Ein Beitrag

zur Lehre von den pythagoreischen Zahlen

von

Dr. Mühle.

Wollstein in Posen 1913.
Druck von S. Wolffsohn.

Jm Grunertschen Archiv Leipzig 74 Seite 189 zitiert Rath eine Schrift von C. A. Berkhan, betitelt: Die merkwürdigsten Eigenschaften der pythagoreischen Zahlen. In ihr werden 19 Auflösungen von den Zeiten Platos, Pythagoras' und Euklids bis zur Mitte des vorigen Jahrhunderts erwähnt, um die schon den indischen Mathematikern bekannten Formeln $m^2 + n^2 \quad m^2 - n^2 \quad 2md$ abzuleiten, die der Forderung genügen, ganzzahlige Maßzahlen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks zu sein. Bemerkenswert sind die Lösungen von Kästner, der die Formel $\operatorname{tg} 2x$ benützt, von John Leßlie, der die allgemeine Aufgabe behandelt, $x^2 + ax + by^2$ zu einem Quadrate umzugestalten und dann $a = o \quad b = 1$ setzt und Euler, dessen merkwürdige Behandlung des Problems hier kurz folgen möge. Ausgegangen wird von $\sqrt{1 + x^2}$ und dabei verlangt, daß der Radikand ein Quadrat wird. Setzt man

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{mx}{n}, \text{ so ist}$$

$$1 + x^2 = 1 + \frac{2mx}{n} + \frac{m^2x^2}{n^2}$$

Daraus folgt $\quad x = \dfrac{2mn}{n^2 - m^2}$

und nach einer kurzen Zwischenrechnung

$$1 + \frac{(2mn)^2}{(n^2 - m^2)^2} = \frac{(n^2 + m^2)^2}{(n^2 - m^2)^2}$$

oder $\quad (n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 = (n^2 + m^2)$

Der Gang der Rechnung erscheint sehr einfach, doch ist der Zusammenhang der Ausgangsformel mit der Forderung, daß das Quadrat einer Zahl gleich der Summe der Quadrate zweier andern Zahlen werden soll, nicht so leicht zu erkennen. Berkhan nimmt an, daß schon pythagoreische Zahlen gefunden sind und stellt sich die Aufgabe: Welche Zahlen sind zu den gegebenen zu addieren, um neue von gleicher Eigenschaft zu erhalten? Eine allgemeine Forderung lautet: Zu einer beliebigen Zahl die beiden anderen pythagoreischen zu finden. Sie sei der Gegenstand folgender Abhandlung. Die dabei gegebene Lösung erwähnt Berkhan nicht. Sie ist mir in der späteren Literatur bisher noch nicht begegnet.

Wir setzen die eine Kathete $= x$ die andere $x - n$, die Hypotenuse $x + m$ und erhalten durch Auflösung der Gleichung:

$$(x + m)^2 = x^2 + (x - n)^2$$

$$x = m + n \pm \sqrt{2m(m+n)}.$$

Ist $\quad 2m = k^2(m + n)$, so wird

$$x = m + n \pm k(m + n).$$

Da aus der vorletzten Gleichung $m = \frac{k^2 n}{2 - k^2}$ hervorgeht, so erhält man durch Einsetzen in die letzte Gleichung:

$$x = \frac{k^2 n + 2n - k^2 n + k^3 n + 2nk - nk^3}{2 - k^2}$$

$$x = \frac{2n(k+1)}{2-k^2}$$

$$x - n = \frac{nk(k+2)}{2-k^2}$$

$$x + m = \frac{[2(k+1)+k^2]\,n}{2-k^2}$$

Läßt man den gleichen Faktor $\frac{n}{2-k^2}$ weg, so ergibt sich:

Gruppe A | $2(k+1)+k^2$ | $2(k+1)$ | $k(k+2)$.

Nimmt man an, daß $k = \frac{r}{s}$,

so wird $\frac{2(r+s)s+r^2}{s^2}$ $\frac{2(r+s)s}{s^2}$ $\frac{r(r+2s)}{s^2}$ erhalten.

Ist $r + s = l$ gesetzt, dann sind die 3 Zahlen nach Weglassung des Nenners

$l^2 + s^2$ $2ls$ $l^2 - s^2$

Damit ist die Form der pythagoreischen Zahlen als notwendig erwiesen.

Auch auf andere Art kann man es erreichen, daß in

$$x = m + n + \sqrt{2m(m+n)}$$

die Wurzel verschwindet, indem man

$$m + n = 2k^2 m \quad \text{setzt}$$

$$m = \frac{n}{2k^2 - 1}$$

$$x = \frac{2kn(k+1)}{2k^2-1}$$

$$x - n = \frac{(2k+1)n}{2k^2-1}$$

$$x + m = \frac{k^2+(k+1)^2}{2k^2-1}\,n$$

oder $k^2 + (k+1)^2$ | $2k(k+1)$ | $2k+1$

nach Weglassung des Faktors $\frac{n}{2k^2-1}$.

Setzen wir wieder $k = \frac{r}{s}$

$r^2 + (r+s)^2$ $2r(r+s)$ $(2r+s)s$ nach Weglassung des Nenners s^2

$r + s = l$

$r^2 + l^2$

Wir erhalten dann dieselbe Form $2rl$ wie vorhin $l^2 - r^2$. Auch hier sind r und s teilerfremd.

Für den Fall, daß $k = 1$ wird, ist $r = s$ $l = 2r = 2s$. Jede Gruppe liefert dieselben Zahlen.

$5r^2$	$4r^2$	$3r^2$
$5s^2$	$4s^2$	$3s^2$

Nimmt man das gleiche r und s für jede Gruppe, so erhält man je drei Zahlen von der Eigenschaft, daß die Differenzen aus der größten der einen Gruppe und der kleinsten der anderen Gruppe gleich sind.

Beispiel:	$r = 3$	$s = 5$	$l = 8$	
	73	48	55	
	89	80	39	$73 - 39 = 89 - 55$

Ebenso ist die Differenz der größten Zahlen aus jeder Gruppe die Hälfte der Differenz der mittleren.

$$89 - 73 = 55 - 39 = \frac{80 - 48}{2}$$

Setzen wir in der Gruppe A

$$x = m + n - k(m + n)$$

$$m = \frac{k^2 n}{2 - k^2}$$

$$x = (m + n)(1 - k)$$

$$x = \frac{2n(1 - k)}{2 - k^2}$$

$$x - n = \frac{kn(k - 2)}{2 - k^2}$$

$$x + m = \frac{[2(l - k) + k^2]}{2 - k^2} n$$

oder nach Weglassung des gemeinsamen Faktors.

$$2(1 - k) + k^2 \qquad 2(1 - k) \qquad k(k - 2)$$

Ob $k < 1$ oder $k > 2$ ist, dürfte für die Allgemeinheit des Problems gleichgültig bleiben, da es sich um Quadrate handelt. $k = \frac{r}{s}$

$$2(s - r)s + r^2 \quad\Big|\quad 2s(s - r) \qquad r(r - 2s)$$

$$k + 1 \qquad r = 3 \qquad s = 5$$

$$29 \qquad -20 \qquad -21$$

$$29^2 = 20^2 + 21^2$$

$k + 2$ Beispiel: $r = 7$ $s = 2$

$$-20 + 49 = 29. \qquad -20 \qquad -21.$$

Setzt man $s - r = l$

$$2ls + (s - l)^2 = \left.\begin{matrix} s^2 + l^2 \\ 2ls \\ s^2 - l^2 \end{matrix}\right\}$$

In Gruppe B erhält man gleiche Resultate.

$$x = m + n - 2km$$

$$x = n + m(1 - 2k) \qquad m = \frac{n}{2k^2 - 1}$$

$$x = \frac{n(2k^2 - 1) + n(1 - 2k)}{2k^2 - 1} = \frac{n 2k^2 - 2nk}{2k^2 - 1}$$

$$= \frac{2n(k^2 - k)}{2k^2 - 1}$$

$$= \frac{2kn(k - l)}{2k^2 - 1}$$

$$x - n = \frac{n(1-2k)}{2k^2-1}$$

$$x + m = \frac{k^2+(k-1)^2}{2k^2-1} \cdot n$$

$$k^2+(k-1)^2 \qquad 2k(k-1) \qquad 1-2k$$

$$k = \frac{r}{s}$$

$$r^2+(r-s)^2 \qquad 2r(r-s) \qquad (s-2r) . s$$

$$r - s = l$$

$$l^2+r^2 \qquad 2rl \qquad l^2-r^2$$

Ist $r = 7$ $s = 5$ dann $l = 2$

53 28 -45

Nehmen wir dieselben r und s wie vorher, so erhält man für $r = 3$ $s = 5$:

	13	-12	-5
Vorher	29	-20	-21

Die Zahlen dieser Gruppe zeigen das gleiche Verhalten. Sie befolgen in bezug auf die Differenzen dieselben Regeln.

Stellen wir die einzelnen Gruppen noch einmal zusammen:

A	$2(r+s)s+r^2$	$2(r+s)s$	$r(r+2s)$
A'	$2(s-r)s+r^2$	$2s(s-r)$	$r(r-2s)$
B	$r^2+(r+s)^2$	$2r(r+s)$	$(2r+s)s$
B'	$r^2+(r-s)^2$	$2r(r-s)$	$(s-2r)s$

A' geht aus A hervor, wenn man statt r $-r$, B' aus B, wenn man statt s $-s$ setzt. Aus A wird B durch Vertauschung von r und s.

Die Gruppe A kann als die ursprüngliche angesehen werden, aus der man die eben angegebenen Veränderungen erhält.

Legendre hat den Satz gefunden, daß jede ungerade Zahl außer der Form $8n+7$ die Summe dreier Quadrate ist. Lagrange hat dann weiter gezeigt, daß jede gerade Zahl die Summe von vier Quadraten ist. Diese Sätze sind, wie Pepin in den „Atti dell' academia pontifica de nuovi Lincei 1893 pg. 119" angibt, nur Spezialfälle eines Satzes von Cauchy, der allerdings bis auf Fermat zurückgeht, daß jede ganze Zahl eine Summe von 4 Pentagonalzahlen ist vermehrt um 1 oder eine Summe von Hexagonalzahlen, vermehrt um 1 oder 2 oder die Summe von 4 Hexagonalzahlen, vermehrt um 1 oder 2 oder 3.

Wir wollen jetzt Zahlen finden von der Beschaffenheit, daß das Quadrat der einen Zahl gleich ist der Summe der Quadrate dreier Zahlen $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$ d. h. geometrisch gesprochen: Die ganzzahlige Diagonale eines Quaders mit ganzzahligen Kanten zu finden.

Berkhan stellt sich eine ähnliche spezielle Aufgabe. Er nimmt an, daß $(2p+1)$ eine Quadratzahl ist und will durch Hinzufügen zweier Quadrate ein viertes erhalten. Es ist

$$2p+1+p^2+\left(\frac{p^4}{4}+p^3p^2\right) = \left(\frac{p^2}{2}+p+2\right)^2$$

Man erkennt die Richtigkeit des Legendreschen Satzes für den Spezialfall. Damit der Ausdruck auf der rechten Seite ganzzahlig wird, muß p gerade sein. Wir erhalten dann eine ungerade Zahl.

Wir nehmen an $k, \ x, \ x-m, \ x-n$ seien die Zahlen, die unserer Forderung genügen, dann wäre

$$k^2 = x^2 + \overset{y^2}{(x+m)^2} + \overset{z^2}{(x+n)^2}$$

Lösen wir die Gleichung nach x auf, so erhalten wir:

$$x = -\frac{m+n}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3k^2 - (m^2+n^2)\,3 + (m+n)^2}$$

Damit der Klammerausdruck ein vollständiges Quadrat wird, muß

$$3k^2 - 3(m^2+n^2) + (m+n^2) = n^2 k^2$$

$$\text{oder} \quad k^2 = \frac{2(m^2 n^2 - mn)}{3-n^2}$$

Wenn $n = \frac{r}{s}$ gesetzt wird, ist $k^2 = \frac{2s^2(m^2+n^2-mn)}{3s^2-r^2}$

$$x = \frac{-m+n}{3} + \frac{kn}{3}$$

$$y = \frac{2m-n}{3} + \frac{kn}{3}$$

$$z = \frac{2n-m}{3} + \frac{kn}{3}$$

$$x = \frac{-s(m+n) \pm kr}{3s}$$

$$y = \frac{(2m\,n)\,s \pm kr}{3s}$$

$$z = \frac{s(2n-m) \pm kr}{3s}$$

Oben erhielten wir $\frac{k^2(3s^2-r^2)}{2s^2} = m^2+n^2-mn$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist ganzzahlig. Damit er es auf der linken Seite auch wird, muß $k = ps$ sein.

$$\frac{p^2(3s^2-r^2)}{2} = m^2+n^2-mn$$

s und r können nicht beide gleichzeitig gerade sein. Die Klammer ist entweder ungerade, dann muß p gerade sein, oder gerade, dann kann p beliebig genommen werden.

$$x = \frac{-(m+n)}{3} \pm \frac{pr}{3} = \frac{\pm pr - (m+n)}{3}$$

$$y = \qquad = \frac{2m-n \pm pr}{3}$$

$$z = \qquad \frac{2n-m \pm pr}{3}$$

$$k = ps$$

Damit x eine ganze Zahl wird, muß

$$\begin{array}{lrcll} \text{I} & pr - m & = & (3l+1)\,n & \text{oder} \\ \text{II} & pr - n & = & (3l+1)\,m & \text{sein.} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{Aus I folgt} & pr & = & (3l+1)\,n + m \\ \text{II} & pr & = & (3l+1)\,m + n \end{array}$$

Setzen wir diesen Wert I in den Ausdruck für $m^2 + n^2 - mn$ ein, so wird

$$2m^2 + 2n^2 - 2mn = 3s^2p^2 - [n^2(3l+1)^2 + 2mn(3l+1) + m^2]$$

$$s^2p^2 = m^2 + 2l^2n^2 + 2ln^2 + n^2 + 2mnl$$

Wenn $m = l^2n$ ist, so wird die rechte Seite ein Quadrat.

$$s^2p^2 = n^2(l^2 + l + 1)^2$$

$$sp = k = n(l^2 + l + 1)$$

wobei l jede beliebige Zahl sein kann.

$$x = \frac{(3l+1)\,n - n}{3} = ln$$

$$y = l(l+1)\,n$$

$$z = (l+1)\,n$$

l kann ein Bruch sein $= \frac{t}{i}$

$$x = \frac{ti}{i^2}\,n \qquad y = \frac{t(t+i)}{i^2}\,n \qquad z = \frac{(t+i)\,in}{i^2}$$

$$k = n\,\frac{(t^2 + ti + i^2)}{i^2}$$

Oder nach Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors

$$x = ti \qquad y = t(t+i) \qquad z = (t+i)\,i \qquad k = t^2 + ti + i^2$$

$$t = 4 \qquad i = 5$$

$$20 \quad 36 \quad 45 \quad 61$$

$$k = z + y - x$$

Zwischen den vier Zahlen besteht diese Beziehung.

Die Zahl, die sich im Quadrat als Summe der drei andern darstellt, kann immer nur gerade sein, denn in der Summe $t^2 + it + t^2$ ist t und i nie gleichzeitig gerade. t und i müssen teilerfremd sein. Entweder sind beide ungerade, dann wird auch k ungerade, oder die eine von beiden ist gerade, so tritt das gleiche Ergebnis ein.

Fall II

$$\begin{aligned}
pr &= (3l+1)\,m \\
2m^2 + 2n^2 - 2mn &= 3s^2p^2 - [m^2(3l+1)^2 + 2mn(3l+1) + n^2] \\
s^2p^2 &= m^2 9l^2 + 6lm^2 + m^2 + 6mnl + 2mn + n^2 + 2m^2 + 2n^2 - 2mn \\
s^2p^2 &= 3m^2l^2 + 2lm^2 + 2lmn + m^2 + n^2 \\
n &= l^2m \\
s^2p^2 &= 3m^2l^2 + 2lm + 2l^3m^2 + m^2 + l^4m^2 \\
s^2p^2 &= m^2(l^4 + 2l^3 + 2l + 3l^2 + 1) \\
s^2p^2 &= m^2(l^2 + l + 1)^2 \\
k &= sp = m(l^2 + l + 1) \\
x &= \frac{(3l+1)\,m + n - m - n}{3} \\
x &= \frac{(3l+1)\,m - m}{3} \\
x &= lm
\end{aligned}$$

Man erkennt, daß die Form der pythagoreischen Zahlen dieselbe bleibt.

Es gibt noch einen anderen Weg der Lösung dieser Aufgabe:

Es war
$$[2(k+1)+k^2]^2 = [2k+1)]^2 + [k(k+2)]^2$$
$$(2k+2)^2 = 4k^2+8k+4$$
$$= 4(k^2+2k+1)$$

Setzt man $2(k+1) = u^2$ so erhält man auf der rechten Seite 3 Quadrate.
$$k = \frac{u^2-1}{2}$$

Eingesetzt
$$(u^2+1)^2 = 4\left[\left(\frac{u^2-1}{2}\right)+u^2\right]$$
$$= (u^2-1)^2+(2u)^2$$
$$y = \frac{u^2-1}{2}\ \frac{u^2+3}{2}$$

Die größte Zahl ist
$$2(k+1)+k^2 = u^2-1+\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2$$

Setzt man statt $u\ \frac{r}{s}$ ein, so ist
$$2u = \frac{2r}{s}$$
$$u^2-1 = \frac{r^2-s^2}{s^2}$$
$$\frac{u^2-1}{2}\ \frac{u^2+3}{2} = \frac{(r^2-s^2)(r^2+3s^2)}{4s^4}$$
$$u^2+1+\left(\frac{u^2-1}{2}\right) = \frac{u^4+2u^2+5}{4} = \frac{r^4+2r^2s^2+5s^4}{4s^4}$$

Gibt man allen vieren den gleichen Nenner, so erhält man:

$8rs^3$ | $4s^2(r^2-s^2)$ | $(r^2-s^2)(r^2+3s^2)$ | und $(r^2+s^2)^2+4s^4$

$s = 1$ $r = 2$

16 12 21 29

Die Formel behält ihre Gültigkeit, wenn man r und s vertauscht.

$8sr^3$ $4r^2(s^2-r^2)$ (s^2-r^2) (s^2+3r^2) | $(r^2+s^2)^2+4s^4$

Wenn man quadriert, so wird
$$64s^2r^6+16r^4(s^2-r^2)^2+(s^2-r^2)^2(s^2+3r^2)^2 = [(r^2+s^2)^2+4r^4)]^2$$

Die Richtigkeit zeigt man am schnellsten indirekt durch Subtraktion von der vorigen als richtig erkannten Gleichung:
$$64r^2s^6+16s^4(r^2-s^2)^2+(r^2-s^2)^2(r^2+3s^2)^2 = [(r^2+s^2)^2+45^4]^2$$
$$64s^2r2(s^4-r^4)+(r^2-s^2)^2\,16(s^4-r^4)+(s^2-r^2)\,8\,.\,(s^4-r^4) = 8(r^2+s^2)^2(s^4-r^4)+16(s^8-r^8)$$

Nach Division durch (s^4-r^4) stellt man leicht die Identität fest.

$s = 2$ $r = 3$

192 80 105 233

Nach Vertauschung von r und s

432 — 180 — 155 493.

Da es sich um die Summierung von Quadraten handelt, so können die Minuszeichen durch Plus ersetzt werden.

Die Zerlegung in der Formel mit k kann auch auf folgende Weise erfolgen und man erhält dann eine neue Formel, bei der aber r und s keine andern Resultate ergeben.

Setzen wir in

$$[2(k+1)+k^2]^2 = [2(k+1)]^2 + k^2 + 2k)^2$$

$k+1 = u^2$ und trennen die rechte Seite in $4k^2(k+1) + k^4u^4 + 1$, so sind die drei Zahlen, deren Quadratsumme u^4+1 ist

$$2u^2 \qquad (u^2-1)^2 \qquad 2(u^2-1)u$$

$u = \frac{r}{s}$ Nach Unterdrückung des gemeinsamen Nenners ergibt sich:

r^4+s^4	$2r^2s^2$	$(r^2-s^2)^2$	$2rs(r^2-s^2)$
$r=3$	$s=2$		
97	72	25	60.

Zusammenstellung:

I	ti	$t(t+c)$	$(t+c)i$	t^2+ti+i^2
IIa	$8rs3$	$4s^2(r^2-s^2)$	$(r^2-s^2)(r^2+3s^2)$	$(r^2+s^2)^2+4s^4$
b	$8sr3$	$4r^2(r^2-s^2)$	$(s^2-r^2)(s^2+3r^2)$	$(r^2+s^2)^2+4r^4$
III	r^4+s^4	$2r^2s^2$	$(r^2-s^2)^2$ $2rs(r^2-s^2)$	

Bei der Bestimmung der pythagoreischen Zahlen hatten wir noch eine zweite Form für k kennen gelernt.

$$k^2+(k+1)^2 \qquad 2k(k+1) \qquad (2k+1)$$

$$(k^2+(k+1)^2 = 4k^2(k^2+2k+1)+4k^2+4k+1$$

$$4k+1 = u^2$$

$$k = \frac{u^2-1}{4}$$

$$\left[\left(\frac{u^2-1}{4}\right)^2+\left(\frac{u^2+3}{4}\right)\right]^2 = \left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2\left(\frac{u^2+3}{4}\right)^2+\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2+u^2$$

$$(r^4+s^4)^2+4s^2 \quad\Big|\quad (r^2-s^2)(r^2+3s^2) \quad\Big|\quad 4s^2(r^2-s^2) \quad\Big|\quad 8rs^3$$

Die Formel ist dieselbe wie bei IIa. Setzen wir

$$[k^2+(k+1)^2]^2 = 4k^4+k^2(2k+1)+(2k+1)^2$$

$$(k^2+(k+1^2)^2 = (2k^2)^2+4k^2(2k+1)+(2k+1)^2$$

$$2k+1 = u^2$$

$$k = \frac{u^2-1}{2}$$

$$k^2 = \frac{(u^2-1)^2}{4}$$

$$2k^2 = \frac{(u^2-1)^2}{2}$$

$$(u^4+1)^2 = (u^2-1)^2+2^2(u^2-1)^2u^2-4u^4$$

$$r^4+s^4 \qquad (r^2-s^2)^2 \qquad 2rs(r^2-s^2) \qquad 2r^2s^2$$

Wir erhalten auf diese Weise die frühere Formel.

Es soll gezeigt werden, dass sich die Differenz zweier Quadrate auf zweifache Weise ausdrücken läßt:

$$t = 4\,s^2 \qquad i = -(r^2 + 3\,s^2) \qquad t + i = s^2 - r^2$$

Durch Benutzung der Ausdrücke, in denen t und i vorkommt erhält man

$$\text{I} \quad rt = -4\,s^2\,(r^2 + 3s^2) \qquad \text{II} \quad t\,(t + i) = 4\,s^2\,(s^2 - r^2)$$

$$\text{III} \quad -(s^2 - r^2)\,(r^2 + 3\,s^2) \qquad \text{IV} \quad t^2 + it + t^2 = (s^2 + r^2)^2 + 12\,.\,s^4$$

Da wir wieder vom Vorzeichen absehen können, so erkennen wir bei den Zahlen II und III eine Uebereinstimmung mit den mittelsten der Formeln II a

$$\left[(r^2 + s^2)^2 + 4\,s^4\right]^2 - (8\,rs^3)^2 = \left[(s^2 + r^2)^2 + 12\,s^4\right]^2 - \left[4\,s^2\,(r^2 + 3\,s^2)\right]^2$$

$$r = 2 \qquad s = 3$$

$$493^2 - 432^2 = 1141^2 - 1116^2$$

Durch Vertauschung von s und r erhielte man andere Ziffern von gleicher Eigenschaft.

$$\left((s^2 + r^2)^2 + 4\,r^4\right)^2 - (8\,s\,r^3)^2 = \left[(s^2 + r^2) + 12\,r^4\right]^2 - \left[4\,r^2\,(s^2 + 3\,r^2\right]^2$$

$$r = 2 \qquad s = 3$$

$$233^2 - 192^2 = 361^2 - 336^2$$

Damit ist auf die einfachste Weise auch die Summe zweier Quadrate durch die Summe zweier andern ausgedrückt.

Durch die Vereinigung der Gruppen II a und III können wir ebenfalls Formeln für die Gleichheit der Summen zweier Quadrate erhalten.

Wir multiplizieren die Gruppen II a mit $r^2 - s^2$, die der Gruppe III mit s^2 und subtrahieren.

	a	b	c	d
II a)	$8\,r\,s^2\,(r^2 - s^2)$	$4\,s^2\,(r^2 - s^2)^2$	$(r^2 - s^2)^2\,(r^2 + 3\,s^2)$	$\left[(r^2 + s^2)^2 + 4\,s^4\right](r^2 - s^2)$
	a^1	b^1	c^1	d^1
	$4\,s^2\,(r^4 + s^4)$	$8\,r^2\,s^4$	$4\,s^2\,(r^2 - s^2)$	$8\,rs^3\,(r^2 - s^2)$

Hier ist $\quad a = d \qquad b = c^1$

$$d^2 - c^2 = a^{12} - b^{12}$$

Beispiel $\quad r = 3 \qquad s = 2$

$$1165^2 - 525^2 = 1552^2 - 1152^2$$

In gleicher Weise läßt sich aus Gruppe II b und III eine Gleichung bilden.

$$\left[(r^2 + s^2)^2 + 4\,r^4\right]^2 (r^2 - s^2)^2 - (s^2 + 3\,r^2)^2\,(r^2 - s^2)^4 = \left[4\,r^2\,(r^4 + s^4)\right]^2 - (8\,s^2\,r^4)^2$$

Hier ist nur r und s vertauscht.

$$r = 3 \quad s = 2$$

$$2965^2 - 775^2 = 3492^2 - 1592^2$$

Eine weitere Untersuchung darüber findet sich später.

Jetzt soll ein weiterer Fall untersucht werden, in dem ein Quadrat gleich der Summe der Quadrate dreier anderer ist.

Der Ausdruck $k^4 + k^3 + 4\,k^2$ läßt aber noch eine weitere Zerlegung zu

$$k^4 + 4\,k^3 = k^2\,(k^2 + 4k)$$

$k^2 + 4\,k$ wird $= u^2$ gesetzt

$$k = -2 \pm \sqrt{u^2 + 4}$$

Wenn $u = \frac{r}{s}$ gesetzt wird

$$k = \frac{-2\,s \pm \sqrt{r^2 + 4\,s^2}}{s}$$

Es müssen r und $2s$ pythagoreische Zahlen sein.

Die eine Zahl ist $\| \; 2k = \frac{-4s + 2\sqrt{r^2+4s^2}}{s}$

2) $\| \; k\sqrt{k^2+4k} = \left(\frac{-2s+\sqrt{r^2+4s^2}}{s}\right)\frac{r}{s}$

3) $\| \; 2k+2 = \frac{-2s+2\sqrt{r^2+4s^2}}{s}$

4) $\left(\frac{-2s+\sqrt{r^2+4s^2}}{s}\right)^2 + \frac{2\sqrt{r^2+4s^2}-2s}{s} = \frac{r^2+8s^2-4s\sqrt{r^2+4s^2}+2s\sqrt{r^2+4s^2}}{s^2}$

$\frac{r^2+6s^2-2s\sqrt{r2+4s^2}}{s^2}$

Erste Zahl $-4s^2+2s\sqrt{r^2+4s^2}$

Zweite Zahl $-2rs+r\sqrt{r^2+4s^2}$

Dritte Zahl $-2s^2+2s\sqrt{r^2+4s^2}$

Vierte Zahl $r^2+6s^2-2s\sqrt{r^2+4s^2}$

Setzen wir $r = 3$ $s = 2$, so ist

4 3 12 13

das Resultat der Substitution.

Vertauschen wir $2s$ mit r, so bleibt der Wurzelausdruck ungeändert:

$-r^2+r\sqrt{r^2+4s^2}$

$-2rs+2s\sqrt{r^2+4s^2}$

$-\frac{r^2}{2}+r\sqrt{r^2+4s^2}$

$4s^2+\frac{3r^2}{2}-r\sqrt{r^2+4s^2}$ oder mit 2 multipliziert.

$-2r^2+2r\sqrt{r^2+4s^2}$

$-4rs+4s\sqrt{r^2+4s^2}$

$-r^2+2r\sqrt{r^2+4s^2}$

$8s^2+3r^2-2r\sqrt{r^2+4s^2}$ Für $r=3$, $s=2$ wird:

$-80+30 = 12$ 16 21 29

$12^2+16^2+21^2 = 29^2$

Fassen wir die Resultate zusammen, so kommen wir zu dem Schluß, daß sich für gegebene r und s entweder eine oder zwei Gruppen bilden lassen unter der Voraussetzung, daß r und $2s$ teilerfremd und pythagoreische Zahlen sind, bei denen die Summe der Quadrate der ersten drei Zahlen gleich dem Quadrate der vierten Zahl ist. Die beiden ersten Zahlen sind wieder pythagoreisch, denn die Summe ihrer Quadrate ist:

$$\left(\sqrt{r^2+4s^2}-r\right)^2 4\,(r^2+4s^2)$$

$$r = s \quad s = 6$$

$$80^2+192^2+105^2 = 383^2$$

Sind zwei Zahlen 24 und 32 bekannt so ist

$$\frac{r}{2s} = \frac{4}{3} \qquad \text{oder} \qquad r = \frac{8}{3}\,s \quad \text{eingesetzt:}$$

$$\left(\frac{32\,s}{9}\right)^2 + \left(\frac{24\,s}{9}\right)^2 + \left(\frac{96\,s}{9}\right)^2 = \left(\frac{104\,s}{9}\right)^2 \quad 32^2 + 24^2 + 96^2 = 104^2$$

Aendern wir das Zeichen der Wurzel, so erhalten wir den zweiten Fall.

$$\begin{array}{cccc} 300 & 125 & 228 & 397 \\ \text{für} & & r = 5 & s = 6 \end{array}$$

Wir hatten bisher 5 Gruppen bestimmt. Ob damit alle Formen erschöpft sind, lasse ich dahingestellt. Auch bleibt noch die schwierige Aufgabe bestehen, zu versuchen, sie auf eine Grundformel zurückzuführen, in der sie alle enthalten sind.

Wir wenden uns jetzt der direkten Behandlung der Aufgabe zu: Die Summe zweier Quadrate durch die Summe zweier anderer Quadrate darzustellen.

I. Methode.

$$\begin{array}{cc} y & z \\ (x - m) & x - n \end{array} \qquad k \text{ und } x \text{ seien die verlangten Zahlen.}$$

$$\begin{aligned}
k^2 + x^2 &= x - m)^2 + (x - n)^2 \\
k^2 + x^2 &= 2\,x^2 - 2\,x\,(m + n) + m^2 + n^2 \\
x^2 - 2\,x\,(m + n) &= k^2 - m^2 - n^2 \\
x &= m \pm n + \sqrt{k^2 + 2\,m\,n} \\
k^2 + 2\,m\,n &= (u^2 - 1)\,k^2 \qquad m = \frac{(u^2 - 1)\,k^2}{2\,n} \\
x &= m + n \pm u k \\
x &= \frac{(u^2 - 1)\,k^2 + 2\,n^2 \pm 2\,u\,k\,n}{2\,n} \\
y &= x - m = \frac{2\,n^2 \pm 2\,u\,k\,n}{2\,n} \\
z &= x - n = \frac{(u^2 - 1)\,k^2 \pm 2\,u\,k\,n}{2\,n}
\end{aligned}$$

$$k.$$

$$u = \frac{r}{s}$$

A)

$$\begin{aligned}
x &= (r^2 - s^2)\,k^2 + 2\,n^2 s^2 \pm n\,2\,r\,s\,k = (r^2 - s^2)\,k^2 + 2\,s\,(u^2 s \pm n\,r\,k) \\
y &= 2\,n^2 s^2 \pm 2\,r\,s\,k\,n = 2\,s\,(n^2 s \pm r\,k\,n) \\
z &= (r^2 - s^2)\,k^2 \pm 2\,r\,s\,k\,n = (r^2 - s^2)\,k^2 \pm 2\,r\,s\,k\,n
\end{aligned}$$

$$2\,n\,k\,s^2$$

Beispiel: Ist $r = 3 \qquad s = 2$

$$\begin{aligned}
x &= 5\,k^2 + 8\,n^2 \pm 12\,k\,n \\
y &= 4\,(2\,n^2 \pm 3\,k\,n) \\
z &= 5\,k^2 \pm 12\,k\,n
\end{aligned}$$

$$8\,n\,k$$

Ist $n = 1 \qquad k = 2$ so wird

$$x = 52 \qquad y = 32 \qquad z = 44 \qquad 16$$

$13^2 + 4^2 = 8^2 + 11^2$ als Grundform.

Wenn $k = 2 \qquad n = 3$

$$164^2 + 48^2 = 144^2 + 92^2$$
$$41^2 + 12^2 = 36^2 + 23^2$$

Wir können n mit k vertauschen, so bleibt der Wert der letzten Zahl derselbe. Gleiches gilt, wenn man statt n s^2 (n als Quadratzahl vorausgesetzt) oder statt k/s^2 setzt. Demnach können zu ein und derselben Zahl die drei andern auf mehrfache Weise gefunden werden. Die Zahl der Gruppen vermehrt sich noch, wenn man das Doppelzeichen beachtet.

Beispiel	$n = 1$	$k = 3$	$r = 3$	$s = 2$
	4	-16	4	16
Dagegen für	$r = 3$	$s = 2$	$n = 1$	$k = 2$
	17	9	28	24

k mit n vertauscht

B I $x = (r^2 - s^2)\, n^2 + 2\, k^2 s^2 \pm 2\, n\, r\, s\, k = (r^2 - s^2)\, n^2 + 2\, k\, s\, (k\, s \pm n\, r)$

II $y = 2\, s\, (k^2 s + r\, k\, n)$

III $z = (r^2 - s^2)\, n^2 + 2\, r\, s\, k\, n = (r^2 - s^2)\, n^2 + 2\, r\, s\, k\, n$

IV $2\, n\, k\, s^2$ Wenn $r = 3$ $s = 2$ ist wird

$x = 5\, n^2 + 8\, k^2 + 12\, k\, n$

$y = 4\, (2\, k^2 + 3\, k\, n)$

$z = 5\, n^2 + 12\, k\, n$

$8\, n\, k$

Ist wieder $n = 3$ $k = 2$ so wird

$x = 149$, $y = 104$, $z = 117$, 48

$$149^2 + 48^2 = 104^2 + 117^2$$

Hier erscheint also 48 zum zweiten Male.

Statt n wird s^2 gesetzt.

C $x = (r^2 - n)\, k^2 \pm 2\, s^4 n + 2\, s^2 r\, k \sqrt{n}$

$y = 2\, s^4 n + 2\, r\, k\, s^2 \sqrt{n}$

$z = (r^2 - n)\, k^2 + 2\, s^2 r\, k \sqrt{n}$

$2\, n\, k\, s^2$

Beispiel a) $r = 3$ $n = 1$ $s = 2$ $k = 2$

$x = 112$ $y = 80$ $z = 80$ 16

b) $r = 3$ $s = 2$ $n = 4$ $k = 5$

$$493^2 \pm 160^2 = 368^2 + 365^2$$

Statt k wird s^2 gesetzt.

D I) $(r^2 - k)\, s^4 \pm 2\, k\, n^2 + 2\, n\, r\, s^2 \sqrt{k}$

II) $2\, n\, k^2 + 2\, r\, n\, s^2 \sqrt{k}$

III) $(r^2 + k)\, s^4 + 2\, r\, s^2 n \sqrt{k}$

$2\, n\, k\, s^2$

$n = 1$ $k = 4$ $s = 2$ $r = 3$

$136^2 + 56^2 = 128^2 + 32^2$ oder reduciert.

$$17^2 + 4^2 = 16^2 + 7^2$$

$n = 4$ $k = 9$ $r = 2$ $s = 1$

A $x = 243 + 32 \pm 144 = 419$

$y = 32 \pm 144 = 176$

$z = 243 \pm 144 = 387$

72

$$
\begin{array}{ll}
A_1) & 419^2 + 72^2 = 387^2 + 176^2 \\
A_2) & 131^2 + 72^2 = 112^2 + 99^2 \\
B_1) & 354^2 + 72^2 = 306^2 + 192^2 \\
B_2) & 96^2 + 18^2 = 66^2 + 72^2
\end{array}
$$

C_1) liefert eine Identität, weil $r^2 = n$ ist. Ist $r^2 = n$, so erhalten wir zwei neue Gruppen.

$$
\begin{array}{ll}
D_1) & 336^2 + 43^2 = 331^2 + 72^2 \\
 & 240^2 + 53^2 = 235^2 + 72^2
\end{array}
$$

Die Zahl 72 kommt hier sechs mal vor als Summand einer Summe zweier Quadrate, die gleich der zweier anderer ist. Wird $r^2 = k = n$, so gibt es nur vier Gruppen und wird $r^2 = s^2 = k = n$, so erhält man Identitäten.

Beispiel $\quad r^2 = k = n = 4 \quad s = 3$

$$
\begin{array}{l}
400^2 + 112^2 = 480^2 + 288^2 \\
288^2 + 16^2 = 272^2 + 96^2 \\
288^2 + 400^2 = 480^2 + 112^2 \\
288^2 + 16^2 = 272^2 + 96^2
\end{array}
$$

Vorausgesetzt ist, dass r bei all diesen Gruppierungen konstant bleibt, da sonst eine unendliche Zahl von Gruppen entstehen.

Ein anderes Verfahren.

Es war $x = m + n \pm \sqrt{k^2 + 2mn}$.

Wenn k und $\sqrt{2mn}$ pythagoreische Zahlen sind, ist die Wurzel rational

$$
\begin{aligned}
2mn &= t^2 \\
m &= \frac{t^2}{2n} \\
x &= t^2 + 2n^2 \pm 2n\sqrt{k^2 + t^2} \\
y &= 2n^2 \pm 2n\sqrt{k^2 + t^2} \\
z &= t^2 \pm 2n\sqrt{k^2 + t^2} \\
 & \quad 2nk
\end{aligned}
$$

nachdem der Nenner $2n$ weggelassen ist:

$t = 2(r+s)s$ und $k = r(r+2s)$ gesetzt.

$$
\begin{aligned}
x &= (2rs + 2s^2)^2 + 2n^2 \pm 2n(2rs + 2s^2 + r^2) \\
y &= 2n^2 \pm 2n(2rs + 2s^2 + r^2) \\
z &= (2rs + 2s^2)^2 \pm 2n(2rs + 2s^2 + r^2)
\end{aligned}
$$

IV $\; 2nr(r+2s)$.

Beispiel: $\quad n = 2 \qquad r = 3 \qquad s = 5$

$$6764^2 + 156^2 = 6756^2 + 364^2$$

Eine Reduktion der vorstehenden Ausdrücke tritt durch Division *(2)* ein.

Wird die Aufgabe gestellt: Zur Zahl 72 die übrigen drei Quadratzahlen zu suchen, so wird $72 = 2 . 3 . 2 . (2 + 2 . 2.)$

$$n = 3 \quad r = 2 \quad s = 2$$

$$394^2 + 72^2 = 376^2 + 138^2$$

Es mag zunächst auffallend erscheinen, daß die Zahlen, deren Quadratsummen gesucht werden, von drei Variablen abhängen ($n\ r\ s$), während wir vorhin deren vier hatten $r\ s\ n\ k$. Wir können aber leicht zeigen, daß sich die vier unabhängigen Variablen auf drei Produkte von je zweien von ihnen zurückführen lassen. Erinnern wir uns an folgende Ausdrücke

$$x = (n^2-1)\,k^2 + 2\,n\,k\,n$$
$$y = 2\,n^2 + 2\,n\,k\,n$$
$$z = (n^2-1)\,k^2 + 2\,n\,k\,n$$

$2\,k\,n,$ wobei überall der Nenner $2\,n$ weggelassen wurde

$$x = (u\,k+n)^2 + n^2 - k^2$$
$$y = 2\,n\,(n+u\,k)$$
$$z = (k\,u+n)^2 - (n^2+k)^2$$

$2\,n\,k$ Wird wieder $k = \frac{r}{s}$ gesetzt.

$$x = (k\,r+u\,s)^2 + (u\,s)^2 - k^2\,s^2$$
$$y = 2\,n\,s\,(k\,r+n\,s)$$
$$z = (k\,r+n\,s)^2 - (n^2+k^2)\,s^2$$
$$2\,n\,k\,s^2$$

Setzen wir $k\,r = e$ $n\,s = f$ $k\,s = g$

$$x = (e+f)^2 + f^2 - g^2$$
$$y = 2\,(e+f)$$
$$z = (e+f)^2 - (f^2+g^2)$$

$2\,f\,g$ damit sind x y z und die vierte Zahl auch ausgedrückt durch drei Größen, die aber insofern in einem gewissen Zusammenhang stehen als f und g e und g einen gleichen Faktor haben müssen.

Hatte man 72 gegeben, so wäre

$$2\,f\,g = 72$$
$$f = 1.2$$
$$g = 9.2$$

Man kann r beliebig wählen, z. B. $= 3$ und erhält $e = 27$

$$521^2 + 72^2 = 513^2 + 116^2$$

Auch auf ähnliche Weise können die früheren Formeln

$$\left[(r^2+s^2)^2 + 4\,s^4\right]^2 + \left[4\,s^2\,(r^2+3\,s^2)\right]^2 = \left[(r^2+s^2)^2 + 12\,s^4\right]^2 + (8\,r\,s^3)^2$$

auf einfachere zurückgeführt werden:

Setzt man $r^2+s^2 = f$

$$2\,s = e$$
$$2\,r\,s = g$$

$$\left(f^2 + \frac{e^4}{4}\right)^2 + \left(g^2 + \frac{3\,e^4}{4}\right)^2 = \left[f^2 + \frac{3e^4}{4}\right]^2 + (e^2 g)^2$$

oder statt der Quadrate f^2 usw. einfachere Ausdrücke:

$$(k+l^2)^2 + (h+3\,l^2)^2 = (k+3\,l^2)^2 + 4\,l^2\,h$$

Ist e und g d. h. die zweite und vierte Zahl bekannt, so kann man ohne weiteres die erste und dritte hinschreiben.

Zusammenstellung der Formeln, mit deren Hilfe man zu einer gegebenen Zahl die drei andern finden kann, so daß die Summe von zwei Quadraten gleich der Summe der beiden andern Quadrate ist.

I $\quad (k+l^2) + (h+3\,l^2)^2 = (k+3\,l^2)^2 + 4\,l^2\,h$

$$\left.\begin{aligned} k &= f^2 = (r^2+s^2)^2 \\ l &= \frac{e^2}{2} = 2\,s^2 \\ h &= g^2 = 4\,r^2\,s^2 \end{aligned}\right\}\ r \text{ und } s \text{ sind teilerfremd.}$$

II. Die Zahlen sind

$$x = (e+f)^2 + f^2 - g^2$$
$$y = 2\,f\,(e+f)$$
$$z = (e+f)^2 - (f^2+g^2)$$
$$e = k\,r \qquad f = n\,s \qquad g = k\,s$$

$$[(r^2+s^2)^2+4\,r^4]^2\,(r^2-s^2)-(s^2+3\,r^2)^2\,(r^2-s^2)^4 = [4\,r^2\,(r^4+s^4)]^2-(8\,s^4\,r^4)^2$$

Am bequemsten bei praktischen Aufgaben dürften die Formeln II zu verwenden sein. Soll zu jedem von zwei Quadraten je ein anders addiert werden, so daß die erste Quadratsumme gleich der zweiten ist, so ergibt sich folgender Gang:

Sind die gegebenen Zahlen z. B. 42 und 26 so setzen wir:

$$y = 2.1\,(e+f) = 42 \qquad f = 1 \qquad e = 20 \qquad g = 13$$

$$\begin{aligned} u &= 2.1.13 = 26 \\ x &= 273 \\ y &= 42 \\ z &= 271 \\ u &= 26 \end{aligned}$$

Daß sich auf scheinbar einfache Weise die Forderung der Aufgabe erfüllen läßt, leuchtet ein. Wir wollen diesen trivialen Fall nicht ganz übergehen, a und a seien die Hypotenusen, b u c die Katheten rechtwinkliger Dreiecke.

$$a^2 = b^2+c^2 \qquad a^2\,a_1^2 = a_1^2\,b^2+a_1^2\,c^2$$

$$a_1^2 = b_1^2+c_1^2 \qquad a^2\,a_1^2 = a^2\,b_1^2+a^2\,c_1^2$$

$$a_1^2\,b^2+a_1^2\,c^2 = a^2\,b_1^2+a^2\,c_1^2$$

Quadratzahlen, die man auf diese Weise erhalten hat, erkennt man daran, daß nach Absonderung des quadratischen Faktors bei je zweien von ihnen die Summen pythagoreische Zahlen sind.

In seiner Abhandlung über pythagoreische Zahlen bringt Vermehren im Güstrower Schulprogramm 1863 eine Reihe von Aufgaben, die er mit l^2+q^2, l^2+q^2, $2\,l\,q$ löst.

Einige dieser Aufgaben wollen wir auf Grund der von uns gewonnenen Formeln behandeln.

I.) Gegeben sei die Summe der pythagoreischen Zahlen $= 2\,s$.

Man erhält

$$2\,(r+s)\,(r+2\,s) = 2\,s.$$

Die Summe ist stets eine gerade Zahl. Dem Produkt der linken Seite entspricht ein Produkt der rechten. Wir zerlegen s in zwei Faktoren k und i, von denen der eine 1 sein kann.

$$\begin{aligned} r+s &= k \\ r+2\,s &= i \\ s &= i-k \\ r &= 2\,k-i \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werte für r und s ein, so wird

$$\begin{aligned} 2\,k\,(i-k)+(2\,k-i)^2 &= k^2+(k-i)^2 \\ 2\,(i-k)\,k &= 2\,i\,k-2\,k^2 \\ (2\,k-i)\,i &= 2\,i\,k-i^2 \end{aligned}$$

Beispiel: Die Summe der drei Zahlen sei 36, dann ist

I	$i = 18$	$k = 1$
II	$i = 2$	$k = 9$
III	$i = 3$	$k = 6$
IV	$i = 6$	$k = 3$
V	$i = 9$	$k = 2$
VI	$i = 1$	$k = 18$

I	290	34	$-$ 288
II	130	$-$ 126	32
III	45	36	27
IV	18	18	0
V	53	$+$ 28	$-$ 45
VI	613	$-$ 612	35

In allen Beispielen außer IV findet sich eine negative Zahl. Beschränken wir unsere Aufgabe auf den Fall, daß alle drei Zahlen positiv sind, so muß $i - k > o$ und $2k - i > o$ sein oder $2k > i > k$

Ist $k = 7$, $\quad i = 0$ so ist

$12 > 7 > 6$

$2s = 84$

Beispiel 37 12 35

Dividiert man die obige Ungleichung durch 2, so wird

$$k > \frac{i}{2} > 1.$$

Daraus geht hervor, daß der kleinste Wert, den i erreichen kann, 3 und $k = 2$ ist. Die dazu gehörigen Zahlen sind:

5 4 3 und die kleinste Summe 12.

II.) Gegeben ist die Summe in ungeraden Zahlen $= k$

$$2r^2 + 4rs + 2s^2 = k$$

$$(r+s)^2 = \frac{k}{2}$$

$$r + s = \sqrt{\frac{k}{2}}$$

Wir erkennen die Möglichkeit der Aufgabe nur für den Fall, daß die halbe Summe ein Quadrat ist.

Ist die gegebene Zahl 72, so wird

$$r + s = 6$$

I $r = 5$ $\quad s = 1$
II $r = 4$ $\quad s = 2$ } II und IV sind ausgeschlossen, da r und s nicht gerade sein dürfen.
III $r = 3$ $\quad s = 3$
IV $r = 2$ $\quad s = 4$
V $r = 1$ $\quad s = 5$

37	12	35
45	18	27
61	30	11

Anmerkung: r und s müssen ungerade Zahlen sein $\sqrt{\frac{k}{2}}$ ist also eine gerade Zahl und $\frac{k}{2}$ selbst muß die Form $4u^2$ haben, oder $k = 8u^2$.

Für r und $s = 1$ ist die unterste Grenze erreicht. Es handelt sich wieder um $5, 4, 3, u$ ist dann wieder $= 1$.

III.) Die Summe der größten und der geraden kleineren ist gegeben.

$$r^2 + 4rs + 4s^2$$

$$(r + 2s)^2 = k^2$$

$$r + 2s = k$$

r und s sind beide ungerade, also muß k ungerade sein z. B. $k = 7$

$$r + 2s = 7$$

$$\begin{array}{lll} r = 1 & & s = 3 \\ r = 3 & & s = 2 \\ r = 5 & & s = 1 \end{array}$$

25	24	7
29	20	21
37	12	35

IV.) Die Summe der Quadrate zweier Zahlen soll gleich der dritten Potenz einer dritten Zahl sein.

$$(r+s)^2 + s^2 = (k\sqrt{k})^2$$

$$r = -s \pm \sqrt{(k\sqrt{k})^2 - s^2}$$

$$(k\sqrt{k})^2 = (l^2+1)\, s^2$$

$$s^2 = \frac{(k\sqrt{k})}{l^2+1}$$

$$k = l^2 + 1$$

$$s = l^2 + 1$$

$$r = -(l^2+1) + l(l^2+1)$$

$$= (l^2+1)(l-1)$$

$$r + s = l(l^2+1)$$

$$s = l^2 + 1$$

$$(l^2+1)^3 = (l^2+1)^2\, l^2 + (l^2+1)^2$$

$$l = \frac{p}{q}$$

$$(p^2+q^2)^3 = (p^2+q^2)^2\, p^2 + (p^2+q^2)^2\, q^2$$

Die Zahlen sind:

$$p^2 + q^2 \qquad (p^2+q^2)\, p \qquad (p^2+q^2)\, q$$

Die Summe der Quadrate zweier Zahlen in die dritte Potenz erhoben ist gleich der Summe der Quadrate zweier andern Zahlen, die man erhält, wenn man jede der einzelnen Zahlen mit der genannten Quadratsumme multipliziert. p und q sind als teilerfremd vorausgesetzt.

Beispiel:

$$p = 2 \quad q = 5$$

$$29^3 = 58^2 + 145^2$$

Es könnte scheinen, als ob sich ohne grösseren Aufwand von Rechnung dieses Resultat erreichen liesse, indem man $c = a^2 + b^2$ mit c^2 multipliziert

$$c\,3 = a^2 c^2 + b^2 c2$$

$$(c)^3 = (a\,c)^2 + (bc)^2$$

Dennoch bleibt die Frage offen, ob es noch andere Zahlen ausser denen gibt, die durch Multiplikation mit c^2 aus Gleichung I hervorgegangen sind. Nach obiger Ableitung dürfte es nicht der Fall sein.

IV) Um die pythagoreischen Zahlen festzustellen, die eine arithmetische Reihe bilden, setzen wir

$$(r+s)^2 + s^2 - 2s(r+s) = 2s(r+s) - (r+2s)s$$

$$r = s$$

Es sind die Zahlen 5 4 3.

WOLLSTEIN, im März 1913. **Dr. Mühle.**

$$r + 2s = 7$$

$r = 1$ $s = 3$

25
29
37

IV.) Die Summe der Qua … r dritten Potenz einer dritten Zahl sein.

$(r + s)^2 +$ …

$(k \sqrt{k}$ …

$k = l^2 +$ …
$s = l^2 +$ …
$r = -$ …
$= (l^2$ …
$r + s = l\,(l$ …
$s = l^2$ …
$(l^2 + 1)^3 = (l^2$ …
$l = \frac{p}{q}$ …
$(p^2 + q^2)^3 = (p^2$ …

Die Zahlen sind:

$p^2 +$ …

Die Summe der Quadrat … erhoben ist gleich der Summe der Quadrate zweie … venn man jede der einzelnen Zahlen mit der gen … p und q sind als teilerfremd vorausgesetzt.

Beispiel:

Es könnte scheinen, al … on Rechnung dieses Resultat erreichen liesse, indem …

Dennoch bleibt die Fra … ausser denen gibt, die durch Multiplikation mit … sind. Nach obiger Ableitung dürfte es nicht der F …

IV) Um die pythagorei … arithmetische Reihe bilden, setzen wir

$(r + s)^2 + s$ …

Es sind die Zahlen 5 …

WOLLSTEIN, im Mär … **Dr. Mühle.**