

## Die Kristallographie an der Realschule.

Von

Professor Josef Gerstner.

**Über die methodische Behandlung der Kristallographie.** Den großartigen Aufschwung, welchen die Naturwissenschaften in den letzten Jahrhunderten genommen haben, verdanken sie vor allem der Induktion. Soll einem Lernenden das Wissen eines anderen beigebracht werden, so ist es wieder die induktive Methode, die leicht und überzeugend zum Ziele führt. Zunächst vermittelt dieselbe die Kenntnis des Einzelobjektes oder der einzelnen Erscheinung gegründet auf die Anschauung und schreitet allmählich vom Besonderen zum Allgemeinen vor. Durch Würdigung dieses Weges hat namentlich in den naturwissenschaftlichen Fächern die Unterrichtsform eine erfreuliche Vervollkommnung erfahren. Mehr als ein anderer Unterrichtszweig eignet sich die Kristallographie für die induktive Methode, da sie sich mit der Ableitung der Formen aus einer Grundform (Oktaeder, Grundpyramide) aufs innigste verknüpfen läßt. Gerade aber in der Kristallographie hat sich auch eine andere Methode Eingang verschafft. An die Stelle der Ableitung der Formen aus einander tritt die Bildung derselben auf Grund der Symmetrieverhältnisse.\*) Jedes Kristallsystem wird durch eine bestimmte Anzahl von Symmetrieebenen gekennzeichnet. Aus denselben wird ein Schema hergestellt, in welches — man möchte sagen „mechanisch“ — alle Arten von Flächen eingesetzt werden, die möglich sind und dabei dem gegebenen Symmetriegrade Genüge leisten. Aus den Flächen bauen sich die möglichen Formen auf. In solcher Art wird eine Vereinfachung des Lehrganges und eine leichtere Übersicht des Stoffes angestrebt. In der Tat bietet diese Methode große Vorteile. Trotzdem sollte sie der Mittelschule fern gehalten werden. Sie geht nicht den erprobten induktiven Weg, insofern sie nicht zunächst die Kenntnis der Einzelformen anstrebt und hierauf das denselben Gemeinsame zusammenfaßt, sondern im Gegenteil erst das System charakterisiert und nun aus dieser Charakteristik die

\*) Siehe Gust. Tschermak, „Lehrbuch der Mineralogie“, wo diese Methode in mustergiltiger Weise durchgeführt erscheint.

Formen ableitet. Dadurch verlieren die Einzelformen für den Schüler an Bedeutung, er sieht den Wald, sieht aber die Bäume nicht. Will man ein Kristallsystem aufbauen, so wird es für die Mittelschule denn doch immer am besten sein: man schafft erst die Bausteine aus der gründlichen Kenntnis der Einzelformen. — Diese Methode setzt ferner gewisse Vorkenntnisse voraus, die sich auf die Achsen, Parameter, Flächentypen u. a. beziehen. Diese Kenntnisse müssen von noch unbekanntem, namenlosen Formen abgeleitet werden, was besonders bezüglich der Achsen erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Man hat es da nämlich mit gedachten Linien zu tun, die erst durch eine bestimmte Form die Eigenart erhalten und losgelöst von denselben sich schwer denken lassen. Man rühmt der Methode der Symmetrieebenen Einfachheit und Leichtfaßlichkeit nach. Diese vorzüglichen Eigenschaften bestehen tatsächlich, aber leider nur für jenen, der kristallographische Vorkenntnisse hat, insbesondere die Einzelformen schon kennt. Wir haben es aber an der Mittelschule mit Anfängern zu tun, die erst in die Kristallographie eingeführt werden sollen. Für solche ist es auch nicht leicht, sich in einem aus 5, 7, ja selbst 9 Symmetrieebenen errichteten Schema zurechtzufinden. Übrigens ist die Methode der Symmetrieebenen keineswegs einwandfrei. Wenn jemand die geometrischen Raumgrößen nach dem Grade ihrer Symmetrie in symmetrisch ein-, zwei-, drei- u. s. w. achsige einteilt, so läßt sich nichts dagegen sagen. Wenn derselbe aber soweit ginge, die Symmetrielinien und Symmetrieebenen gewissermaßen als das Ursprüngliche, als das Gegebene zu betrachten und daraus die Raumgrößen geradezu abzuleiten, so würde er Widerspruch herausfordern. Er nimmt z. B. zwei auf einander normale Symmetrielinien an, um einen Rhombus zu erhalten; das gelingt ohne weiteres. Nun könnte er über dieselben Linien auch das symmetrisch vierachsige Quadrat bilden, was aber ausgeschlossen werden soll. Darum die Annahme: die beiden Symmetralen dürfen nicht gleichwertig sein und die Bildung gleicher Winkel mit den Seiten der Figur nicht gestatten. Oder er zieht eine Symmetrale, um sie zur Konstruktion eines Deltoids zu verwenden. Nun können aber die Seiten auch so gelegt werden, daß ein Rhombus oder selbst ein Quadrat entsteht. Um die Bildung dieser Formen zu verhindern, müßte er annehmen, daß die Symmetrale nach beiden Richtungen hin verschieden sei. Solche Symmetrielinien kennt die Geometrie nicht. Die Raumgrößen sind das Ursprüngliche, die Symmetrielinien werden in die fertige Figur gelegt, lassen sich von derselben nicht lösen und haben ihre Bedeutung nur im Zusammenhang mit derselben. — Was wir so in der Geometrie zurückweisen würden, wird in der Kristallographie tatsächlich geübt. Um z. B. die rhombischen Formen zu bilden, nimmt man ein von drei aufeinander senkrechten Symmetrieebenen gebildetes Schema an. Durch Legung der möglichen symmetrischen Flächen erhält man sämtliche rhombische Formen — aber auch die des tesserale, tetragonalen und hexagonalen Systems. Man braucht z. B. Pyramiden-

flächen nur so zu legen, daß sie gegen die 3 Ebenen die gleiche Neigung haben und es entsteht das Oktaeder. Um die Entstehung von Formen anderer Systeme zu verhindern, muß man nun annehmen, jede Symmetrieebene sei von der anderen verschieden, so daß eine Begrenzungsfläche mit einer derselben nicht den gleichen Winkel bilden kann wie mit der anderen. Auch im tetragonalen und hexagonalen System wird die Annahme von drei, im tesserale System von zwei Arten von Symmetrieebenen notwendig. Die Aufstellung eines Schemas in der besprochenen Art wäre vielleicht besser dann am Platze, wenn der Schüler erst sämtliche Formen des Systems kennen gelernt hat. Dann würde es eine schöne Übersicht verschaffen. Anstatt im vorhinein eine Verschiedenheit der Symmetrieebenen anzunehmen, gibt man als Richtschnur: Lege alle jene Flächen, die der Symmetrie Genüge leisten, mit Ausschluß jener, die das Auftreten neuer Symmetrieebenen ermöglichen.

**Über das Zeichnen von Kristallbildern.** Neben Modellen vermögen gute Zeichnungen die Unterrichtserfolge in der Kristallographie wesentlich zu heben, darum sollte man auch den Unterricht nach Möglichkeit durch Zeichnen unterstützen, d. h. man sollte vorzeichnen und die Schüler verhalten, daß sie mitzeichnen. In jedem Unterrichtsfache greift man, sobald es sich um eine besondere Klarstellung des Lehrstoffes handelt, zur Kreide, und einige Striche sagen da oft mehr als Hunderte von Worten.

Jeder Unterricht hat vor allem zwei Ziele im Auge: daß der Schüler den Unterrichtsstoff verstehe und daß er ihn im Gedächtnis behalte. Wird nur eines dieser beiden Ziele erreicht, so ist nicht viel gewonnen. Verflüchtigt sich das gut Verstandene nach kurzer Zeit, so bleibt nur der bescheidene Erfolg, daß sich der Schüler im Denken geübt hat. Noch schlimmer ist es, wenn dieser seinem Gedächtnisse mechanisch etwas einverleibt, was er gar nicht verstanden hat.

Das Zeichnen unterstützt das Verstehen und das Behalten und leistet in beiden Beziehungen mehr als das beste Modell. Auf diesem ruht das Auge nur kurze Zeit, darum wird auch die Vorstellung nicht tief genug eingepägt. Das Modell bietet die Eigentümlichkeiten nebeneinander. Die „Gleichzeitigkeit“ wirkt störend; es wird schwer, die Aufmerksamkeit der Schüler auf eine bestimmte Eigentümlichkeit zu lenken. Die Zeichnung, welche wir entwickeln, verwandelt das „Nebeneinander“ in ein „Nacheinander“. Wir sehen den Körper mit seinen charakteristischen Eigenschaften allmählich entstehen, neue Eigentümlichkeiten treten erst auf den Plan, nachdem wir die vorhergehenden richtig aufgefaßt haben, eine falsche Vorstellung verrät sich in ihren Konsequenzen und kann sofort richtig gestellt werden. Bei Vorführung des Modelles kommt nur das Auge und das Wort des Lehrers in Betracht, beim Zeichnen tritt dazu als Drittes die Hand. Schon durch diesen äußerlichen Umstand allein gewinnt das Gedächtnis. Wichtiger noch ist es, daß die

Hand vom Verstand geführt werden muß. Das Auge des zerstreuten Schülers ruht auf dem Modell, aber sieht es nicht und die Worte des Lehrers prallen vom Ohre ab, ohne eine Vorstellung zu wecken. Hingegen läßt sich die Aufmerksamkeit des Schülers beim Zeichnen kontrollieren, beziehungsweise erzwingen.

Das Modell vermag noch gute Dienste zu leisten, solange es nur mit den äußerlichen Umrissen des Körpers vertraut machen soll. Der Unterricht muß sich aber auch an die Einbildungskraft der Schüler wenden, an deren „geistiges Auge“, welches in den Körper eindringt, dort die Achsen sieht, Punkte verrückt, Linien zieht, neue Flächen legt und bemerkt, wie und wo sie sich durchschneiden. Dem begabten Schüler bereitet alles dies keine Schwierigkeiten, der minder begabte bedarf einer Unterstützung der Einbildungskraft, welche ihm der Zeichenstift gewährt. Dieser zaubert das, was der Geist gesehen, auf die Papierfläche, klärt, vervollständigt und festigt die Vorstellung. So wird die Zeichnung wichtiger als das Kristallmodell, dieses gibt nur die Grundlage zu einer richtigen Vorstellung, jener bleibt deren weitere Ausgestaltung überlassen.

Die Kristallographie ist ein Stück Geometrie. Es mag zugegeben werden, daß die Geometrie schon deswegen der Zeichnungen bedarf, weil sich daran Berechnungen knüpfen, die ohne dieselben undurchführbar wären, aber abgesehen davon würde es immer noch ungeheuerlich erscheinen, wollte man die Geometrie an Modellen und fertigen Zeichnungen betreiben.

Soll eine Zeichnung ihren Zweck voll erfüllen, so muß sie richtig sein und bestimmte Ziele anstreben. Insbesondere darf sie nicht flüchtig, bloß nach dem unverläßlichen Augenmaß gemacht werden. Es ist z. B. bald ein Kristallbild entworfen, welches einem Tetrakishehexaeder ähnlich ist: man zeichnet ein Hexaeder und setzt jeder Fläche eine vierseitige Pyramide auf. Wer wollte sich da die Fähigkeit zutrauen, den Scheitel auch nur einer der perspektivisch verschobenen Pyramiden ohne weiteres richtig zu treffen oder gar alle sechs Pyramiden in Einklang zu bringen? Das wäre aber noch nicht einmal das Schlimmste. Eine Zeichnung muß nämlich mehr bieten als einen bildlichen Entwurf des Modells.

Es gibt ein einfaches Mittel, ein Kristallbild nutzbringend und dabei geometrisch einwandfrei zu gestalten: man zeichne unter Anwendung der Ableitungszahlen. Dadurch wird freilich das Zeichnen zu einem „Konstruieren“, aber darin ist der Realschüler nicht weniger geübt wie im freien Zeichnen. Durch die Konstruktion erzielt man, daß die Achsen- und Symmetrieverhältnisse, weiterhin die Bedeutung der Ableitungszahlen sowie der Begriff des Parameterverhältnisses zu voller Klarheit gebracht werden. Es ist nicht dasselbe, wenn man gelegentlich an einer fertigen Form die Achsen aufsuchen und das Parameterverhältnis bestimmen läßt oder anderseits, wenn man die Achsen-

und Parameterverhältnisse zur Ableitung, d. h. zur Bildung neuer Formen benutzt. Im letzteren Falle bleiben Kristallform, Achsen- und Parameterverhältnis im Bewußtsein vereint und bilden ein untrennbares Ganzes. Jede Veränderung des einen geht Hand in Hand mit der des anderen, und das eine ohne das andere wird gar nicht gedacht. Die Verbindung mit der darstellenden Geometrie wird dabei in ganz naturgemäßer Weise hergestellt; denn auch hier werden die Ebenen durch die Achsenabschnitte bestimmt; nach Angabe derselben werden viele Aufgaben über Kristallformen von den Schülern selbständig konstruktiv gelöst werden können.

Beim Zeichnen der tesserale Formen gehe man vom Oktaeder, in den anderen Systemen von der Grundpyramide aus. Mit Hilfe beider und über dieselben zeichne man die anderen Gestalten. Dadurch wird der Zusammenhang der Formen klar. Der Nachweis eines solchen Zusammenhanges macht die Kristallographie zur Wissenschaft. Man lernt zudem die Flächen, Kanten und Ecken verschiedener Formen in ihrer gegenseitigen Lage kennen, sieht z. B. daß die Hexaederflächen vor den Ecken, die Rhombendodekaederflächen vor den Kanten des Oktaeders erscheinen und wird sich in der Folge bei der Auflösung der Kombinationen bald zurechtfinden.

Die Kristallographie hat insofern eine praktische Bedeutung, als sie eine Hilfswissenschaft für die beschreibende Mineralogie bildet. Eine größere Beachtung verdient aber ihr Bildungswert, der ihr einen Ehrenplatz unter den Lehrgegenständen der Mittelschule sichert. Wenn man jedoch auf die Wechselbeziehungen der Formen zueinander, d. i. auf die Ableitung kein großes Gewicht legt, und wenn man weiterhin ihren mathematischen Inhalt vernachlässigt, so beraubt man sie des ansehnlichsten Teiles ihres Bildungswertes und reduziert den Zweck des Unterrichtes auf das bloße Kennenlernen der Formen durch Anschauung.

Was das Zeichnen der Kristallbilder weiterhin anbelangt, so wäre noch zu erwägen, ob dasselbe nicht zu schwierig und nicht zu zeitraubend ist.

Schwierigkeiten bietet nur die Darstellung des Achsenkreuzes in gedrehter Stellung. Es wäre zu umständlich und nicht am Platze, die Drehung wirklich durchzuführen, man wird vielmehr das Achsenkreuz als gegeben betrachten, d. h. dasselbe einer fertigen Konstruktion entnehmen. Im übrigen ist ein Kristallbild bald vollendet, rascher gezeichnet, als beschrieben werden kann, wie man es machen soll. Zudem genügt es, wenn man von den charakteristischen Flächengruppen jener Formen, welche den Habitus des Oktaeders, Hexaeders u. a. tragen, nur eine zeichnet; die Übersicht über die Form gewinnt sogar dabei. Man kann auch auf Grund einer gegebenen Anleitung einzelne Formen vom Schüler selbst zeichnen lassen. Sollte aber das Zeichnen dennoch ein Defizit in der verfügbaren Zeit hervorrufen, so läßt sich dasselbe an anderer Stelle

ausgleichen, vielleicht wird es schon dadurch wett gemacht, daß die Wiederholungen des Lehrstoffes wegen der beim ersten Unterrichte erzielten besseren Erfolge weniger Zeit in Anspruch nehmen. Weise Gründlichkeit im Unterrichte wird in der Regel zur besten Sparmeisterin an Zeit und Mühe.

**Berechnung der Ableitungszahlen.** Die Beziehungen zwischen Kristallographie und Mineralbeschreibung bleiben ziemlich locker, da man viel zu selten in die Lage kommt, dem Schüler eine Verwertung seiner kristallographischen Kenntnisse für das Bestimmen und Beschreiben der Mineralien möglich zu machen. Der Grund liegt darin, daß deutliche oder auch nur entzifferbare Kristalle selten sind. Man muß sich leider in der Mehrzahl der Fälle mit der Nennung des Systems, in dem das Mineral kristallisiert, begnügen; in anderen Fällen müssen Zeichnungen und Modelle ein dürftiges Surrogat für wirkliche Kristalle geben.

Um so mehr sollte man die vorhandenen deutlichen Kristalle ausnutzen, um den Zusammenhang zwischen Kristallographie und Mineralbeschreibung inniger zu gestalten. Damit ist unter anderem gemeint: man lasse von den Schülern Messungen vornehmen und darnach das Achsenbeziehungsweise das Parameterverhältnis der Flächen bestimmen. An speziellen Beispielen wird späterhin gezeigt werden, welche geringe Mühe dies verursacht, vorausgesetzt, daß beim Unterrichte gezeichnet wird. An einem richtigen Kristallbilde erkennt man sofort die Wechselbeziehung zwischen Kantenwinkel und Achse, beziehungsweise Parameter. Zu solchen Messungen würden sich besonders eignen: Granat oder Analzim für das Ikositetraeder; Pyrit für das Pentagonododekaeder; Zirkon für tetragonale, Baryt, Arragonit, Schwefel für rhombische, Gips, Augit, Amphibol, Orthoklas für monoklinische, Quarz, Kalzit für rhomboedrische Formen.

Im Februar des heurigen Jahres wurde in einer Vollversammlung des Vereines „Realschule“ nach einem Vortrag des Prof. Dr. Gust. Schilling „Über physikalische Schülerübungen“ einstimmig die Resolution gefaßt, es sei die Einführung solcher Übungen an der Realschule anzustreben. Am 8. April beschäftigte sich der Mittelschultag mit demselben Gegenstande. Es wurde, nachdem Dr. Schilling neuerdings in einem eingehenden Vortrag die Wichtigkeit von physikalischen Schülerübungen begründet hatte, dieselbe Resolution angenommen, nur über Antrag des Prof. Dr. Kleinpeter (Gmunden) durch den Zusatz erweitert: „es sei in allen naturwissenschaftlichen Fächern praktischer Unterricht anzustreben.“ In der Chemie haben sich praktische Übungen gut bewährt, in der Naturgeschichte begnügt man sich mit Bestimmungsübungen in der Botanik und Mineralogie. Die Anregung, welche der Verfasser dieses Aufsatzes bezüglich der Kristallmessung gibt, entspringt demselben Bestreben: die Schüler dem Lehrgegenstande näher zu bringen.

### Berechnung und konstruktive Darstellung von Kristallnetzen.

Das Wissen der Schüler in den verschiedenen Unterrichtsfächern läßt sich mit Fäden vergleichen, welche parallel nebeneinander verlaufen und verhältnismäßig spärlich durch Querschnitte zu einem Netze verbunden werden. Es ist eine oft bemerkte Tatsache, daß ein Schüler die Kenntnisse, die er sich in der Naturgeschichte erworben hat, beim Ausarbeiten deutscher Aufgaben nicht benutzt, in der Naturgeschichtsstunde die Länder nicht kennt, welche ihm als Heimat der Tiere bezeichnet werden, daß er in der Chemie nicht rechnen kann u. s. w., obwohl er leicht und richtig geantwortet hätte, wenn man dieselben Fragen im betreffenden Unterrichtsfache an ihn gestellt hätte. So macht es den Eindruck — man verzeihe den trivialen Vergleich — als ob ein solcher Schüler für jedes Unterrichtsfach eine eigene Abteilung im Gehirn hätte, welche nur nach außen mündet, hingegen mit den anderen nicht in Verbindung steht. Diese Erscheinung ist psychologisch wohl begründet. Jedes Unterrichtsfach arbeitet vorherrschend in der Entwicklung von Längsreihen von Vorstellungen, nur selten reichen die Querreihen in das Gebiet eines zweiten Unterrichtsgegenstandes. So fehlt es, psychologisch gesprochen, an „Hilfen“, welche eine Vorstellungsserie, welche einer zweiten Wissenschaft angehört, über die Schwelle des Bewußtseins heben könnten. Das wäre wohl das Ideal des Gesamtunterrichtes, alle die Wissensfäden zu einem dichten Netz zu verknüpfen. Könnte man den Gesamtunterricht einer Klasse in die Hand eines einzigen Lehrers legen, wäre es leichter diesem Ideale näher zu kommen. Unter den bestehenden Verhältnissen wird es um so mehr zur Pflicht, die vorhandenen Verbindungen der Unterrichtszweige auszubilden und neue Verbindungen zu schaffen.

So ließen sich auch zwischen der Kristallographie einerseits und der Mathematik sowie der darstellenden Geometrie andererseits leicht Brücken errichten. Einen Teil des Baues müßte der zeichnende Kristallograph besorgen, den ansehnlicheren Teil hingegen die Fachlehrer für Mathematik und Geometrie.

Die Sache ist keineswegs so gedacht, als ob in den mathematischen, beziehungsweise geometrischen Lehrbüchern der Kristallographie ein besonderer Abschnitt einzuräumen, wohl aber, daß unter die Aufgaben auch eine Anzahl kristallographischer aufzunehmen wäre. Man könnte den Einwand erheben, daß der Platz für derartige Aufgaben teilweise schon im Lehrstoff der VI. Klasse gesucht werden müßte, während die Kristallographie erst in der VII. Klasse gelehrt wird. Der Grund zur Kristallographie wird aber schon im chemischen Unterrichte der IV. Klasse gelegt, zudem kann jede Kristallform unabhängig von der anderen mit wenigen Worten, ohne daß man kristallographische Vorkenntnisse voraussetzt, soweit erklärt werden, daß die Aufgabe klar wird.

In diesem Aufsätze wird eine Reihe von Aufgaben vorgeführt und zugleich die Lösung gegeben. Damit soll nicht gezeigt werden, wie man

es machen soll, sondern nur, daß die Aufgaben auf elementarem Wege mit Nutzen gelöst werden können. Vielleicht lassen sich die Rechnungen und Konstruktionen kürzer und besser durchführen — dabei kann die Sache nur gewinnen. Wenige Fundamentalsätze der Geometrie, insbesondere solche der Trigonometrie genügen zur Berechnung, die also in dieser Beziehung keine Schwierigkeiten bereitet. Solche könnten nur darin gefunden werden, daß die zu berechnenden Linien und Flächen im Raume mannigfaltige Lagen annehmen. Aber gerade hierin liegt anderseits ein Vorzug dieser Aufgaben: sie wenden sich an die Einbildungskraft der Schüler und schaffen ihm Gelegenheit, sich im „räumlichen Schauen“ der Flächengebilde zu üben. Die Symmetrieverhältnisse der Formen versetzen uns in die Lage, alle Linien, insbesondere die Senkrechten im Raume sicher zu ziehen. Aus der naturgeschichtlichen Lehrmittelsammlung können jederzeit die Modelle beigelegt werden, welche zur richtigen Vorstellung verhelfen. Die Berechnungen beziehen sich fast durchwegs auf die Herstellung der Kristallnetze, so daß der Schüler in der Lage ist, das Ergebnis seiner Berechnung auch praktisch zu verwerten, insofern er das Modell oder das Kristallbild, welches er entworfen hat, körperlich herzustellen vermag.

Für die darstellende Geometrie kämen zweierlei Arten von Aufgaben in Betracht: die Konstruktion der Bilder von Kristallen in gedrehter Stellung (in Anschauungsfigur, Axonometrie), also dieselbe Konstruktion, die der zeichnende Kristallograph vornimmt, nur müßte in der darstellenden Geometrie die Drehung aus der Grundstellung wirklich durchgeführt werden — weiterhin die Konstruktion der Kristallnetze.

Der Schreiber dieses Aufsatzes ist dieselben Wege gewandelt, welche in den Berechnungen und Konstruktionen eingehalten werden, um eine Reihe von kleinen Modellen herzustellen, welche, neben die Mineralien gelegt, die Anschauung unterstützen. Kristalle, Modelle, das Kontaktgoniometer, im Notfalle Angaben über Achsenverhältnisse oder Kantenwinkel in einem Lehrbuche der Mineralogie waren die Hilfsmittel. Diese Arbeit bot ihm soviel geistige Anregung und Befriedigung, daß in ihm der Entschluß reifte, seine Erfahrungen zu veröffentlichen, ausschließlich in der Absicht, eine Verwertung derselben für die Schüler anzuregen.

Für das Studium der Kristallformen gibt es eine lange Reihe von Werken. Hier seien nur genannt: Naumann (Lehrbuch der reinen und angewandten Kristallographie), Kupffer (Handbuch der rechnenden Kristallonomie), Rammelsberg (Lehrbuch der Kristallkunde), Miller (Lehrbuch der Kristallographie), Karsten (Lehrbuch der Kristallographie), v. Lang (Lehrbuch der Kristallographie), Quenstedt (Grundriß der bestimmenden und rechnenden Kristallographie), Rose (Elemente der Kristallographie), Klein (Einleitung in die Kristallberechnung), Liebisch (Geometrische Kristallographie). K. Twrdy schrieb einen „methodischen Lehrgang der Kristallographie“. Da es sich in dieser Schrift durchwegs



um Elementaraufgaben handelt, wurde die Benutzung von wissenschaftlichen Hilfsquellen nicht notwendig. Die streng wissenschaftliche Kristalldarstellung und Kristallberechnung kennt vollkommene Methoden, als jene sind, die hier angewendet werden. Es wäre aber unstatthaft, neue Gesichtspunkte, neue Begriffe in den kristallographischen Unterricht der Mittelschulen einführen oder gar für die Berechnung Formeln benutzen zu wollen, zu deren Ableitung die mathematischen Kenntnisse des Mittelschülers nicht ausreichen. Es handelt sich nicht darum, den kristallographischen Lehrstoff dem Umfange oder der Tiefe nach zu erweitern, angestrebt wird einzig und allein, daß alles das, was der Lehrplan vorschreibt, zur Gänze verstanden und geistig verarbeitet werde. Die Aufstellung allgemeiner Rechnungsformeln wurde vermieden; jede Aufgabe kann unabhängig von der anderen aufgelöst werden. Nirgends wurde der Gesichtskreis des Schülers überschritten und auf diese Art gezeigt, daß das mathematische und geometrische Wissen desselben ausreicht, die meisten Kristallmodelle und Kristallbilder, welche beim Unterrichte in Betracht kommen, soweit zu berechnen oder zu konstruieren, daß er selbst die Modelle zu verfertigen vermag.

Der Verfasser mußte, um die Zeichnungen, Berechnungen und Konstruktionen verständlich zu machen, die Elemente der Kristallographie in die Schrift aufnehmen. Hierbei ist er namentlich bei der Beschreibung der Grundformen weiter gegangen, als für diesen Zweck notwendig war. Er wollte jedoch nebenbei jenen Weg in allen Einzelheiten kennzeichnen, den er bei Erteilung des kristallographischen Unterrichtes für den besten hält: den Weg der strengen Induktion.

### I. Das tesserale System.

**Das Oktaeder** (Fig. 1, I) wird bei ebenmäßiger Ausbildung von 8 kongruenten, gleichseitigen Dreiecken umschlossen. Es hat 12 gleiche Kanten und 6 gleiche Ecken. Durch je 4 Kanten (oder Ecken) läßt sich eine Ebene legen, welche die Form in 2 symmetrische Hälften teilt. Es gibt also 3 solche Symmetrieebenen. Sie stehen aufeinander senkrecht und grenzen den Raum in 8 gleiche Teile (Oktanten) ab. Man nennt sie Hauptsymmetrieebenen. Das Oktaeder wird so gestellt, daß eine derselben horizontal, die 2 anderen also vertikal zu liegen kommen; von den letzteren stellt man die eine in die Längsrichtung, d. i. von vorn nach rückwärts, die andere in die Querrichtung, d. i. von links nach rechts (Grundstellung). Außerdem gibt es noch 6 weitere Symmetrieebenen, welche durch die Halbierungspunkte der Kanten senkrecht auf die letzteren verlaufen und die von den Hauptsymmetrieebenen gebildeten rechten Winkel halbieren. Sie werden Nebensymmetrieebenen genannt. So weist das Oktaeder im ganzen 9 Symmetrieebenen auf.

Die Hauptsymmetrieebenen schneiden sich in 3 aufeinander normalen Geraden  $XX_1$ ,  $YY_1$  und  $ZZ_1$ . Diese nimmt man als die Koordinaten-

achsen an, mit Hilfe welcher man die Richtung der Begrenzungsflächen im Raum bestimmt. Sie durchkreuzen sich im Mittelpunkt der Kristallform. Von ihren beiden Armen werden die vom Mittelpunkte nach vorn, rechts und oben verlaufenden als positiv, die anderen als negativ angenommen. Die im Inneren der Kristallform gelegenen Abschnitte der Koordinatenachsen nennt man kristallographische Achsen oder Achsen kurzweg. In der Grundstellung verläuft eine in der Längsrichtung (Längsachse), eine zweite in der Querrichtung (Querachse), die dritte vertikal (Hauptachse). Diese Achsen sind beim Oktaeder gleich lang und stehen selbstverständlich normal aufeinander. Als Maßzahl für eine halbe Achse pflegt man  $a$  anzunehmen. Das Verhältnis der 3 Achsen (A. V.) lautet also  $2a:2a:2a$  oder  $a:a:a$  oder  $1:1:1$ . Um eine Übereinstimmung mit der Bezeichnungsweise in der darstellenden Geometrie zu erreichen, wollen wir hierfür  $(1, 1, 1)$  schreiben.

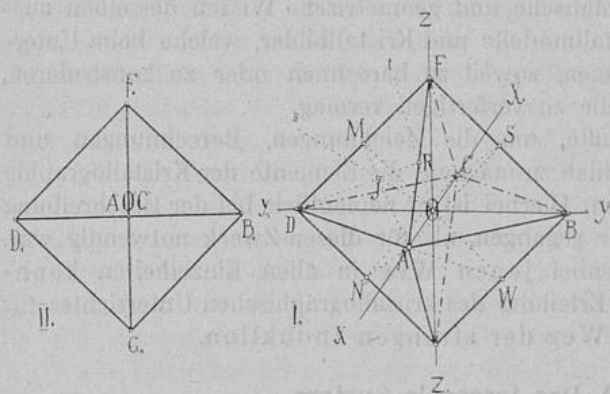


Fig. 1.

Soll die Richtung einer Begrenzungsfläche im Raume bestimmt werden, so beachtet man die Abschnitte, welche sie an den Koordinatenachsen erzeugt. Die Abschnitte werden vom Mittelpunkte an bis zum Schnitte mit der Begrenzungsfläche genommen und Koordinaten oder in der

Kristallographie gewöhnlich Parameter genannt. Für jede Begrenzungsfläche kommen 3 Parameter in Betracht, deren Verhältnis Parameterverhältnis heißt. Die Oktaederfläche  $ABF$  schneidet die  $XX_1$ -Achse im Abstände  $OA = a$ , in demselben Abstände aber auch die  $YY_1$ - und  $ZZ_1$ -Achse. Das Parameterverhältnis lautet darum  $(a, a, a)$  oder  $(1, 1, 1)$  und man sieht, daß dasselbe hier mit dem A. V. identisch ist. Will man eine bestimmte Fläche eindeutig bezeichnen, so fügt man den Parametern das Qualitätszeichen bei. Für die Fläche  $DAF$  lautet also das Parameterverhältnis  $(a, -a, a)$ , wobei man zu beachten hat, daß sich die erste Zahl stets auf die Längs-, die zweite auf die Quer- und die dritte auf die Vertikalrichtung bezieht. Abgesehen von den wechselnden Qualitätszeichen haben aber alle Oktaederflächen dasselbe Parameterverhältnis  $(1, 1, 1)$  und dieses kann darum geradezu als charakterisierendes Zeichen oder Symbol für das Oktaeder gelten. (Bezeichnung nach Weiß).

Die Hauptsymmetrieebenen erzeugen am Oktaeder Schnittflächen, welche Hauptschnitte genannt werden. Man unterscheidet den

basischen, den Längs- und den Querhauptschnitt; in allen drei Fällen ist die Schnittfigur ein Quadrat.

Da es bei einem Kristall nicht auf die Form und Größe der Begrenzungsflächen, sondern nur auf deren Richtung gegen das Achsensystem ankommt, die durch das Parameterverhältnis gegeben ist, so kann man sich eine beliebige Fläche unabhängig von den anderen parallel verschoben denken. Unverändert bleibt dabei das Parameterverhältnis und mit diesem der Winkel, welchen die Flächen miteinander bilden. (Gesetz der Konstanz der Flächenwinkel). In der Kristallographie hat man sich darum die Symmetrie nicht in der Art zu denken wie in der Geometrie, wo gleiche Form und gleiche Distanz zu beiden Seiten der Symmetrielinie oder Symmetrieebene vorausgesetzt wird. Bei Kristallen bezieht sich die Symmetrie nur auf die Flächenrichtung, d. h. auf die Parameterverhältnisse. Die Abbildung Fig. 1 zeigt uns das Oktaeder in ebenemäßiger Ausbildung, gewissermaßen in seiner Idealgestalt, d. i. in einem speziellen Fall, in dem alle Begrenzungsflächen gleiche Zentraldistanz haben. Auch die anderen Kristallformen wollen wir ausschließlich in der Idealform darstellen. Aus dem Gesagten folgt auch, daß in einem Oktanten unendlich viele Oktaederflächen denkbar sind, daß sie zueinander parallel verlaufen, dasselbe Parameterverhältnis besitzen, zu demselben Oktaeder gehören und den Wert einer einzigen Begrenzungsfläche haben. Weiterhin folgt, daß eine Form mit dem Parameterverhältnis (1, 1, 1) nicht mehr als 8 Flächen haben kann.

In jedem Oktanten schneiden sich je 3 der Nebensymmetrieebenen in einer Geraden, welche durch den Mittelpunkt des Oktaeders und den einer Begrenzungsfläche verläuft; in der Fig. 1 die Gerade  $O s$ . Mit den Hauptsymmetrieebenen schneiden sich die Nebensymmetrieebenen in Geraden, z. B.  $O t$ , welche vom Mittelpunkt der Form durch die Halbierungspunkte der Kanten verlaufen. Diese beiden Arten von Schnittlinien könnte man Achsen zweiter Ordnung nennen; in ihnen liegen, gleichwie in den eigentlichen Achsen, die kristallographisch wichtigen Punkte der vom Oktaeder abgeleiteten anderen tesserale Formen.

1. Aufgabe. Es ist das Bild eines Oktaeders zu entwerfen. — Die Kristallformen lassen sich in mehrfacher Weise bildlich veranschaulichen; für uns kommt nur die Darstellung in orthogonaler Projektion oder rechtwinkliger Parallelperspektive in Betracht, wobei man sich die Kristallform vor die Zeichenfläche gehalten und das projizierende Auge so in unendlicher Entfernung denkt, daß die projizierenden Strahlen parallel und senkrecht (orthogonal) auf die Bildfläche fallen. Man projiziert nur die Eckpunkte und verbindet deren Bilder durch gerade Linien, welche die Projektionen der Kanten geben. Denkt man sich das Oktaeder in Grundstellung vor die Bildfläche gehalten, so werden sich die Haupt- und Querachse in wahrer Größe projizieren. Darum bilden (Fig. 1, II) wir mit  $D_1 B_1 = F_1 G_1 = 2a$  als Diagonalen das Quadrat  $D_1 G_1 B_1 F_1$  und



F und G fällt in den Mittelpunkt  $O^1$  des Quadrats. Nun denken wir uns E mit  $E_1$  als Drehungsachse nach vorn und aufwärts um den Winkel  $90^\circ - \varphi$  (hier  $\varphi = 8^\circ$ ) gedreht, so daß sie schließlich mit der Horizontalebene den Winkel  $\varphi = 8^\circ$  bildet, das Oktaeder aber denken wir uns mit E unbeweglich verbunden. C wird die Lage beibehalten, die anderen Mittelecken A, B und D aber werden Drehungskreise beschreiben, deren Ebenen durch die Spuren  $V_1$ ,  $V_1^1$  und  $V_1^{11}$  sich kennzeichnen. Die Spur für die Drehungsebene des Mittelpunktes O, der beiden Ecken F und G und also auch der Hauptachse ist  $U_1$ . In  $C_2$  errichten wir normal auf  $E_1$  die Gerade  $X_2$  als Bildachse einer zweiten Bildebene  $P_{11}$ . Auf dieser werden sich die Drehungskreise projizieren.  $O_2^1$  und  $A_2^1$  sind die zweiten Bilder von O und A vor der Drehung. Nach beendeter Drehung erzeugt E auf  $P_{11}$  die Spur  $E_2$ , welche wir erhalten, wenn wir in  $C_2$  unter einem Winkel von  $90^\circ - \varphi = 82^\circ$  eine Gerade ziehen. In derselben erscheinen auch die zweiten Bilder der Punkte A und O nach beendeter Drehung, während die ersten Bilder derselben durch die Schnittpunkte  $A_1^1$  und  $O_1$  der von  $A_2$  und  $O_2$  gezogenen Ordinalen mit den Spuren  $V_1$  und  $U_1$  bestimmt werden. Bisher wurden die Ecken D und B nicht berücksichtigt. Durch Verlängerung der Quadratseite  $A^1D^1$  bis zum Schnitte mit  $E_1$  im Punkte b entsteht die Strecke  $A^1b$ , welche die Drehung mitmachen und schließlich in die Lage  $A_1b$  gelangen wird. Dabei wird D in der Drehungsebene, deren Spur  $V_1$  ist, verbleiben, so daß der Schnittpunkt der Geraden  $bA_1$  mit  $V_1$  seine neue Lage  $D_1$  bezeichnet. Wird von  $D_1$  durch  $O_1$  die Projektion der Querachse gezogen, so gibt der Schnittpunkt mit  $V_1^{11}$  die Lage der vierten Mittelecke. Es erübrigt noch, das erste Bild der Hauptachse zu suchen. Dasselbe fällt in die Spur  $U_1$  und sein Mittelpunkt liegt in  $O_1$ . In wirklicher Länge wird sich die Hauptachse auf  $P_{11}$  projizieren. Wir errichten in  $O_2$  eine Normale, tragen nach oben und unten a auf, übertragen die Punkte  $F_2$  und  $G_2$  auf  $U_1$  und erhalten hier  $F_1$  und  $G_1$ . Schließlich werden die Projektionen der Kanten gezogen.\*) — Selbstverständlich eignet sich eine solche Konstruktion keineswegs für eine kristallographische Lehrstunde u. zw. schon deswegen nicht, weil sie zu umständlich und zeitraubend wäre. Hier kommt es darauf an, ohne erheblichen Zeitverlust ein anschauliches Bild zu schaffen. Dies erreicht man, wenn man das Achsenkreuz in gedrehter Lage als gegeben betrachtet, so daß man nur die Endpunkte der Halbachsen miteinander zu verbinden hat. Man könnte sich für das Zeichnen des Achsenkreuzes leicht ein mechanisches Hilfsmittel verfertigen, indem man einer guten Konstruktion die Werte zur Darstellung eines „perspektivischen Achsenkreuzes“ aus drei Holzstäben entnimmt. Das soll sagen: man gebe den Holzstäben ein Längenverhältnis und verbinde sie

\*) Eine übersichtliche und leichtfaßliche Erläuterung verschiedener Projektionsmethoden des Achsenkreuzes und der Kristallformen überhaupt findet der Leser in v. Langs „Lehrbuch der Kristallographie“.

unter Winkeln, wie Achsen und Winkel im gedrehten Achsenkreuz dem projizierenden Auge erscheinen. Binnen kurzem hat man aber eine solche Sicherheit in der Darstellung des gedrehten Achsenkreuzes erlangt, daß man auf jedes Hilfsmittel verzichten kann. Ist das Achsenkreuz gezeichnet, so läßt sich die weitere Konstruktion nicht allein des Oktaeders, sondern überhaupt aller Kristallformen mit Lineal und Zirkel korrekt durchführen, ohne daß das Ungefähr oder das Augenmaß eine Rolle spielt.

Da wir die tesseralen Formen unter Zugrundelegung des Oktaeders und mit Bezug auf dasselbe berechnen wollen, so erscheint es zweckmäßig, jene Werte vom Oktaeder zu gewinnen, die hierbei Verwendung finden und dann als bekannt vorausgesetzt werden sollen.

Die Oktaederkante hat die Länge  $a\sqrt{2}$  ( $\triangle ABO$  in Fig. 1. I). Die Distanz der Kante vom Mittelpunkt der Kristallform ist der halben Kantenlänge gleich  $= \frac{a}{2}\sqrt{2}$  ( $\triangle AOR$ ). Die Höhe einer Oktaederfläche

$DR = \frac{a}{2}\sqrt{6}$  ( $\triangle DAR$ ). Die Schnittlinie  $O_s$  der Nebensymmetrieebenen trifft die Oktaederfläche in deren Mittelpunkt  $I$  und teilt die Höhenlinie

$DR$  im Verhältnis 2:1, so daß also  $DI = \frac{2}{3}DR = \frac{a}{3}\sqrt{6}$ ;  $IR = \frac{1}{3}DR = \frac{a}{6}\sqrt{6}$ . Die Distanz der Oktaederfläche vom Mittelpunkte beträgt

$\frac{a}{3}\sqrt{3}$  ( $\triangle IOR$ ).

Der Neigungswinkel der Flächen oder Flächenwinkel. Dieser Winkel wird in der Kristallographie Kantenwinkel genannt. Den letzteren Namen aber gebraucht man in der Geometrie für den von 2 Kanten in einer Begrenzungsfläche gebildeten ebenen Winkel. Um Mißverständnisse zu vermeiden, sollen im folgenden die Ausdrücke „Flächenwinkel“ und „Kantenwinkel“ in jener Bedeutung angewendet werden, die dem Schüler aus dem geometrischen Unterrichte geläufig ist. Der Flächenwinkel an einer Oktaederkante läßt sich aus dem  $\triangle ACS$  berechnen. Dieses liegt in der Nebensymmetrieebene, welche in  $S$  die Oktaederkante halbiert und auf derselben senkrecht ist; die Schnittlinien  $AS$  und  $SC$  stehen als Fußlinien normal auf  $FB$  und  $\sphericalangle CSA$  ist der Flächenwinkel.  $FB = a\sqrt{2}$ ;  $AS = SC = \frac{a}{2}\sqrt{6}$ . Im  $\triangle ACS$  ist nun  $AC^2 = AS^2 + SC^2 - 2AS \cdot SC \cdot \cos CSA$ ;  $\cos CSA = -\frac{1}{3}$ ;  $\sin (CSA - 90^\circ) = \frac{1}{3}$ ;  $\sphericalangle CSA - 90^\circ = 19^\circ 28' 16''$ ;  $CSA = 109^\circ 28' 16''$ . Der Flächenwinkel  $MAW$ , welchen die Ebenen von je zwei in der Oktaederecke zusammenstoßenden abwechselnden Dreiecken bilden, ist, wie aus dem  $\triangle MAW$  zu ersehen, supplementär zu  $109^\circ 28' 16''$  und hat darum  $70^\circ 31' 44''$ .

2. Aufgabe. Es ist das Netz eines Oktaeders zu berechnen, dessen Halbachse  $a = 10 \text{ cm}$  ist. — Eine Seite in der Begrenzungsfläche des Oktaeders  $= a\sqrt{2} = 10\sqrt{2} = 14.14 \text{ cm}$ . 8 gleichseitige Dreiecke von dieser Seitenlänge werden in der bekannten Weise zum Netze verbunden.

**Das Triakisoktaeder.** Wird in der Fig. 1, I die Oktaederfläche ABF um die Kante AF nach vorn gedreht, so wird sie dadurch aus ihrer Richtung gebracht. Die  $XX_1$ - und  $ZZ_1$ -Achse werden von der Dreiecksebene wie früher im Abstände  $a$  geschnitten, die  $YY_1$ -Achse hingegen in einem größeren Abstände. Diesen pflegt man in der Weise zu bestimmen, daß man sich die Halbachse  $a$  mit der Zahl  $m > 1$  multipliziert denkt, so daß also seine Größe mit  $ma$  bezeichnet wird. Sollen die Symmetrieverhältnisse, wie sie am Oktaeder bestehen, erhalten bleiben, so muß man den Vorgang auch über den Kanten AB und FB und weiterhin in jedem Oktanten dreimal wiederholen. Es bildet sich also über jeder Oktaederfläche als Basis eine von 3 gleichschenkeligen Dreiecken umschlossene Pyramide und man erhält einen neuen Körper: das Triakisoktaeder. Dieses wird von 24 gleichschenkeligen Dreiecken begrenzt. Es hat 12 Kanten, die betreffs Länge und Richtung den Oktaederkanten gleichen, nur ist ihr Flächenwinkel stumpfer geworden. Dazu kommen noch 24 kürzere Kanten, die zu je dreien über den Flächen des eingeschriebenen Oktaeders liegen. 6 Ecken sind achtfächig und haben die Lage der Oktaederecken; zwischen ihnen verlaufen die Achsen. Je eine dreiflächige Ecke liegt über einer Oktaederfläche. Das Parameterverhältnis ist, wie schon aus der Ableitung folgt,  $ma : a : a$  ( $m, 1, 1$ ), die Achsen hingegen sind durch die Ableitung nicht verändert worden.

3. Aufgabe. Es ist das am Bleiglanz vorkommende Triakisoktaeder (2, 1, 1) in Ansichtsstellung zu konstruieren. — Bei dieser und allen analogen Aufgaben wollen wir zunächst, Fig. 3, I, das Oktaeder in gedrehter Stellung entwerfen, beziehungsweise (im kristallographischen Unterrichte) als gegeben voraussetzen, und darüber die weitere Konstruktion ausführen. Die Begrenzungsflächen des Triakisoktaeders denken wir uns als das Resultat des Durchschnittes von Ebenen, die zu je dreien in jedem Oktanten so gelegt wurden, daß sie einerseits durch eine Oktaederkante gehen, andererseits den nicht zu dieser Kante gehörenden Koordinatenachsenast in einem Punkte treffen, der den Zentralabstand  $2a$  hat. Wir denken uns also die Halbachse  $a$  in jedem Koordinatenachsenast mit 2 multipliziert, d. h. wir schneiden von jedem Aste  $2a$  ab. Selbstverständlich bezieht sich die Verdoppelung in der Figur nicht auf  $a$  selbst, sondern auf dessen Projektion, die in den verschiedenen Koordinatenachsenästen einen anderen Wert hat. So erhalten wir unter anderem die Punkte  $p''$  und  $p'''$ . Da der Neigungswinkel der gelegten Ebenen gegen die gleichseitige Oktaederfläche derselbe ist und  $ma$  für alle denselben Wert hat, so muß die entstehende Pyramide eine gerade sein, d. h. der Scheitel

muß von den Oktaederecken gleich weit abstehen und die Seitenflächen müssen gleichschenkelige Dreiecke sein, deren Symmetralen durch den Halbierungspunkt der Oktaederkante und den Scheitel gehen. Wenn wir weiterhin A und F mit  $p''$  verbinden, so erhalten wir ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Symmetrale durch den Halbierungspunkt der Oktaederkante und durch  $p''$  verläuft. Diese Symmetrale ist der geometrische Ort für die Scheitel aller gleichschenkeligen Dreiecke, die sich über AF errichten lassen. Zu denselben gehört also auch die Begrenzungsfläche. Darum muß deren Symmetrale mit jener durch  $p''$  verlaufenden identisch sein. Analoges gilt von den Ebenen, die durch AB und FB gelegt wurden. Der Pyramidenscheitel muß im Schnittpunkte der drei Geraden liegen, die man von den Halbierungspunkten

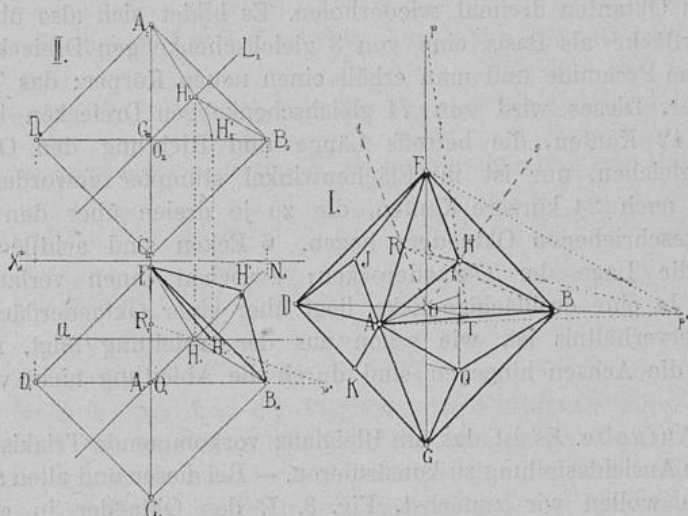


Fig. 3.

der Kanten nach den Endpunkten von  $ma$  gezogen hat. Daraus ergibt sich folgender Vorgang für die Konstruktion: Man zeichne das Oktaeder in gedrehter Stellung, trage auf jedem Koordinatenachsenaste  $2a$  auf, halbiere die Kanten und ziehe von jedem Halbierungspunkte beiderseits je eine Gerade, welche den Koordinatenachsenast, der dem betreffenden Oktanten, aber nicht der betreffenden Kante angehört, in einem Punkte trifft, der den Zentralabstand  $2a$  hat. Der Durchschnittspunkt, welchen je zwei der Geraden in jedem Oktanten bilden, ist der Pyramidenscheitel, den man mit den Oktaederecken verbindet. — Es genügt also, wenn im Oktanten bloß zwei Konstruktionslinien gezogen werden. — Die beste Übersicht über die Form läßt sich erzielen,



wenn man sich auf die Konstruktion einer einzigen Flächengruppe beschränkt. Will man dennoch die anderen Flächengruppen darstellen, so kann man die Konstruktion nach der bisherigen Art fortsetzen, es ist aber vorteilhafter, sich die Arbeit durch Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse zu erleichtern. So muß die Ecke Q in einer durch H mit der Hauptachse parallel gezogenen Geraden liegen. Zieht man diese, so bedarf es nur einer einzigen Konstruktionslinie zwischen dem Halbierungspunkt der Kante AG und p'', um die Lage von Q zu erhalten. So liegen auch I und K in Geraden, die von Hund Q parallel mit der Querachse gezogen wurden u. s. w. Ja, hat man unter Benutzung der Ableitungszahl m erst eine einzige Ecke konstruiert, so bedarf man dieser Zahl überhaupt nicht mehr und kann bloß gestützt auf die Symmetrie die Konstruktion zu Ende führen. So z. B. halbiert die durch H und die Hauptachse gelegte Nebensymmetrieebene die Kante AB und geht auch durch Q. Sie bildet mit dem basischen Hauptschnitte die Schnittlinie OT, welche als Fußlinie normal auf der Hauptachse steht. Normal auf dieser sind ferner jene Geraden, die von H und Q parallel zu OT gezogen werden. Halbieren wir also die Kante AB, verbinden den Halbierungspunkt T mit O, ziehen von H parallel zu OT die Gerade Ht, schneiden von OG die Strecke Os = Ot ab, ziehen von s eine mit OT Parallele sQ = tH, so gibt der Punkt Q die Lage der gesuchten Ecke. — Das Gesagte gilt aber nicht allein für das Triakisoktaeder, sondern auch sinngemäß für die anderen Formen des tesserale Systems.

4. Aufgabe. Das Netz des Triakisoktaeders ( $1\frac{1}{2}, 1, 1$ ) ist durch das Projektionsverfahren zu suchen; a soll hierbei die Länge von 10 cm bekommen. — Da es bei den Kristallen nicht auf die absolute Größe, sondern nur auf das Parameterverhältnis ankommt, so könnte man sich damit begnügen, bloß auf dieses Rücksicht zu nehmen. Dies wäre der Fall, wenn man ein Begrenzungsdreieck nur mit Rücksicht auf seine Winkel bestimmen würde. Wir wollen aber hier und auch weiterhin die Aufgabe dahin erweitern, daß wir eine Form von bestimmter absoluter Größe erhalten: die Halbachse a soll 10 cm lang sein. Wir entwerfen (Fig. 3, II) das erste Bild des Oktaeders in der Grundstellung. Die über der Oktaederfläche ABF gelegene Ecke H des Triakisoktaeders hat ihr erstes Bild einerseits in der ersten Spur N<sub>1</sub> der Nebensymmetrieebene N, anderseits in einer Geraden, welche wir vom Halbierungspunkte der Oktaederkante R nach p'', d. i. nach dem Endpunkte von  $\frac{3}{2} a = 15 \text{ cm}$  gezogen haben, also im Punkte H<sub>1</sub>. — H<sub>1</sub>A<sub>1</sub>, H<sub>1</sub>B<sub>1</sub> und H<sub>1</sub>F<sub>1</sub> sind die Projektionen dreier „kürzerer“ Kanten. Sie geben die Kanten verkürzt, während F<sub>1</sub>B<sub>1</sub> die wirkliche Länge einer „längeren“ Kante hat. FH liegt in der Nebensymmetrieebene L, welche durch die Hauptachse FG geht. Diese Ebene wollen wir um die Hauptachse drehen, bis sie mit der Bildebene parallel läuft; vom Punkte H nehmen wir an, daß er die Drehung

mitmacht. Der Drehungskreis des Punktes H liegt hierbei in einer Ebene, deren erste Spur die durch  $H^1$  normal auf die Projektion der Hauptsache gezogene Gerade  $U_1$  ist, der Drehungskreis selbst wird sich auf der Bildebene  $P_{11}$  projizieren, falls wir  $X_2$  normal auf  $F_1 G_1$  ziehen. Wir konstruieren das zweite Bild des Körpers.  $H_2$  gibt uns die Lage des Punktes H vor der Drehung,  $H^1_2$  nach derselben. Wir übertragen  $H^1_2$  nach  $P_1$ , erhalten hier  $H^1_1$  und durch Verbindung von  $F_1$  mit  $H^1_1$  die Kante FH in wirklicher Länge  $F_1 H^1_1$ . Nun sind wir in der Lage, das  $\triangle FHB$  um die Kante FB in die Bildebene umzulegen und zu konstruieren.  $F_1 B_1 H^1_1$  ist ein Begrenzungsdreieck in wahrer Größe. Je 3 solcher Dreiecke werden zu einer Gruppe vereinigt; 8 Gruppen nach Art der Einzelflächen im Oktaedernetze geordnet geben das Netz des Triakisoktaeders.

5. Aufgabe. Es ist das Netz des Triakisoktaeders (2, 1, 1) zu berechnen. ( $a = 10\text{ cm}$ ) — Die Aufgabe ist als gelöst zu betrachten, wenn man ein Begrenzungsdreieck durch die Basis und Höhe bestimmt hat. Wir wählen das  $\triangle AHF$ . Die Seite AF hat die Länge einer Oktaederkante  $a\sqrt{2} = 14.1421\text{ cm}$ . Die Höhe RH hängt von der Größe des  $\sphericalangle p''RO = \alpha$  ab, welcher aus dem  $\triangle ROp''$  zu berechnen ist. Die Strecke BR ist die Höhenlinie des Oktaederdreieckes und wird durch die von H nach O gezogene Gerade HO im Verhältnis 1:2 geteilt. OR steht auf AF normal; der  $\sphericalangle BRO$  ist der halbe Flächenwinkel einer Oktaederkante, hat also  $54^\circ 44' 8''$ .

$$Op'' = OR \tan \alpha; \tan \alpha = m\sqrt{2} = \sqrt{8}; \alpha = 70^\circ 31' 43''.$$

$$\sphericalangle HRh = \alpha - 54^\circ 44' 8'' = 15^\circ 47' 35'' = \beta.$$

$$\text{Im } \triangle RhH \text{ ist } RH = \frac{Rh}{\cos \beta} = 4.2427\text{ cm.}$$

6. Aufgabe. An einem Triakisoktaeder (Modell) sei der Flächenwinkel der Kante AF  $= 2\alpha = 153^\circ 28'$  durch Messen bestimmt worden; es ist das Parameterverhältnis zu berechnen.

$$\triangle ROp'' \dots \tan \alpha = \frac{Op''}{OR} = m\sqrt{2}; m = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\tan 76^\circ 44'}{\sqrt{2}} = 3.$$

Dies ist eine jener Aufgaben, welche man, wie in der Einleitung gesagt wurde, leicht in der mineralogischen Unterrichtsstunde auflösen könnte, falls man den Unterricht mit dem Zeichnen der Formen verknüpft hat. Die Parameter sind für die direkte Messung nicht zugänglich, wohl aber die Kanten bezüglich ihrer Länge, ferner die Kanten- und die Flächenwinkel. Da infolge verschiedener Unregelmäßigkeiten in der Ausbildung der Kristalle, namentlich aber infolge ungleicher Zentraldistanz der Flächen das Messen der Kantenlänge unverlässliche Resultate gibt und auch beim Messen der Kantenwinkel keine befriedigende Genauigkeit zu erzielen ist, so beschränkt man sich fast nur auf die Messung der Flächenwinkel, deren Größe unter allen Verhältnissen konstant oder

nahezu konstant bleibt. Man bedient sich hierzu der Goniometer. Reflexgoniometer kommen für Mittelschulen nicht in Betracht, bei den Kontaktgoniometern, die nirgends fehlen dürften, geht die erreichbare Genauigkeit nicht über einen halben Grad. Leider eignen sich nur wenige Kristalle zu Messungen mit dem Kontaktgoniometer. Ein dürftiges Ersatzmittel bilden Modelle.

**Das Rhombendodekaeder.** Je größer im Triakisoktaeder (Fig. 3, I) die Ableitungszahl  $m$  wird, desto stumpfer wird die Kante  $AB$ ; für  $m = \infty$  stellt sich die Konstruktionslinie  $Tp'''$  vertikal und mit ihr das  $\triangle ABH$ . Dasselbe gilt vom  $\triangle AQB$ . Der Flächenwinkel der Kante  $AB$  hat den Wert  $180^\circ$  angenommen, beide Dreiecke fallen in eine ebene Fläche zusammen, welche ein Rhombus sein muß, da ihre 4 Seiten einander gleich sind. Aus 24 Begrenzungsflächen sind also 12 geworden; der neue Körper ist ein Rhombendodekaeder, d. i. ein Rhombenzwölfflächner. 12 Kanten des Triakisoktaeders sind verschwunden, die 24 anderen sind geblieben; die Zahl der Ecken hat sich nicht geändert, nur sind die den Oktaederecken entsprechenden Ecken 4flächig geworden. Das Parameterverhältnis ist  $(\infty, 1, 1)$ .

Besonders gut läßt sich die Entstehung des Rhombendodekaeders aus dem Triakisoktaeder durch Konstruktion ersichtlich machen. Wir entwerfen zunächst das Bild eines Oktaeders in Grundstellung (Fig. 4, II) und konstruieren im rechten und linken oberen Oktanten die Triakisoktaeder  $(\frac{3}{2}, 1, 1)$  und  $(2, 1, 1)$ .  $J^1RH^1$  und  $I^{11}RH^{11}$  sind die Projektionen der Flächenwinkel an der Kante  $AF$ . Sie werden von den Höhenlinien der hier zusammenstoßenden Begrenzungsdreiecke gebildet. Je größer  $m$  wird, desto stumpfer wird dieser Winkel. Zugleich rücken  $I$  und  $H$  mehr und mehr gegen den Rand der Figur. Für  $m = \infty$  wird die dem Endpunkte der  $ZZ_1$ -Achse zustrebende Konstruktionslinie parallel mit  $ZZ_1$  und geht durch  $H_1$ .  $I_1R$  und  $H_1R$  fallen in eine Gerade zusammen und dies in Wirklichkeit, nicht bloß scheinbar, da das projizierende Auge die Winkel bei  $R$  in schräger Richtung sieht. Die Kante  $AF$  als solche ist verschwunden und zur längeren Diagonale eines

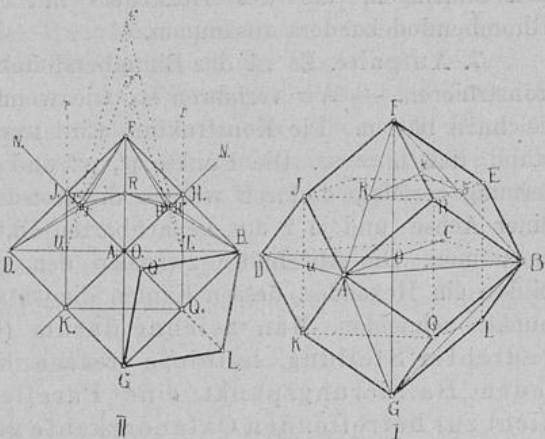


Fig. 4.

Rhombus geworden, die kürzere Diagonale desselben Rhombus wird von den beiden verschmolzenen Höhenlinien der früheren Dreiecke gebildet. Im Bilde sind 4 Rhomben sichtbar, in der Projektion erscheinen sie als Quadrate; 4 andere Rhomben werden von ihnen gedeckt, 4 endlich stehen normal auf der Bildebene und projizieren sich in den Geraden  $D_1F_1$ ,  $F_1B_1$ ,  $B_1G_1$  und  $G_1D_1$ . Diese Strecken geben uns zugleich die längeren Diagonalen in wirklicher Größe; in solcher erscheinen aber auch die kürzeren Diagonalen, die wie jene mit dem Querschnitte parallel verlaufen. Die Projektionen der längeren Diagonalen bilden ein Quadrat, ebenso die der kürzeren. Das eine Quadrat ist dem anderen eingeschrieben. Daraus folgt, daß am Rhombendodekaeder selbst alle längeren Diagonalen ein Oktaeder, die kürzeren hingegen ein Hexaeder bilden. Beide sind dem Rhombendodekaeder eingeschrieben. Die Ecken des Oktaeders fallen mit den 3flächigen, die des Hexaeders mit den 4flächigen Ecken des Rhombendodekaeders zusammen.

7. Aufgabe. Es ist das Rhombendodekaeder in Ansichtsstellung zu konstruieren. — Wir verfahren so, wie wenn wir ein Triakisoktaeder zu zeichnen hätten. Die Konstruktion wird nur modifiziert durch den Umstand, daß  $m = \infty$ . Die Punkte  $p'$ ,  $p''$  und  $p'''$  sind in unendliche Entfernung gerückt, dadurch werden die Konstruktionslinien parallel mit je einer Achse und je 2 aus benachbarten Oktanten fallen in eine Gerade zusammen. Die Abschnitte zwischen den gegenseitigen Schnittpunkten bilden ein Hexaeder, dessen Kanten die Oktaederkanten im Halbierungspunkte schneiden. Man zeichne darum (Fig. 4, I) ein Oktaeder in gedrehter Stellung, halbiere dessen Kanten und ziehe durch jeden Halbierungspunkt eine Parallele zu jener Achse, die nicht zur betreffenden Oktaederkante gehört. Die Durchschnittpunkte dieser Parallelen untereinander liefern die Scheitel der 3flächigen Ecken und werden mit den Oktaederecken verbunden. So zieht man z. B. durch R eine Parallele mit der Quer-, durch U eine solche mit der Hauptachse und erhält den Punkt I als Schnittpunkt, welchen man mit D, A und F verbindet. Es genügt, wenn man nach dieser Methode nur den einen Endpunkt I zu gewinnen trachtet, von hier aus die Kanten ID, IA und IF zieht, wodurch man 3 Rhombenseiten erhält. Durch Ergänzung der Rhomben bekommt man die Seiten angrenzender Rhomben und das Rhombendodekaeder selbst, wenn fortgesetzt Parallele gezogen werden.

8. Aufgabe. Es ist das Netz eines Rhombendodekaeders zu berechnen. — Nicht beliebige 12 Rhomben geben das Dodekaeder, nur solche, bei welchen die Diagonalen in einem bestimmten Längenverhältnis stehen. Man entnimmt unmittelbar der Fig. 4, II, daß die kürzere Diagonale  $I_1H_1 = O_1B_1 = a$ . Da die längere Diagonale die Länge der Oktaederkante  $a\sqrt{2}$  hat, so verhält sich die kürzere zur längeren Diagonale wie  $1:\sqrt{2}$ . Nun wird es auch klar, warum sich ein Rhombus in der Grundstellung,

wobei er mit der Bildebene einen Winkel von  $45^\circ$  bildet, als Quadrat projizieren muß. Die Oktaederkante bildet nämlich mit den beiden Halbachsen ein gleichschenkeliges, rechtwinkeliges Dreieck, in dem sie als Hypotenuse erscheint und eine Projektion von der Länge der Kathete a gibt. Soll man das Netz eines Rhombendodekaeders entwerfen, dessen halbe Achse  $a = 10 \text{ cm}$  ist, so gibt man der kürzeren Diagonale die Länge von  $10 \text{ cm}$ , der längeren die von  $10\sqrt{2} = 14.14 \text{ cm}$ .

9. Aufgabe. Es ist das Netz eines Rhombendodekaeders zu konstruieren. — Man entwirft das erste Bild eines Rhombendodekaeders in Grundstellung (Fig. 4, II), wie oben gezeigt wurde, und entnimmt der Figur unmittelbar die Werte für die beiden Diagonalen.  $G_1 B_1$  gibt eine längere Diagonale in wirklicher Länge. Wir denken uns den dazu gehörigen Rhombus  $QGLB$ , der normal auf  $P_{11}$  steht, um die Diagonale gedreht, bis er mit  $P_{11}$  parallel wird, und konstruieren ihn. 12 solche Rhomben geben das Netz des Rhombendodekaeders.

10. Aufgabe. Es ist der Flächenwinkel des Rhombendodekaeders zu berechnen. — Fällt man von den Rhombenmittelpunkten  $R$  und  $S$  (Fig. 4, I) auf  $FH$  die Normalen  $Rk$  und  $Sk$ , so treffen sich dieselben auf Grund der Symmetrieverhältnisse in ein und demselben Punkte, d. i. in  $k$  und  $\sphericalangle RkS$  ist der Flächenwinkel. Wir bezeichnen die Hälfte der kürzeren Rhombendiagonale mit  $c$ .

$$RS (\triangle RHS) = c\sqrt{2}; FH (\triangle RHF) = c\sqrt{3}.$$

Im  $\triangle RHF$  ist  $Rk$  eine Normale vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse und darum  $Fk = \frac{RF^2}{FH} = \frac{2c}{\sqrt{3}}$ .

$$Rk (\triangle RkF) = c \sqrt{\frac{2}{3}}; \cos SkR (\triangle RSk) = -\frac{1}{2}.$$

Cosinus  $-\frac{1}{2}$  entspricht einem Winkel von  $120^\circ$ . Wird durch das  $\triangle RSk$  eine Ebene gelegt, so erzeugt sie am Rhombendodekaeder ein reguläres Sechseck als Schnittfigur.

**Das Ikositetraeder.** Denken wir uns im Oktaeder (Fig. 1, I) das  $\triangle ABF$  so aus seiner Richtung gebracht, daß der Punkt  $A$  seine Lage beibehält, die Punkte  $F$  und  $B$  aber gleichmäßig d. h. in solcher Art gehoben werden, daß ihre Verbindungslinie mit  $FB$  parallel bleibt, so werden nun die  $YY_1$ - und die  $ZZ_1$ -Achse von einer durch  $ABF$  gelegten Ebene in größerer Zentraldistanz getroffen, welche wir uns so gebildet denken, daß wir die Halbachse  $a$  mit  $m > 1$  multipliziert denken. Das Parameterverhältnis lautet nunmehr  $(ma, ma, a) = (m, m, 1)$ . Sollen die Symmetrieverhältnisse erhalten bleiben, so muß derselbe Vorgang über den Ecken  $B$  und  $F$  und weiterhin auch in den anderen Oktanten wiederholt werden. Es entsteht ein neuer Körper: das Ikositetraeder, welches von 24 kongruenten Deltoiden begrenzt wird, die zu je 3 über einer

Oktaederfläche liegen. Wir unterscheiden 24 kürzere und 24 längere Kanten. Die ersteren liegen paarweise über einer Oktaederkante, die wie gebrochen erscheint, die letzteren zu je 3 über einer Oktaederfläche. Die Form hat 14 Ecken. Je eine vierflächige Ecke fällt mit einer Oktaederecke zusammen, eine dreiflächige liegt über jeder Oktaederfläche.

11. Aufgabe. Es ist das Ikositetraeder (2, 2, 1) in Ansichtsstellung zu konstruieren. — Die Ebene, in welcher das Deltoid  $A T H R$  (Fig. 5, I) liegt, geht durch die Punkte  $A$  und  $p''$ . Durch dieselben Punkte geht aber im benachbarten Oktanten die Ebene, welcher das Deltoid  $A V Q T$  angehört.  $A$  und  $p''$  sind somit Punkte, die beiden Ebenen gemeinsam sind und darum die Richtung ihrer Schnittlinie  $A p''$  bestimmen. Analoges

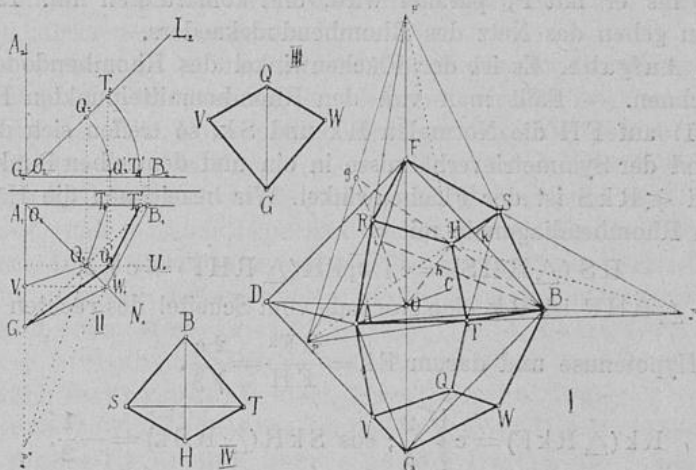


Fig. 5.

gilt von der Schnittlinie  $B p'$  zwischen den Ebenen, in welchen die Deltoiden  $HTBS$  und  $QWBT$  liegen. Der Symmetrieverhältnisse wegen schneiden sich  $A p''$  und  $B p'$  in einem Punkte  $T$ , der von  $A$  und  $B$  gleich weit entfernt ist und im basischen Hauptschnitt liegt. Er bezeichnet die Lage einer über der Oktaederkante befindlichen Ecke. Ebenso erhält man  $R$  und  $S$ . Die beiden Ebenen, in welchen die Deltoiden  $A T H R$  und  $T B S H$  gelegen sind, gehen durch die Punkte  $T$  und  $p'''$ ; diese sind ihnen gemeinsam und ebenso alle Punkte, die zwischen  $T$  und  $p'''$  liegen, so daß  $T p'''$  ihre Schnittlinie bezeichnet. Auf dieselbe Art erhält man die Schnittlinien  $R p''$  und  $S p'$ . Der Symmetrieverhältnisse wegen treffen sich die 3 Schnittlinien in einem Punkte, der über dem Mittelpunkt der Oktaederfläche liegt. Da er allen 3 Ebenen gemeinsam ist, so bezeichnet er die Lage der Ecke  $H$ . Aus dem Gesagten ergibt

sich folgender Vorgang für die Konstruktion. Man zeichne ein Oktaeder in gedrehter Stellung und schneide von jedem Koordinatenachsenaste  $2a$  ab. Von den beiden Endpunkten einer jeden Oktaederkante ziehe man je eine Konstruktionslinie gegen die Endpunkte von  $2a$  jener Koordinatenachsenäste, die zu dieser Kante gehören (also von  $A$  nach  $p''$  und von  $P$  nach  $p'$ ). So erhält man die Lage der über den Oktaederkanten gelegenen Ecken durch die Schnittpunkte  $T, S, R$  u. s. w. Von diesen ziehe man je eine weitere Konstruktionslinie nach dem Endpunkt von  $2a$  des dritten zum Oktanten gehörenden Koordinatenachsenastes (von  $T$  nach  $p'''$ , von  $S$  nach  $p'$  von  $R$  nach  $p''$  u. s. w.) Je 3 der letzteren Konstruktionslinien schneiden sich in einem Punkte (z. B.  $H$ ), welcher die Lage der über der Oktaederfläche befindlichen Ecke bezeichnet. Die Abschnitte aller Konstruktionslinien vom Beginne bis zum Schnitte mit einer zweiten geben die Kanten.

12. Aufgabe. Es ist das Netz des am Granat vorkommenden Ikositetraeders  $(2, 2, 1)$  zu konstruieren ( $a = 10\text{ cm}$ ). — Wir entwerfen das erste Bild (Fig. 5, II) des rechten, unteren, vorderen Achtels der Form in Grundstellung. Dieses geschieht, indem wir zunächst das gleichgelegene Oktaederachtel  $A_1 G_1 B_1$  projizieren, wobei wir  $A_1 G_1 = A_1 B_1 = 10\text{ cm}$  machen. Über der Oktaederfläche konstruieren wir die von 3 Deltoiden gebildete Flächengruppe. Die Kante von  $B_1$  geht nach  $p'''$ , wenn  $O_1 p''' = 2a = 20\text{ cm}$  ist; sie trifft die von  $G_1$  ausgehende Kante  $G_1 W_1$  in  $W_1$ , das in der Symmetralen  $O_1 N_1$  liegt. Die beiden Kanten  $B_1 W_1$  und  $G_1 W_1$  gehören gewissermaßen zur Oktaederkante  $B_1 G_1$ . Ebenso gehören zu den Oktaederkanten  $A_1 G_1$  und  $A_1 B_1$  im Raume je 2 neue Kanten, welche Seiten der Deltoide sind. Die betreffenden Figuren befinden sich in der Vertikalebene durch  $A_1 G_1$ , beziehungsweise in der Horizontalebene durch  $A_1 B_1$ ; sie sind der Figur  $B_1 G_1 W_1$  kongruent, so daß sie durch Aufdrehung dieser um die Achse  $O_1 G_1$  und um die Achse  $O_1 B_1$  im Raume entstanden gedacht werden können. Wir erhalten demnach die Ecken  $V_1$  und  $T_1$  durch die projizierenden Geraden  $W_1 V_1$  und  $W_1 T_1$ . Die Projektion der über der Oktaederfläche gelegenen Ecke  $Q$  wird durch den Schnittpunkt  $Q_1$  bestimmt, welchen die von  $T_1$  nach  $p'''$  gezogene Gerade mit  $N_1$  bildet. Wir haben nur noch  $Q_1$  und  $V_1$  zu verbinden. Um eine Begrenzungsfläche in wahrer Größe zu gewinnen, verfahren wir wie folgt: Ein Deltoid ist durch die Seiten und eine Diagonale bestimmt. Im Bilde erscheinen bloß die längeren Kanten  $GW$  und  $WB$  in wirklicher Länge. Die kürzere Kante  $QT$  und die Diagonale  $QG$  liegen in einer Nebensymmetrieebene  $L$ , welche durch die Hauptachse geht, also horizontal projizierend ist. Denkt man sich  $Q$  und  $T$  mit der Ebene  $L$  fest verbunden und diese um die Hauptachse gedreht, bis sie mit der Bildebene parallel ist, so haben die Projektionen von Kante und Diago-

nale schließlich die wirklichen Längen angenommen. Die weitere Konstruktion ist aus der Figur ersichtlich. In Fig 5, III wurde das Deltoid unter Benutzung der gefundenen Werte entworfen. Je 3 derartige Deltoide werden zu einer Gruppe vereinigt und 8 Gruppen nach Art der Dreiecke im Oktaedernetze geordnet.

13. Aufgabe. Es ist das Netz des Ikositetraeders (2, 2, 1) mit  $a = 10 \text{ cm}$  zu berechnen. — Wir wählen das Deltoid HTBS und bestimmen es durch Berechnung der Seite  $BS = BT$  und der Diagonalen HB und ST.

$$\begin{aligned} O p''' &= 2 OF, O p' = 2 OA, \text{ daher } p' p''' = 2 AF \text{ und } p''' R = 2 AR \\ \text{oder } AR &= \frac{1}{3} A p''' = \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + 4a^2} = \frac{a}{3} \sqrt{5} = 7.4536 \text{ cm} = BS, \text{ ebenso} \\ \text{ist } BS &= \frac{1}{3} B p''', BT = \frac{1}{3} B p', \text{ daher } ST = \frac{1}{3} p' p''' = \frac{1}{3} \sqrt{4a^2 + 4a^2} = \\ &= \frac{2a}{3} = \sqrt{2} = 9.4281 \text{ cm}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Aus dem rechtwinkligen Dreieck } B g p''' \text{ folgt, da } B p''' = A p''' = \\ = a \sqrt{5} \text{ und } g p''' = \frac{1}{2} p' p''' = a \sqrt{2}: \quad g B = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Heißt } x \text{ der Schnittpunkt der Diagonalen } BH \text{ und } ST, \text{ so ist } B x = \frac{1}{3} B g \\ = \frac{a}{3} \sqrt{3}, g x = \frac{2a}{3} \sqrt{3}, H x = \frac{1}{4} g x = \frac{a}{6} \sqrt{3}, HB = H x + B x = \frac{a}{2} \sqrt{3} = \\ = 8.66025 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Um das Deltoid zu konstruieren (Fig. 5, IV), zeichnet man ein gleichschenkeliges  $\triangle$  mit der Basis  $ST = 9.43 \text{ cm}$  und den Seiten  $SB = BT = 7.45 \text{ cm}$ . Vom Scheitel B zieht man durch ST eine Normale  $= 8.66 \text{ cm}$  und verbindet ihren Endpunkt H mit S und T.

14. Aufgabe. Der Winkel, welchen die Ebenen zweier in der Ecke B zusammenstoßender, abwechselnder Deltoide miteinander bilden, wurde am Granat (Analcim oder Leucit) gemessen und als Wert  $109^\circ 28'$  gefunden; es ist die Ableitungszahl m zu berechnen.

$$\triangle O B g \dots O g = O B \text{ tang } O B g; O g = \frac{m a \sqrt{2}}{2}; O B = a.$$

$$\frac{m a \sqrt{2}}{2} = a \text{ tang } \frac{109^\circ 28'}{2}; m = \text{tang } 59^\circ 44' \sqrt{2} = 2.$$

Die Ableitungszahl m kann alle Werte von 1 bis  $\infty$  annehmen, somit sind unendlich viele Ikositetraeder denkbar. Denken wir uns alle Varietäten dem Oktaeder umschrieben, so ist leicht einzusehen, daß die Eckpunkte desselben allen Formen gemeinsam bleiben, wohl aber heben sich mit zunehmendem m sowohl die über den Kanten als auch die über



den Flächen des Oktaeders liegenden Ecken; der geometrische Ort für erstere liegt in der Schnittlinie zwischen den Haupt- und Nebensymmetrieebenen, für letztere in der Schnittlinie der Nebensymmetrieebenen untereinander. Die Formen werden mehr und mehr hexaederähnlich, insofern sie an ein Hexaeder erinnern, dessen Flächen eine von 4 Deltoiden gebildete Flächengruppe aufgesetzt ist. Wird schließlich  $m = \infty$ , so stellen sich je 4 in einer Oktaederecke zusammenstoßende Deltoide parallel mit einem Hauptschnitt und fallen in eine Fläche zusammen; aus 24 Deltoiden sind 6 Quadrate geworden, es ist ein Hexaeder entstanden. In Fig. 6, II ist der Übergang des Oktaeders in das Hexaeder mit den Ikositetraedern  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1)$  und  $(2,$

$2, 1)$  als Zwischenformen konstruktiv ersichtlich gemacht.

**Das Hexaeder** hat also nach dem Gesagten das Symbol  $(\infty, \infty, 1)$ . Die 6 Begrenzungsflächen sind Quadrate, welche sich in 12 Kanten schneiden, deren Flächenwinkel  $90^\circ$  beträgt. Die 8 Ecken sind 3flächig; die Achsen verbinden entsprechend der Ableitung die Mittelpunkte je zweier gegenüberliegender Quadrate.

15. Aufgabe. Es ist ein Hexaeder in Anschauungsstellung zu konstruieren. — Wir bilden gewissermaßen ein Deltoidikositetraeder mit der Ableitungszahl  $m = \infty$ . Die Punkte  $p'$ ,  $p''$  und  $p'''$  sind in unendliche Ferne gerückt, die Konstruktionslinie  $A p'''$  wird mit der Hauptachse parallel und fällt mit der von A nach  $-p'''$  gezogenen in eine Gerade zusammen. Analoges gilt von den anderen Konstruktionslinien, die nun nicht mehr die Lage von Kanten bezeichnen, sondern zu Seitensymmetralen von Quadraten geworden sind. Diese schneiden sich in Geraden, die mit je einer Achse parallel laufen und durch den Schnittpunkt je zweier Konstruktionslinien gehen. Es ergibt sich also für die Konstruktion folgender Vorgang: Man zeichne (Fig. 6, I) ein Oktaeder in Ansichtsstellung und ziehe durch jeden Eckpunkt desselben je 2 Gerade parallel mit den Achsen, die nicht zu dem betreffenden Eckpunkt gehören. Also durch A die Geraden  $RV \parallel FG$  und  $UT \parallel DB$ . RU schneidet sich mit der durch  $RZ \parallel AC$  gezogenen Geraden RZ in R und dies ist ein Punkt der Hexaederkante, die wir erhalten, wenn wir durch R parallel mit DB die Gerade IH ziehen.

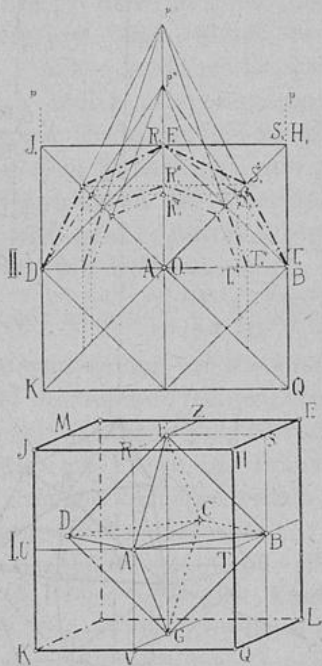


Fig. 6.

Analog bekommen wir die anderen Kanten. Dieselben liefern, bis zum gegenseitigen Schnitte verlängert, die Hexaederecken.

**Das Hexakisoktaeder.** Wenn wir (Fig. 1, I) in der Oktaederecke A die Begrenzungsfläche ABF in der Art aus ihrer Richtung bringen, daß der Punkt A seine Lage behält, die Punkte F und B aber ungleichmäßig, B mehr als F, gehoben werden, so wird jetzt ABF in einer Ebene liegen, welche die  $XX_1$ -Achse im Abstand  $a$ , die  $ZZ_1$ -Achse im Abstand  $na$  und die  $Y^1Y^1$ -Achse im Abstand  $ma$  schneidet. Hierbei ist  $m > n > 1$ . Das Parameterverhältnis lautet  $(m, n, 1)$ . Soll die Symmetrie,

wie sie am Oktaeder besteht, erhalten bleiben, so muß von demselben Punkte A noch eine 2. Ebene gelegt werden, welche die  $Y^1Y^1$ -Achse im Abstand  $n'a$  und die  $ZZ_1$ -Achse im Abstande  $ma$  schneidet. Derselbe Vorgang ist in den Punkten F und B und weiterhin in jedem Oktanten in analoger Weise zu wiederholen. In jedem Oktanten treten also 6 Flächen auf, es entsteht eine Form mit 48 Begrenzungsflächen: das Hexakisoktaeder. Dieses (Fig. 7, I) wird von 48 ungleichseitigen Dreiecken umschlossen, welche zu je 6 über einer Oktaederfläche eine pyramidenähnliche Gruppe bilden. 24 „mittlere“ Kanten liegen zu je 2 über einer Oktaederkante, die wie gebrochen erscheint, je drei „längere“ und ebenso je drei „kürzere“ befinden sich über jeder Oktaederfläche. Wie beim

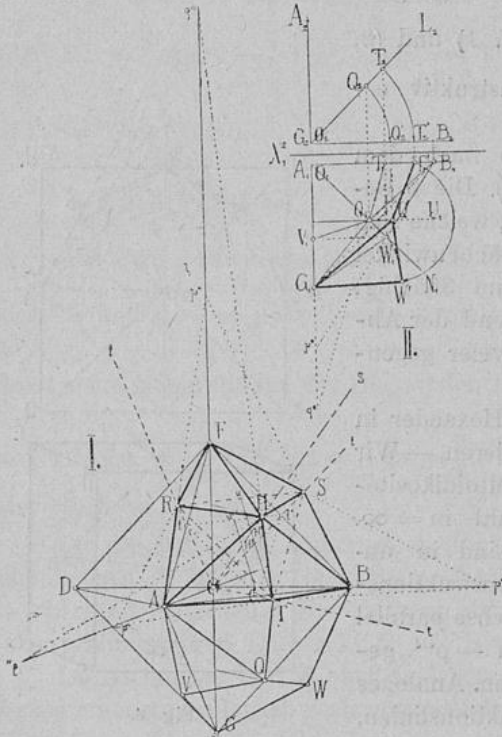


Fig. 7.

Ikositetraeder liegt über jeder Oktaederkante und jeder Oktaederfläche je eine Ecke; 6 weitere Ecken fallen wie dort mit denen des eingeschriebenen Oktaeders zusammen.

15. Aufgabe. Es ist das am Diamant und Fluorit für sich vorkommende Hexakisoktaeder  $(4, 2, 1)$  in Ansichtsstellung zu konstruieren. — Die Ecken R, T und S (Fig. 7) erhalten wir in derselben Art wie die gleichgelegenen Ecken am Ikositetraeder. Es erübrigt also nur, die Lage der Ecke H zu bestimmen. Die beiden Ebenen, in denen die Dreiecke ATH und TBH liegen, gehen einerseits durch T, andererseits durch  $q'''$ .

Eine Gerade, durch diese Punkte gelegt, ist die Schnittlinie beider und muß durch die Ecke H gehen. Analoges gilt von der Schnittlinie  $Sq'$  zwischen den Ebenen der Dreiecke FHS und HBS. Die beiden Schnittlinien durchschneiden sich in einem Punkte, d. i. in H. Die Konstruktion muß mit Rücksicht darauf erfolgen, daß bei H keine einspringenden Winkel entstehen. Man zeichne darum ein Oktaeder in Ansichtsstellung und schneide von jedem Koordinatenachsenaste 4a und zugleich 2a ab. Von jedem der beiden Endpunkte einer Oktaederkante ziehe man je eine Gerade gegen den Endpunkt von 2a jener Koordinatenachsenäste, die mit der betreffenden Kante in einer Ebene liegen (also von A nach  $p'''$  und von F nach  $p'$ ). Die Schnittpunkte dieser Geraden liefern die über den Oktaederkanten gelegenen Ecken (R, S, T u. s. w.). Bisher ist also die Konstruktion wie beim Ikositetraeder. Nun ziehe man von den gewonnenen Ecken je eine Gerade nach dem Endpunkte von 4a ( $q_1, q_2, q_3$ ) des 3. Koordinatenachsenastes (von T nach  $q'''$ , von S nach  $q'$  u. s. w.) und erhält in deren Schnittpunkten die über der Oktaederfläche gelegenen Ecken. Durch entsprechende Verbindung aller Ecken untereinander entstehen die Kanten.

16. Aufgabe. Es ist das Netz des Hexakisoktaeders  $(2, \frac{3}{2}, 1)$  durch Konstruktion darzustellen: ( $a = 10 \text{ cm}$ ). — Man geht analog vor wie beim Ikositetraeder. In Fig. 7, II ist  $O_1 B_1 G_1$  das 1. Bild des unteren, rechten, vorderen Achtels eines Oktaeders in der Grundstellung,  $N_1$  die Spur einer Nebensymmetrieebene,  $O_1 q''' = ma = 20 \text{ cm}$ ;  $O_1 p''' = na = 15 \text{ cm}$ . Die Punkte  $W_1, V_1$  und  $T_1$  bestimmen wir wie beim Ikositetraeder, hingegen erhalten wir  $Q_1$ , wenn wir  $T_1 q'''$  mit  $q'''$  verbinden, als Durchschnittspunkt von  $T_1 q'''$  mit  $N_1$ . Nun lassen sich die Projektionen der Kanten ziehen.  $G_1 W_1$  gibt die wirkliche Länge einer „mittleren“ Kante. Eine „längere“ Kante  $TQ$  und eine „kürzere“  $QG$  liegen in einer Nebensymmetrieebene  $L$ , welche durch die Hauptachse geht und horizontal projizierend ist. Denken wir uns wieder  $L$  um die Hauptachse gedreht, bis sie mit  $P_1$  parallel wird, so werden schließlich beide Kanten in wirklicher Länge erscheinen. Aus der Figur erkennen wir die weitere Konstruktion.  $G_1 W_1 Q_1$  ist ein Begrenzungsdreieck in wahrer Größe. Bei Zusammenstellung des Netzes hat man darauf zu achten, daß je 2 in einer Kante zusammenstoßende Dreiecke nicht kongruent, sondern symmetrisch sind, d. h. daß in denselben die gleichen Seiten und Winkel in umgekehrter Reihenfolge liegen. Je 6 Dreiecke werden zu einer Gruppe vereinigt und 8 solche Gruppen nach Art der Dreiecke im Oktaedernetze geordnet.

17. Aufgabe. Es ist das Netz des Hexakisoktaeders  $(4, 2, 1)$  zu berechnen,  $a = 10 \text{ cm}$ . — Wir wählen das  $\triangle AHR$  und bestimmen die 3 Seiten.

a) Seite AR. Diese wird so bestimmt wie die analog gelegene Kante des Ikositetraeders. Für dasselbe  $n$  bleiben nämlich Neigung und

Länge der Kante AR unverändert. Wir können aber  $AR = SB$  auch in folgender Weise berechnen:

$$\triangle p'''OB \dots \text{tang } OBp''' = \frac{p'''O}{OB} = \frac{na}{a} = n = 2; \sphericalangle OBp''' = 63^\circ 26' 5'' = \alpha.$$

$$\triangle t''BS \dots t''B = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{50} = 7.07107; \sphericalangle t''BS = OBp''' - 45^\circ = 18^\circ 26' 5'' = \beta; SB = \frac{t''B}{\cos 18^\circ 26' 5''} = 7.4536 \text{ cm.}$$

b) Seite RH. Für diese nehmen wir die gleich lange Seite HT. Im  $\triangle Tq'''O$  wird die Größe des Winkels, den HT mit OT bildet, d. i. des  $\sphericalangle OTq'''$  abhängen von der Entfernung des Punktes  $q'''$ , d. i. von der Zahl m, aber auch von der Zentraldistanz des Punktes T, welche wieder durch die Zahl n bedingt wird. Wir bestimmen HT aus dem  $\triangle THH'$ , welches wir erhalten, wenn wir die Punkte T, S und R mit einander verbinden, in dem so entstandenen gleichseitigen Dreiecke TSR die Höhenlinie Tu ziehen und auf diese von H die Normale  $HH'$  fallen. Das  $\triangle TSR$  ist einerseits die Basis einer regelmäßigen 3seitigen Pyramide, deren Scheitel in H liegt, anderseits die Basis einer regelmäßigen 3seitigen Pyramide mit O als Scheitel und den Strecken OT, OS und OR als Seitenkanten. Diese fallen mit den schon öfter genannten Schnittlinien zwischen Haupt- und Nebensymmetrieebenen zusammen und halbieren die Oktaederkanten in den Punkten t, t' und t''. Verbindet man diese Punkte untereinander, so erhält man wieder ein gleichseitiges Dreieck, welches der Oktaederfläche eingeschrieben und darum leicht zu berechnen ist. Dieses Dreieck erscheint als eine mit der Basis TSR parallele Schnittfigur in der Pyramide OTSR. Die Höhe der Oktaederfläche ist  $\frac{a}{2}\sqrt{6}$ , daher  $t'H'' = \frac{1}{3}a\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{a}{6}\sqrt{6}$ .

$$\triangle Tq'''O \dots OT = Ot' + t'T.$$

$$Ot' (\text{Zentraldistanz der Oktaederkante}) = \frac{a}{\sqrt{2}}; t'T (\triangle At'T) = At'tang\beta =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}} tang\beta; \text{tang } OTq''' = \frac{Oq'''}{OT} = \frac{m\sqrt{2}}{1 + tang\beta}.$$

$$\text{Für } m = 4 \text{ ist } \text{tang } OTq''' = \frac{\sqrt{32}}{1 + tang\beta};$$

$$1 + tang\beta = 1 + tang 18^\circ 26' 5'' = 1.333.$$

$$\text{tang } OTq''' = 4.2427; \sphericalangle OTq''' = 76^\circ 44' 12'' = \gamma.$$

$$\triangle OTH' \dots t'H'' \parallel TH' \quad Ot':OT = t'H'':TH';$$

$$TH' = \frac{OT \cdot t'H''}{Ot'} = (1 + tang\beta) \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Für  $a = 10 \text{ cm}$  ist  $TH' = 5.443 \text{ cm}$ ;  $\triangle HH'T \dots \sphericalangle H'TH = \gamma - \sphericalangle OTH'$ ;

$\sphericalangle OTH' = \sphericalangle t'H'' = \frac{109^\circ 28' 16''}{2}$  (halber Flächenwinkel des Oktaeders);

$\sphericalangle H'TH = 76^\circ 44' 12'' - 54^\circ 44' 8'' = 22^\circ 4''$ ,

$$TH = \frac{TH'}{\cos 22^\circ 4''} = 5.8706 \text{ cm.}$$

Seite  $AH = BH$ . Diese bestimmen wir aus dem  $\triangle HH'B$ ;  $H''B = \frac{2}{3}$  der Höhe des Oktaederdreieckes  $= \frac{a}{3} \sqrt{6}$ ;  $HH'' = HH' + H'H''$ ;

$HH' (\triangle H'TH) = HT \sin H'TH = 2.1993 \text{ cm.}$

$$OH' : OH'' = TH' : t'H''.$$

$$OH' = \frac{OH'' \cdot TH'}{t'H''}.$$

$OH''$  (Zentraldistanz der Oktaederfläche)  $= \frac{a}{3} \sqrt{3}$ ;  $OH' = 5.445 \sqrt{2}$ ;

$$H'H'' = OH' - OH'' = 1.9259; HH'' = 4.1252 \text{ cm.}$$

$$BH^2 = HH''^2 + H''B^2 = 4.1252^2 + \left(\frac{20}{\sqrt{6}}\right)^2 = 83.6839,$$

$$AH = HB = 9.148 \text{ cm.}$$

**Das Tetrakishexaeder.** Denken wir uns bei einem Hexakisoktaeder (Fig. 7, I) bei gleichbleibendem  $n$  die Ableitungszahl  $m$  mehr und mehr wachsend, so wird die Konstruktionslinie  $Tq'''$  und mit ihr die Kante  $TH$  sich immer steiler stellen, d. h. der parallelen Richtung mit  $Oq'''$  sich immer mehr nähern. Wird  $m = \infty$ , so stellt sie sich vertikal und fällt mit der Kante  $TQ$  im benachbarten Oktanten in eine Gerade zusammen, während die Kante  $AT$  den Flächenwinkel von  $180^\circ$  annimmt, d. h. verschwindet. Analoges gilt von den anderen Kanten: je 2 kürzere aneinanderstoßende Kanten benachbarter Oktanten verschmelzen in eine Kante, während alle „mittleren“ Kanten verschwinden; die Form ist, da je 2 an einer mittleren Kante gelegene Flächen in eine zusammenfallen, 24flächig geworden und es ist das Tetrakishexaeder entstanden. Dasselbe wird (Fig. 8) von 24 kongruenten, gleichschenkeligen Dreiecken begrenzt. Es erinnert an ein Hexaeder, dessen Flächen je eine 4seitige Pyramide aufgesetzt ist. Es hat 12 längere Kanten, welche wie die Kanten eines Hexaeders gelegen sind, und 24 kürzere zu je 4 über einer Fläche des eingeschriebenen Hexaeders. Acht Ecken haben die Lage von Hexaederecken, 6 liegen über den Flächen des Hexaeders. Das Parameterverhältnis ist  $(\infty, n, 1)$ . Es wäre unlogisch und unkonsequent, das Tetrakishexaeder aus dem Hexaeder abzuleiten, da dieses die Schlußform aller tesserale Gestalten bildet. Auch darf man sich die Varietätenreihe der Tetrakishexaeder nicht so vorstellen, daß die Pyramidenscheitel

immer höher rücken. Vielmehr bezeichnen diese die Endpunkte der Achsen und bleiben in ihrer Lage. Wohl aber bekommen die Kanten und Ecken, welche analog den Hexaederkanten und Hexaederecken gelegen sind, mit wachsendem  $m$  eine zunehmende Zentraldistanz. Denkt man sich alle Tetrakishexaeder so vereinigt, daß immer die Form mit nächst kleinerem  $m$  jener mit nächst größerem eingeschrieben ist, so bleiben nur die Pyramidenscheitel als Achsenendpunkte allen Formen gemeinsam. Die Schnittlinie zwischen einer Haupt- und Nebensymmetrielinie  $Ot$  ist der geometrische Ort für die Halbierungspunkte der den Hexaederkanten analog gelegenen Kanten. Für  $m=1$  werden diese zu den kürzeren Diagonalen in den Begrenzungsflächen des Rhombendode-

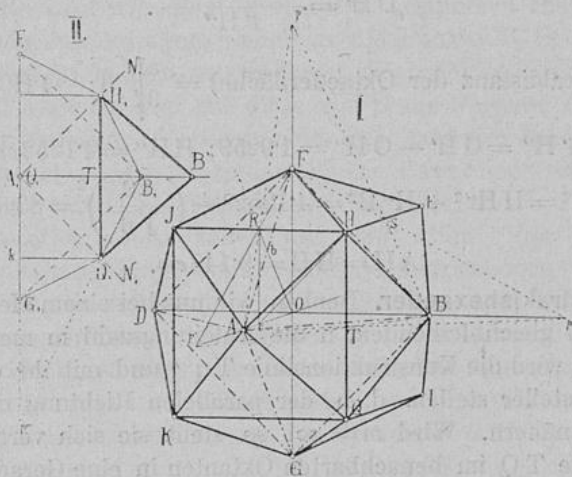


Fig. 8.

kaeders  $(\infty, 1, 1)$ , für  $m = \infty$  werden sie zu Hexaederkanten. Rhombendodekaeder und Hexaeder bilden die Grenzformen in der Reihe der Tetrakishexaeder, während diese selbst als Grenzformen der Hexakisoktaeder anzusehen sind.

18. Aufgabe. Es ist das am Fluorit vorkommende Tetrakishexaeder  $(\infty, 2, 1)$  in Ansichtsstellung zu konstruieren. — Man geht so vor, wie wenn man gewissermaßen ein Hexakisoktaeder mit  $n = \infty$  bilden sollte. Da die Punkte  $q'$ ,  $q''$  und  $q'''$  in unendliche Entfernung gerückt sind, so fallen  $TH$  und  $TQ$  (Fig. 7) in eine mit der Hauptachse parallele Gerade zusammen. Analoges gilt von allen mittleren Kanten des Hexakisoktaeders,  $RH$  wird  $\parallel$  mit der Quer-,  $SH$   $\parallel$  mit der Längsachse;  $TH$ ,  $RH$  und  $SH$  schneiden sich in  $H$  unter rechten Winkeln. Man entwerfe also (Fig. 8, I) ein Oktaeder in gedrehter Stellung, schneide von den Koordinatenachsenarmen  $2a$  ab, ziehe von  $A$  eine Gerade nach  $p''''$  und von  $F$

eine solche nach  $p'$ . Dadurch erhält man als Schnittpunkt R. In gleicher Weise suche man die Punkte T und S. Von R ziehe man eine Parallele zur Querachse, von S eine solche zur Haupt- und von T eine zur Längsachse. Sie schneiden sich in H. Nun verlängere man HR über den benachbarten Oktanten und mache  $IR = RH$ . So gewinnt man die Ecke I. Analog erhält man die Ecken E und Q.  $IK \parallel$  mit  $HQ$  und  $QK \parallel$  mit  $IH$  gezogen, liefern durch ihren Schnittpunkt die Ecke K. L wird gefunden, wenn man QL gleich und parallel mit HE macht. Wir begnügen uns mit den dem Beschauer zugewendeten Ecken, verbinden dieselben mit den Achsenendpunkten und erhalten so das Tetrakishexaeder.

19. Aufgabe. Es ist das Netz desselben Tetrakishexaeders  $(\infty, 2, 1)$  durch Konstruktion zu suchen; ( $a = 10 \text{ cm}$ ). — In Fig. 8, II wurde zunächst die rechte Oktaederhälfte in Grundstellung projiziert,  $O_1 F_1 = O_1 B_1 = O_1 G_1 = 10 \text{ cm}$ .  $N_1$  und  $N_1'$  sind die Spuren zweier Nebensymmetrieebenen.  $O_1 p''''$  erhält die Länge von  $2a = 20 \text{ cm}$ . Die von  $B_1$  nach  $p''''$  gezogene Gerade schneidet  $N_1$  in  $Q_1$ . Dieser Schnittpunkt bezeichnet die Lage einer 4flächigen Ecke. Das Bild der mit derselben gleichwertigen Ecke  $H_1$  liegt in der von  $Q_1$  mit  $F_1 G_1$  parallel gezogenen Geraden  $Q_1 H_1$  dort, wo diese in  $H_1$  die Spur  $N_1$  schneidet. Nun lassen sich die Projektionen der Kanten ziehen. Schließlich drehen wir das  $\triangle HBQ$  um  $HQ$ , bis es mit  $P_1$  parallel wird und konstruieren es, indem wir  $T B_1 = H_1 B_1$  machen, da  $H_1 B_1$  die wahre Größe der Dreieckshöhe ist. Je 4 derartige Dreiecke werden zu einer Pyramidengruppe vereinigt und 6 solche Gruppen nach Art der Flächen im Hexaedernetze geordnet.

20. Aufgabe. Das Netz desselben Tetrakishexaeders  $(\infty, 2, 1)$  ist zu berechnen ( $a = 10 \text{ cm}$ ). — Wir wählen in Fig. 8, I das  $\triangle IAH$  zur Berechnung und bestimmen es durch Basis und Höhe.

Für  $m = 2$  ist  $Op' = 2AO$ ,  $Op'''' = 2FO$ , daher  $p'p'''' = 2AF$ ,  $p''''R =$

$$= 2AR, AR = \frac{1}{3} Ap'''' = \frac{a}{3} \sqrt{5} = 7.4536 \text{ cm.}$$

$$\text{Es ist auch } Rc = \frac{1}{3} Op'''' = \frac{2a}{3} = 6.6666 \text{ cm.}$$

$$JH = 2 \cdot 6.6666 \text{ cm} = 13.3333 \text{ cm.}$$

21. Aufgabe. Der Flächenwinkel zwischen den Ebenen der Dreiecke  $IAH$  und  $KQA$  (Fig. 8, I) wurde durch Messen bestimmt und als Wert  $143^\circ 7' 48''$  gefunden; es ist die Ableitungszahl  $m$  zu berechnen.

$$2\alpha = 143^\circ 7' 48''; \alpha = 71^\circ 33' 54''.$$

$$\text{Im } \triangle AOp'''' \text{ ist } \tan \alpha = \frac{Op''''}{OA} = \frac{ma}{a} = m;$$

$$m = \tan 71^\circ 33' 54'' = 3.$$

Rückblick. Für irgend eine Begrenzungsfläche kommen 3 Koordinatenachsen in Betracht, welche mit ihr die Abschnitte  $o$ ,  $p$  und  $q$  bilden. Man nennt diese Abschnitte Parameter, ihr Verhältnis  $o:p:q$  das Parameterverhältnis. Die Glieder desselben lassen sich durch eine Zahl  $r$  dividieren, die so gewählt wurde, daß einer der Parameter  $a$  wird. Das Verhältnis lautet nun  $s:t:a$ . So ist es möglich, alle Formen auf eine bestimmte Größe zu bringen, so daß sie den einen Parameter  $a$  gemeinsam haben,  $a$  ist die Größe der kristallographischen Halbachse. Die Zahlen  $s$  und  $t$  zerlegen wir in Faktoren:  $s = ma$  und  $t = na$ . Nunmehr lautet das Verhältnis  $ma:na:a$  oder  $m:n:1$ . Das soll sagen: wir setzen den einen Parameter (die Halbachse  $a$ ) als Einheit und denken uns aus demselben die anderen Parameter durch Multiplikation mit den Zahlen  $m > 1$  und  $n > 1$  gebildet. Die Zahlen  $m$  und  $n$  nennt man Ableitungszahlen. Man kann ihnen einen beliebigen zwischen 1 und  $\infty$  liegenden Wert geben und wird stets eine Form erhalten. Erfahrungsgemäß kommen aber in der Natur nur solche Formen vor, bei welchen  $m$  und  $n$  sich als rational erweisen. (Empirisches Gesetz der rationalen Ableitungszahlen.) Meist sind  $m$  und  $n$  einfache Zahlen:  $\frac{3}{2}$ , 2, 3 u. s. w. Wenn wir eine beliebige der besprochenen Ableitungen ins Auge fassen, werden wir finden, daß durch die Ableitung die kristallographischen Achsen des Oktaeders weder mit Bezug auf ihr Längenverhältnis noch betreffs ihrer absoluten Länge eine Änderung erlitten haben. Ebenso wenig wurden die am Oktaeder bestehenden Symmetrieverhältnisse geändert. Drei gleich lange und normal aufeinander stehende kristallographische Achsen und 9 Symmetrieebenen kennzeichnen alle 7 Formen. Wegen dieser Übereinstimmung faßt man sie in eine Gruppe zusammen: das tesserale System.

Beim Oktaeder sind je 2 Flächen einander parallel. Wurden bei der Ableitung neue Flächen gelegt, so erforderten es die Symmetrieverhältnisse, daß jede derselben eine parallele Gegenfläche erhielt. Die bisher besprochenen tesserale Formen bestehen also aus Flächenpaaren. Auch die anderen Kristallsysteme werden vom Gesetze des Flächenparallelismus beherrscht.

Man unterscheidet dreierlei Flächentypen:

*a)* Pyramidenflächen, welche mit keiner der Koordinatenachsen parallel sind, also alle 3 in endlicher Entfernung schneiden. Hierher gehören: Das Oktaeder (1, 1, 1), Triakisoktaeder ( $m$ , 1, 1), Ikositetraeder ( $m$ ,  $m$ , 1) und Hexakisoktaeder ( $m$ ,  $n$ , 1).

*b)* Prismenflächen, die mit einer Koordinatenachse parallel sind. Hierher gehören das Rhombendodekaeder ( $\infty$ , 1, 1), welches aus 3 sich rechtwinkelig durchschneidenden Prismen mit quadratischem Querschnitt besteht, und das Tetrakisoktaeder ( $\infty$ ,  $n$ , 1), das man sich aus 3 sich recht-



winkelig durchdringenden Prismen entstanden denken kann, welche ein symmetrisches Achteck zum Querschnitt haben.

c) Endflächen (Schlußflächen), welche mit 2 Koordinatenachsen parallel sind. Hierher das Hexaeder ( $\infty, \infty, 1$ ).

In dem Parameterverhältnis ( $m, n, 1$ ) des Hexakisoktaeders sind die Verhältnisse aller anderen tesseralen Formen enthalten, da die Zahlen  $m$  und  $n$ , einzeln oder beide zugleich 1, ferner  $m$  oder  $n$  oder beide zugleich unendlich werden können und endlich  $m$  den Wert von  $n$  annehmen kann. Denken wir uns alle Varietäten der Hexakisoktaeder sich gegenseitig umschließend, so wird das Oktaeder den Abschluß nach innen, das Hexaeder den nach außen bilden. Oktaeder und Hexaeder (vergleiche Fig. 6, I) haben 6 Punkte gemeinsam, nämlich jene, die einerseits Eckpunkte des Oktaeders sind, andererseits die Mittelpunkte der Hexaederflächen bilden. In dem Zwischenraum zwischen den beiden Gestalten müssen wir uns die ganze Formenreihe der Hexakisoktaeder denken, aber auch die

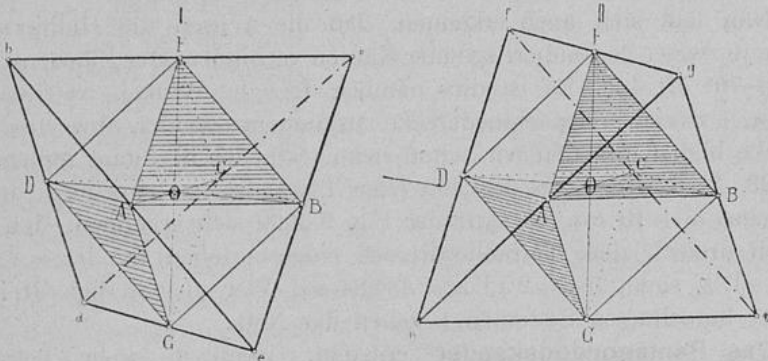


Fig. 9.

Varietätenreihen aller anderen tesseralen Kristallgestalten, die insgesamt die Endpunkte des Oktaeders gemeinsam haben.

Holoedrie und Hemiedrie. Nicht immer sind an einem Kristall alle Flächen entwickelt, welche demselben den charakteristischen Symmetriegrad verleihen. Gelangt nur die Hälfte der Begrenzungsflächen zur Ausbildung, so nennt man den Kristall hemiedrisch (halbflächig); im Gegensatz dazu heißen die vollkommen symmetrisch ausgebildeten Kristalle holoedrisch (vollflächig).

**Das Tetraeder** (Fig. 9) entsteht, wenn die Oktaederflächen nur in den abwechselnden Oktanten zur Ausbildung gelangen. Durch Erweiterung der schraffierten Flächen entsteht das positive (I), durch Erweiterung der nicht schraffierten Flächen das negative Tetraeder (II). Das Tetraeder hat 4 gleichseitige Dreiecke als Begrenzungsflächen, 6 Kanten und 4 Ecken. Es lassen sich nur die 6 Nebensymmetrieebenen legen. Da gerade von den Parallellflächen je eine nicht zur Ausbildung gekommen ist, so sind

alle Flächen gegen einander geneigt (geneigtflächige Hemiedrie):  
Parameterverhältnis: (1, 1, 1).

22. Aufgabe. Es ist das Tetraeder in Anschauungsfigur zu konstruieren. — Wenn wir im Oktaeder, welches in Fig. 9 vom Tetraeder umschlossen wird, die Ebenen, in welchen die (schraffierten) Dreiecke ABF und DGA liegen, zum Durchschnitt bringen, so bekommen wir eine Schnittlinie, welche durch A geht. Die beiden Ebenen schneiden sich mit der Ebene des Querhauptschnittes in Linien, die mit den Kanten FB und DG zusammenfallen; mit diesen muß auch die neue Schnittlinie parallel laufen. Da Analoges von den in den anderen Eckpunkten des Oktaeders entstehenden Schnittlinien gilt, so ergibt sich folgender Vorgang für die Konstruktion: Man zeichne ein Oktaeder in gedrehter Stellung und ziehe durch jede Ecke je eine Gerade, welche mit der gegenüberliegenden Seite des zur Vergrößerung gewählten Dreieckes parallel ist ( $be \parallel FB$ ,  $ce \parallel FA$  u. s. w.). Die Schnittpunkte (b, c, d und e) geben die Tetraederecken.

Nun läßt sich auch erkennen, daß die Achsen die Halbierungspunkte je zweier gegenüberliegender Kanten verbinden. Der Flächenwinkel beträgt  $70^{\circ} 31' 44''$ . Es ist dies nämlich derselbe Winkel, welchen die Ebenen je zweier in der Oktaederecke zusammenstoßender, abwechselnder Dreiecke bilden und den wir schon beim Oktaeder bestimmt haben.

23. Aufgabe. Es ist das Netz eines Tetraeders zu berechnen, dessen Halbachse  $a = 10 \text{ cm}$ . — Aus der Fig. 9 läßt sich erkennen, daß das Oktaederdreieck dem Tetraederdreieck eingeschrieben ist.  $bc = 2AB$ ;  $AB = a\sqrt{2}$ , somit  $bc = 2a\sqrt{2} = 28.284 \text{ cm}$ . Vier gleichseitige Dreiecke von der berechneten Seitenlänge geben das Netz.

**Das Pentagondodekaeder** entsteht, wenn in einem Tetrakis-hexaeder die abwechselnden Flächen erweitert werden. Je nachdem man die eine oder die andere Hälfte der Flächen erweitert, erhält man das positive und das negative Pentagondodekaeder. Die Begrenzungsflächen, 12 an der Zahl, sind symmetrische Fünfecke, bei welchen 4 Seiten gleich sind, während die 5. größer oder kleiner ist als die anderen. Wir bekommen die beste Übersicht, wenn wir uns ein Hexaeder eingeschrieben denken. Über jeder Fläche desselben befinden sich 2 Pentagone; je 2 Kanten liegen schräg über den Hexaederkanten, die wie gebrochen erscheinen; die ungleichen Kanten hingegen liegen einzeln über den Flächen des Hexaeders, mit dessen Kanten sie parallel laufen. Acht 3flächige Ecken fallen mit den Hexaederecken zusammen, während 12 ebenfalls 3flächige, aber unregelmäßige Ecken einzeln schräg über den Hexaederkanten sich befinden. Parameterverhältnis:  $(\infty, n, 1)$ .

24. Aufgabe. Es ist das am Pyrit und Glanzkobalt so häufig vorkommende Pentagondodekaeder  $\frac{1}{2}(\infty, 2, 1)$  in Anschauungsfigur zu konstruieren. — In der Fig. 10, I ist ein Pentagondodekaeder über das Tetrakis-

hexaeder ( $\infty, 2, 1$ ) gezeichnet, dessen abwechselnde Flächen schraffiert sind. Wir wollen die nicht schraffierten zur Erweiterung wählen. Vor allem machen wir uns klar, daß die Ecken J, H, K, Q u. s. w., welche die Lage der Hexaederecken haben, ihre Lage behalten müssen, da in denselben je 3 für die Erweiterung bestimmte Flächen zusammenstoßen. Die Flächen JAK und AHQ hingegen werden die Ecke bei A (d. i. die einer Oktaederecke entsprechende Ecke) zum Verschwinden bringen, indem sie eine einzige durch die Oktaederecke A verlaufende Schnittlinie geben, die aus demselben Grunde mit JK und HQ parallel sein muß, aus welchem die Tetraeder- mit den Oktaederkanten parallel sind. Der Ausdehnung dieser Schnittlinie wird nach oben eine Grenze gesetzt durch das Vordringen der Dreiecksebene JFH. Durch die Symmetrieverhältnisse wird es bedingt, daß die Symmetrielinie FR am tiefsten zwischen die Dreiecksebenen JAK und AHQ eindringt. Dort wo sich die Symmetrale FR mit der durch A gezogenen Vertikalen schneidet, wird eine Ecke entstehen, da der Schnittpunkt den 3 Dreiecksebenen JFH, JAK und AHQ gemeinsam ist. Diesen Vorgang wird man nach abwärts und weiterhin über jeder 4flächigen Tetrakishexaederecke wiederholen oder man wird, was schneller zum Ziele führt, einen Teil der Ecken auf Grund der Symmetrieverhältnisse bestimmen. Man

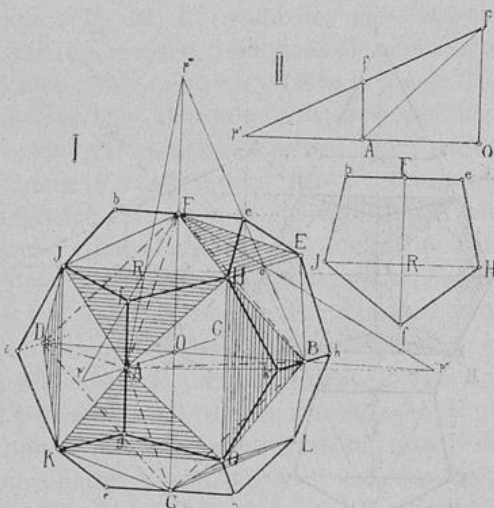


Fig. 10.

zeichne also das Tetrakishexaeder ( $\infty, 2, 1$ ) in gedrehter Stellung und ziehe durch jede einzelne 4flächige Ecke je eine Gerade parallel mit einer der gegenüberliegenden Achsen. Hat man dieselbe durch A vertikal gezogen, so kommt sie in B in die Längs- und in F in die Querrichtung zu liegen (also  $fg \parallel FG$ ,  $kh \parallel AO$ ,  $be \parallel DB$ ). Weiterhin wird die Seite JH ( $\triangle JHF$ ) halbiert und die durch den Halbierungspunkt R gezogene Dreieckssymmetrale bis zum Schnitt mit gf im Punkte f verlängert. f gibt die Lage einer 3flächigen Ecke. So bestimmt man auch k und e. Die anderen Ecken erhält man einfacher in der Weise, daß man unter Berücksichtigung der Symmetrie  $Ag = Af$ ,  $Fb = Fe$  und  $Bh = Bk$  macht.  $iD$  wird gleich und parallel mit  $kB$ ,  $ed$  gleich und parallel mit  $be$  gemacht. Schließlich werden die gewonnenen Eckpunkte

f, g, k, h, b, e, i mit den bleibenden Eckpunkten J, H, Q, K, E und L verbunden. Aus der Konstruktion ist zu ersehen, daß die Achsen durch die Halbierungspunkte der ungleichen Kanten gehen. Hier wurde mit irgend einer Fläche zugleich ihre parallele Gegenfläche erweitert, darum ist das Pentagondodekaeder parallelfächig (parallelfächige Hemiedrie). Die Nebensymmetrieebenen sind verloren gegangen, doch die Hauptsymmetrieebenen erhalten geblieben.

25. Aufgabe. Das Netz desselben Pentagondodekaeders  $\frac{1}{2}(\infty, 2, 1)$  ist durch Konstruktion zu suchen; ( $a = 10 \text{ cm}$ ). — Wir entwerfen zunächst (Fig. 11) das 1. Bild des zugehörigen Tetrakishexaeders in Grundstellung und zeichnen das Pentagondodekaeder. Die Länge von  $f_1 g_1$  entnehmen wir hierbei dem 2. Bilde. Um

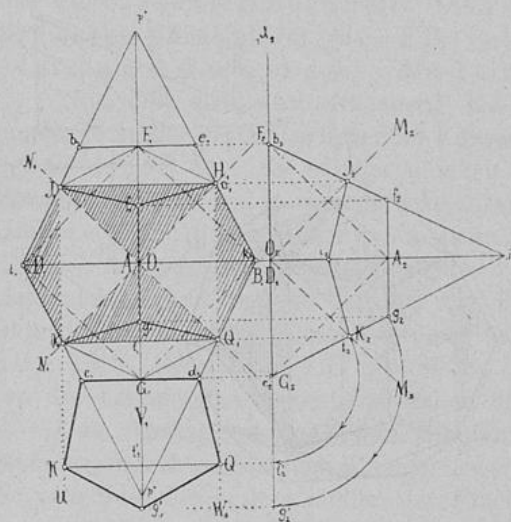


Fig. 11.

Raum zu ersparen, nehmen wir bei der Konstruktion des letzteren an, wir hätten das Pentagondodekaeder so in die Bildebene  $P_1$  gelegt, daß diese mit dem Querhauptschnitt zusammenfällt. Die weitere Aufgabe besteht darin, ein Pentagon in wirklicher Größe zu konstruieren. Wir wählen  $K c d Q g$  und legen es um die Kante  $c d$  in die Bildebene um.  $c_1 d_1$  gibt uns die Kante  $c d$  in wirklicher Länge, ebenso  $K_1 Q_1$  die Diagonale  $K Q$ . Die Drehungskreise projizieren sich auf  $P_{11}$ . Nach beendeter Drehung erscheinen die zweiten Bilder der Punkte  $t$  und  $g$  in  $t'_2$  und  $g'_2$ . Nunmehr kann das Pentagon  $K c_1 d_1 Q g'_1$  konstruiert werden. Dieselbe Aufgabe läßt sich auflösen, ohne daß man das 2. Bild entwirft. Man macht  $f_1 g_1 = b_1 e_1$ , ferner  $G_1 t'_1 = B_1 o_1$  und  $t'_1 g'_1 = o_1 e_1$ .

26. Aufgabe. Es ist das Netz des Pentagondodekaeders  $\frac{1}{2}(\infty, 2, 1)$  zu berechnen; ( $a = 10 \text{ cm}$ ). — Wir bestimmen (s. Fig. 10, I) im Pentagon  $b I f H e$  die Diagonalen  $F f$  und  $I H$ , ferner die Seite  $b e$  und die Strecke  $F R$ .

$$b F = A f = \frac{1}{2} O F = 5 \text{ cm} \text{ (siehe Fig. 10, II); } b e = 10 \text{ cm;}$$

$$f F = \frac{1}{2} p' F = \frac{a}{2} \sqrt{5} = 11.18 \text{ cm.}$$

$$FR = AR = \frac{1}{3} Ap''' = \frac{a}{3} \sqrt{5} = 7.45 \text{ cm.}$$

$$IH = 2Rc \text{ (Fig. 8)} = \frac{2}{3} Op''' = \frac{4a}{3} = 13.3 \text{ cm.}$$

Wir ziehen (Fig. 10, III)  $be = 10 \text{ cm}$ , errichten im Halbierungspunkte F eine Normale, tragen  $FR = 7.45 \text{ cm}$  und  $Ff = 11.18 \text{ cm}$  auf, ziehen durch R eine Parallele zu  $be$ , schneiden beiderseits  $\frac{13.333}{2} = 6.67 \text{ cm}$  ab, erhalten so die Punkte I und H und verbinden schließlich H mit  $f$  und  $e$ , I mit  $f$  und  $b$ .

## II. Das tetragonale (quadratische) System.

**Die tetragonale Pyramide** (Fig. 12, I), sollte im geometrischen Sinne besser Doppelpyramide genannt werden. Sie besteht nämlich aus 2 regulären, 4seitigen Pyramiden von gleicher Höhe, welche die Grundfläche gemeinsam haben. Nur des kürzeren Wortes wegen nennt der Kristallograph diese und die verwandten Formen der anderen Systeme Pyramiden. Die tetragonale Pyramide wird von 8 kongruenten, gleichschenkeligen Dreiecken begrenzt. Sie hat 8 gleiche Seiten- oder Polkanten und 4 gleiche Grund- oder Mittelkanten. Auch die Ecken sind von zweierlei Art. Man unterscheidet 2 einander gegenüberliegende, gleiche Scheitel- oder Polecken, in welchen sich je 4 Polkanten treffen, und 4 Mittelecken, in denen ebenfalls 4 Kanten, und zwar immer eine Polkante mit einer Mittelkante abwechselnd, zusammenstoßen. Die Form wird von 5 Symmetrieebenen beherrscht. 3 davon nennt man Hauptsymmetrieebenen. Dieselben stehen aufeinander senkrecht und liefern mit ihren Schnittlinien die Koordinatenachsen. Die 2 anderen heißen Nebensymmetrieebenen. Die in der Pyramide gelegenen Abschnitte der Koordinatenachsen nennt man auch hier kristallographische Achsen oder Achsen kurzweg. Sie verlaufen zwischen 2 gegenüberliegenden Ecken und stehen senkrecht aufeinander. Jene Achsen, welche je 2 Basis-ecken miteinander verbinden, sind gleich lang, man nennt sie Nebenachsen. Die dritte zwischen den beiden Polecken heißt Hauptachse und ist länger oder kürzer als die Nebenachsen. Irgend eine Begrenzungsfläche schneidet nämlich diese eine Achse (Hauptachse) nie unter demselben Winkel wie die beiden anderen. Dadurch gehen jene 4 Nebensymmetrieebenen des tesserale Systems, welche gegen die Hauptachse geneigt sind, verloren und es bleiben neben den 3 Hauptsymmetrieebenen nur die 2 mit der Hauptachse parallelen Nebensymmetrieebenen erhalten. Die Hauptachse stellt man vertikal, die eine Nebenachse von vorn nach rückwärts (Längsachse), die andere von links nach rechts (Querachse) (Grundstellung). Die beiden Nebensymmetrieebenen halbieren die rechten Winkel, welche die beiden vertikalen Hauptsymmetrieebenen

miteinander bilden. Es stehen also 4 Symmetrieebenen vertikal und schneiden sich unter Winkeln von  $45^\circ$  in einer Vertikallinie, d. i. in der Hauptachse. Kristalle mit derartigen Symmetrieebenen nennt man wirrtelig gebaut.

Eine tetragonal kristallisierende Mineralspezies weist verschiedenartige Pyramiden auf, die, auf dieselbe Basis gebracht, sich voneinander nur durch eine verschiedene Länge der Hauptachse unterscheiden. Man kann also aus ihnen eine Reihe bilden, in welcher sie nach der Länge der Hauptachse geordnet erscheinen. Im allgemeinen hat jede Mineralspezies eine eigene Pyramidenreihe mit bestimmten Dimensionsverhältnissen zwischen Haupt- und Nebenachsen. Man wählt aus der Reihe eine Form als Grundpyramide aus und bestimmt sie entweder dadurch, daß man den Flächenwinkel einer Kante mißt, oder daß man aus einem solchen Winkel das A. V. berechnet. Die Länge der halben Nebenachsen wird mit  $a$ , die der halben Hauptachse mit  $b$  bezeichnet, zugleich werden für  $a$  und  $b$  die Werte gesucht. Das Verhältnis ( $a, a, b$ ) wird gewöhnlich auf die Form  $(1, 1, \frac{b}{a})$  gebracht. Es gibt zugleich das Parameterverhältnis für die Richtung der Begrenzungsflächen an.

Aus der Grundpyramide lassen sich alle anderen Pyramiden der Reihe ableiten; man braucht nur die Hauptachse mit einer Zahl  $m$  multipliziert zu denken, welche erfahrungsgemäß stets rational ist und größer oder kleiner als 1 sein kann. Für  $m > 1$  erhält man die spitzigen, für  $m < 1$  die stumpfen Formen. Das A. V. der abgeleiteten Pyramiden lautet allgemein  $(a, a, mb)$ . In Fig. 18, II ist über einer Pyramide eine zweite mit dem A. V.  $(a, a, 2b)$  konstruiert.

27. Aufgabe. Es ist die Grundpyramide des Anatas in Anschauungsfigur mit dem A. V.  $(1, 1, 1.778)$  geometrisch zu konstruieren. — Die Konstruktion ist dieselbe wie die des Oktaeders in Fig. 2, nur gibt man der Halbachse  $b = O_2F_2$  die Länge von  $17.78 \text{ cm}$ , falls  $a = 10 \text{ cm}$  gemacht wurde. Beim Zeichnen einer tetragonalen Pyramide im kristallographischen Unterrichte betrachtet man das Achsenkreuz in gedrehter Lage als gegeben, nur die Hauptachse zieht man länger oder kürzer als beim Oktaeder, ohne sich an ein bestimmtes A. V. zu binden, da dies für Deduktionen gleichgiltig ist.

28. Aufgabe. Am Zirkon ist das A. V. der Grundpyramide  $(1, 1, 0.6404)$ ; es ist das Netz derselben zu berechnen. — In der Fig. 12, I ist

$$BA = BC = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{1 + 0.6404^2} = 1.187 a;$$

$$CA = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = 1.414 a.$$

Für  $a = 10 \text{ cm}$  ist  $BA = BC = 11.87 \text{ cm}$ ,  $CA = 14.14 \text{ cm}$ . Das Dreieck  $CAB$  ist somit durch seine 3 Seiten gegeben. Acht solche Dreiecke, nach Art der Flächen im Oktaedernetze geordnet, geben das Netz.

29. Aufgabe. Beim Rutil hat die Mittelkante der Grundpyramide den Flächenwinkel von  $84^{\circ} 40'$ ; es ist das Netz zu berechnen. — Wenn wir im Dreiecke  $CAB$  (Fig. 12, I) die Höhe  $BH$  ziehen und den Punkt  $H$  mit dem Mittelpunkt der Pyramide verbinden, so erhalten wir das rechtwinkelige Dreieck  $BOH$ . Da die Flächenwinkel der Pyramidenkanten durch die Hauptsymmetrieebenen halbiert werden, so ist der  $\sphericalangle OHB$  der halbe Flächenwinkel der Kante  $CA$ , mißt also  $\frac{84^{\circ} 40'}{2} = 42^{\circ} 20'$ .

$$CA = a\sqrt{2}; \quad OH = \frac{a}{2}\sqrt{2}; \quad BH = \frac{OH}{\cos 42^{\circ} 20'} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \cos 42^{\circ} 20'}$$

Für  $a = 10 \text{ cm}$  ist  $CA = 14.142 \text{ cm}$ ,  $BH = 9.567 \text{ cm}$ . Das gleichschenkelige  $\triangle BCA$  ist so durch seine Höhe und Basis bestimmt.

30. Aufgabe. Gegeben der Flächenwinkel der Polkante an der Grundpyramide des Rutils  $= 123^{\circ} 8''$ ; es ist das Netz zu berechnen. — Im Dreikant  $BAOC$  (Fig. 12, I und III) ist  $B$  der Scheitel,  $\delta, \varepsilon$  und  $\varphi$  sind die Kanten, die 3 Ebenen ( $\varepsilon\varphi$ ) ( $\varphi\delta$ ) und ( $\delta\varepsilon$ ) die Seiten und die von den Kanten gebildeten Winkel  $d, e$  und  $f$  die Kantenwinkel. Auf einer Kugel mit dem Halbmesser  $r = 1$  um  $B$  als Mittelpunkt erscheint ein rechtwinkeliges, sphärisches Dreieck  $DEF$ ;  $DE$  ist die Hypotenuse. Bekannt sind die 3 Flächenwinkel:

$$F = 90^{\circ}, \quad E = D = \frac{123^{\circ} 8''}{2} = 61^{\circ} 34'$$

$$\cos f = \cot E \cdot \cot D = \cot^2 E; \quad f = 73^{\circ} 57' 7''$$

$f$  ist der Scheitelwinkel im Begrenzungsdreiecke  $CAB$ , welches durch denselben seiner Form nach bestimmt ist. Für  $a = 10 \text{ cm}$  ist ( $\triangle BCA$ )

$$BA = \frac{CA}{2 \sin \frac{f}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin \frac{f}{2}} = 11.756 \text{ cm.}$$

31. Aufgabe. Aus dem Flächenwinkel der Polkante an der Grundpyramide des Anatas  $= 97^{\circ} 51'$  ist das A. V. zu berechnen. — Dies läßt

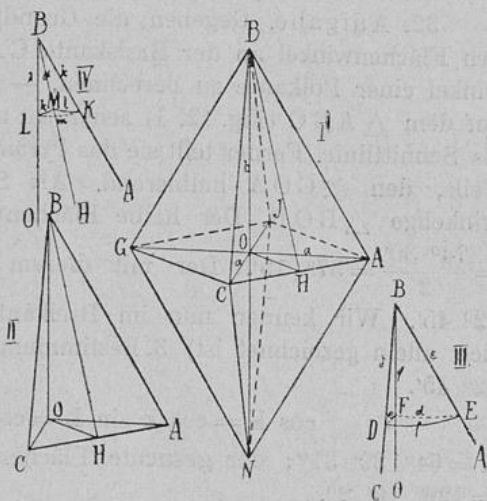


Fig. 12.

sich aus dem  $\triangle B O A$  (Fig. 12, I) bestimmen, falls wir den  $\sphericalangle A B O$  kennen. Diesem entspricht im Dreikant  $B A O C$  (Fig. III) der  $\sphericalangle d$ .  
 $E = D = 48^\circ 55' 30''$ ,  $F = 90^\circ$ .

$$\cos d = \frac{\cos D}{\sin E} = \frac{\cos E}{\sin E} = \cot E = \cot 48^\circ 55' 30'';$$

$$d = 29^\circ 21' 24''.$$

Im  $\triangle A B O$  ist  $\frac{b}{a} = \cot A B O = \cot d = \cot 29^\circ 21' 24''$ ;

$$\frac{b}{a} = 1.7779; \text{ für } a = 1, \text{ ist } b = 1.7779.$$

A. V.: (1, 1, 1.7779).

32. Aufgabe. Gegeben die Grundpyramide des Vesuvians durch den Flächenwinkel an der Basiskante  $C A = 74^\circ 30'$ ; es ist der Flächenwinkel einer Polkante zu berechnen. — Die Nebensymmetrieebene steht auf dem  $\triangle A B C$  (Fig. 12, I) senkrecht und gibt die Höhe  $B H$  desselben als Schnittlinie. Ferner teilt sie das Pyramidenachtel  $B A O C$  in 2 gleiche Teile, den  $\sphericalangle C O A$  halbierend. Als Schnittfigur entsteht das rechtwinkelige  $\triangle B O H$ . Der halbe Flächenwinkel der Mittelkante ist also  $= \frac{74^\circ 30'}{2} = 37^\circ 15'$ . Der mit diesem komplementäre  $\sphericalangle O B H$  mißt  $52^\circ 45'$ . Wir kennen nun im Dreikante  $B A O H$  (welches in IV für sich allein gezeichnet ist) 3 Bestimmungsstücke:  $M = 90^\circ$ ,  $L = 45^\circ$ ,  $k = 52^\circ 45'$ .

$$\cos K = \cos k \sin L = \cos 52^\circ 45' \sin 45^\circ.$$

$$K = 64^\circ 39' 31''; \text{ der gesuchte Flächenwinkel der Kante } B A = 2K = 129^\circ 19' 2''.$$

33. Aufgabe. Beim Anatas hat die Grundpyramide an der Mittelkante den Flächenwinkel von  $136^\circ 36'$ ; außer dieser findet man Pyramiden mit den Mittelkanten:  $39^\circ 30'$ ,  $53^\circ 22'$ ,  $79^\circ 54'$ . Es sind die Ableitungszahlen dieser Pyramiden zu berechnen.

Im Dreiecke  $B O H$  ist  $b = O H \tan O H B$ .

$$\text{Für } \sphericalangle O H B = \frac{136^\circ 36'}{2} = 68^\circ 18' \text{ ist } b = O H \cdot 2.5129.$$

Dies gilt für die Grundpyramide. Wird aus dieser eine andere Pyramide abgeleitet, so bleibt im Dreiecke  $B O H$  die Seite  $O H$  unverändert, die halbe Hauptachse  $O B = b$  wird zu  $m b$  und der Winkel  $O H B$  nimmt einen anderen Wert an. Nennen wir die Ableitungszahlen in den in der Aufgabe bezeichneten Pyramiden der Reihe nach  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$ , so ist

$$m_1 b = O H \tan 19^\circ 45' = O H \cdot 0.35904,$$

$$m_2 b = O H \tan 26^\circ 41' = O H \cdot 0.50258,$$

$$m_3 b = O H \tan 39^\circ 57' = O H \cdot 0.83761.$$



Dividieren wir diese Gleichungen der Reihe nach durch  $b = OH \cdot 2.5129$ , so ist

$$m_1 = \frac{0.35904}{2.5129} = \frac{1}{7}; \quad m_2 = \frac{0.50258}{2.5129} = \frac{1}{5}; \quad m_3 = \frac{0.83761}{2.5129} = \frac{1}{3}.$$

Dieselben und ähnliche Aufgaben lassen sich auch und oft kürzer durch geometrische Konstruktion, besonders durch das Projektionsverfahren auflösen.

34. Aufgabe. Beim Zinnerz ist das A. V. der Grundpyramide (1, 1, 0.672); es ist das Netz derselben mit  $a = 10 \text{ cm}$  geometrisch zu konstruieren.

Die Betrachtung der Fig. 12, I läßt erkennen, daß in den beiden Dreiecken  $OCH$  und  $OHB$  die Bestimmungsstücke für das Begrenzungsdreieck enthalten sind. Dieselben lassen sich aus den Angaben konstruieren. — Ebenso leicht läßt sich die Aufgabe durch das Projektionsverfahren auflösen. Man bringt das Pyramidenachtel  $BAOC$  (Fig. 12, II) in einer Lage vor die Bildebene  $P_1$ , daß das Dreieck  $AOB$  mit derselben parallel ist. Dieses Dreieck projiziert sich (Fig. 13, I) in wirklicher Größe und läßt sich aus den Angaben  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 6.72 \text{ cm}$  darstellen. Damit

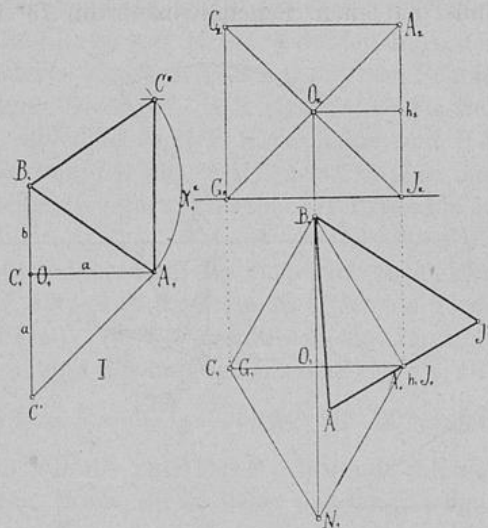


Fig. 13.

erscheint auch das ganze Pyramidenachtel projiziert. Nun legt man zunächst das  $\triangle CAO$  um die Kante  $OA$ , schließlich das  $\triangle CAB$  um die Kante  $BA$  in die Bildebene.  $B_1A_1C_1$  gibt ein Begrenzungsdreieck in wirklicher Größe.

35. Aufgabe. Gegeben die Grundpyramide des Apophyllits durch den Flächenwinkel einer Mittelkante  $= 120^\circ 25'$ ; es ist das Netz mit  $a = 10 \text{ cm}$  geometrisch zu konstruieren. — Man betrachte die Fig. 12, I. Auch für diese Aufgabe enthalten die beiden Dreiecke  $COH$  und  $BOH$  die zur Lösung erforderlichen Stücke. Man zeichnet zunächst auf Grund der Angabe  $a = 10 \text{ cm}$  das  $\triangle COH$  und weiterhin mit  $OH$  als Kathete das rechtwinkelige Dreieck  $OHB$ , wobei der  $\sphericalangle OHB$  den Wert von  $\frac{120^\circ 25'}{2} = 60^\circ 12' 30''$  erhält.  $CA$  ist die Basis,  $BH$  die Höhe eines Begrenzungsdreieckes;  $OC:OB$  ist das A. V. — Um die Aufgabe mittels

des Projektionsverfahrens aufzulösen, denken wir uns (Fig. 13, II) die tetragonale Pyramide so vor die Bildebene gehalten, daß eine Nebensymmetrieebene mit ihr parallel ist und eine Mittelkante in sie zu liegen kommt. Die Basis wird sich auf  $P_{11}$  als Quadrat in wirklicher Größe projizieren, wenn wir  ${}_1X_2$  normal auf die Hauptachse ziehen. Mit Hilfe des 2. Bildes gewinnen wir die Länge einer Mittelkante  $C_1 A_1$  im 1. Bilde und konstruieren dieses, indem wir zunächst in  $A_1$  einen  $\sphericalangle$  von  $60^\circ 12' 30''$  bilden. Die weitere Konstruktion ergibt sich von selbst.  $A_1 B_1 J_1$  ist die Projektion des  $\triangle A B J$ , das wir um seine Höhenlinie  $B h$  drehen, bis es mit  $P_1$  parallel wird, und hierauf konstruieren.

36. Aufgabe. Das Begrenzungsdreieck der Grundpyramide des Rutils hat einen Scheitelwinkel von  $73^\circ 57'$ ; es ist das Netz der Pyramide mit  $a = 10 \text{ cm}$ , sowie

der Flächenwinkel einer Polkante zu konstruieren und das A. V. zu suchen. — Im Dreikant  $B E F D$  (siehe Fig. 12, I und III) ist die Hypotenuse  $f = 73^\circ 57'$  bekannt. Der Umstand, daß  $E = D$ , ersetzt uns das 3. Bestimmungsstück. Wir legen (Fig. 14, I) das Dreikant mit der Seite  $(\varepsilon \delta)$ , deren Winkel  $f$  gegeben ist, auf  $P_1$ , so daß zugleich  $\varepsilon$  normal auf  ${}_1X_2$  fällt. Da  $E = D$ , so wird die Projektion der Kante  $\varphi$  den von  $\varepsilon$  und  $\delta$  gebildeten Winkel halbieren. Zu-

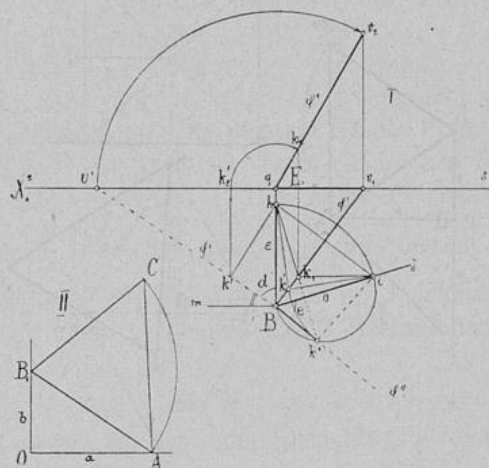


Fig. 14.

nächst wollen wir die Seiten  $(\delta \varphi)$  und  $(\varepsilon \varphi)$  in die Bildebene umlegen. Wenn wir in einem Punkte der Kante  $\varphi$  normal auf dieselbe eine Ebene  $E$  legen, so erzeugt sie als Schnittfigur mit dem Dreikant ein gleichschenkeliges, rechtwinkeliges Dreieck. Dieses entspricht in Fig. 12, I dem  $\triangle C A O$ . Die Hypotenuse  $h i$  fällt in die Bildebene. Die wirkliche Länge der Katheten ist nun leicht zu erhalten, indem man in  $h$  und  $i$  Winkel von  $45^\circ$  konstruiert, deren Schenkel sich in  $k^1$  schneiden.  $i h k^1$  ist die Schnittfigur in wahrer Größe, umgelegt um  $h i$ . Um die Lage von  $k$  im Raume und dessen Projektion  $k_1$  zu finden, legen wir die Seite  $B C O$ , beziehungsweise  $B i k$  um die Kante  $B i$  um.  $k i$  in seiner neuen Lage muß folgenden Bedingungen entsprechen: es muß vom Punkte  $i$  ausgehen, in seiner wirklichen Länge  $k' i$  erscheinen und endlich auf  $\varphi^{11}$  normal stehen. Darum beschreiben wir von  $i$  mit dem Halbmesser  $i k'$  einen Kreisbogen. Ferner konstruieren wir mit  $B i$  als Durchmesser einen

Halbkreis. Der Schnittpunkt  $k^{11}$  der beiden Kreise gibt den Endpunkt von  $ik^1$ . Bilden wir nämlich mit  $k^{11}$  als Scheitel einen Winkel im Halbkreis, so ist wirklich  $ik^{11} = ik^1$ , steht normal auf  $Bk^{11}$  und entspricht somit den Bedingungen. Wir erhalten nun  $\varphi^{11}$ , wenn wir durch B und  $k^{11}$  eine Gerade ziehen.  $e$  ist der gesuchte Kantenwinkel, den wir auch auf die andere Seite übertragen. Nun läßt sich auch  $k_1$  bestimmen und der Flächenwinkel E in der üblichen Weise darstellen. — In der Pyramide ist E der halbe Flächenwinkel einer Polkante. Über die weitere Konstruktion orientieren wir uns in der Fig. 12, I. Im  $\triangle OAB$  kennen wir den  $\sphericalangle OBA = d$ ,  $\sphericalangle OAB = 90^\circ - OBA$  und  $OA = 10 \text{ cm}$ . Wir errichten (Fig. 14, I) in B die Gerade  $Bm$  normal auf  $qB$  und erhalten den  $\sphericalangle mBv^1 = 90^\circ - d$ . In Fig. 14, II zeichnen wir einen rechten Winkel, geben dem einen Schenkel  $OA$  die Länge von  $10 \text{ cm}$ , errichten in A den Winkel  $OAB = mBv^1$  und verlängern den Schenkel  $AB$  bis zum Schnitt mit  $OB$ .  $OA:OB = a:b$  gibt uns das A. V.,  $AB$  eine Seite des Begrenzungsdreieckes. Wir bilden schließlich mit B als Scheitel und  $BA$  als den einen Schenkel einen  $\sphericalangle$  von  $73^\circ 59'$ , machen  $BC = AB$  und verbinden A mit B.  $\triangle ABC$  ist eine Begrenzungsfläche der Pyramide in wahrer Größe.

37. Aufgabe. Gegeben die Grundpyramide des Vesuvians durch den Flächenwinkel der Polkante  $= 129^\circ 19'$ ; es ist das Netz der Pyramide durch Konstruktion zu ermitteln; ( $a = 10 \text{ cm}$ ). — Wir orientieren uns zunächst wieder mittels der Fig. 12. Bekannt sind uns im Dreikant  $BEDF$  (Fig. III) die 3 Flächenwinkel:  $F = 90^\circ$ ,  $D = E = \frac{129^\circ 19'}{2} = 64^\circ 39' 30''$ . Wir

kommen indirekt zum Ziel, indem wir die zu  $BEDF$  gehörende Supplementarecke (Polarecke) konstruieren. Wenn wir in dieser die den Flächenwinkeln der primären Ecke D, E und F gegenüberliegenden Kantenwinkel  $d^1$ ,  $e^1$  und  $f^1$  nennen, so ist  $d^1 = e^1 = 180^\circ - 64^\circ 39' = 115^\circ 21'$ ;  $f^1 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ . Die den Kantenwinkeln  $d^1$ ,  $e^1$  und  $f^1$  gegenüberliegenden Kanten bezeichnen wir mit  $\delta^1$ ,  $\varepsilon^1$  und  $\varphi^1$ . — In Fig. 15 ist das Netz der Polarecke derart auf  $P_1$  entworfen, daß die Kante  $\varphi^1$  auf der Bildachse  ${}_1X_2$  normal steht. Zweck der Konstruktion ist, den Winkel  $F^1$  zu gewinnen, der mit dem Kantenwinkel  $f$  der primären Polarecke, d. i. mit dem Scheitelwinkel eines Begrenzungsdreieckes sich zu  $180^\circ$  ergänzt. Zunächst konstruieren wir die körperliche Ecke, indem wir die Seite ( $\varepsilon_1^1 \delta^1$ ) um die Kante  $\delta^1$  und die Seite ( $\varepsilon^1 \varphi^1$ ) um  $\varphi^1$  nach aufwärts drehen. Wenn wir  $\varepsilon^1$  bis zum Schnitt mit  ${}_1X_2$  verlängern, so erhalten wir den Punkt  $v^1$ , der sich bei der Drehung in  $P_{11}$  bewegen wird. Die Spur der Drehungsebene von  $\varepsilon_1^1$  ist diese Gerade selbst, da  $\varepsilon_1^1$  normal auf  $\delta^1$  steht. Denken wir uns in der Geraden  $\varepsilon_1^1$  einen Punkt  $v$ , der ebenso weit von S absteht als  $v^1$ , so werden schließlich  $v^1$  und  $v$  im Punkte  $v_1$  zusammenfallen und  $v_1S$  ist die Projektion der Kante  $\varepsilon$  im fertigen Dreikant. — Der Flächenwinkel  $F^1$  zwischen den Seiten ( $\varepsilon^1 \varphi^1$ ) und  $\delta^1 \varphi^1$  projiziert sich auf  $P_{11}$

und läßt sich hier konstruieren. Nun schließen wir umgekehrt: ein Flächenwinkel der Supplementarecke ergänzt sich mit dem gegenüberliegenden Kantenwinkel des Dreikants zu  $180^\circ$ . Darum ist  $f = 180^\circ - F^1$ . Wir entnehmen diesen Winkel unmittelbar der Figur, es ist der  $\sphericalangle v^1 B v_2$ . — In der Fig. 12, I ist  $f$  der Winkel  $A B C$ . Durch diesen ist das Dreieck  $C A B$  seiner Form nach gegeben. Wir brauchen nur mit einem beliebigen Halbmesser z. B. mit  $r = v^1 B$  einen Bogen zu beschreiben, um von den Schenkeln gleiche Stücke abzuschneiden, und die Schnittpunkte  $v^1$  und  $v_2$  miteinander zu verbinden. Nun soll aber die Pyramide eine bestimmte Größe,  $a = 10 \text{ cm}$ , besitzen. Darum konstruieren wir ein gleichschenkeliges, rechtwinkeliges  $\triangle O A C$  (Fig. 15, II), so zwar, daß  $O A = O C = 10 \text{ cm}$ , und erhalten in der Hypotenuse  $C A$  die Basis des Begrenzungsdreieckes.

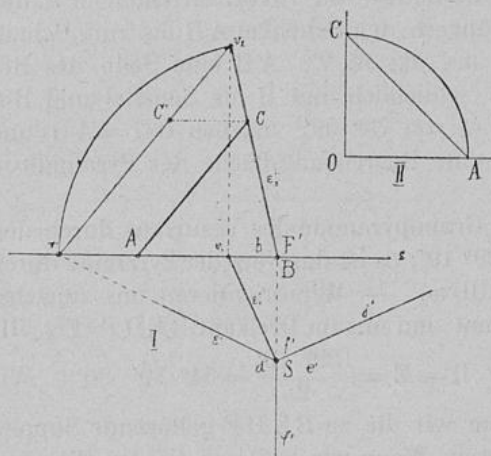


Fig. 15.

Wir schneiden von  $v^1 v_2$  die Strecke  $v^1 C^1 = A C$  ab, ziehen von  $C^1$  parallel zu  $v^1 B$  die Gerade  $C^1 C$ , ferner von  $C$  die Gerade  $C A \parallel C^1 v^1$  und haben damit das Begrenzungsdreieck  $A B C$  in wahrer Größe erhalten.

**Die ditetragonale oder 8seitige Pyramide.** Wenn wir in Fig. 12, I die Begrenzungsfläche  $C A B$  in der Art aus ihrer Richtung bringen, daß wir sie um die Kante  $C B$ , den Punkt  $A$  nach vorwärts, drehen, so wird die Dreiecksebene die  $Y Y_1$ -Achse nunmehr in

einem Punkte treffen, dessen Zentralabstand größer als  $a$  ist, also  $n a$  beträgt, wobei  $n > 1$ . Das Parameterverhältnis für die neue Ebene lautet  $a : n a : b$ . Soll der an der tetragonalen Pyramide bestehende Symmetriegrad erhalten bleiben, so muß derselbe Vorgang an der Kante  $B A$  und weiterhin in jedem Oktanten zweimal wiederholt werden. Es entsteht ein neuer Körper, der doppelt so viele Flächen hat als die Pyramide: die ditetragonale Pyramide. Die Begrenzungsflächen sind ungleichseitige Dreiecke. Wir zählen 8 Mittel- und 16 Polkanten. Die ersteren schließen ein symmetrisches Achteck (Ditetragon) ein, d. i. ein Achteck mit gleichen Seiten und abwechselnd gleichen Winkeln. Die Polkanten sind von doppelter Art: 8 sind länger und schärfer, 8 stumpfer und kürzer. Jene 8 Polkanten, welche dieselbe Lage haben wie jene der tetragonalen Pyramide, nennt man primäre, die anderen sekundäre. Die Ecken sind ebenfalls von dreierlei Art. Man unterscheidet 2 acht-

flächige Polecken, 4 primäre und 4 sekundäre Mittelecken. Von jeder tetragonalen Pyramide (a, a, mb) läßt sich eine Reihe von ditetragonalen ableiten. Das allgemeine Symbol für alle ditetragonalen Pyramiden ist somit (a, na, mb).

38. Aufgabe. Es ist eine ditetragonale Pyramide (a, 2a, b) aus einer tetragonalen (a, a, b) zu bilden. In Fig. 16, I ist über die Flächen BCA und CNA der tetragonalen Pyramide je ein Flächenpaar der ditetragonalen Pyramide gezeichnet. Das  $\triangle BCH$  liegt in einer Ebene, deren Richtung durch die Kante BC und den Punkt  $p''$ , ebenso das  $\triangle CNH$  in einer Ebene, deren Richtung durch die Kante CN und denselben Punkt  $p''$  bestimmt wird. Diesen Punkt denken wir uns durch Multiplikation der Halbachse a mit  $n=2$  erhalten. Die beiden Ebenen gehen also einerseits durch C, andererseits durch  $p''$ , darum muß auch ihre Schnittlinie zwischen C und  $p''$  verlaufen. In analoger Weise erhalten wir die Schnittlinie  $A p'$  zwischen den Ebenen der Dreiecke HAB und HNA. Dort, wo sich  $C p''$  und  $A p'$  treffen, liegt die sekundäre Ecke H; hier müssen nämlich auch die Schnittlinien BH und HN einlaufen, da der Punkt H allen 4 Flächen gemeinsam ist. Damit ist die Art und Weise begründet, wie man die ditetragonale Pyramide zu konstruieren hat.

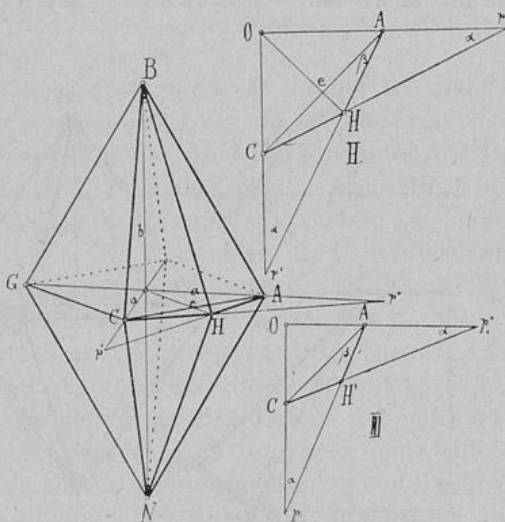


Fig. 16.

Man entwerfe eine tetragonale Pyramide in gedrehter Stellung und schneide von den Koordinatenachsen  $2a$  ab. Dadurch erhält man die Punkte  $p'$  und  $p''$ . Nun verbinde man C mit  $p''$ , A mit  $p'$ . So erhält man den Schnittpunkt H, von dem aus die neuen Kanten gezogen werden. Will man die Form vollständig zeichnen, so wiederhole man diesen Vorgang über den anderen Pyramidenflächen oder ergänze die Figur unter Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse.

39. Aufgabe. Am Zirkon findet man die ditetragonale Pyramide (a, 3a, 3b); das A. V. für die Grundpyramide ist (1, 1, 0.6404). Es ist das Netz dieser ditetragonalen Pyramide mit  $a = 10\text{cm}$  zu berechnen. — Für  $a = 10\text{cm}$  ist  $3a = 30\text{cm}$ ,  $3b = 3 \cdot 6.404\text{cm} = 19.212\text{cm}$ . Wir suchen (Fig. 16, I und II) die 3 Seiten des  $\triangle BHA$ .

$$Op' = 3Oc = 3Oa; \triangle Op'A \dots Op'' : Oa = p'H : HA;$$

$$AH = \frac{1}{4} Ap' = \frac{1}{4} \sqrt{a^2 + 9a^2} = \frac{a}{4} \sqrt{10} = 7.9057 \text{ cm.}$$

$$Oe = \frac{a}{2} \sqrt{2}; \quad eH = \frac{1}{2} Oe = \frac{a}{4} \sqrt{2};$$

$$OH = \frac{a}{2} \sqrt{2} + \frac{a}{4} \sqrt{2} = \frac{3a}{4} \sqrt{2} = 10.6066 \text{ cm.}$$

$$BH = \sqrt{OB^2 + OH^2} = \sqrt{19 \cdot 212^2 + 10 \cdot 6066^2} = 21.94 \text{ cm.}$$

$$BA = \sqrt{OB^2 + OA^2} = \sqrt{19 \cdot 212^2 + 10^2} = 21.65 \text{ cm.}$$

40. Aufgabe. Wie lautet die Ableitungszahl für die reguläre 8seitige Pyramide? — Im regulären Achteck hat ein Winkel  $135^\circ$ , somit ist  $\beta = 22.5^\circ$ .  $\sphericalangle ACO = 45^\circ$  (Fig. 16, III) ist ein Außenwinkel des  $\triangle ACP'$ , darum ist  $\alpha = 45^\circ - \beta = 22.5^\circ$ .  $\triangle ACP'$  ist somit gleichschenkelig und

$$p'G = CA = a\sqrt{2}.$$

$$Op' = OC + Cp' \text{ oder}$$

$$na = a + a\sqrt{2}; \quad n =$$

$$= 1 + \sqrt{2}. \text{ Die Ableitungszahl wäre also}$$

hier irrational. Formen, welche eine irrationale

Ableitungszahl voraussetzen, kommen an

Mineralien nicht vor, darum fehlt auch die

reguläre 8seitige Pyramide in den Reihen

der ditetragonalen Pyramiden.

41. Aufgabe. Am

Zinnerz findet sich eine

ditetragonale Pyra-

mide ( $a, \frac{3}{2}a, 3b$ ); die Grundpyramide dieses Minerals hat das A. V.

(1. 1. 0.6721). Das Netz der ditetragonalen Pyramide mit  $a = 10 \text{ cm}$  ist durch Projektion zu suchen.

Wir denken uns Fig. 17, I die tetragonale Pyramide ( $a, a, 3b$ ) in Grundstellung, mithin so vor  $P_1$  gebracht, daß Haupt- und Querachse mit ihr parallel verlaufen, ziehen  ${}_1X_2$  in der Querrichtung und konstruieren auf  $P_{11}$  zunächst die Basis der tetragonalen und darüber die der ditetragonalen Pyramide, nachdem wir  $O_2 p' = O_2 p_1 = \frac{3}{2} a = 15 \text{ cm}$  gemacht haben. Nun läßt sich das 1. Bild der ditetragonalen Pyramide entwerfen, wobei wir  $O_1 B_1 = 3b = 3.6 \cdot 721 \text{ cm} = 20.16 \text{ cm}$  machen. — Weiter handelt es sich darum, eine Begrenzungsfläche in wirklicher Größe zu erhalten. Wir wählen das  $\triangle BHA$ . Die Seite  $BA$  ist mit  $P_1$  parallel und hat in

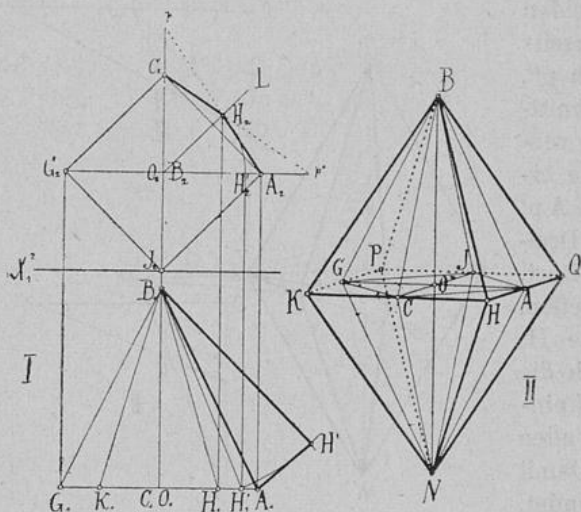


Fig. 17.

ihrer Projektion die wirkliche Länge. Die Kante BH liegt in einer Nebensymmetrieebene L, die durch die Hauptachse geht. Denken wir uns BH mit der Ebene L verbunden und diese mit BN als Drehungsachse um  $45^\circ$  gedreht, so wird nach beendeter Drehung die Projektion der Kante die wirkliche Länge angenommen haben. Der Drehungskreis für den Punkt H projiziert sich auf  $P_{11}$ .  $H'_2$  bezeichnet seine Lage nach beendeter Drehung auf  $P_{11}$ ,  $H'_1$  hingegen auf  $P_1$ . Die Strecke  $B_1H'_1$  gibt die Kante in wirklicher Länge. Die Länge der 3. Kante  $HA = H_2A_2$  entnehmen wir dem 2. Bilde. — Man beachte, daß das Dreieck  $B_1A_1H'$  um  $A_1B_1$  umgelegt ist, daß also Seiten und Ecken in umgekehrter Reihenfolge liegen als beim  $\triangle BHA$ . Auch übersehe man nicht, daß 2 an einer sekundären Kante aneinanderstoßende Dreiecke nicht kongruent, sondern symmetrisch sind. 8 Flächenpaare, nach Art der Dreiecke im Oktaedernetze geordnet, geben das Netz der ditetragonalen Pyramide.

**Die verwendete oder Deuteropyramide.** Je größer die Zahl n wird, desto länger und schärfer werden (siehe Fig. 16, I) die sekundären Kanten BH und HN. Die Flächenwinkel der primären Polkanten nähern sich mehr und mehr dem Werte  $180^\circ$  und erreichen denselben für  $n = \infty$ , so daß sie verschwinden. Aus der 8seitigen Pyramide ist wieder eine 4seitige geworden, welche gegen die Pyramiden der Grundreihe um  $45^\circ$  gedreht ist und darum verwendete Pyramide genannt wird (Fig. 17, II). Man heißt sie auch Deuteropyramide, d. i. Pyramide der 2. Art im Gegensatz zu den anderen, welche man Protopyramiden nennt. Ihre Basis ist ein Quadrat, welches der quadratischen Basis der Protopyramide umschrieben ist; ihre Flächen verlaufen mit den Kanten der dazu gehörigen Protopyramide parallel. Sie wendet dem Beschauer eine Mittelkante zu; ihre Nebenachsen verbinden die Halbierungspunkte von 2 gegenüberliegenden Mittelkanten. Das Parameterverhältnis lautet, wie man aus der Entstehung erkennt:  $(a, \infty a, mb)$ .

42. Aufgabe. Es ist eine Deuteropyramide in Anschauungsfigur zu konstruieren. — Die Konstruktion ergibt sich aus dem Gesagten von selbst. Man entwerfe (Fig. 17, II) eine Protopyramide in Ansichtsstellung und ziehe durch jede einzelne Mittelecke eine Gerade, welche mit der nicht zu dieser Ecke gehörigen Nebenachse parallel ist. Man erhält so ein Quadrat, welches der Basis der Protopyramide umschrieben ist, und verbinde die Eckpunkte desselben mit den Polen. Soll zu einer bestimmten Protopyramide die dazu gehörige Deuteropyramide gesucht werden, so gibt man einer Begrenzungsfläche die Basis  $2a$  und die Höhe  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , wenn mit  $a$  und  $b$  die Halbachsen der Protopyramide bezeichnet werden.

43. Aufgabe. Die Grundpyramide des Gelbbleierzses hat in der Mittelkante  $131^\circ 56'$ . Das Netz dieser Pyramide ist nebst dem der dazu gehörigen Deuteropyramide mit  $a = 10 \text{ cm}$  geometrisch zu konstruieren. — Wir lösen die Aufgabe unter einem, indem wir uns die Protopyramide der

Deuteropyramide eingeschrieben und die Form so vor  $P_1$  gestellt denken, daß eine Nebensymmetrieebene mit derselben parallel verläuft (Fig. 18, I). Der basische Hauptschnitt projiziert sich auf  $P_{11}$ , wo wir ihn nach der Angabe  $a = 10 \text{ cm}$  in wahrer Gestalt konstruieren. Nun übertragen wir die gewonnenen Punkte auf eine Gerade in  $P_1$ , die wir parallel mit  $X_2$  gezogen haben, und erhalten hier die 1. Bilder der Mittelecken für beide Pyramiden. In  $A_1$  bilden wir mit  $K_1 A_1$  als dem einen Schenkel den Winkel von  $\frac{131^\circ 56'}{2} = 65^\circ 58'$  und verlängern den anderen Schenkel, bis er die in  $O_1$  errichtete Normale in  $B_1$  schneidet.  $O_1 B_1$  ist das 1. Bild der halben Hauptachse. Wir vollenden das 1. Bild des Körpers und konstruieren schließlich je ein Begrenzungsdreieck der Proto- und der Deuteropyramide.

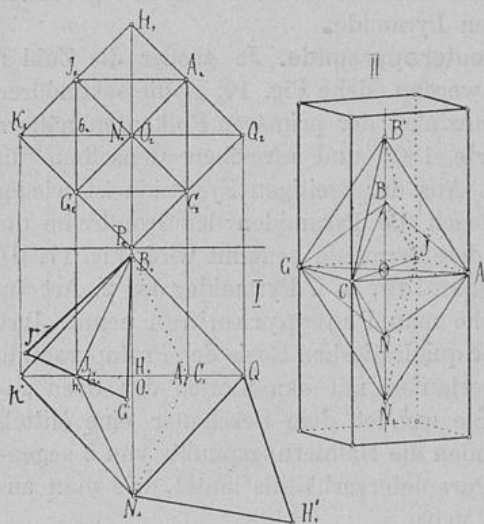


Fig. 18.

Das der ersteren erhalten wir, indem wir das Dreieck  $\triangle B G J$  um seine Höhenlinie drehen, bis es mit  $P_1$  parallel wird. Hierbei machen wir  $J' G' = J_2 G_2$ . Das Begrenzungsdreieck  $Q H N$  der Deuteropyramide legen wir um die Kante  $Q N$  in  $P_1$  und setzen  $Q H'_1 = Q_2 H_2$ . — Je größer bei der Ableitung der Reihe der Protopyramiden aus der Grundpyramide die Ableitungszahl  $m$  gemacht wird, desto spitziger werden dieselben. Für  $m = \infty$  erreichen die Flächenwinkel der Grundkanten den Wert von  $180^\circ$ ; diese verschwinden, die Begrenzungsflächen haben sich vertikal

gestellt: es ist ein Prisma entstanden, welches man das Proto-Prisma nennt (Fig. 18, II). Parameterverhältnis:  $(a, a, \infty b)$ . — Je kleiner  $m$  wird, desto stumpfer wird die Pyramide, für  $m = 0$  fallen die 4 oberen Pyramidenflächen in eine Horizontalfläche zusammen, dasselbe gilt von den unteren: es entstehen die Schlußflächen oder das Pinakoid  $(a, a, 0 b)$ . Weder das Prisma noch das Pinakoid können für sich allein bestehen, da sie den Raum nicht vollständig abschließen. Sie treten in Kombination miteinander oder mit anderen Formen auf. — Auch die ditetragonale Pyramide geht für  $m = \infty$  in ein Prisma über, welches ein symmetrisches Achteck als Querschnitt hat. Ebenso entsteht aus der Deuteropyramide für  $m = \infty$  das Deuteroprisma, dessen Kombination mit dem Pinakoid dem Hexaeder gleicht. Sein Querschnitt ist wie beim



Protoprisma ein Quadrat, aber es verhält sich dieses zu jenem des Protoprismas wie das umschriebene zu dem eingeschriebenen Quadrat. Man zeichnet alle Prismen am besten über die dazugehörigen Pyramiden, indem man parallel mit der Hauptachse durch jede Mittelecke eine Gerade zieht. Wenn man von diesen Geraden beiderseits gleiche Stücke abschneidet und die benachbarten Endpunkte miteinander verbindet, so erhält man das Prisma kombiniert mit dem Pinakoid.

**Das Sphenoid.** Wenn in einer Protopyramide die Begrenzungsflächen nur abwechselnd zur Ausbildung gelangen, so entsteht das Sphenoid. Dasselbe wird von 4 gleichschenkeligen Dreiecken begrenzt; es hat 6 Kanten und 4 Ecken. Die Achsen verbinden die Halbierungspunkte je zweier gegenüberliegender Kanten.

44. Aufgabe. Es ist ein Sphenoid zu konstruieren. — Man zeichnet eine Protopyramide und macht die abwechselnden Flächen durch Schraffen kenntlich. Wenn man nun die schraffierten oder die nicht schraffierten Flächen erweitert, so werden sich Schnittlinien bilden, welche durch die Pyramidenecken gehen und mit den gegenüberliegenden Seiten der 2 hier zusammenstoßenden Dreiecke, die zur Vergrößerung gewählt wurden, parallel laufen. Wir ziehen also durch C die Gerade  $RT \parallel BA$ , durch B die Gerade  $RS \parallel CA$  u. s. w. Die Schnittpunkte R, S, U und T liefern die Ecken des Sphenoids. Begründung wie beim Tetraeder.

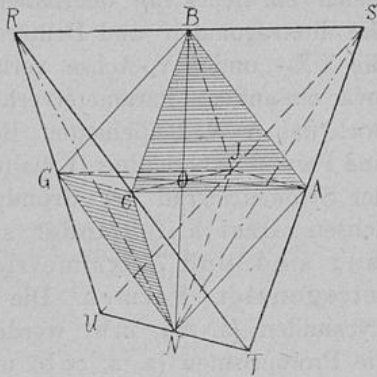


Fig. 19.

45. Aufgabe. Es ist das Netz des Sphenoids zu einer gegebenen Pyramide zu bestimmen. — Die Mittelkante  $GC$  der Pyramide verbindet die Halbierungspunkte der beiden gleichen Schenkel des  $\triangle UTR$  und ist mit der Basis dieses Dreieckes parallel, darum  $UT : GC = RT : RC = 2 : 1$ . Man verdopple die Seiten einer Pyramidenfläche, nehme also  $RT = 2BA$ ,  $UT = 2GC$  und bilde das Begrenzungsdreieck.

46. Aufgabe. Am Kupferkies hat die horizontale Kante des Sphenoids den Flächenwinkel von  $71^\circ 20'$ ; es ist das Netz zu berechnen. — Wir verbinden R und S mit N und erhalten im  $\sphericalangle RNS$  den gegebenen Flächenwinkel. Im gleichschenkeligen  $\triangle RNS$  ist  $BN$  die Höhe und steht normal auf  $UT$ .

$$RN (\triangle RNB) = \frac{RB}{\sin RNB};$$

$$RB = CA = a\sqrt{2}; \sphericalangle RNB = \frac{71^\circ 20'}{2} = 35^\circ 40'.$$

4\*

$$RN = \frac{a\sqrt{2}}{\sin 35^{\circ} 40'} = \frac{14 \cdot 1421}{0.58307} = 24.254 \text{ cm.}$$

$$UT = 2GC = 2a\sqrt{2} = 20\sqrt{2} = 28.2843 \text{ cm.}$$

Das Begrenzungsdreieck ist so durch Basis und Höhe bestimmt. Das Tetraederdreieck hat für  $a = 10 \text{ cm}$  ebenfalls die Seitenlänge von  $28.2843 \text{ cm}$ . Berechnen wir seine Höhe, so erhalten wir  $24.4949 \text{ cm}$ . Man sieht, daß sich das Sphenoid des Kupferkieses nur wenig von einem Tetraeder unterscheidet, weshalb es auch lange Zeit für ein solches gehalten wurde.

Rückblick. Wir haben aus der tetragonalen Pyramide in der Art neue Pyramiden erhalten, daß wir die Hauptachse durch Multiplikation mit der rationalen Zahl  $m > 1$  oder  $m < 1$  vergrößerten oder verkleinerten und hierauf durch die Mittelkanten und den Endpunkt der neuen Achse Ebenen legten. Die neuen Formen bekamen ein neues Achsen- und zugleich ein neues mit demselben übereinstimmendes Parameterverhältnis. Die ditetragonalen und Deuterofornen haben wir so gebildet, daß wir die  $XX_1$ - und  $YY_1$ -Achse verlängerten und neue Flächen legten, die zwar ein anderes Parameterverhältnis annahmen als die Pyramidenflächen, doch das A. V. beibehielten. Bei diesen Formen differieren somit A. V. und Parameterverhältnis. Erhalten blieb bei jeder Neubildung von Formen der Symmetriegrad der Grundpyramide und die Gleichheit der Nebenachsen. Drei aufeinander senkrechte Achsen, wovon 2 gleich lang sind, und 7 Symmetrieebenen charakterisieren somit alle tetragonalen Formen. Die Proto- ( $a, a, mb$ ) und ditetragonalen Pyramiden ( $a, na, mb$ ) werden von Pyramidenflächen eingeschlossen, die Protoprismen ( $a, a, \infty b$ ) und Deuteropyramiden ( $a, \infty a, mb$ ) von Prismenflächen, das Pinakoid ( $a, a, ob$ ) oder ( $\infty a, \infty a, b$ ) sowie das Deuteroprisma ( $a, \infty a, \infty b$ ) von Schlußflächen.

### III. Das rhombische System.

**Die rhombische Pyramide**, Fig 21, I, besteht geometrisch genommen aus 2 kongruenten, geraden Pyramiden, welche einen Rhombus als gemeinschaftliche Grundfläche haben. Sie wird von 8 ungleichseitigen Dreiecken umschlossen, hat 12 Kanten und 6 Ecken. Eine durch je 4 Kanten (oder Ecken) gelegte Ebene teilt die Pyramide in 2 symmetrische Hälften. Wir zählen also 3 Symmetrieebenen, die aufeinander senkrecht stehen. Ihre Schnittlinien liefern die Koordinatenachsen. Die kristallographischen Achsen sind verschieden lang und stehen aufeinander senkrecht. Eine von ihnen wählt man als Hauptachse und stellt sie vertikal, eine zweite u. zw. die längere bringt man in die Querriichtung: Makroachse (d. i. lange Achse), die dritte verläuft dann von vorn nach rückwärts: Brachyachse (d. i. kurze Achse) (Grundstellung). Die 3 Hauptschnitte fallen in die Symmetrieebenen. Man unterscheidet den brachydiagonalen oder Längshauptschnitt, den makrodiagonalen oder

Quer- und den basischen Hauptschnitt. Je 4 Kanten, die in einem der 3 Hauptschnitte liegen, sind gleich lang, geben den Umriß eines Rhombus und haben denselben Flächenwinkel. Je 2 gegenüberliegende Ecken sind einander gleich und werden durch eine der 3 Achsen verbunden.

Man wählt aus sämtlichen Pyramiden, die an einer bestimmten Mineralspezies vorkommen, eine Pyramide aus und nimmt sie als Grundpyramide an, von der man nicht nur die anderen Pyramiden, sondern überhaupt alle Kristallgestalten dieser Mineralspezies ableitet. Die Größe der halben Längsachse der Grundpyramide pflegt man mit  $a$ , die der halben Querachse mit  $b$  und die der halben Hauptachse mit  $c$  zu bezeichnen. Die Pyramide ist durch 2 Flächenwinkel oder durch das A. V. ( $a, b, c$ ) bestimmt. Dieses ist identisch mit dem Parameterverhältnis. Es wird gewöhnlich auf jene Form gebracht, wo  $b=1$ , also  $\left(\frac{a}{b}, 1, \frac{c}{b}\right) = (p, 1, q)$ .

47. Aufgabe. Es ist die Anschauungsfigur der Grundpyramide des Topas mit dem A. V. (0·5285, 1, 0·4768) zu konstruieren; ( $b=10\text{ cm}$ ). — Man denkt sich (Fig. 20) auf  $P_1$  die Ebene  $E$  gelegt und die Pyramide so in dieselbe versetzt, daß ihre Basis mit  $E$  zusammenfällt und die Makroachse in der Quer- richtung liegt, dreht die Pyramide mit der Haupt- achse als Drehungsachse um

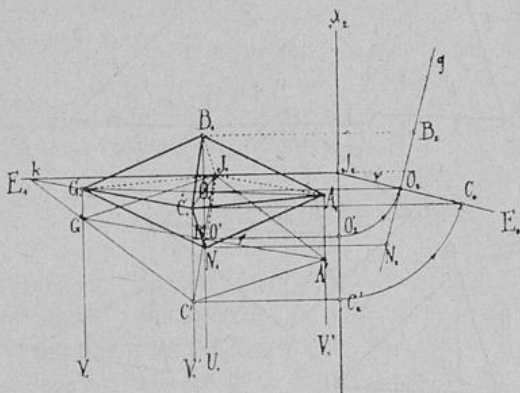


Fig. 20.

den  $\sphericalangle \psi$  nach links und entwirft nun die Basis auf  $E$ .  $G'A' = 2 \cdot 10\text{ cm}$ ,  $J_1 C' = 2 \cdot 5 \cdot 28\text{ cm}$ ,  $\sphericalangle O_2 O' A' = \varphi = 10^\circ$ . Die weitere Konstruktion geschieht wie beim Oktaeder (2. Aufgabe), nur erhält  $B_2 O_2$  die Länge von  $4 \cdot 77\text{ cm}$ . In unserer Figur bildet  $E$  mit der Horizontalebene den Winkel  $\varphi = 15^\circ$ . In der kristallographischen Lehrstunde betrachtet man das Koordinatenkreuz in gedrehter Stellung als gegeben wie beim Oktaeder, nur schneidet man ungleiche Stücke als kristallographische Achsen ab:  $b > c > a$ .

48. Aufgabe. Gegeben ist das A. V. der Grundpyramide des Olivins (0·4661, 1, 0·5866); es ist zur Gewinnung des Netzes eine Begrenzungsfläche zu berechnen; ( $b=10\text{ cm}$ ).

Im  $\triangle ABC$ , Fig. 21, I, ist

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{10^2 + 5 \cdot 866^2} = 11 \cdot 59\text{ cm},$$

$$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{c^2 + a^2} = \sqrt{5 \cdot 866^2 + 4 \cdot 661^2} = 7 \cdot 49\text{ cm},$$

$$CA = \sqrt{OC^2 + OA^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 \cdot 661^2 + 10^2} = 11 \cdot 03\text{ cm}.$$

Bei Zusammenstellung des Netzes aus 8 Dreiecken darf man nicht außer acht lassen, daß je 2 in einer Polkante zusammenstoßende Dreiecke nicht kongruent, sondern symmetrisch sind, so daß man abwechselnd die Winkel und Seiten in umgekehrter Reihenfolge zu nehmen hat.

49. Aufgabe. Es ist das Netz der Grundpyramide des Cerussits zu berechnen, deren Flächenwinkel an der vorderen Polkante  $2\alpha = 130^\circ$  und an der Mittelkante  $2\beta = 108^\circ 30'$  betragen; ( $b = 10 \text{ cm}$ ).

Wir berechnen aus dem Pyramidenachtel  $OABC$  das Dreikant  $CABO$ , welches in Fig. 21, III unter Bezeichnung der Winkel, Seiten und Kanten sowie Bildung des sphärischen Dreieckes für sich allein dargestellt ist. Bekannt sind die 3 Winkel:  $F = 90^\circ$ ,  $E = \alpha = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$ ,

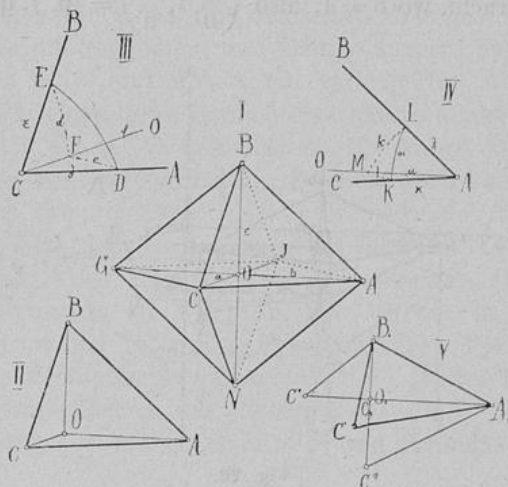


Fig. 21.

$$D = \beta = \frac{108^\circ 30'}{2} = 54^\circ 15'.$$

$$\cos f = \cot E \cot D =$$

$$= \cot 65^\circ \cot 54^\circ 15'.$$

$$f = \sphericalangle B C A = 70^\circ 22' 52''.$$

$$\cos e = \frac{\cos E}{\sin D} = \frac{\cos 65^\circ}{\sin 54^\circ 15'};$$

$$e = \sphericalangle J C A = 58^\circ 37' 6'';$$

$$\cos d = \frac{\cos D}{\sin E} =$$

$$= \frac{\cos 54^\circ 15'}{\sin 65^\circ};$$

$$d = \sphericalangle B C O = 49^\circ 51' 40''.$$

$$\triangle C A O \dots C A =$$

$$= \frac{O A}{\sin e} = 11.713 \text{ cm.}$$

$$C O = C A \cos e = 6.099 \text{ cm.}$$

$$\triangle C O B \dots B C = \frac{C O}{\cos d} = 9.4617 \text{ cm.}$$

Das Begrenzungsdreieck  $CAB$  ist nun durch 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel bestimmt. — Will man das A. V. berechnen, so sucht man noch im  $\triangle C O B$  die Seite  $O B = c = B C \sin d = 7.233 \text{ cm}$ . A. V. = (0.6099, 1, 0.7233).

50. Aufgabe. In der Grundpyramide des Schwefels hat die vordere Polkante den Flächenwinkel von  $106^\circ 38'$ , die Mittelkante von  $143^\circ 18'$ ; es ist der Flächenwinkel  $2\gamma$  der Polkante  $BA$  zu berechnen. — Im Dreikant  $CDEF$  (Fig. 21, III) ist  $F = 90^\circ$ ,  $D = \frac{143^\circ 18'}{2} = 71^\circ 39'$ ,  $E = \frac{106^\circ 38'}{2} = 53^\circ 19'$ .

$$\cos e = \frac{\cos E}{\sin D} = \frac{\cos 53^\circ 19'}{\sin 71^\circ 39'};$$

$$e = 50^{\circ} 59' 41''$$

$$\sphericalangle CAO \text{ (Fig. I)} = 90^{\circ} - 50^{\circ} 59' 41'' = 39^{\circ} 19''$$

Im Dreikant AKML (IV) ist nun bekannt:

$$M = 90^{\circ}, K = \beta = 71^{\circ} 39' \text{ und } l = OAC = 39^{\circ} 19''$$

$$\cos L = \cos l \sin K = \cos 39^{\circ} 19'' \sin 71^{\circ} 39';$$

$$L = 42^{\circ} 28' 29''; 2L = 84^{\circ} 56' 58''$$

51. Aufgabe. Beim Olivin hat die vordere Polkante der Grundpyramide  $139^{\circ} 54'$ , die Basiskante  $108^{\circ} 30'$ ; es ist das A. V. zu berechnen.

$$\text{Im } \triangle AOC \text{ (Fig. 21, I) ist } a = b \tan CAO,$$

$$\text{Im } \triangle ABO \quad b = c \tan ABO.$$

$$\text{Im } \triangle BCO \quad c = a \tan BCO.$$

Wir setzen den Wert des b aus der 2. Gleichung in die 1., den so für a gefundenen Wert in die 3. Gleichung, bilden das Verhältnis a:b:c und kürzen durch c tang ABO; also:

$$a = c \tan ABO \tan CAO,$$

$$b = c \tan ABO,$$

$$c = c \tan ABO \tan CAO \tan BCO.$$

$$a : b : c = \tan CAO : 1 : \tan CAO \tan BCO.$$

Im Dreikant CDEF ist  $F = 90^{\circ}$ ,  $D = \frac{108^{\circ} 30'}{2} = 54^{\circ} 15'$ ,  $E = \frac{139^{\circ} 54'}{2} = 69^{\circ} 57'$ .

$$\cos d = \frac{\cos D}{\sin E} = \frac{\cos 54^{\circ} 15'}{\sin 69^{\circ} 57'};$$

$$d = 51^{\circ} 32' 31'' = \sphericalangle BCO.$$

$$\cos e = \frac{\cos E}{\sin D} = \frac{\cos 69^{\circ} 57'}{\sin 54^{\circ} 15'};$$

$$e = 65^{\circ} 42'' = \sphericalangle OCA.$$

$$\sphericalangle CAO (\triangle CAO) = 90^{\circ} - \sphericalangle OCA = 24^{\circ} 59' 18''$$

$$a : b : c = \tan 24^{\circ} 59' 18'' : 1 : \tan 24^{\circ} 59' 18'' \tan 51^{\circ} 32' 31'' = 0.4661 : 1 : 0.5864.$$

Wird diese Aufgabe dahin erweitert, daß eine Begrenzungsfläche mit  $b = 10 \text{ cm}$  berechnet werden soll, so kann man teilweise abweichend vom Vorgange in der 49. Aufgabe die Lösung in folgender Weise durchführen:

Im Dreikant CDEF (III) ist  $F = 90^{\circ}$ ,  $E = 69^{\circ} 57'$ ,  $D = 54^{\circ} 15'$ .

$$\cos f = \cot E \cot D = \cot 69^{\circ} 57' \cot 54^{\circ} 15';$$

$$f = 74^{\circ} 46' 4''.$$

Im Dreikant AKLM (IV) ist  $M = 90^{\circ}$ ,  $K = 54^{\circ} 15'$ ,  $l = 24^{\circ} 59' 18''$ .

$$\tan m = \frac{\tan l}{\cos K} = \frac{\tan 24^{\circ} 59' 18''}{\cos 54^{\circ} 15'};$$

$$m = 38^{\circ} 34' 46''.$$

$$CA (\triangle AOC) = \frac{OA}{\cos l} = 11.035 \text{ cm.}$$

Das Begrenzungsdreieck CAB ist nunmehr durch die Seite CA und die beiden anliegenden Winkel bestimmt.

52. Aufgabe. Das Netz der Grundpyramide des Topas (A. V. 0.5285, 1.04768) ist durch Konstruktion zu suchen; ( $b=10 \text{ cm}$ ). —  $C_1 A_1 B_1 O_1$  in Fig. 21, V ist die Projektion des rechten, oberen, vorderen Pyramidenachtels in Grundstellung.  $O_1 A_1 = b = 10 \text{ cm}$ ,  $O_1 B_1 = c = 4.768 \text{ cm}$ . Man legt die Dreiecke BCO um BO und CAO um OA in die Bildebene und konstruiert sie, wobei  $O_1 C'' = O_2 C''' = 5.285 \text{ cm}$  gemacht wird. Nun ist man in der Lage, auch das Begrenzungsdreieck ABC um BA in  $P_1$  umzulegen und zu konstruieren.

53. Aufgabe. Das Netz der Grundpyramide des Cerussits mit der

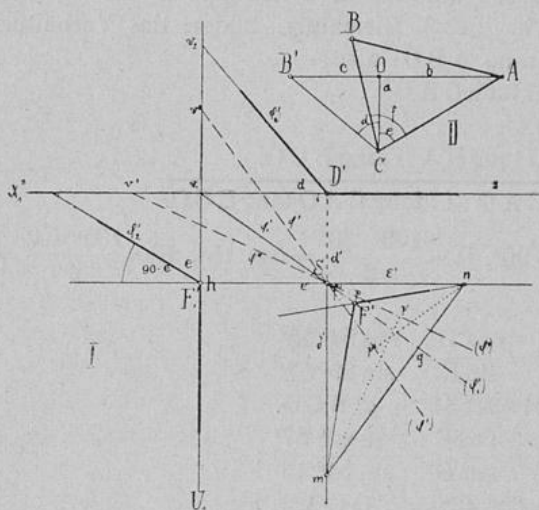


Fig. 22.

vorderen Polkante von  $130^\circ$  und der Mittelkante von  $108^\circ 30'$  ist konstruktiv zu suchen; ( $b=10 \text{ cm}$ ). — Die Aufgabe ist gelöst, sobald ein Begrenzungsdreieck bestimmt ist. Im Dreikant CABO (Fig. 21, I und III)

$$\text{ist gegeben: } D = \frac{108^\circ 30'}{2} =$$

$$= 54^\circ 15', \quad E = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

und  $F = 90^\circ$ ; wir suchen zunächst die 3 Kantenwinkel und vermögen dann ein Begrenzungsdreieck zu konstruieren. — Wenn wir in der zugehörigen Polarecke

die den Winkeln D, E und F gegenüberliegenden Kantenwinkel  $d'$ ,  $e'$  und  $f'$  nennen, so ist  $d' = 180^\circ - 54^\circ 15' = 125^\circ 45'$ ,  $e' = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$  und  $f' = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ . Die den Kantenwinkeln gegenüberliegenden Kanten bezeichnen wir mit  $\delta'$ ,  $\epsilon'$  und  $\varphi'$ . Um die Polarecke  $\delta'\epsilon'\varphi'$  aus ihren 3 Seiten  $d'$ ,  $e'$ ,  $f'$  zu konstruieren, breiten wir ihr Netz in Fig. 22 in  $P_1$  aus: die Kante  $\delta'$  nehmen wir normal zur Bildachse  $x_1x_2$ . Die Kante  $\epsilon'$  schließt mit  $\delta'$  den  $\sphericalangle f' = 90^\circ$  ein. Neben  $\delta'$  legen wir in  $P_1$  die Seite  $(\delta'\varphi') = e'$  und neben  $\epsilon'$  die Seite  $(\epsilon'\varphi') = d'$ . Um die körperliche Ecke zu gewinnen, drehen wir die Seite  $(\epsilon'\varphi')$  um die Kante  $\epsilon'$  und die Seite  $(\delta'\varphi'')$  um  $\delta'$  nach vorn, bis sich  $\varphi'$  und  $\varphi''$  vereinigt haben. Solche Punkte der Geraden  $\varphi'$  und  $\varphi''$ , welche vom Scheitel S gleich weit abstehen, werden hierbei zusammenfallen. Um 2 solche Punkte zu gewinnen, verlängern wir z. B.  $\varphi''$  bis zum Schnitt mit  $x_1x_2$  in  $v'$  und machen  $Sv'' =$

=  $S v'$ . Die Punkte  $v'$  und  $v''$  werden sich dort treffen, wo sich die Spuren ihrer Drehungsebenen schneiden, also in  $v_1$ . Durch die Gerade  $S v_1$  ist die Lage der Kante  $\varphi'$  gegeben. — Die weitere Aufgabe besteht darin, die Flächenwinkel des Dreikants zu bestimmen. Der von den Seiten  $(\varepsilon' \delta')$  und  $(\delta' \varphi')$  gebildete Winkel  $D_1$  projiziert sich auf  $P_{11}$ , der Winkel  $E'$  zwischen den Seiten  $(\varphi' \varepsilon')$  und  $(\varepsilon' \delta')$  hingegen auf einer Ebene, deren 1. Spur  $U_1$  normal auf  $\varepsilon'$  durch  $v''$  gezogen wurde. Beide Winkel lassen sich nun konstruieren. Um den 3. Winkel  $F'$  zwischen den Seiten  $(\varepsilon' \varphi_1')$  und  $(\delta' \varphi_1')$  zu gewinnen, erweitern wir diese beiden Seiten über den Scheitel hinaus, wodurch auch die Kante  $\varphi'$  jenseits desselben sich fortsetzt. Wenn wir nun normal auf  $(\varphi_1')$  eine Ebene legen, so wird dieselbe als Schnittfigur ein Dreieck erzeugen, welches im Berührungspunkte mit  $(\varphi_1')$  den gesuchten Winkel  $F'$  enthält. Aus der Figur ist ersichtlich, wie dieses Dreieck um die Seite  $m n$  in  $P_1$  umgelegt und konstruiert wurde. — Die Winkel  $d = 180^\circ - D'$ ,  $e = 180^\circ - E'$  und  $f = 180^\circ - F'$  sind die Kantenwinkel im Dreikant  $CDEF$  (Fig. 21 III), von dem wir ausgegangen sind.

Nun konstruieren wir das Begrenzungsdreieck (Fig. 22, II), während wir uns stets die Fig. 21, I vor Augen halten. Wir bilden erst einen rechten Winkel mit dem Scheitel in  $O$ , machen  $OA = b = 10 \text{ cm}$ , errichten in  $A$  den  $\sphericalangle OAC = 90^\circ - e$  und verlängern  $AC$  bis zum Schnitt mit  $OC$ . So ist das  $\triangle AOC$  gewonnen. Das  $\triangle OBC$  konstruieren wir in seiner Umlegung, indem wir in  $C$  den Winkel  $OCB' = d$  zeichnen und in  $O$  normal auf  $CO$  die Gerade  $OB'$  ziehen.  $AC$  und  $CB'$  sind 2 Seiten des Begrenzungsdreieckes  $ABC$  in wirklicher Größe. Wenn wir nun schließlich noch in  $C$  den Winkel  $ACB = f$  konstruieren,  $CB = CB'$  machen und  $A$  mit  $B$  verbinden, so ist  $ABC$  das Begrenzungsdreieck selbst. — Nebenbei haben wir die Länge der 3 Halbachsen  $a = OC$ ,  $b = OA = 10 \text{ cm}$ ,  $c = B'O$  und damit auch das A. V. gewonnen.

54. Aufgabe. Von der Grundpyramide des Cerussits ist der Flächenwinkel der vorderen Polkante ( $130^\circ$ ) und jener der Mittelkante ( $108^\circ 30'$ ) bekannt; es ist der Flächenwinkel der seitlichen Polkante auf deskriptivem Wege zu suchen. — Diese Aufgabe ist gewissermaßen eine Erweiterung der vorhergehenden. Der zu suchende Winkel ist (s. Fig. 21, I u. IV) im Dreikant  $AOBC$  enthalten, doch bedarf es zur Konstruktion des letzteren noch eines dritten Bestimmungsstückes, welches wir durch Bildung des Dreikantes  $CEFD$  erst gewinnen müssen. Es handelt sich um die Bestimmung des  $\sphericalangle OCA = e$ , wodurch wir den  $\sphericalangle CAO = 90^\circ - e = l$  erhalten. Wir müßten also die vorgehende Aufgabe teilweise wiederholen, ziehen es aber vor, den Wert für  $l = 90^\circ - e$  der Fig. 22 zu entnehmen. — Gegeben sind nun im Dreikant  $AOBC$ :  $K$ , d. i. der halbe Flächenwinkel der Mittelkante  $= \frac{108^\circ 30'}{2}$   
 $= 54^\circ 15'$ ,  $M = 90^\circ$  und  $l = 90^\circ - e$ , also ein Kantenwinkel  $l$  und die ihm anliegenden Flächenwinkel  $K$  und  $M$ .





welches Wort soviel sagen soll als: Pyramide mit längerer Makroachse. Man denkt sich die neuen Makroachsen so entstanden, daß die Makroachse der Grundpyramide mit  $n > 1$  multipliziert und durch jede Kante des brachydiagonalen Hauptschnittes und den Endpunkt der verlängerten Makroachse je eine Ebene nach rechts und links gelegt wurde. Das A. V. ändert sich auch hier gleichmäßig mit dem Parameterverhältnis und lautet  $(a, n b, c)$ . Die Ableitungszahl kann alle Werte von 1 bis  $\infty$  annehmen, ist aber erfahrungsgemäß wie alle Ableitungszahlen stets rational. So entsteht eine ganze Reihe von Makropyramiden, die mit der Grundpyramide denselben brachydiagonalen Hauptschnitt haben. Aus ihnen kann man neue Formen  $(a, n b, m c)$  in der Art bilden, daß man die Hauptachse verändert. Für  $m = \infty$  gehen die Brachypyramiden in Prismen  $(a, n b, \infty c)$  über, welche sich vom Prisma der Grundreihe durch eine längere Makroachse unterscheiden. — Je länger in den Makropyramiden die Makroachsen genommen werden, desto breiter werden sie; für  $n = \infty$  entsteht ein Prisma  $(a, \infty b, c)$ , welches sich horizontal in der Querrichtung erstreckt und Makrodoma genannt wird. Wächst in einem Makrodoma die Hauptachse bis unendlich, so entsteht ein mit dem makrodiagonalen Hauptschnitt paralleles Flächenpaar, das Makropinakoid  $(a, \infty b, \infty c)$ .

Wird in der Grundpyramide das Begrenzungsdreieck C A B um die Kante B A nach vorn gedreht, so schneidet die Dreiecksebene die  $XX_1$ -Achse in einem Punkte mit größerem Zentralabstande. Die sinngemäße Wiederholung dieses Vorganges in den anderen Oktanten führt zur Entstehung einer neuen Pyramide, die denselben makrodiagonalen Hauptschnitt hat wie die Grundpyramide, aber in der Längsrichtung mehr gestreckt ist. Man nennt derartige Pyramiden Brachypyramiden  $(n a, b, c)$ . Aus ihnen lassen sich die Brachydomen  $(\infty a, b, c)$ , das sind Prismen, die sich in der Längsrichtung erstrecken, und aus diesen wieder das Brachypinakoid  $(\infty a, b, \infty c)$ , ein mit dem makrodiagonalen Hauptschnitt paralleles Flächenpaar, ableiten, und zwar in derselben Weise, wie bei den Makropyramiden erläutert wurde. — Da die Prismen (Domen) und Pinakoide den Raum nicht vollständig abschließen, so können sie nur in gegenseitiger Kombination oder in Kombination mit den Pyramiden bestehen.

55. Aufgabe. Die zu einer gegebenen rhombischen Pyramide gehörigen Prismen (Domen) sind in Anschauungsstellung zu konstruieren.

1. Wenn man (Fig. 24) durch die einzelnen Eckpunkte G, C, A und J des basischen Hauptschnittes Gerade parallel mit der Hauptachse zieht, nach oben und unten gleiche Stücke von beliebiger Länge abschneidet und die Endpunkte miteinander verbindet, so erhält man die Kombination des Prismas der Grundreihe mit dem basischen Pinakoid.

2. Wenn man durch die einzelnen Eckpunkte des makrodiagonalen Hauptschnittes G, N, A und B Parallele mit der Brachyachse CJ zieht, nach vorn und hinten gleiche Stücke aufträgt und die Endpunkte der Abschnitte miteinander verbindet, so erhält man das Brachydoma, kombiniert mit dem Makropinakoid.

3. Wenn man durch die einzelnen Eckpunkte C, N, J und B des brachydiagonalen Hauptschnittes Parallele mit der Makroachse GA zieht, rechts und links gleiche Stücke abschneidet und die Schnittpunkte miteinander verbindet, so erhält man das Makrodoma, kombiniert mit dem Brachypinakoid.

Es ist ratsam, die Konstruktion eines jeden der 3 Prismen in einer besonderen Figur vorzunehmen und zwischen die Grundpyramide und das Prisma (Doma) als Zwischenform eine Pyramide mit längerer Hauptachse, beziehungsweise eine Brachypyramide oder Makropyramide einzuschalten.

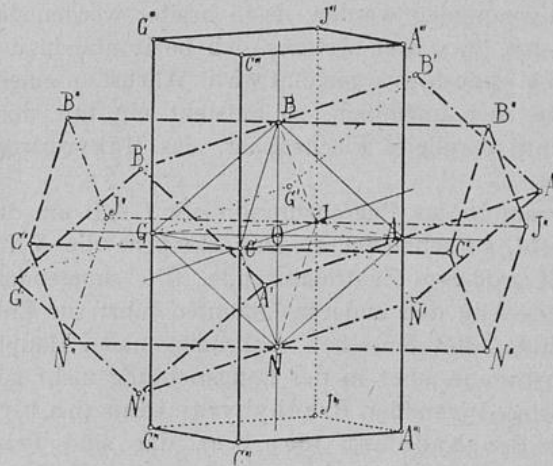


Fig. 24.

56. Aufgabe. Am Aragonit tritt neben der Grundpyramide mit der vorderen Polkante von  $129^{\circ} 36'$  und der Mittelkante von  $107^{\circ} 12'$  besonders häufig das Prisma ( $a, b, \infty c$ ) und das Brachydoma ( $\infty a, b, c$ ), untergeordnet auch die Brachypyramide ( $2a, b, 2c$ ) auf; diese Formen sind soweit zu berechnen, daß die Netze entworfen werden können.

Nach der 51. Aufgabe ist das A. V. (siehe Fig. I, 21)  $a : b : c = \tan CAO : 1 : \tan CAO \tan BCO$ .

$$\text{Im Dreikant CDEF ist } F = 90^{\circ}; D = \frac{107^{\circ} 12'}{2} = 53^{\circ} 36';$$

$$E = \frac{129^{\circ} 36'}{2} = 64^{\circ} 48'.$$

$$\cos d = \frac{\cos D}{\sin E} = \frac{\cos 53^{\circ} 36'}{\sin 64^{\circ} 48'};$$

$$d = 49^{\circ} 1' 4'' = \sphericalangle OCB.$$

$$\cos e = \frac{\cos E}{\sin D} = \frac{\cos 64^{\circ} 48'}{\sin 53^{\circ} 36'};$$

$$e = 58^{\circ} 3' 48'' = \sphericalangle OCA.$$

$$\sphericalangle CAO \text{ im } \triangle CAO = 90^{\circ} - OCA = 90^{\circ} - 58^{\circ} 3' 48'' = 31^{\circ} 56' 12''.$$

$$a : b : c = \tan 31^{\circ} 56' 12'' : 1 : \tan 31^{\circ} 56' 12'' \cdot \tan 49^{\circ} 1' 4'' = 0.6233 : 1 : 0.7164.$$

Für  $b = 10 \text{ cm}$  ist (Fig. 21, I):

$$BC = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{6.2332^2 + 7.164^2} = 9.496 \text{ cm};$$

$$CA = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6.2332^2 + 10^2} = 11.784 \text{ cm};$$

$$AB = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{10^2 + 7.164^2} = 12.301 \text{ cm}.$$

Damit ist das Netz der Grundpyramide durch eine Begrenzungsfläche, deren 3 Seiten bekannt sind, gegeben. —

Die Brachypyramide ( $2a, b, 2c$ ) unterscheidet sich von der Grundpyramide nicht allein durch die doppelt so große Brachyachse, sondern auch noch durch die in demselben Maße vergrößerte Hauptachse; es ist also die halbe Brachyachse =  $2.6.2332 \text{ cm}$ , die halbe Makroachse =  $10 \text{ cm}$  und die halbe Hauptachse =  $2.7.164 \text{ cm}$ .

$$B_1C = \sqrt{4a^2 + 4c^2} = \sqrt{4.6.2332^2 + 4.7.164^2} = 18.99 \text{ cm};$$

$$CA = \sqrt{4a^2 + b^2} = \sqrt{4.6.2332^2 + 10^2} = 15.98 \text{ cm};$$

$$AB_1 = \sqrt{b^2 + 4c^2} = \sqrt{10^2 + 4.7.164^2} = 17.47 \text{ cm}.$$

Die Kombination eines Prismas (Domas) mit dem dasselbe abschließenden Pinakoid wird in der Geometrie kurzweg Prisma genannt; was der Kristallograph Pinakoid heißt, sind hier die Grundflächen. Die rhombischen Prismen sind gerade, d. h. die Seitenkanten stehen auf den Grundflächen senkrecht; diese sind Rhomben. Da es auf die Länge der Seitenkanten bei einem Kristall nicht ankommt, so ist das Prisma durch eine Grundfläche gegeben. — Das Prisma ( $a, b, \infty c$ ) hat als Grundfläche einen Rhombus, dessen Diagonalen (für  $b = 10 \text{ cm}$ )  $2.6.2333 \text{ cm}$  und  $2.10 \text{ cm}$  betragen; das Brachydoma ( $\infty a, b, c$ ) einen Rhombus mit den Diagonalen von  $2.10 \text{ cm}$  und  $2.7.164 \text{ cm}$  Länge. — Das Netz eines Prismas besteht aus 2 Rhomben von der bezeichneten Größe und aus 4 Rechtecken, die eine beliebige Länge und eine Rhombenseite als Höhe haben.

57. Aufgabe. Am Cerussit treten neben der Grundpyramide noch besonders häufig die Brachydomen ( $\infty a, b, \frac{1}{2}c$ ) und ( $\infty a, b, 2c$ ) sowie die Prismen ( $a, b, \infty c$ ) und ( $3a, b, \infty c$ ) auf; es ist das Netz dieser Formen durch Konstruktion zu suchen. — In der 53. Aufgabe haben wir (Fig. 22, II) folgende Werte für die Halbachsen der Grundpyramide des Cerussits gefunden:  $a = OC$ ,  $b = OA$ ,  $c = B_1O$ . So bilden wir für die 4 bezeichneten Formen die sie bestimmenden Rhomben: für das 1. Brachydoma einen Rhombus mit den Diagonalen  $2b = 2OA$  und  $c = B_1O$ ; für das Brachydoma ( $\infty a, b, 2c$ ) erhält die eine Diagonale die Länge von  $2b = 2OA$ , die 2. von  $4c = 4B_1O$ . Zur Bildung des Prismas ( $a, b, \infty c$ ) hat man die eine Rhombendiagonale =  $2a = 2OC$ , die 2.  $2b = 2OA$  zu setzen; die Grundfläche des Prismas ( $3a, b, \infty c$ ) endlich bekommt Diagonalen von  $2.3a = 6OC$  und  $2b = 2OA$  Länge. —

Rückblick. Bei jedwelcher Neubildung von Formen hat sich zugleich mit dem Parameterverhältnis das A. V. gleichmäßig geändert, die

beiden Verhältnisse sind darum für eine und dieselbe Form gleichlautend. Die 3 Symmetrieebenen blieben erhalten. Durch 3 Symmetrieebenen und 3 aufeinander senkrechte Achsen von verschiedener Länge werden somit alle Formen des rhombischen Systems gekennzeichnet. Die Formen sind 8flächig (Pyramiden), 4flächig (Prismen) und 2flächig (Pinakoide).

#### IV. Das monoklinische System.

Die **monoklinische Pyramide** (Fig. 25, 1) ist von 8 ungleichseitigen Dreiecken begrenzt und hat 12 Kanten und 6 Ecken. Durch je 4 Kanten (oder Ecken) läßt sich eine Ebene legen. Zwei derselben stehen schief aufeinander und bilden darum 2 verschiedene Winkel, von denen man

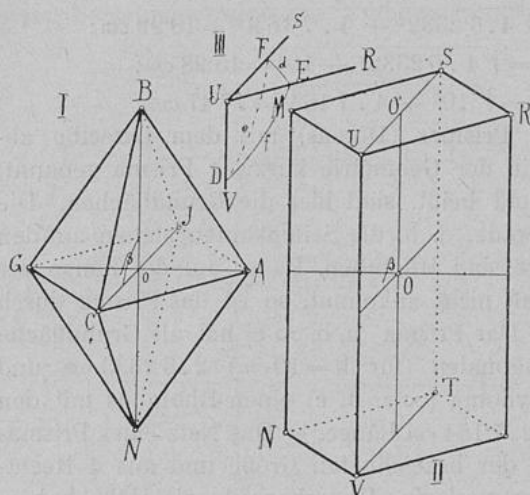


Fig. 25.

den stumpfen  $\beta$  zu nennen pflegt. Derselbe hat für jede monoklinisch kristallisierende Mineralspezies einen anderen, für diese charakteristischen Wert. — Die 3. Ebene ist senkrecht auf beiden. Sie ist die einzige Symmetrieebene und wird vertikal in die Längsrichtung gestellt, eine 2. kommt nun vertikal in die Querrichtung zu liegen, während die 3. gegen die Horizontalebene geneigt ist. Die Kristallform wird so gedreht, daß diese 3. Ebene von vorn nach hinten aufsteigt. Die

Schnittlinien der 3 Ebenen liefern die Koordinatenachsen. Die kristallographischen Achsen haben verschiedene Länge. Die Hauptachse ist vertikal. Die Längsachse, auch Klinoachse (d. i. geneigte Achse) genannt, steht schief auf derselben und verläuft aufsteigend von vorn nach hinten. Die Quer- oder Orthoachse (d. i. gerade Achse) ist normal auf beiden (Grundstellung). — Die 3 Ebenen erzeugen die 3 Hauptschnitte. Der basische Hauptschnitt ist ein schief aufsteigender Rhombus. Der orthodiagonale Hauptschnitt geht durch Haupt- und Orthoachse und ist ebenfalls ein Rhombus, dessen Seiten von 4 gleichen Polkanten gebildet werden. Der klinodiagonale Hauptschnitt durch Klino- und Hauptachse ist hingegen ein Rhomboid, mit den 4 anderen Polkanten als Seiten, welche nur paarweise gleich sind. — Die Begrenzungs-dreiecke sind doppelter Art. Jene 4, die über dem stumpfen Neigungs-

winkel  $\beta$  liegen, sind gleichartig und bilden zusammen die negative Hemipyramide (Halbpyramide), gewöhnlich negative Pyramide kurzweg genannt. Die 4 anderen über dem spitzen Neigungswinkel sind ebenfalls gleichartig und bilden die positive Hemipyramide (positive Pyramide). Die beiden Hemipyramiden kommen gewöhnlich unabhängig voneinander vor und die in Fig. 25 abgebildete Form muß als eine Kombination beider aufgefaßt werden.

Man wählt unter den Pyramiden einer monoklinisch kristallisierenden Mineralspezies wieder eine als Grundpyramide aus und bestimmt sie gewöhnlich durch ihr A. V. ( $a, b, c$ ) und den Neigungswinkel  $\beta$  zwischen Kline- und Hauptachse. Das A. V. pflegt man auf die Form  $\frac{a}{b} : 1 : \frac{c}{b}$  zu bringen.

58. Aufgabe. Es ist die Grundpyramide des Augits in Ansehungsfigur zu konstruieren. Neigungswinkel der Achsen  $\beta = 105^\circ 49'$ ; A. V. ( $1.0903, 1, 0.5893$ );  $b = 10 \text{ cm}$ . — Wir konstruieren die Pyramide zuerst in der Grundstellung mit Hilfe der 3. Projektion und drehen sie dann etwas um die Hauptachse NB. — In Fig. 26 gibt  $A_1G_1 = A_2G_2 = 2b = 20 \text{ cm}$  eine Achse und  $N_1B_1 = N_3B_3 = 2c = 20.0.5893 = 11.786 \text{ cm}$  die 2. Achse der rhombischen Basis.

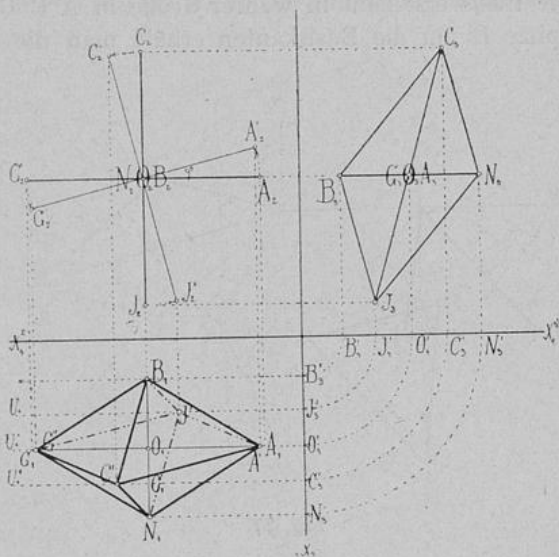


Fig. 26.

$C_1J_1, C_2J_2$  und  $C_3J_3$  sind die Projektionen der 3. Achse, welche mit BN den  $\sphericalangle \beta = 105^\circ 49'$  einschließt. — Für die Drehung ist in Fig. 26 der  $\sphericalangle C_2O_2C'_2 = 20^\circ$  angenommen. Im 1. Bilde zeigt die Figur die gesuchte Ansicht der Pyramide.

59. Aufgabe. Es ist das Netz der Grundpyramide des Augits nach den Angaben in der vorhergehenden Aufgabe zu berechnen (Fig. 25)

$$\triangle BCO \dots BC = \sqrt{BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC \cos \beta} = 13.73 \text{ cm};$$

$$\triangle BOA \dots BA = \sqrt{BO^2 + OA^2} = 11.60 \text{ cm};$$

$$\triangle AOC \dots AC = \sqrt{AO^2 + OC^2} = 14.79 \text{ cm}.$$

$$\text{Im } \triangle CNA \text{ ist } AC = 14.79 \text{ cm}, AN = 11.60 \text{ cm}$$

$$CN = \sqrt{CO^2 + ON^2 - 2CO \cdot ON \cos 74^\circ 11'} = 10.89 \text{ cm}.$$

Hiermit sind die Dreiecke BCA und CNA durch ihre 3 Seiten bestimmt.

60. Aufgabe. Es ist das Netz der Grundpyramide des Augits nach den Angaben in der 58. Aufgabe geometrisch zu konstruieren. — Wir kommen am einfachsten zum Ziele, wenn wir die 3 Hauptschnitte nach den Angaben darstellen und denselben die Dreiecksseiten entnehmen. In anderer Art läßt sich die Aufgabe auflösen, wenn wir die Pyramide in Grundstellung entwerfen und die Begrenzungsdreiecke in die Bildebene umlegen. Der orthodiagonale Hauptschnitt projiziert sich auf  $P_1$  in wirklicher Größe, der klinodiagonale auf  $P_{11}$ . Nun läßt sich die Lage der Mittelecken C und S auf  $P_1$  bestimmen und das 1. Bild der Pyramide entwerfen.

Die Pyramidenbasis A C G J, die sich in einer vertikal projizierenden Ebene befindet, ist in der Figur um deren Spur  $PJ_2$  nach  $P_1$  umgelegt. Die Basis erscheint in wahrer Größe in  $A' C' G' I_1'$ . Durch Umlegung der Spitze B um die Basiskanten erhält man die Seitenflächen  $A' C' B'$  und  $C' I_1 B''$ . Von den vier Flächen der positiven Hemipyramide sind zwei kongruent, die 2 anderen dazu symmetrisch; dasselbe gilt von den Flächen der negativen Hemipyramide. Die Anschauungsfigur belehrt uns, in welcher Art wir die Flächen zum Netze zu verbinden haben.

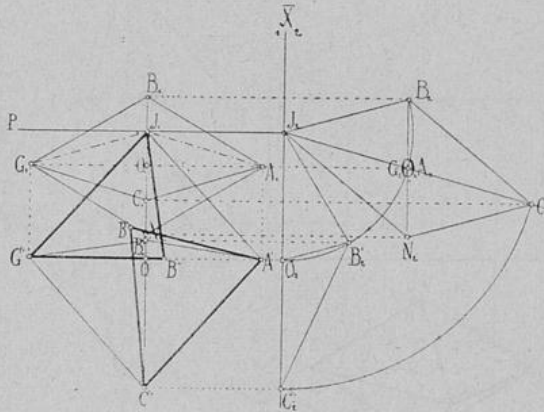


Fig. 27.

Ableitung. Wenn man in Fig. 25 die Begrenzungsfläche  $BCA$  der negativen Pyramide um  $CA$ , den Punkt  $B$  nach vorn, gedreht denkt, so wird die  $ZZ_1$ -Achse von der Ebene dieser Fläche im Zentralabstand des Schnittpunktes  $ma$  getroffen, wobei  $m > 1$ . Soll die Symmetrie erhalten bleiben, so muß auch  $GCB$  in derselben Art in eine neue Richtung gebracht werden. Damit ist dem bestehenden Symmetriegrad Rechnung getragen worden. Nun aber verlangt es das Gesetz des Flächenparallelismus, daß auch die Gegenflächen  $NAJ$  und  $GNJ$  die parallele Richtung behalten, also auch steiler gestellt werden müssen. So entsteht eine negative Pyramide mit längerer Hauptachse. Wird dieser Vorgang mit wechselndem  $m$  wiederholt, so entsteht eine ganze Reihe von negativen Pyramiden —  $(a, b, m c)$ , welche ebenso wie die Grundpyramide den Namen im geometrischen Sinne nicht verdienen, da es Prismen sind, die von vorn nach rückwärts schief aufsteigen. Für  $m = \infty$  stellen sich die Flächen vertikal und es entsteht das Grundprisma  $(a, b, \infty c)$ . Aus der positiven

Pyramide mit längerer Hauptachse. Wird dieser Vorgang mit wechselndem  $m$  wiederholt, so entsteht eine ganze Reihe von negativen Pyramiden —  $(a, b, m c)$ , welche ebenso wie die Grundpyramide den Namen im geometrischen Sinne nicht verdienen, da es Prismen sind, die von vorn nach rückwärts schief aufsteigen. Für  $m = \infty$  stellen sich die Flächen vertikal und es entsteht das Grundprisma  $(a, b, \infty c)$ . Aus der positiven

Grundpyramide erhält man analog die Grundreihe der positiven Pyramiden ( $a, b, m c$ ), welche mit demselben Prisma wie die negative Reihe abschließt. Auch diese Pyramiden sind, geometrisch genommen, Prismen, die aber von unten schräg nach vorn aufsteigen, also „überhängen“. — Wird in Fig. 25 die Fläche  $B C A$  um die Kante  $B A$  und zwar  $C$  nach vorn gedreht und analog mit den anderen Flächen der negativen Pyramide verfahren, so entsteht eine negative Pyramide mit längerer Kliniachse, Klinopyramide — ( $n a, b, c$ ) genannt. Aus jeder Pyramide der Grundreihe — ( $a, b, m c$ ) läßt sich eine Reihe von Klinopyramiden bilden, deren allgemeines Zeichen also — ( $n a, b, m c$ ) ist. Für  $n = \infty$  entsteht ein schief aufsteigendes Prisma, das Klinodoma ( $\infty a, b, m c$ ). In derselben Art erhält man die Reihen der positiven Klinopyramiden. Das aus einer negativen Reihe hervorgehende Klinodoma ist mit dem der gleichwertigen

positiven Reihe identisch. — Werden in Fig. 25 die Flächen  $G C B$  und  $C A B$  um die Kante  $C B$ , die Punkte  $G$  und  $H$  nach vorn, und gleichzeitig die Flächen  $G N J$  und  $J N A$  um die Kante  $J N$ , die Punkte  $G$  und  $H$  nach hinten, gedreht, so entstehen die negativen Orthopyramiden — ( $a, n b, m c$ ). Für  $n = \infty$  fallen die Flächen  $G C B$  und  $C A B$  in eine zusammen; dasselbe gilt von  $G N J$  und  $J N A$ . So entsteht ein schief aufsteigendes Flächenpaar, steiler gestellt als der basische Hauptschnitt: das quer verlaufende „Prisma“, negatives Orthodoma genannt — ( $a, \infty b, m c$ ).

Analog erhält man die positive Orthopyramide ( $a, n b, m c$ ) und das positive Orthodoma ( $a, \infty b, m c$ ), das letztere ein Flächenpaar, welches senkrecht auf dem klinodiagonalen Hauptschnitt schief von hinten nach vorn aufsteigt. — Wird in einem Prisma (Doma) eine 2. Achse unendlich, so entstehen die Endflächenpaare oder Pinakoide. Man unterscheidet das basische Pinakoid d. i. ein schief aufsteigendes, mit der Basis paralleles Flächenpaar ( $\infty a, \infty b, c$ ). Man erhält es aus den Domen, wenn in denselben die 2. Nebenachse unendlich genommen wird, es kann aber auch aus den Pyramiden abgeleitet werden, indem man die Hauptachse  $= 0$  setzt. ( $a, b, 0 c$ ). Wird in einem vertikalen Prisma die Klino-, beziehungsweise die Orthoachse unendlich, so entstehen das Klinopina-

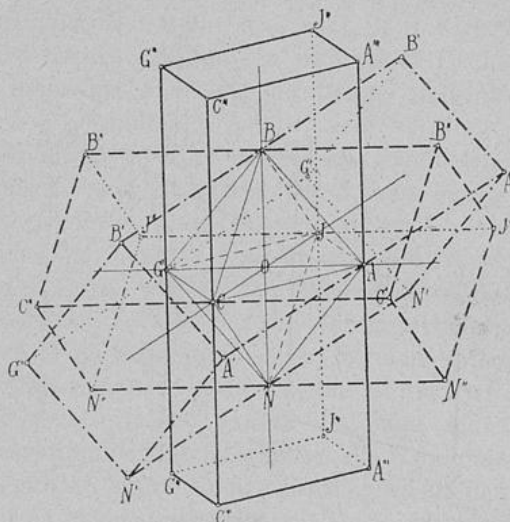


Fig. 28.

koid ( $\infty a, b, \infty c$ ), ein in der Längsrichtung, und das Orthopinakoid ( $a, \infty b, \infty c$ ), ein in der Querrichtung verlaufendes, vertikal gestelltes Flächenpaar.

61. Aufgabe. Es sind über einer Pyramide (d. i. Kombination der + und -Pyramide) die dazugehörigen Prismen (Domen) zu zeichnen. — Wie im rhombischen System zieht man (Fig. 28) durch die einzelnen Eckpunkte der 3 Hauptschnitte Parallele zu jener 3. Achse, die nicht in dem betreffenden Hauptschnitte gelegen ist, schneidet beiderseits gleiche Stücke ab und verbindet die Schnittpunkte. So erhält man das Prisma, kombiniert mit dem basischen Pinakoid, das Klinodoma, kombiniert mit dem Orthopinakoid und das Orthodoma, kombiniert mit dem Klinopinakoid.

62. Aufgabe. Das Netz des mit dem basischen Pinakoid kombinierten Augitprismas ( $1.0903,$

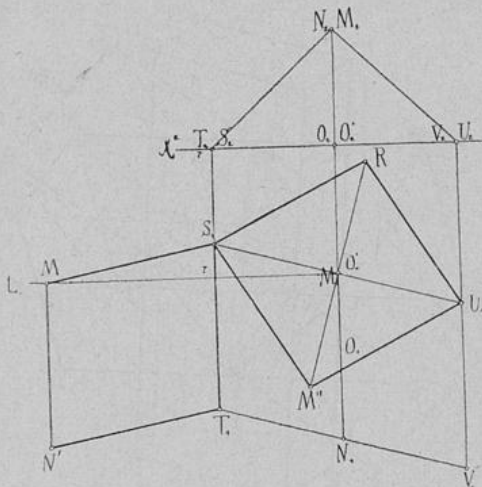


Fig. 29.

$1, \infty$ ) ist zu berechnen;  $a = 10.903 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ ,  $\beta = 105^\circ 49'$ . — Diese Kombination ist, geometrisch genommen, ein schiefes Prisma mit rhombischen Grundflächen. Die Seitenflächen sind also Rhomboide, zu deren Konstruktion ein Winkel bekannt sein muß. Wir denken uns den Körper (Fig. 25, II) durch den klinodiagonalen Hauptschnitt in zwei Teile zerlegt und berechnen aus dem Dreikant  $URS$  den  $\sphericalangle RUV$ . In III ist dieses für sich allein dargestellt.  $F = 90^\circ$ ,  $e = \beta = 105^\circ 49'$ ;  $d =$

$\sphericalangle SUR = OCA$  (Fig. I) läßt sich aus dem rechtwinkligen  $\triangle CAO$  bestimmen. Es ist hier  $\cot CAO = \frac{OC}{OH} = \frac{10.903}{10} = 1.0903$ ;  $RUS = 42^\circ 31' 43''$ .

Bekannt sind nunmehr im sphärischen Dreiecke  $DEF$  die beiden Katheten.

$$\cos f = \cos d \cos e = \cos 42^\circ 31' 43'' \cdot \cos 105^\circ 49'; \quad f = 101^\circ 35' 14''.$$

Das Netz wird aus 2 Rhomben und 4 Rhomboiden gebildet. Die ersteren werden mit den Diagonalen  $2a = 21.806 \text{ cm}$  und  $2b = 20 \text{ cm}$  gebildet, die letzteren erhalten zur einen Seite  $UR$ , während man der anderen eine beliebige Länge gibt. Der  $\sphericalangle RUV = 101^\circ 35' 14''$ .

63. Aufgabe. Das Netz derselben Kombination ist durch Projektion darzustellen. — Um Raum zu ersparen, projizieren wir nur die Hälfte



derselben. Wir denken uns den Körper (Fig. 25 II) durch den klinodiagonalen Hauptschnitt wieder in zwei Teile geschnitten und den einen derselben mit der Schnittfläche in die Bildebene  $P_1$  gelegt. In Fig. 29 ist  $\sphericalangle U_1 S_1 T_1 = 74^\circ 11'$ ,  $S_1 O_1' = O_1' U_1 = a = 10.903 \text{ cm}$ ;  $S_1 T_1$  erhält eine beliebige Länge. So ist  $S_1 T_1 O_1' N_1 U_1 V_1$  das 1. Bild des Körpers. — Auf  $P_{11}$  ist  $O_2' M_2 = b = 10 \text{ cm}$ ;  $S_2 U_2 M_2$  ist das 2. Bild des Körpers, gibt aber auch dessen horizontalen Querschnitt in wirklicher Größe. Nun läßt sich sowohl die Seitenfläche  $STNO$  um die Kante  $ST$  als auch das halbe Pinakoid  $SMU$  um die Spur  $S_1 U_1$  in die Bildfläche umlegen und konstruieren. Im ersten Falle wird  $M_1' r = M_2 S_2$ , im zweiten  $O_1' M_2' = O_2' M_2$  gesetzt. In der Figur wurde die andere Hälfte des Pinakoids hinzugefügt. — Auf dieselbe Art läßt sich das Klinodoma, kombiniert mit dem Orthopinakoid gewinnen. — Das Orthodoma ist durch den Querschnitt, d. i. durch den klinodiagonalen Hauptschnitt  $J_2 N_2 C_2 B_2$  in Fig. 27 gegeben. Dieses Rhomboid wird doppelt genommen und mit 4 Rechtecken vereinigt, welche eine beliebige, aber gleiche Länge und abwechselnd die Höhe  $J_2 N_2$  und  $N_2 C_2$  erhalten.

Rückblick. Durch die Ableitung wurde weder am Symmetriegrade noch am Wesen der Achsen etwas geändert. Durch eine einzige Symmetrieebene und durch 3 verschieden lange Achsen, wovon 2 senkrecht aufeinander stehen, während die 3. auf der einen von den beiden senkrecht, auf der anderen schief steht, werden sämtliche Formen des monoklinischen Systems charakterisiert. Parameter- und Achsenverhältnis sind durchwegs übereinstimmend. Von den rhombischen Formen unterscheiden sich die monoklinischen insbesondere dadurch, daß *a*) die Pyramiden und Querdomen in 2 Hälften zerfallen, *b*) daß die Basis schief aufsteigend ist. Durch diese Eigentümlichkeiten erhalten die Kombinationen ein charakteristisches Gepräge. Keine einzige Form schließt den Raum vollständig ab, so daß wir es hier ausnahmslos mit Kombinationen zu tun haben.

## V. Das triklinische System.

**Die triklinische Pyramide** (Fig. 30) hat 8 ungleichseitige Dreiecke als Begrenzungsflächen. Die Ebene der Hauptschnitte, in derselben Art wie beim monoklinischen System gebildet, stehen schief aufeinander. Dies gilt auch von ihren Schnittlinien, d. i. den Koordinatenachsen, beziehungsweise von den kristallographischen Achsen, die zudem von ungleicher Länge sind. Eine Symmetrieebene fehlt, darum wird das System auch das asymmetrische, d. i. das symmetrieloze genannt. Die Pyramide wird so gestellt, daß die als Hauptachse gewählte vertikal, eine Nebenachse in die Querrichtung (Makroachse) und die 3. von vorn nach hinten aufsteigend (Brachyachse) zu liegen kommt. Gleichartig sind immer nur je 2 Flächen, nämlich eine beliebige Fläche mit

ihrer parallelen Gegenfläche. So zerfällt die Form in 4 Viertel, die in der Regel unabhängig voneinander in den Kombinationen auftreten. Man wählt wieder bei einer triklinisch kristallisierenden Mineralspezies eine Pyramide (d. i. eine Kombination der 4 Viertelpyramiden) als Grundpyramide, bestimmt sie durch das A. V. und zugleich durch die 3 Achsenwinkel und leitet aus derselben die Formen wie im rhombischen System ab; man benennt sie auch wie dort. So wie die Hauptschnitte der Pyramide Rhomboide sind, so haben auch die Prismen (Domen) rhomboidischen Querschnitt und zerfallen deswegen in 2 Hälften. Da selbstverständlich die Pinakoide ebenfalls 2flächig sind, so gibt es hier überhaupt nur 2flächige Formen, die sich in mannigfaltiger Weise miteinander kombinieren und einzig und allein nach ihrer Richtung gegen

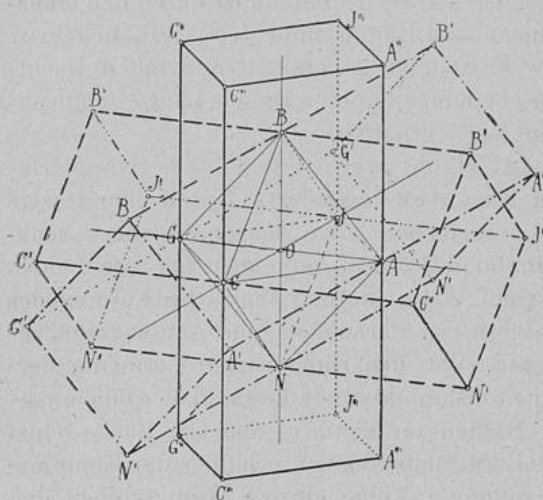


Fig. 30.

das Achsensystem voneinander unterschieden werden können. Der Vorgang bei der Auflösung einer Kombination läßt sich in folgender Weise kennzeichnen: Man entscheidet sich für ein Flächenpaar, welches man als „Grundpyramide“ annimmt. Nach demselben bestimmt man die Neigung der anderen Flächenpaare, die man nun einzig und allein auf Grund ihrer Richtung Pyramiden, Prismen (Domen) oder Pinakoide nennt. In Fig. 30 ist B A J G C N eine Kombination von 4 Viertelpyramiden; vertikal steht eine Kombination des rechten und des linken Prismas (der beiden Prismenhälften) mit dem basischen Pinakoid, von vorn nach rückwärts aufsteigend verläuft eine Kombination der beiden Hälften des Brachydomas mit dem Makropinakoid, von links nach rechts die Kombination der beiden Hälften des Makrodomas mit dem Brachypinakoid.

Wegen der schiefen Richtung der Achsen ist bei der Konstruktion einer Anschauungsfigur keine Drehung notwendig. Soll eine Pyramide (d. i. eine Kombination der 4 Viertelpyramiden) für den kristallographischen Unterricht entworfen werden, so zieht man die Hauptachse vertikal, die Makroachse von links nach rechts schräg abwärts, die Brachyachse von links unten durch den Schnittpunkt der beiden anderen, macht 2 zusammengehörende Achsenarme gleich lang und verbindet die Endpunkte. Die Prismen (Domen) zeichnet man am besten über die Pyramide wie

im rhombischen System. — Das Netz einer Pyramide kann berechnet und konstruiert werden. Eine jede Kante läßt sich nämlich aus den beiden dazu gehörigen Achsenarmen und dem ihr gegenüberliegenden Achsenwinkel nach dem Carnotschen Lehrsätze berechnen. — Rascher kommt man durch Konstruktion zum Ziele, indem man die 3 Hauptschnitte auf Grund des A. V. und der Achsenwinkel konstruiert und der Konstruktion die Kantenlänge entnimmt.

### VI. Das hexagonale System.

**Die hexagonale Pyramide**, Fig. 32, besteht aus 2 regulären 6seitigen Pyramiden im geometrischen Sinne. Sie wird von 12 gleichschenkeligen Dreiecken umschlossen, hat 12 gleiche Pol- und 6 gleiche Mittelkanten. Die letzteren bilden ein reguläres Sechseck. Man unterscheidet 2 6flächige Polecken und 6 4flächige Mittelecken. Eine Symmetrieebene geht durch die Mittelkanten, 3 andere stehen auf dieser senkrecht, schneiden sich unter Winkeln von  $60^\circ$  und verlaufen durch die beiden Polecken und zugleich durch 2 gegenüberliegende Mittelecken. Die Schnittlinien dieser 4 Symmetrieebenen, welche man

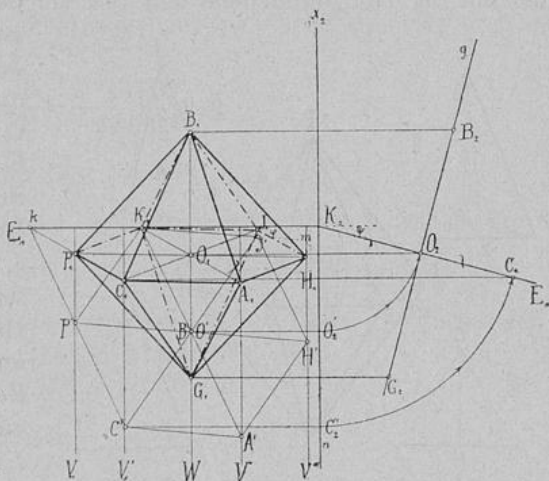


Fig. 31.

Hauptsymmetrieebenen nennt, bilden die Koordinatenachsen. Die von der Form eingeschlossenen Abschnitte derselben heißen wieder kristallographische Achsen oder kurz Achsen. Es gibt somit hier 4 Achsen, u. zw. 3 gleich lange Nebenachsen, die sich unter Winkeln von  $60^\circ$  schneiden und 2 gegenüberliegende Mittelecken verbinden, ferner eine Hauptachse, welche auf den Nebenachsen senkrecht steht und länger oder kürzer ist als diese. Die Hauptachse wird vertikal gestellt, eine der Nebenachsen von links nach rechts (Querachse); die 2 anderen gehen schräg von vorn nach rückwärts (Grundstellung). Zwischen je zweien der vertikal gestellten Symmetrieebenen verläuft noch eine Nebensymmetrieebene, den von jenen gebildeten Winkel halbierend. So zählen wir also im ganzen 6 vertikale Symmetrieebenen, die sich in einer Vertikallinie (Hauptachse) schneiden. Die Kristalle haben wirteligen Bau. Aus den verschiedenen Pyramiden, die bei einer hexagonal kristallisierenden Mineralspezies vorkommen

können, wählt man wieder eine beliebige als Grundpyramide aus, bestimmt sie durch ihr A. V.  $(a, a, a, b)$ , was man kürzer auch  $(a, b)$  schreibt, oder den Flächenwinkel einer beliebigen Kante und leitet daraus alle übrigen Formen ab.

64. Aufgabe. Es ist die Anschauungsfigur der Grundpyramide des Quarzes mit dem A. V.  $(1, 1\cdot1)$  geometrisch zu konstruieren. — Wir denken uns (Fig. 31) wieder auf  $P_1$  die Ebene  $E$  gelegt und die hexagonale Pyramide so in dieselbe versetzt, daß deren Basis mit ihr zusammenfällt und eine Nebenachse von links nach rechts verläuft. Hierauf wird die Pyramide mit der Hauptachse als Drehungsachse um einen Winkel, den wir  $\varphi$  nennen wollen, gedreht. (In der Figur ist  $\varphi = 5^\circ$ .) Nun konstruieren wir die Basis als reguläres Sechseck mit der Seitenlänge  $a$ . Weiterhin drehen wir  $E$  um die Gerade  $E_1$  nach vorn und aufwärts, bis sie schließlich mit der Horizontalebene den  $\sphericalangle \psi$  (in der Figur  $\psi = 15^\circ$ ) bildet. So

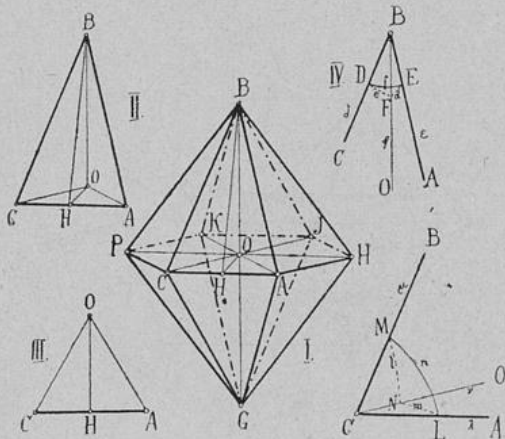


Fig. 32.

gewinnen wir analog wie bei der Konstruktion des Oktaeders in Fig. 2 die Punkte  $P_1, C_1$  und  $O_1$ . Wenn wir von  $K_1, P_1$  und  $C_1$  durch  $O_1$  Gerade bis zum Schnitte mit den Spuren der Drehungsebenen für die Ecken  $J, H$  und  $A$  ziehen, so erhalten wir in den Schnittpunkten  $J_1, H_1$  und  $A_1$  die Projektionen eben dieser Ecken. Die weitere Konstruktion ist aus der Figur ersichtlich;  $O_2 B_2$  bekommt die Länge von  $1\cdot1 a$ .

65. Aufgabe. Die Grundpyramide des Apatits hat das A. V.  $(1, 0\cdot7346)$ ; es ist eine Begrenzungsfläche zu berechnen. — Im  $\triangle OAB$  (Fig. 32, I) ist  $AB^2 = \sqrt{b^2 + a^2} = a\sqrt{0\cdot7346^2 + 1} = 1\cdot240 a$ . Die Mittelkante hat die Länge der Halbachse  $a$ . Für  $a = 10 \text{ cm}$  ist  $AB = BC = 12\cdot4 \text{ cm}$ ,  $CA = 10 \text{ cm}$ . — 12 solche Dreiecke vereinigt liefern das Netz der Pyramide.

66. Aufgabe. Die Mittelkante der Grundpyramide des Berylls hat den Flächenwinkel von  $59^\circ 53'$ ; es ist eine Begrenzungsfläche zu berechnen und das A. V. zu bestimmen; ( $a = 10 \text{ cm}$ ). —  $OBCA$  (Fig. 32, II) ist ein durch die Hauptsymmetrieebenen abgegrenztes Zwölftel einer hexagonalen Pyramide. Die Nebensymmetrieebene teilt es wieder in 2 gleiche Hälften und erzeugt als Schnittfigur das rechtwinkelige  $\triangle BHO$ . Der  $\sphericalangle BHO$  ist die Hälfte des gegebenen Neigungswinkels,  $= \frac{59^\circ 53'}{2} = 29^\circ 56' 30''$ .

$$BH = \frac{OH}{\cos BHO} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cos 29^{\circ} 56' 30''} = 9.994 \text{ cm.}$$

$$OB = OH \tan BHO = \frac{a}{2} \sqrt{3} \tan 29^{\circ} 56' 30'' = 4.988 \text{ cm.}$$

A. V. (1, 0.4988).

67. Aufgabe. Die (scheinbare) Grundpyramide\* des Quarzes hat an der Polkante den Flächenwinkel von  $133^{\circ} 44'$ ; es ist eine Begrenzungsfläche zu berechnen und das A. V. zu bestimmen. — Im Dreikant  $BAOC$  (Fig. II und IV) ist das sphärische  $\triangle FED$  schiefwinkelig. Bekannt sind in demselben die 3 Winkel  $E = D = \frac{133^{\circ} 44'}{2} = 66^{\circ} 52'$  und  $F = 60^{\circ}$ ; wir suchen den Kantenwinkel  $f = ABC$ . — Wenn wir in diesem  $\triangle$  durch  $F$  den größten Kreisbogen senkrecht auf  $ED$  ziehen, so zerfällt es in 2 kongruente, rechtwinkelige sphärische Dreiecke und es werden  $F$  und  $f$  halbiert.

$$\cos \frac{b}{2} = \frac{\cos 30^{\circ}}{\sin 66^{\circ} 52'}$$

$$\frac{f}{2} = 19^{\circ} 39' 12''; f = 39^{\circ} 18' 24''.$$

Durch den  $\sphericalangle f = ABC$  ist das Begrenzungsdreieck seiner Form nach bestimmt; da  $\sphericalangle BCA = CAB = \frac{180^{\circ} - 39^{\circ} 18' 24''}{2} = 70^{\circ} 20' 48''$ .

Für  $a = 10 \text{ cm}$  ist auch die Grundlinie  $CA = 10 \text{ cm}$ . — Ferner ist:

$$\cos d = \cot 66^{\circ} 52' \cot 30^{\circ};$$

$$d = OBC = 42^{\circ} 16' 10''.$$

$$\triangle CBO \dots b = \frac{a}{\tan OBC} = 1.1.$$

A. V. = (1, 1.1).

Wird die Aufgabe dahin erweitert, daß der Flächenwinkel einer Grundkante bestimmt werden soll, so ist im Dreikant  $CABO$ :

$$\cot L = \cos n \tan M = \cos 70^{\circ} 20' 48'' \tan 66^{\circ} 52';$$

$$L = 51^{\circ} 47' 18''; 2L = 103^{\circ} 34' 36''.$$

Durch geometrische Konstruktion läßt sich ein Begrenzungsdreieck der Pyramide leicht und schnell bestimmen, falls das A. V. oder ein Flächenwinkel der Grundkante gegeben ist. Im ersteren Falle konstruiert man (Fig. 32) das  $\triangle OBC$ , indem man  $a$  und  $b$  unter einem rechten Winkel zusammenfügt. Die Hypotenuse gibt unmittelbar einen Schenkel des Begrenzungsdreieckes, während die Basis desselben  $= a$  ist. Im 2. Falle konstruiert man das  $\triangle BHO$ , nachdem man zuvor das gleichseitige  $\triangle AOC$  mit  $a$  (z. B.  $a = 10 \text{ cm}$ ) als Seite gezeichnet und in demselben die Höhe  $OH$  gezogen hat. In  $O$  wird ein rechter, in  $H$

\* Tatsächlich ist diese Pyramide eine Kombination des positiven und negativen Rhomboeders in gleichmäßiger Entwicklung.

der gegebene Winkel errichtet und die Schenkel beider in B zum Durchschnit gebracht. HB ist die Höhe,  $a = 10 \text{ cm}$  die Basis eines Begrenzungsdreieckes. Die Strecken BO und CA geben zugleich das A. V.

68. Aufgabe. Das Netz der Grundpyramide des Pyromorphits (Flächenwinkel der Mittelkante =  $80^\circ 44'$ ) ist zu konstruieren; ( $a = 10 \text{ cm}$ ) — Wir bringen das Pyramidenzweifelt B A O C (Fig. 32, II) so vor  $P_1$ , daß das durch den Schnitt mit der Nebensymmetrieebene erzeugte  $\triangle BHO$  mit ihr parallel ist und OH in die Querrichtung fällt. Wir konstruieren das 1. Bild, wobei wir die Länge von  $O_1H_1$  dem 2. Bilde entnehmen und in  $H_1$  den Winkel von  $\frac{80^\circ 44'}{2} = 40^\circ 22'$  bilden. Schließlich konstruieren wir das Begrenzungsdreieck  $B_1C'A'$ .

69. Aufgabe. Eine Begrenzungsfläche der Grundpyramide des Quarzes ist geometrisch zu konstruieren. Gegeben ist eine Polkante durch ihren Flächenwinkel =  $133^\circ 44'$ ; ( $a = 10 \text{ cm.}$ ) — Das Begrenzungsdreieck ABC ist seiner Form nach bestimmt, wenn der Scheitelwinkel A B C =  $f$  dargestellt ist. Wir gehen vom Dreikant BAOC (Fig. 32, I und IV) aus, dessen Flächenwinkel:  $F = 60^\circ$ ,  $D = E = \frac{133^\circ 44'}{2} = 66^\circ 52'$  wir kennen. Wenn wir die diesen Winkeln gegenüberliegenden Kantenwinkel der Supplementarecke  $f'$ ,  $d'$  und  $e'$  nennen,

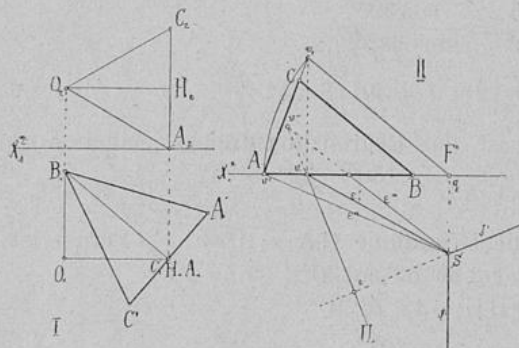


Fig. 33.

so ist  $f' = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ,  $d' = e' = 180^\circ - 66^\circ 52' = 113^\circ 8'$ . Wir entwerfen (Fig. 33, II) das Netz der Supplementarecke so auf  $P_1$ , daß die zwischen den beiden gleichen Kantenwinkeln gelegene Kante  $\varphi'$  normal auf der Bildachse steht, bilden zunächst die körperliche Ecke und konstruieren dann den von den Seiten ( $\epsilon' \varphi'$ ) und ( $\varphi' \delta'$ ) gebildeten  $\sphericalangle F'$ . Im Dreikant, von dem wir ausgegangen sind, liegt dem  $\sphericalangle F'$  der Kantenwinkel  $f$  gegenüber, der also =  $180 - F'$ . In der Figur ist dies der Winkel  $v' q v_2$ .

Wir verbinden  $A(v_1)$  mit  $v_2$ , schneiden von  $A v_2$  die Strecke  $AC = a = 10 \text{ cm}$  ab und ziehen  $CB \parallel v_2 q$ . ABC ist das gesuchte Dreieck.

**Die dihexagonale oder 12seitige Pyramide** (Fig. 34). Wenn wir in Fig. 32, I das  $\triangle AHB$  um die Kante BA, den Punkt H nach vorn drehen, wird die Dreiecksebene die durch OH laufende Koordinatenachse nicht mehr in einem Punkte mit dem Zentralabstande  $a$ , sondern in einem weiter entfernten Punkte mit dem Abstände  $na$  treffen, wobei

Das Begrenzungsdreieck ABC ist seiner Form nach bestimmt, wenn der Scheitelwinkel A B C =  $f$  dargestellt ist. Wir gehen vom Dreikant BAOC (Fig. 32, I und IV) aus, dessen Flächenwinkel:  $F = 60^\circ$ ,  $D = E = \frac{133^\circ 44'}{2} = 66^\circ 52'$  wir kennen. Wenn wir die diesen Winkeln gegenüberliegenden Kantenwinkel der Supplementarecke  $f'$ ,  $d'$  und  $e'$  nennen,

$n > 1$ . Soll der Symmetriegrad, der die hexagonale Pyramide kennzeichnet, erhalten bleiben, so muß die Dreiecksebene auch um die Kante BH gedreht werden und weiterhin derselbe Vorgang in allen 12 Teilen, in welche der Raum durch die 4 Hauptsymmetrieebenen geschieden wird, wiederholt werden. So entsteht ein neuer Körper, der von 24 ungleichseitigen Dreiecken begrenzt wird. Wir zählen 12 primäre Polkanten, die mit den Kanten der eingeschriebenen hexagonalen Pyramide zusammenfallen, 12 sekundäre Polkanten über den Flächen dieser Pyramide und 12 Mittelkanten. Außer den 2 zwölfblättrigen Polecken gibt es 12 vierflächige Mittelecken und zwar 6 primäre über den Ecken und 6 sekundäre über den Mittelkanten der eingeschriebenen hexagonalen Pyramide. Der basische Hauptschnitt ist ein Dihexagon, d. i. ein symmetrisches Zwölfeck mit gleichen Seiten und abwechselnd gleichen Winkeln. Parameterverhältnis:  $(a, na, mb)$ .

70. Aufgabe. Es ist eine dihexagonale Pyramide in Anschauungsfigur zu konstruieren. — Man zeichnet eine hexagonale Pyramide in gedrehter Stellung, multipliziert jede Halbachse  $a$  mit  $n > 1$  aber  $n < 2$ , erhält dadurch die Punkte F und E, zieht von A eine Gerade nach E, von H eine solche nach F und bekommt im Schnittpunkte D die Lage einer sekundären Ecke. Man hat nun D mit A, H, B und G zu verbinden. Derselbe Vorgang ist über jeder Mittelkante der Pyramide zu wiederholen. Begründung wie bei der ditetragonalen Pyramide.

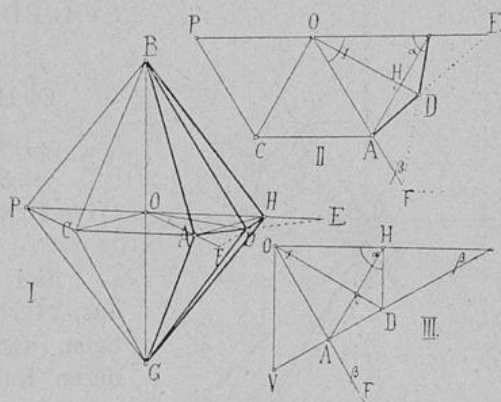


Fig. 34.\*

71. Aufgabe. Am Beryll findet man die dihexagonale Pyramide  $(a, \frac{3}{2}a, 3b)$ ; die Grundpyramide dieses Minerals hat an der Mittelkante den Flächenwinkel von  $59^\circ 53'$ ; es ist ein Begrenzungsdreieck zu berechnen ( $a = 10 \text{ cm}$ ). — Man sucht, wie in der 66. Aufgabe gezeigt wurde, zunächst das A. V. der Grundpyramide und findet  $(1, 0.4988)$ . In der gegebenen dihexagonalen Pyramide ist also die halbe Hauptachse  $- 3b = 14.964 \text{ cm}$ ,  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $n = \frac{3}{2}$ . — Wir berechnen in Fig. 34 das  $\triangle BAD$  durch seine 3 Seiten.

\* Der Buchstabe H (in II) ist an den Scheitel von  $\alpha$  gerückt zu denken!





Drehungskreis für D erscheint auf  $P_{11}$ ,  $D'_2$  ist das 2. Bild der Ecke D auf  $P_{11}$  nach der Drehung. Wir übertragen  $D'_2$  in das 1. Bild und erhalten mit der Strecke  $B_1 D'_1$  die gesuchte Kantenlänge. — Man lasse nicht außer acht, daß das gewonnene  $\triangle B_1 H_1 D'_1$  mit  $B D H$  nicht kongruent, sondern zu demselben symmetrisch ist.

**Die Deutero- oder verwendete Pyramide.** Je größer bei der Ableitung der dihexagonalen Pyramiden die Zahl  $n$  genommen wird, desto schärfer werden die sekundären, desto stumpfer die primären Polkanten. Endlich wird der Flächenwinkel der letzteren  $180^\circ$ , d. h. sie verschwinden, während je 2 benachbarte Mittelkanten über der primären Ecke in eine Gerade zusammenfallen. Welchen Wert hat hierbei  $n$  angenommen? Dies ersehen wir aus dem  $\triangle O A E$  in Fig. 34, III. Die Mittelkante  $A D$  fällt mit der benachbarten  $A V$  in eine Gerade zusammen, es ist also  $\sphericalangle O A E = 90^\circ$  geworden und  $\beta = 30^\circ$ , da

$\gamma = 60^\circ$ . Es verhält sich  $O A : O E = \sin 30^\circ : \sin 90^\circ = \frac{1}{2} : 1 = 1 : 2$  d. h.  $O E =$

$= 2 O A$ ;  $n$  hat somit den Wert 2 bekommen. Aus der dihexagonalen Pyramide ist also wieder eine hexagonale geworden mit einem regulären Sechseck als Basis, das dem der hexagonalen Pyramide umschrieben ist.

Da diese Pyramide gegen die Grundpyramide um  $30^\circ$  gedreht erscheint, so nennt man sie die verwendete Pyramide. Im Gegensatz zu den hexagonalen Pyramiden der ersten Art (Protopyramiden) heißen sie Pyramiden 2. Art d. h. Deuteropyramiden. Die Höhenlinien der gleichschenkeligen Begrenzungsdreiecke fallen mit den Polkanten der eingeschriebenen Protopyramide zusammen, die Nebenachsen verbinden die Mittelpunkte je zweier gegenüberliegender Mittelkanten.

73. Aufgabe. Es ist eine Deuteropyramide in Anschauungsfigur zu konstruieren. — Die Konstruktion ergibt sich aus der Ableitung von selbst. Man zeichnet (Fig. 36) eine Protopyramide, multipliziert alle Halbachsen mit  $n = 2$  und verbindet die Endpunkte untereinander in der Art, daß man immer einen Koordinatenachsenast überspringt. Die Durchschnittspunkte der Verbindungslinien geben die Ecken der Deuteropyramide, die Strecken zwischen 2 benachbarten Durchschnittspunkten die Mittelkanten derselben. Die Eckpunkte sind mit den Polen zu verbinden.

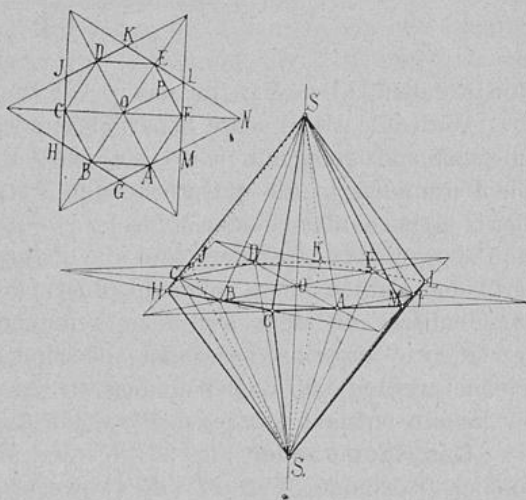


Fig. 36.

74. Aufgabe. Zu einer Protopyramide soll das Netz der dazugehörigen Deuteropyramide berechnet werden. — Nach dem oben Gesagten erhält ein Begrenzungsdreieck als Höhe die Länge einer Polkante der Protopyramide und als Basis eine Länge, die sich zur Halbachse  $a$  verhält wie die Seite des dem Kreise umschriebenen zu jener des dem Kreise eingeschriebenen regulären Sechseckes. Wir können diesen Wert für die Basis aus dem  $\triangle ODH$  in Fig. 34, III ableiten. Wenn wir vom Scheitel des rechten Winkels  $H$  auf  $OD$  eine Senkrechte fallen, so gilt die Proportion:

$$OD:OH=OH:Oi$$

$$OD = \frac{OH^2}{Oi}; \quad Oi = \sqrt{OH^2 - Hi^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3};$$

$$OD = \frac{a^2}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Nun ist aber  $OD=VD$ , da das  $\triangle OVD$  gleichseitig ist. —

Wird die Hauptachse einer Pyramide mit  $m > 1$  multipliziert, so entstehen spitzigere, mit  $m < 1$  stumpfere Pyramiden. Für  $m = \infty$  gehen alle Pyramiden in die entsprechenden Prismen über, wovon wir also hier 3 Arten unterscheiden: das Proto-, das dihexagonale und das Deuteroprisma. Gegeben sind die Prismen, da es auf die Länge der vertikalen Kanten nicht ankommt, durch ihren Querschnitt. Dieser aber ist identisch mit dem der dazu gehörenden Pyramide und es wurde gezeigt, wie derselbe berechnet, beziehungsweise konstruiert wird. Gezeichnet werden die Prismen analog wie jene des tetragonalen Systems. — Für  $m=0$  entsteht aus jeder Pyramide das Pinakoid.

**Das Rhomboeder** Fig. 37. Werden in der oberen Hälfte der hexagonalen Pyramide (Fig. 32) die abwechselnden Flächen erweitert, so werden die anderen verschwinden und mit ihnen sämtliche Polkanten der Pyramide; anstatt derselben entstehen aber 3 neue, weniger steil verlaufende Schnittlinien als Kanten, die gleichen Abstand voneinander und von der Hauptachse haben. Wird der Vorgang in der unteren Hälfte der Pyramide wiederholt und werden hierbei die gleich gelegenen Dreiecke zur Erweiterung gewählt, so entsteht eine 3seitige Pyramide (Doppelpyramide im geometrischen Sinne). Nimmt man aber in der unteren Pyramidenhälfte diejenigen Flächen, welche mit den oberen abwechseln, so werden sie bei der Erweiterung zwischen die oberen und diese wieder zwischen die unteren eindringen. Es werden sich zwischen den oberen und unteren Flächen schräge Schnittlinien als Mittelkanten bilden, welche durch die Mittelecken der hexagonalen Pyramide verlaufen. Welche Gestalt werden die neuen Begrenzungsflächen haben? Darüber belehren uns folgende Erwägungen: Wenn wir oben das  $\triangle CAB$  zur Erweiterung wählen, so erzeugt es mit dem zweitnächsten  $\triangle JHB$  eine Polkante.

Dieselbe Fläche bildet mit dem  $\triangle PGC$  eine durch C verlaufende Mittelkante. JHB und PGC sind parallel, und da ihre Ebenen von der Dreiecksebene CAB geschnitten werden, so müssen die entstehenden Schnittlinien ebenfalls parallel sein. Analoges gilt von den Schnittlinien, welche dieselbe Dreiecksebene CAB mit den erweiterten Dreiecken AGH und PKB bildet. Somit werden 2 Parallele von 2 anderen Parallelen geschnitten, die der Symmetrieverhältnisse wegen auch gleich lang sind: die neue Begrenzungsfläche kann nur ein Rhombus sein. So ist ein neuer Körper entstanden, welcher Rhomboeder, d. i. Rhombenflächner genannt wird. Aus der Ableitung folgt, daß er von 6 Rhomben begrenzt wird, 6 Pol- und 6 im Zickzack verlaufende Mittelkanten, ferner außer den 2 Polecken noch 6 Mittelecken hat, von denen je 3 in einer Horizontalebene liegen. Die Hauptachse verbindet die Polecken, die Nebenachsen verlaufen zwischen den Halbierungspunkten je zweier gegenüberliegender Mittelkanten. Von den 7 Symmetrieebenen der Pyramide sind die 4 Hauptsymmetrieebenen verloren gegangen, doch sind die 3 Nebensymmetrieebenen geblieben. Der basische Hauptschnitt ist ein reguläres Sechseck. Legt man durch die 3 oberen Mittelecken eine Ebene, so bilden die Schnittlinien die horizontalen Diagonalen der oberen 3 Rhomben, die Schnittfigur ist ein reguläres Dreieck TLU (Fig. 37). Analog erhält man in der unteren Hälfte das  $\triangle MNQ$ . Die beiden Ebenen teilen die Hauptachse BG in drei gleiche Teile. Um den Beweis hierfür zu erbringen, ziehen wir im Rhombus NGQU die Diagonale UG, fällen von U auf die Hauptachse die Normale UO' und erhalten so das rechtwinkelige  $\triangle UO'G$ . Ein 2. rechtwinkeliges Dreieck entsteht, wenn vom Durchkreuzungspunkte n der Rhombendiagonalen auf die Hauptachse eine Senkrechte nO'' gezogen wird. Die beiden Dreiecke sind ähnlich, da  $nO'' \parallel UO'$ ; darum

$$GO'' : GO' = Gn : GK = 1 : 2; \quad GO' = 2GO''; \quad Bg = GO' + O'B.$$

Aus der Kongruenz der Dreiecke BrO' und GnO'' folgt, daß  $BO' = GO''$ , darum  $BG = 2GO'' + GO'' = 3GO''$ . — Schneller kommen wir zum Ziele, wenn wir schließen: die Projektion einer zweimal so langen Strecke auf einer Geraden ist auch zweimal so lang, falls derselbe Neigungswinkel vorhanden ist. Im  $\triangle UO'G$  projiziert sich die ganze Diagonale UG auf der Hauptachse und liefert die Projektion HO', im  $\triangle nO''G$  die halbe Diagonale nG und gibt die Projektion O''G. Darum  $OO' = O'G$  und  $OG = 2O'G$ .

Das Rhomboeder ist bestimmt, wenn das A. V. oder ein Flächenwinkel bekannt ist. Hierbei ist zu beachten, daß ein Flächenwinkel der Mittelkante supplementär ist mit einem solchen der Polkante, da beide Winkel von 2 parallelen Ebenen mit einer dritten schneidenden gebildet werden. Würde ein Flächenwinkel den Wert von  $90^\circ$  annehmen, so ginge das Rhomboeder in das Hexaeder über, welches freilich in den Rhomboederreihen fehlt. Stellt man ein Hexaeder auf eine Ecke, so erscheint

es tatsächlich als ein Rhomboeder mit allen Eigenschaften eines solchen, welche nur modifiziert werden durch das Vorhandensein der rechten Winkel. Wie beim Tetraeder unterscheidet man auch hier eine positive und eine negative Form. Die erstere wendet dem Beschauer oben eine Fläche, die letztere eine Kante zu.

75. Aufgabe. Es ist ein Rhomboeder in Anschauungsstellung zu konstruieren. — Wenn man in einem Rhomboeder (Fig. 37) die Endpunkte der Nebenachsen untereinander und mit den Polen verbindet, so entsteht jene hexagonale Pyramide, deren Hälfte das betreffende Rhomboeder ist. Wie schon früher erläutert wurde, erhält man 2 gleichseitige Dreiecke TLU und NQM, wenn man durch die 3 oberen und die 3 unteren Mittelecken je eine Ebene legt. Das untere  $\triangle$  erscheint gegen das obere um  $60^\circ$  gedreht. Die Mittelkanten des Rhomboeders verlaufen schräg von einer Ecke des oberen zu einer des unteren Dreiecke, die Polkanten hingegen von den Ecken derselben Dreiecke zu den Polen. Darum wird es sich vor allem darum handeln, diese beiden Dreiecke zu erhalten. Die Dreiecksebenen schneiden die Hauptachse der eingeschriebenen hexagonalen Pyramide in 3. Teile ihrer Länge und erzeugen an der Pyramide als Schnittfiguren reguläre Sechsecke, deren Seiten sich zu den Seiten des basischen Hauptschnittes verhalten wie 2:3. Aus diesen Sechsecken entstehen die ge-

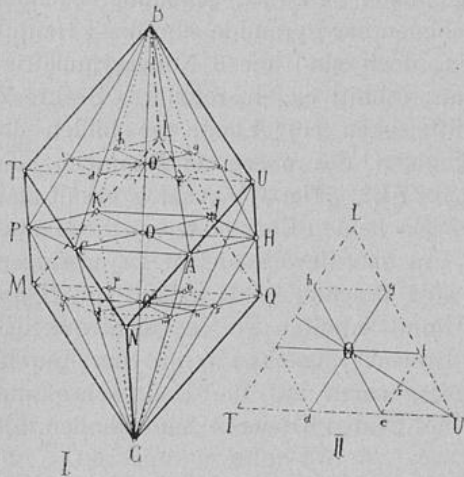


Fig. 37.

suchten Dreiecke, wenn man die abwechselnden Seiten bis zum Schnitt verlängert. Aus dieser Erwägung ergibt sich die Art der Konstruktion. Man zeichne in gedrehter Stellung jene hexagonale Pyramide, deren Rhomboeder man bilden will, teile die Polkanten im Verhältnisse 2:1, den größeren Teil dem Pole zugewendet, und verbinde die Teilungspunkte. So bekommt man ein reguläres Sechseck oben und ein solches unten. Aus denselben bilde man durch Verlängerung der abwechselnden Seiten je ein gleichseitiges Dreieck, wobei man oben und unten nicht die Paralleleseiten wählen darf. Schließlich verbinde man die Dreiecksecken mit den Polen und schräg die des oberen Dreiecke mit denen des unteren. — Man kann sich die Konstruktion wesentlich erleichtern, wenn man nur in einer einzigen

Pyramidenkante den Teilungspunkt (2:1) sucht und dann das Sechseck in der Weise herstellt, daß man Parallele mit den Seiten des basischen Sechsecks zieht.

76. Aufgabe. Das Grundrhomboeder des Kalzits hat an der Polkante den Flächenwinkel von  $105^{\circ} 8'$ ; es ist eine Begrenzungsfläche zu berechnen und das A. V. zu suchen; ( $a = 10 \text{ cm}$ ).

Eine Polecke des Rhomboeders ist ein Dreikant mit 3 gleichen Flächen- und 3 gleichen Kantenwinkeln. Gegeben sind die ersteren. Wir benutzen also zur Berechnung des Kantenwinkels UBT, durch welchen eine Begrenzungsfläche der Form nach bestimmt wird, den Satz:

$$\cot \frac{UBT}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S - P_2) \cos(S - P_3)}{-\cos S \cos(S - P_1)}}$$

wobei S die halbe Winkelsumme ist, während wir mit  $P_1 = P_2 = P_3 = 105^{\circ} 8'$  die einzelnen Winkel bezeichnen.

$$S = \frac{3 \cdot 105^{\circ} 8'}{2} = 157^{\circ} 42'; \quad S - P_1 = S - P_2 = S - P_3 = 52^{\circ} 34'.$$

$$\cot \frac{UBT}{2} = \sqrt{-\frac{\cos(S - P_1)}{\cos S}} = \sqrt{\frac{\cos(S - P_1)}{\cos(180^{\circ} - S)}};$$

$$\frac{UBT}{2} = 50^{\circ} 58' 24''; \quad UBT = 101^{\circ} 56' 48''.$$

$$\sphericalangle BTN = \sphericalangle NUB = 180^{\circ} - 101^{\circ} 56' 48'' = 78^{\circ} 3' 12''.$$

Diagonale TU. Im  $\triangle CAB$  ist  $de \parallel CA$  und  $dB = \frac{2}{3} CB$ , daher  $de = \frac{2 CA}{3} = \frac{2}{3} a$ . Werden (Fig. 37, II) in einem regulären Sechseck die abwechselnden Seiten bis zum Durchschnitt verlängert, so sind in dem entstehenden gleichseitigen Dreiecke die Seiten 3 mal so groß wie die des Sechsecks. Ein Winkel des letzteren hat  $120^{\circ}$ ;  $\sphericalangle Uef = \sphericalangle Ufe = 60^{\circ}$ ;  $eU = de = Td$ ;  $TU = 3de = 2a$ . Die kürzere Diagonale einer Begrenzungsfläche eines Rhomboeders hat also die Länge einer Nebenachse  $= 2a$ . Dies muß allgemein für alle Rhomboeder gelten. Wir können diese Tatsache auch unmittelbar der Fig. 37 entnehmen. Der Schnitt durch die 3 unteren Mittelecken teilt die Diagonale UG in 2 gleiche Teile, die Hälfte Un wird wieder durch den basischen Hauptschnitt in 2 gleiche Teile geteilt. Daher ist auch  $NQ = 2AH = 2a$ . — Durch einen Winkel und eine Diagonale ist ein Rhombus bestimmt. Um denselben zu konstruieren, bildet man einen  $\sphericalangle$  von  $78^{\circ} 3' 12''$ , halbiert diesen, macht die Halbierungslinie  $= 2a = 20 \text{ cm}$  und zieht von ihrem Endpunkte Parallele zu den beiden Winkelschenkeln. Sechs solche Rhomben liefern, entsprechend vereinigt, das Netz des Rhomboeders.

Um das A. V. zu bestimmen, suchen wir die 2. Diagonale  $UG = 2Un$ .  
 $Un = Nn \tan \sphericalangle UNn = a \tan \frac{78^{\circ} 3' 12''}{2} = 8.1014$ ;  $UG = 16.2028 \text{ cm}$ .

Im  $\triangle U O' G$  ist  $O' G = \sqrt{U G^2 - O' U^2}$ ;  $O' U = 2 O' r$  (Fig. 37, II);

$$O' r = \frac{1}{3} t U; t U = \sqrt{4 a^2 - a^2} = a \sqrt{3};$$

$$O' r = \frac{a \sqrt{3}}{3} = \sqrt{33 \cdot 3333} = 5 \cdot 7735; O' U = 11 \cdot 547 \text{ cm.}$$

$$O' G = \sqrt{16 \cdot 2028^2 - 11 \cdot 547^2} = 11 \cdot 366 \text{ cm.}$$

$$O' G = B G - B O' = 2 b - \frac{2 b}{3} = \frac{4}{3} b;$$

$$b = \frac{3}{4} O' G = \frac{3}{4} \cdot 11 \cdot 366 = 8 \cdot 522 \text{ cm.}$$

$$a : b = 10 : 8 \cdot 522; \text{ A. V. } (1, 0 \cdot 8522).$$

77. Aufgabe. Das Rhomboeder des Kalzits mit  $n b = 2 b$  als halber Hauptachse, das nächst spitzigere Rhomboeder genannt, ist zu berechnen. — Eine Pyramide mit doppelt so großer Hauptachse liefert auch ein Rhomboeder mit einer solchen Hauptachse, doch kann man ein derartiges Rhomboeder direkt aus dem stumpferen ableiten, indem man die Hauptachse mit  $n = 2$  multipliziert und die Begrenzungsflächen entsprechend steiler gestellt denkt. Die Begrenzungsflächen drehen sich hierbei um die Seiten des basischen Hauptschnittes. Dieser ändert sich dabei nicht, und da die horizontale Diagonale der Rhomben stets  $2 a$  ist, so muß auch der Querschnitt durch die 3 oberen und ebenso durch die 3 unteren Mittelecken dasselbe gleichseitige Dreieck bleiben. Aber diese Schnitte rücken in dem Maße weiter auseinander, als sich die Mittelkanten bei zunehmender Hauptachse steiler stellen. In unserer Aufgabe wird also die kürzere Diagonale einer Begrenzungsfläche wie früher  $2 a = 20 \text{ cm}$  messen, die 2. Diagonale  $U G = \sqrt{O' U^2 + O' G^2}$ .  $O' U$  hat den beim Grundrhomboeder gefundenen Wert, d. i. die Länge von  $11 \cdot 547 \text{ cm}$ , beibehalten, geändert hat sich also nur  $O' G$ .

$$O' G = O' O + O G = \frac{b}{3} + 2 b = \frac{7}{3} b = 19 \cdot 890 \text{ cm.}$$

$$U G = \sqrt{11 \cdot 547^2 + 19 \cdot 890^2} = \sqrt{133 \cdot 3333 + 395 \cdot 60} = 23 \cdot 00 \text{ cm.}$$

Die Begrenzungsfläche ist so durch ihre beiden Diagonalen bestimmt.

78. Aufgabe. Das Netz des Kalzitgrundrhomboeders mit dem A. V. (1, 0·8522) ist durch Konstruktion zu suchen; ( $a = 10 \text{ cm}$ ). — Wir bringen (Fig. 38) das Rhomboeder in positiver und Grundstellung vor  $P_1$ . Hier wird sich der Querhauptschnitt, auf  $P_{11}$  der basische und auf der Kreuzrißebene  $P_{111}$  der Längshauptschnitt projizieren. Wir entwerfen zunächst auf Grund der Angaben und unserer Kenntnisse über das Rhomboeder das 1. Bild,  $P_1 H_1 = 2 a = 20 \text{ cm}$ ,  $O_1 B_1 = O_1 G_1 = 8 \cdot 522 \text{ cm}$ .  $B_1 G_1$  teilen wir in 3 Teile:  $B_1 O_1' = O_1' O_1'' = O_1'' G_1 = \frac{2b}{3}$ , ziehen durch  $O_1'$  und  $O_1''$  die Geraden  $T_1 U_1$  und  $M_1 Q_1$  gleich und parallel mit  $P_1 H_1$  und zeichnen

die Projektionen der Kanten, wie es die Figur zeigt. Durch Verbindung der Punkte  $B_1$  und  $G_1$  mit  $P_1, C_1, A_1$  und  $H_1$  erhalten wir zudem das 1. Bild der zugehörigen hexagonalen Pyramide. — In dem auf solche Art hergestellten 1. Bilde des Rhomboeders gibt uns  $T_1M_1$  eine horizontale Rhombendiagonale in wirklicher Länge. Die 2. Diagonale  $B_1N_1$  wird sich auf  $P_{111}$  in wirklicher Größe projizieren, doch brauchen wir zur Darstellung des 3. Bildes das zweite. Wir ziehen  ${}_1X_2$  in der Querrichtung und  $\parallel$  damit eine Gerade, auf welche wir  $P_2H_2 = P_1H_1$  übertragen. Vom Halbierungspunkt  $O_2$  beschreiben wir mit dem Halb-

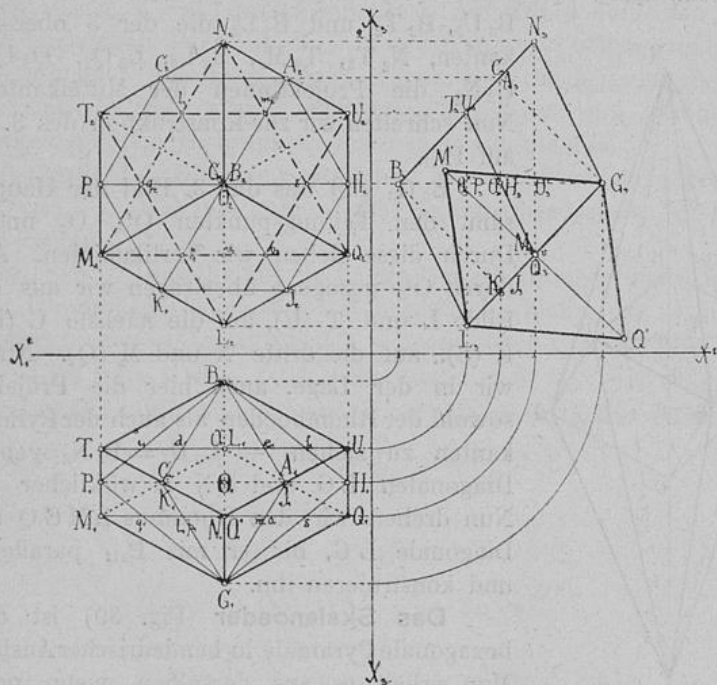


Fig. 38.

messer  $O_2P_2 = a$  einen Kreis und konstruieren das eingeschriebene reguläre Sechseck als mittleren Durchschnitt des Rhomboeders und zugleich als Basis der hexagonalen Pyramide. Durch Verbindung von  $O_2$  mit den Ecken des Sechseckes erhält man die Projektionen der Polkanten der Pyramide. Wir teilen eine solche Projektion z. B.  $P_2G_2$  im Verhältnisse 1:2 und bekommen den Punkt  $q_2$ , von dem ausgehend wir durch Ziehen von Parallelen ein zweites Sechseck bilden, dessen Seiten sich zu denen des größeren Sechseckes verhalten wie 2:3. Das kleinere Sechseck ist das 2. Bild der Schnittfiguren, die entstehen, wenn man in einer hexagonalen Pyramide die Hauptachse

in 3 Teile teilt und durch den oberen und unteren Teilungspunkt eine Ebene normal auf die Hauptachse legt. In diesem Sechseck verlängern wir die abwechselnden Seiten  $p_2 o_2$ ,  $s_2 m_2$  und  $l_2 q_2$ , wodurch sich das gleichseitige  $\triangle M_2 Q_2 N_2$  ergibt, und weiterhin  $o_2 s_2$ ,  $m_2 l_2$  und  $l_2 q_2$ , wodurch das gleichseitige  $\triangle L_2 U_2 T_2$  entsteht. Das erstere ist die Projektion der Schnittfigur, welche eine durch die 3 unteren Mittelecken eines Rhomboeders gelegte Ebene erzeugt, das letztere die der Schnittfigur, welche eine solche Ebene zwischen den 3 oberen Mittelecken hervorbringt. Die Punkte  $M_2$ ,  $Q_2$  und  $N_2$  geben also die Lage der 3 unteren,  $U_2$ ,  $T_2$  und  $L_2$  die der 3 oberen Mittelecken,  $G_2 M_2$ ,  $G_2 Q_2$  und  $G_2 N_2$  sind die Projektionen der 3 unteren,  $B_2 U_2$ ,  $B_2 T_2$  und  $B_2 L_2$  die der 3 oberen Polkanten,  $N_2 T_2$ ,  $T_2 M_2$ ,  $M_2 L_2$ ,  $L_2 Q_2$ ,  $Q_2 U_2$  und  $U_2 N_2$  die Projektionen der Mittelkanten. — Nun schreiten wir zur Konstruktion des 3. Bildes auf  $P_{111}$ .

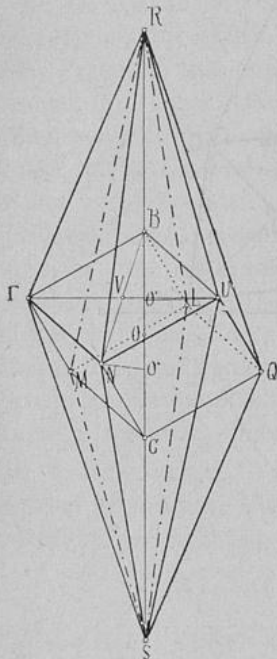


Fig. 39.

$B_3 G_3$  gibt uns das 3. Bild der Hauptachse samt den Teilungspunkten  $O'_3$ ,  $O_3$  und  $O''_3$ . Durch diese ziehen wir Vertikallinien. Auf die durch  $O'_3$  gezogene übertragen wir aus dem 2. Bilde L und T (U), auf die nächste C (H) und K (S), auf die dritte N und M (Q). Nun sind wir in der Lage, auch hier die Projektionen sowohl der Rhomboeder- als auch der Pyramidenkanten zu ziehen. —  $L_3 G_3 = B_3 N_3$  geben die Diagonalen LG und BN in wirklicher Länge. Nun drehen wir den Rhombus LMGQ um die Diagonale LG, bis er mit  $P_{111}$  parallel liegt, und konstruieren ihn.

**Das Skalenoeder** (Fig. 39) ist die dihexagonale Pyramide in hemiedrischer Ausbildung. Man erhält es aus derselben, wenn man die über den Flächen der eingeschriebenen Protopyramide gelegenen Flächenpaare abwechselnd

erweitert. Naumann leitet die Skalenoeder vom Rhomboeder ab. Sie entstehen, wenn man die Hauptachse eines solchen mit  $n > 1$  multipliziert und durch jede einzelne Mittelkante sowohl nach oben als auch nach unten je eine Ebene legt, welche die verlängerte Hauptachse in ihrem neuen Endpunkt, d. i. in der Zentraldistanz  $nb$ , trifft. So entsteht eine neue Form, welche dieselben Mittelkanten wie das Rhomboeder hat, was deren Länge und Richtung anbelangt. Je 2 benachbarte Ebenen erzeugen eine Schnittlinie, die vom Endpunkte einer Mittelkante zum Endpunkte der Hauptachse verläuft und eine Polkante bildet. Es entsteht eine solche über jeder Polkante des Rhomboeders und weiterhin über jeder Fläche desselben; die erstere



ist kürzer und schärfer als die letztere. Im ganzen werden sich 12 Polkanten bilden, 6 oben und 6 unten. Die Zahl der Ecken ist unverändert geblieben, doch sind die Mittelecken 4flächig, die Polecken 6flächig geworden; die Mittelecken haben ihre Lage beibehalten. Aus jedem Rhomboeder kann eine Reihe von Skalenoedern gebildet werden, deren Glieder dieselben Mittelkanten haben.

79. Aufgabe. Am Kalzit findet man nebst vielen anderen Skalenoedern besonders eines häufig, das sich aus dem Grundrhomboeder mit der Ableitungszahl  $n=3$  bilden läßt; es ist dasselbe in Ansichtsstellung zu konstruieren. — Wir haben aus dem Kantenwinkel des Grundrhomboeders am Kalzit das  $A. V. = 1 : 0.8522$  berechnet. Auf Grund desselben zeichnen wir eine hexagonale Pyramide (z. B.  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 8.522 \text{ cm}$ ) und darüber das Rhomboeder, wie oben gezeigt wurde. Nun machen wir die Hauptachse 3mal so groß (also  $3 \cdot 8.522 \text{ cm} = 25.566 \text{ cm}$ ) und verbinden die Mittelecken mit den Endpunkten der neuen Hauptachse.

80. Aufgabe. Das Netz desselben Skalenoeders ist zu berechnen; ( $a = 10 \text{ cm}$ ). — Wir bestimmen das Begrenzungsdreieck  $NSU$  durch seine 3 Seiten.

Seite  $NU$ . Dieselbe hat die Länge der Rhomboederkante und wird aus der Rhomboederfläche  $TNUB$  berechnet. Wenn wir in dieser die Diagonalen ziehen, so zerfällt es in 4 rechtwinkelige Dreiecke. Im  $\triangle VNU$  ist  $NU = \sqrt{VU^2 + VN^2} = \sqrt{10^2 + 8 \cdot 1014^2} = 12.87 \text{ cm}$ .

Seite  $US$ . Wir fällen von  $U$  auf die Hauptachse eine Normale  $UO'$ . Da  $BO' = \frac{BG}{3}$ , so ist  $UO' = \frac{2a}{\sqrt{3}}$  (siehe oben).

Im rechtwinkligen  $\triangle UO'S$  ist

$$US = \sqrt{O'U^2 + O'S^2},$$

$$O'S = O'O + OS = \frac{b}{3} + 3b = \frac{10}{3}b,$$

$$US = \sqrt{\frac{4a^2}{3} + \left(\frac{10}{3}b\right)^2} = 30.667 \text{ cm}.$$

Seite  $NS$ . Durch die Normale  $NO'' = \frac{2a}{\sqrt{3}}$  entsteht das rechtwinkelige Dreieck  $NSO''$ .

$$NS = \sqrt{O''N^2 + O''S^2}; \quad O''S = OS - OO' = \frac{8}{3}b;$$

$$NS = \sqrt{\frac{4a^2}{3} + \left(\frac{8}{3}b\right)^2} = 25.495 \text{ cm}.$$

Bei Zusammenstellung des Netzes ist zu beachten, daß je 2 benachbarte Dreiecke nicht kongruent, sondern symmetrisch sind.

Rückblick. Bei der Ableitung der Formen aus der hexagonalen Pyramide wurde niemals der bestehende Symmetriegrad aufgehoben. Legte man in einem der 12 Räume, in welche der ganze Raum durch die

4 Hauptsymmetrieebenen geteilt wird, eine neue Fläche, so gab man ihr dieselbe Neigung gegen die angrenzenden Hauptsymmetrieebenen; wurden 2 gelegt, so bekamen sie eine symmetrische Lage gegen die Nebensymmetrieebenen. Was in einem Raum geschah, wurde in den anderen wiederholt. Die Länge der Nebenachsen wurde durch die Ableitung nicht geändert. 4 Haupt- und 3 Nebensymmetrieebenen, 3 gleichlange Nebenachsen, die sich unter  $60^\circ$  schneiden, sowie eine auf der Ebene der Nebenachse in dem Schnittpunkt jener senkrecht stehende Hauptachse kennzeichnen alle hexagonalen Formen. Das Vorgehen Millers, diesen Formen auch 3 Achsen zu grunde zu legen, hat wenig Anklang gefunden, da durch 4 Achsen den Symmetrieverhältnissen, durch welche die Kristallsysteme in erster Reihe charakterisiert werden, eher Rechnung getragen wird. Für jede Begrenzungsfläche kommen 4 Parameter in Betracht, doch ist der eine davon aus den anderen zu berechnen und muß nicht erst in das Parameterverhältnis aufgenommen werden. Der nach oben laufende Ast der vertikalen Koordinatenachse wird als positiv, der nach unten laufende als negativ angenommen. Gilt der eine Ast einer horizontalen Koordinatenachse als positiv, so ist der nächste negativ, der 3. wieder positiv u. s. w. So ist man in der Lage, durch Beifügung der Qualitätszeichen beliebige Flächen nach ihrer Richtung im Raume zu kennzeichnen. Auch in diesem Systeme unterscheidet man:

a) Pyramidenflächen, die alle in Betracht kommenden Koordinatenachsen in endlicher Entfernung schneiden. Hierher gehören die Begrenzungsflächen der Deuteropyramide ( $a, 2a, 2a, mb$ ), und die der dihexagonalen Pyramide ( $a, pa, na, mb$ );

b) Prismenflächen, welche mit einer Koordinatenachse parallel sind. Solche haben die Protopyramide ( $a, \infty a, a, mb$ ), das Deuteroprisma ( $a, 2a, 2a, \infty b$ ) und das dihexagonale Prisma ( $a, pa, na, \infty b$ );

c) Endflächen, welche mit wenigstens 2 Koordinatenachsen parallel sind. Hierher gehören die Begrenzungsflächen des Protoprismas ( $a, \infty a, a, \infty b$ ) und des basischen Pinakoids ( $\infty a, \infty a, \infty a, mb$ ).

Während sich dieser Aufsatz im Drucke befand, wurde uns ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie: „Leitfaden der Projektionslehre“ für Realgymnasien und Oberrealschulen (Deutschlands) von Müller und Preßler, Leipzig und Berlin, Verlag von B. G. Teubner, 1903, zugesendet. Hier wird der Kristallographie ein besonderer, ziemlich umfangreicher Abschnitt eingeräumt und erläutert, wie sich die Kristallformen in schiefer Parallelperspektive (in „Schrägbildern“) darstellen lassen. Es wurde hierbei nur auf Formen des tesseraleen und hexagonalen Kristallsystems Rücksicht genommen. Eine streng einheit-

liche Ableitung aus den Grundformen erscheint nicht durchgeführt, Berechnungen und Netzkonstruktionen finden keine Berücksichtigung. In analoger Weise wird die stereometrische Projektionslehre dem ganzen Gebiete der exakten Schulfächer, so auch der mathematischen Erd- und Himmelskunde nutzbar gemacht. Motiviert wird dies damit, daß die deutschen Lehrpläne die Absicht aussprechen, „dem mathematischen Unterrichte überhaupt ein reicheres Übungsfeld zu eröffnen und unbeschadet der Selbständigkeit der Mathematik als Lehrfach ein Hauptgewicht auf die Anwendungen zu legen“. — Der Verfasser dieses Aufsatzes schöpft aus dem in Rede stehenden Buche die Beruhigung, daß seine Anregung, es möchte die Kristallographie in der Mathematik und darstellenden Geometrie einige Berücksichtigung finden, nicht unbillig ist.