonale $P N$ des Rechteckes $P_0 N O P$ die Normale derselben. In unserem Falle (Fig. 4) ist p' eine Tangente der Parabel und R ihr Berührungspunkt. Die Haupttangente ist also im Grundriß senkrecht zur Diagonale $N P'$ des Rechteckes $P' T_1 N R$, von welchem der Eckpunkt T_1 stets auf d liegt. Damit haben wir eine einfache Konstruktion der Haupttangente gewonnen. Sei P' der gegebene Punkt, so zeichne man das Rechteck $P' T_1 N R$, wo T_1 auf d liegt; die Haupttangente ist zur Diagonale $N P'$ dieses Rechteckes senkrecht. Wandert P' auf p', so verschiebt sich $N P'$ parallel zu sich selbst, da das Seitenverhältnis des Rechteckes ungeändert bleibt. Die Haupttangenten in den Punkten einer Erzeugenden sind im Grundriß untereinander parallel.

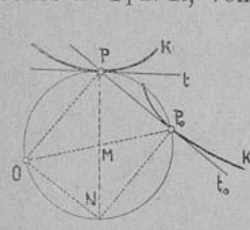
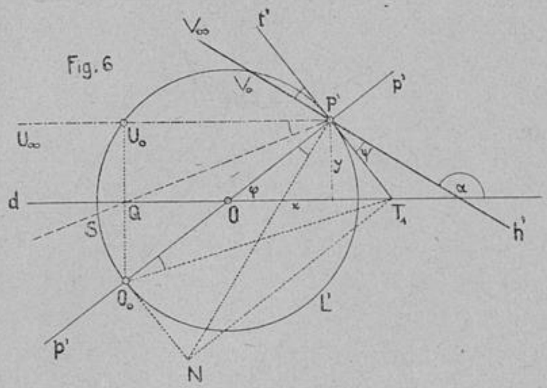


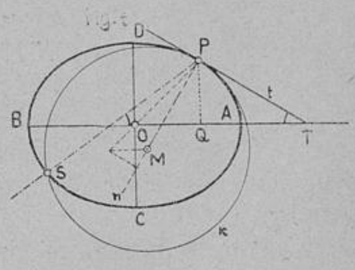
Fig. 5.

Zu demselben Ergebnisse gelangt man auch durch folgende Betrachtung: Die Haupttangenten in den Punkten einer Erzeugenden bilden eine Schar eines orthogonalen hyperbolischen Paraboloides, welches das Konoid längs dieser Erzeugenden oskuliert. Die Doppelgerade l gehört dieser Schar an, daher ist die zugehörige Richtebene zur Grundebene normal und folglich sind die Grundrisse der Haupttangenten längs einer Erzeugenden untereinander parallel. Die Richtebene der zweiten Schar des Paraboloides, zu welcher die Erzeugende des Konoides gehört, stimmt mit der des Konoides überein.



Sei (Fig. 6) P ein Punkt der Erzeugenden p. Wir denken uns das längs p oskulierende Paraboloid mit der durch P gehenden Kegelschnittsebene zum Schnitt gebracht. Dieser Schnitt ist eine Hyperbel h deren Grundriß von dem Kreise L' im Punkte P' oskuliert wird. Die Asymptotenrichtungen dieser Hyperbel sind parallel zu den Schnittgeraden ihrer Ebene mit den beiden Richtebenen des Paraboloides. Somit verläuft die eine Asymptote wagrecht, während die zweite zu der gesuchten Haupttangente parallel ist. Der Grundriß der ersten Asymptotenrichtung ist parallel zu d und es handelt sich nun darum, den Grundriß der zweiten Asymptotenrichtung zu finden. Dies erreichen wir durch folgende Überlegung.

Der Grundriß der Hyperbel und ihr Oskulationskreis im Punkte P' sind kollinear verwandt. P' ist ein Zentrum dieser Kollineation. Da die Doppelgerade l eine Erzeugende des Paraboloides ist, so muß O ein Punkt des Grundrisses der Hyperbel sein; mithin sind O und O_0 einander entsprechende Punkte. Ebenso bilden der unendlich ferne Punkt U_∞ der Hyperbel und der Punkt U_0 des Kreises ein paar einander kollinear entsprechender Punkte. Da $O\,U_\infty$ und $O_0\,U_0$ sich auf der Kollineationsachse schneiden müssen, so ist diese durch die Verbindungsgerade $P'Q$ gegeben. Ihr Schnittpunkt S mit dem Kreise L' gehört auch der Hyperbel an; somit ist $P'S$ die sogenannte Krümmungssehne, d. h. die Schnittsehne der Hyperbel mit ihrem Oskulationskreise. Da bei der Oskulation eines Kreises mit einem Kegelschnitte (Fig. 7) die Tan-



gente des Oskulationspunktes P und die zugehörige Krümmungssehne PS antiparallel (gleichgeneigt) gegen die Achsen des Kegelschnittes sind, so ist nunmehr die Achsenrichtung der Hyperbel h' bekannt; sie hälftet den Winkel der Tangente t' gegen die Kollineationsachse. Da auch die Asymptoten mit den Achsen der Hyperbel gleiche Winkel einschließen, so bildet die gesuchte zweite Asymptotenrichtung gegen die Tangente t' denselben Winkel wie die Asymptotenrichtung $P' U_\infty$ gegen die Kollineationsachse $P' S$. Macht man daher $arc\, P' V_0 = arc\, S U_0$, so ist V_0 ein Punkt der gesuchten Haupttangente h'.

Aus diesem Ergebnis läßt sich auch die erste Konstruktion der Haupttangente ableiten: Wir verbinden den Schnittpunkt T_1 von t' und d mit dem Punkte O_0 und wollen zeigen, daß h' zu der Diagonale des Rechteckes $P' T_1 N O_0$ senkrecht ist. Zu diesem Zwecke haben wir nur zu beweisen, daß

$$\sphericalangle (h', t') = \sphericalangle (p', T_1 O_0)$$

ist.

Sind x und y die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P', so folgt aus der Figur:

$$y : x = P' T_1 : P' O$$

also

$$y : 2x = P' T_1 : 2 P' O$$

oder

$$U_0 Q : U_0 P' = P' T_1 : P' O_0 ;$$

daher ist

$$\Delta U_0 Q P' \sim \Delta P' T_1 O_0$$

und somit auch

$$\sphericalangle (h', t') = \sphericalangle (T_1 O_0, p') = \sphericalangle (P' N, p'),$$

wodurch die Richtigkeit der ersten Haupttangentenkonstruktion bewiesen ist.

Haupttangentenkurven.

Ein dem Punkte P unendlich benachbarter Punkt P_1 der Haupttangente h einer Regelfläche gehört noch dieser an und besitzt eine im allgemeinen von der Haupttangente h verschiedene Haupttangente h_1. Wir gehen nun auf h_1 in den zu P_1 unendlich benachbarten Punkt P_2 und zeichnen wiederum seine Haupttangente. Auf diese Art von einer Haupttangente in die unendlich benachbarte übergehend, kann man auf der Fläche Kurven beschreiben, die man als Haupttangentenkurven bezeichnet. Durch jeden Punkt der Fläche geht eine Haupttangentenkurve, ihre Gesamtheit bildet eine Kurvenschar, welche die Fläche überdeckt.

Wir wollen nur den Grundriß dieser Kurvenschar untersuchen. Es handelt sich also darum, die Differentialgleichung jener Kurvenschar aufzustellen und zu integrieren, deren Tangenten in der angegebenen

Art konstruiert werden. (Fig. 6.) O sei der Ursprung, d die X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Da die Haupttangenten längs einer Erzeugenden im Grundriß untereinander parallel sind, so ist der Anfangspunkt O ein Ähnlichkeitszentrum der Schar, mithin muß die gesuchte Differentialgleichung homogen sein.

Aus Fig. 6 folgt:

$$\alpha = \varphi + (90 + \psi)$$

also:

$$tg\,\alpha = \frac{tg\,\varphi + tg\,(90+\psi)}{1 - tg\,\varphi\, tg\,(90+\psi)} = \frac{tg\,\varphi - cotg\,\psi}{1 + tg\,\varphi\, cotg\,\psi}.$$

Nun ist:

$$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx},\ tg\,\varphi = \frac{y}{x},\ tg\,\psi = \frac{y}{2x}.\ (\varDelta\, P'\, Q\, U_0)$$

daher:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \frac{2x}{y}}{1 + \frac{y}{x}\cdot\frac{2x}{y}} = \frac{y}{3x} - \frac{2x}{3y}.$$

Die Differentialgleichung der Grundrisse der Haupttangentenkurven lautet also:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{3x} + \frac{2x}{3y} = 0,$$

ist also homogen.

Wir setzen

$$y = xt,$$

also

$$dy = x\,dt + t\,dx$$

und erhalten:

$$x\,dt + t\,dx - \left(\frac{t}{3} - \frac{2}{3t}\right)dx = 0$$

$$x\,dt + \frac{2}{3}\left(t + \frac{1}{t}\right)dx = 0$$

$$x\,dt + \frac{2}{3}\cdot\frac{t^2+1}{t}\,dx = 0$$

$$\frac{t\,dt}{t^2+1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{1}{2}\,l\,(t^2+1) + \frac{2}{3}\,l\,x) = l(c)$$

oder

$$(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{2}{3}} = c$$

$$\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)^{\frac{1}{2}} . x^{\frac{2}{3}} = c$$

$$\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)^{3} . x^{4} = c^{6}$$

$$\frac{(x^2+y^2)^3}{x^2} = c^{6} = k.$$

Die Gleichung der Kurvenschar lautet somit:

$$(x^2+y^2)^3 - k\,x^2 = 0.$$

Diese Kurven sind von der sechsten Ordnung und gehen durch die absoluten Kreispunkte. Sie sind symmetrisch in bezug auf die Koordinatenachsen, besitzen im Ursprung einen Doppelpunkt, dessen beide Tangenten mit der Y-Achse zusammenfallen.

Zur Gewinnung einer einfachen Konstruktion führen wir Polarkoordinaten ein; alsdann ergibt sich:

$$r^6 = k\,r^2 . \cos^2\varphi$$

oder

$$r^4 = k \cos^2\varphi.$$

Für jeden Wert des φ ergeben sich also abgesehen von dem Doppelpunkte O noch vier Werte des r, von denen jedoch nur zwei reell sind und der Gleichung

$$r^2 = \sqrt{k}\cos\varphi$$

genügen. Setzt man noch

$$\sqrt{k} = K,$$

so erhält man die Gleichung der Kurvenschar in der einfachen Form

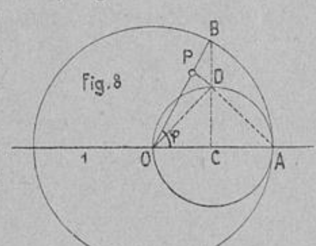
$$r^2 = K\cos\varphi,$$

worin K eine beliebig anzunehmende Konstante bedeutet.

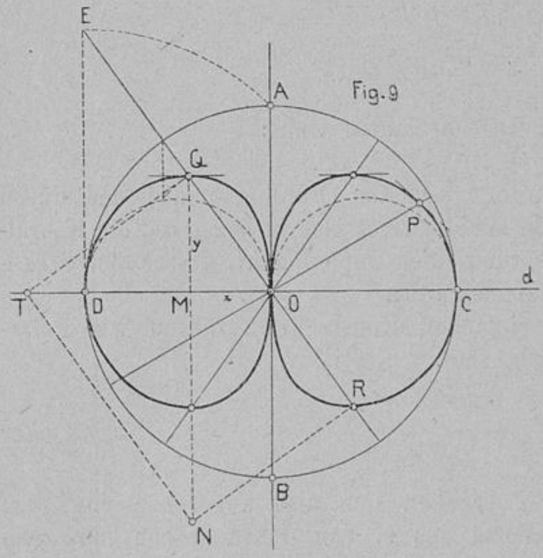
Für die Konstruktion einer solchen Kurve darf man $K=1$ annehmen, da man die Einheitsstrecke beliebig groß wählen kann. Es handelt sich also darum, die Kurve zu zeichnen, deren Gleichung

$$r^2 = \cos\varphi$$

lautet. Wir fassen r als Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes auf, dessen Hypotenuse die Länge 1 hat und in welchem der der Kathete r anliegenden Hypotenusenabschnitt der Strecke $\cos\varphi$ gleichkommt. Um die Strecke r zu finden, beschreiben wir mit der Einheitsstrecke als Radius einen Kreis um O (Fig. 8) und zeichnen über OA als Durchmesser einen zweiten halb so großen Kreis. Zieht man nun einen beliebigen Halbmesser OB und fällt von B das Lot BC auf OA, so ist $\cos\varphi = OC$ und somit OD, wo D auf dem kleinen Kreise gelegen ist, die



gesuchte Kathete r, welche auf OB übertragen einen Punkt P der gesuchten Kurve liefert.



In der Figur 9 ist nach dem eben entwickelten Verfahren eine Haupttangentenkurve vollständig gezeichnet. Sie besteht aus zwei Ovalen, die einander im Anfangspunkte O berühren. Auf dem Konoide berühren die Haupttangentenkurven die beiden Torsallinien in den zugehörigen Kuspidalpunkten und bestehen aus einem geschlossenen Linienzuge, der keine Doppelpunkte besitzt. Je zwei bezüglich der der Grundebene symmetrisch gelegene Haupttangentenkurven haben denselben Grundriß.

Für den Punkt Q, dessen Tangente zu d parallel ist, muß nach der Konstruktion der Haupttangente die zugehörige Rechtecksdiagonale QN zu d senkrecht sein. Dies ist der Fall, wenn folgende Beziehungen bestehen:

Wegen

$$\Delta OQM \sim \Delta QRN$$

verhalten sich:

$$\frac{y}{x} = \frac{QR}{RN} = \frac{2\,OQ}{QT}.$$

Aus dem Dreiecke OQT folgt:

$$x : y = OQ : QT$$

$$OQ = \frac{x}{y} . QT;$$

setzt man diesen Wert in die erste Gleichung ein, so folgt:

$$\frac{y}{x} = \frac{2x}{y}$$

oder

$$\frac{y^2}{x^2} = 2.$$

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{2}$$

Der Punkt Q liegt also auf jenem Radius, dessen Winkel gegen die X-Achse durch die Beziehung

$$tg\,\varphi = \pm\sqrt{2}$$

gegeben ist. Die Konstruktion dieses Winkels ist aus der Fig. 9 ersichtlich. Dasselbe Resultat ergibt sich aus der Gleichung der Kurve:

$$\frac{(x^2+y^2)^3}{x^2} - 1 = 0.$$

Für ihren höchsten Punkt muß $y' = 0$ also

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(x^2+y^2)^3}{x^2} - 1\right) = 0$$

sein.

Dies liefert die Bedingung:

$$3\,x^2 - (x^2+y^2) = 0$$

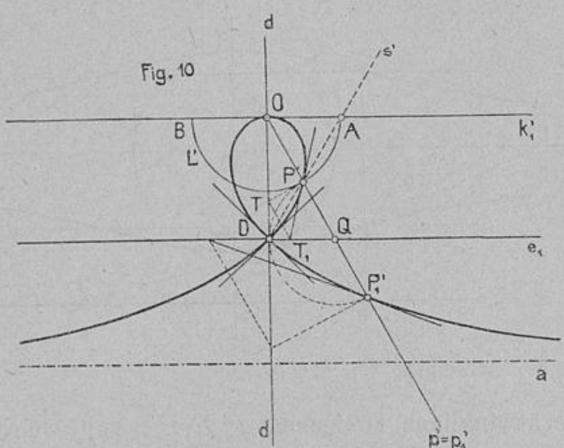
woraus

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{2}$$

folgt.

Ebene durch eine Torsallinie.

Wir untersuchen nur den Grundriß. (Fig. 10) e_1 sei die erste Spur einer Ebene durch die Torsallinie k_1. Da diese Ebene eine Tangentialebene des Konoides im zugehörigen Kuspidalpunkte S_1 ist, so muß der Grundriß der in ihr liegenden Schnittkurve die Fußpunktkurve einer Parabel sein. O ist der Scheitel, d die Achse dieser Parabel; somit ergibt sich in diesem Falle als Fußpunktkurve eine Strophoide. Die Schnittgerade der Ebene E mit der unteren Torsalebene liefert die Asymptote derselben.



Die Strophoide läßt sich auch direkt nachweisen. Wir bringen die Ebene E mit allen Kegelschnittsebenen des Konoides zum Schnitt; sei s' der Grundriß einer solchen Schnittgeraden, L' der Grundriß der zugehörigen Ellipse, so ist $P' = [s', L']$ ein Punkt der gesuchten Schnittkurve. Die zur Erzeugenden p bezüglich der Grundebene symmetrisch gelegene Erzeugende p_1 trifft die Ebene E in einem Punkte P_1 so, daß $P'Q = QP_1'$ ist.

Da nun

$$\varDelta\, O\,F'A \sim \varDelta\, Q\,P'D$$

und

$$OA = OP$$

ist, so ist auch

$$QP' = QD = QP_1'$$

womit eine bekannte Konstruktion der Strophoide nachgewiesen ist.

Die Konstruktion der Tangente als Schnitt der Ebene E mit der zugehörigen Tangentialebene liefert ein einfaches Verfahren für das Zeichnen der Strophoidentangente. ($P'T \perp p'$, T auf d, $TT_1 \parallel p'$, T_1 auf e_1.)

Ebene senkrecht zu den Torsallinien.

Wir legen (Fig. 11) die Doppelerzeugende d in die Rißachse und wählen als Leitlinie des Konoides die in der Koinzidenzebene liegende Ellipse, deren Grund- und Aufriß durch den Kreis L_0 gegeben ist. Grund- und Aufriß einer Erzeugenden p müssen sich in einem Punkte P_0 auf L_0 schneiden. P' und P'' sind die Risse des Schnittpunktes P der Erzeugenden p mit der schneidenden Ebene E. Wir wollen den Ort der Punkte P'' untersuchen. Dreht sich p' um O, so bleibt P'' stets Scheitel des

Fig. 11

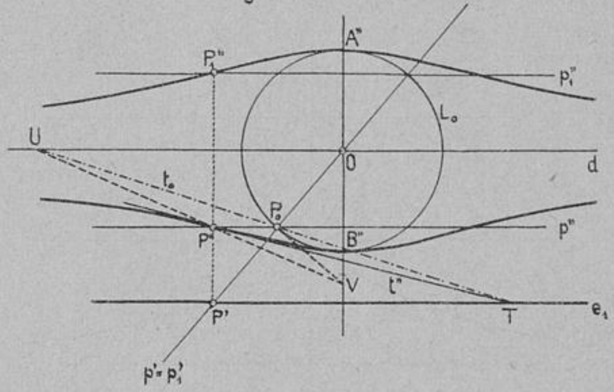
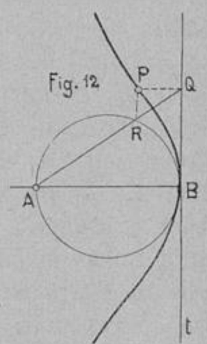


Fig. 12



rechtwinkligen Dreieckes $P'P_0P''$, von welchem P' auf e_1, P_0 auf L_0 wandert und P_0P'' immer parallel zu e_1 bleibt. Der Punkt P'' beschreibt eine Kurve, deren Entstehungsweise ähnlich der aus der Fig. 12 ersichtlichen Erzeugungsart der Versiera der Agnesi ist. Die Schnittkurve besitzt zwei Symmetrieachsen und besteht aus zwei Ästen, die sich im unendlich fernen Punkte ihrer Asymptote d berühren.

Die Tangente t'' im Punkte P'' wurde als Schnittlinie der schneidenden Ebene E mit der Tangentialebene des Punktes P konstruiert.

Diese enthält die Tangente der durch P gehenden Ellipse. Der Aufriß dieser Ellipse ist affin zu L_0; $A'' B''$ ist die Affinitätsachse, p'' der Affinitätsstrahl; somit ist $P'' V$ die gesuchte Ellipsentangente. Ihr erster Spurpunkt U liefert mit P_0 verbunden die Spur t_0 der gesuchten Tangentialebene in der Koinzidenzebene. t_0 trifft die Ebene E in einem Punkte T (dessen Grund- und Aufriß zusammenfallen) und es ist $T P''$ die gesuchte Tangente.

Parallelbeleuchtung.

Wir betrachten nur den von der Doppelerzeugenden und der oberen Torsallinie begrenzten Teil des Konoides und nehmen (Fig. 13) die Lichtrichtung senkrecht zur Doppelerzeugenden an. Wir wählen als Leit-

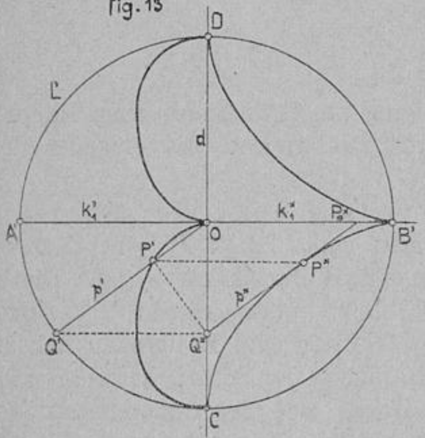


Fig. 13

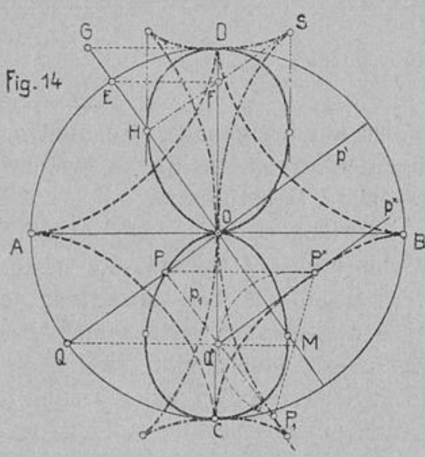


Fig. 14

ellipse jene, deren Ebene zur Lichtrichtung parallel ist. Alsdann ist der Schatten p^* der Erzeugenden p auf die Grundebene leicht anzugeben, da der Schatten der Leitellipse mit der Doppelerzeugenden zusammenfällt. Da p^* die erste Spur der durch p gelegten Lichtebene ist, so ist P' ($P' Q^* \perp p'$) ein Punkt der Selbstschattengrenze und sein Schatten P^* ein Punkt der Schlagschattenkurve. Nun ist stets $Q^* P_0^* \# O Q'$, wenn p die Fläche durchläuft. Somit ist die Schlagschattenkurve die Einhüllende aller Lagen einer Strecke von konstanter Länge, welche sich so bewegt, daß ihre Endpunkte auf zwei zueinander senkrechten Geraden gleiten. Die Schatten aller Erzeugenden umhüllen also eine Astroide, deren Spitzen auf dem Kreise L' liegen und welche $k_1{}^*$ und d berührt. (In der Fig. 13 kommt nur eine Hälfte derselben zur Geltung.)

Die Geraden $Q^* P'$ umhüllen eine Kurve, die dadurch entsteht, daß alle Tangenten einer Astroide an einer ihrer Spitzentangenten orthogonal reflektiert werden. Diese Kurve ist in Fig. 14 vollständig gezeichnet. Da der Berührungspunkt einer Tangente der Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Lagen derselben ist, so erhält man auf der reflektierten Tangente p_1 den Berührungspunkt, indem man einen Halbkreis zeichnet, welcher durch P^* geht und CD im Punkte Q^* berührt Dieser Halbkreis schneidet die reflektierte Tangente in ihrem Berührungspunkte P_1. Ist M sein Mittelpunkt, so ist wegen $P^*M = MP_1$, auch $Q^*P = Q^*P_1$ und damit haben wir eine einfache Konstruktion dieser Kurve und der Selbstschattengrenze gewonnen.

Zur Konstruktion der Selbstschattengrenze projiziere man den beliebigen Punkt Q des Kreises L' auf den festen Durchmesser CD und fälle von dem so erhaltenen Punkte das Lot Q^*P auf den zugehörigen Radius OQ. Nehmen wir den Halbmesser des Kreises L' als Einheit an und wählen wir den Durchmesser CD als X-Achse, so lautet die Gleichung des Grundrisses der Selbstschattengrenze

$$r = cos^2 \varphi$$

oder

$$(x^2 + y^2)^3 = x^4,$$

ist also ähnlich gebaut, wie die Gleichung des Grundrisses einer Haupttangentenkurve. Die Kurve besteht aus zwei Ovalen, die einander im Ursprunge O berühren.

Verlängert man das Lot Q^*P' um sich selbst über den festen Durchmesser CD hinaus, so erhält man einen Punkt P_1 jener Kurve, von welcher die Selbstschattengrenze eine Fußpunktkurve ist. Diese Kurve besitzt vier Spitzen und einen Selbstberührungspunkt in O. Die Spitzen sind jene Punkte, welche von CD die größte Entfernung haben. Die zugehörigen Tangenten tragen jene Punkte der Selbstschattengrenze, deren Tangente parallel zu CD ist. Durch eine der früheren analoge Rechnung findet man, daß für diese Punkte die Beziehung

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

gelten muß. Macht man also $DG = \frac{1}{2} AD$, so trägt OG jenen Punkt H der Selbstschattengrenze, welcher auf der gesuchten Spitzentangente liegt.

Ähnliche Kurven ergeben sich, wenn der Lichtstrahl senkrecht zu den Torsallinien ist.