Geschichte der Variationsrechnung.

Erster Theil.

Einleitung. Problem der Brachistochrone, aufgestellt von Johann Bernoulli. Rückblick auf die in früherer Zeit zur Bestimmung der Maxima und Minima angewendeten Methoden. — Anwendung der Idee, daß bei den Naturkräften ein Minimum stattfinde, zum Beweise mehrer Sätze. Angabe der bei der Lösung des Problems der Brachistochrone benutzten Prinzipien. — Jacob Bernoulli's Lösung des obigen Problems. — Seine Aufstellung des sogenannten isoperimetrischen Problems — Rückblick auf die Behandlung ähnlicher Probleme in früherer Zeit. — Jacob Bernoulli's Lösung. — Erweiterung des Kreises der Probleme und der zu ihrer Lösung angewendeten Methoden durch Euler. — Euler's Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. — Lagrange's Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies. —

1.

Die Geschichte der Mathematik, wie sie vollständig in dem bedeutenden Werke von Montucla und in den diesem weit nachstehenden von Bossut, Savérien u. A. behandelt, und wie sie für specielle Zeiträume von Kästner, Libri[1]) u. s. f. bearbeitet worden ist, beschäftigt sich zum größeren Theile mehr mit Biographien, literarhistorischen Notizen, wohl auch mit Aufstellung geistreicher Gesichtspunkte, als, daß es ihre vorzügliche Aufgabe wäre, den innern Gang, die Entwicklung der einzelnen Methoden und Disciplinen der Mathematik aufzudecken. Letzteres ist weit mehr der Zweck vieler trefflichen Abhandlungen und Monographien gewesen, z. B. der von Lagrange einzelnen Theilen seiner mécanique analytique, seiner théorie des fonctions, seines calcul des fonctions u. s. f. beigegebenen, jedoch nur in einzelnen Theilen genaueren und ausführlicheren historischen Einleitungen, ferner der Geschichte der Algebra in Italien von Cossali, der bisher leider unvollendet gebliebenen Geschichte der Algebra von Nesselmann, u. s. f., der historischen Abhandlungen von Chasles, vorzüglich aber seiner in jeder Beziehung vortrefflichen Geschichte der Geometrie[2]).

In ähnlicher Weise, wie zuletzt angedeutet ward, soll auch die gegenwärtige Abhandlung ein Versuch sein, die Geschichte der Variationsrechnung in ihrer vollen Entwicklung zu geben. Im Laufe der Untersuchung wird es sich ergeben, daß die historischen Behandlungen der Methoden der Infinitesimalrechnung, der Geometrie, der Prinzipien der Mechanik u. s. f. zu ihr in einer engen Beziehung stehen. Es wird dadurch möglich werden, das gemeinsame Band zu finden, welches sich um die geschichtlichen Darstellungen dieser speciellen Theile der Mathematik schlingen läßt und sie zu einer Einheit unter einander verknüpft. Auf solche Weise wird sich dann auch leichter der Pfad finden lassen, der zu einer wahren Geschichte der Mathematik führt, welche das literarhistorische Beiwerk an seiner rechten Stelle benutzend, das Bekannte in seiner genetischen Entwicklung begründet, bis es vollkommen klar ist, die Gedanken und Methoden darlegt, in wie weit sie sich zu dem wahrhaften Fundamente abgeklärt haben, von welchem aus man das Ganze leichter übersehen, beherrschen und schneller zu denjenigen fernen Punkten gelangen kann, die eben zu weiteren Entdeckungen führen.

Der Gang aber, den man gewöhnlich einschlägt, um zu solchen Entdeckungen zu gelangen, ist meistens der, daß man sich einbildet, ein Problem sei von besonderer Wichtigkeit, daher auf seine Lösung alle Kraft verwendet. Bei weiterer, fortgesetzter Entwicklung der Wissenschaft zeigt es sich jedoch, daß der Gegenstand, welcher alle Kraft der Speculation in Anspruch nahm, für die Wissenschaft selbst von geringerem Interesse ist, daß man aber im Laufe der Untersuchung auf Punkte gerieth, welche den wahren Gang, welcher einzuschlagen ist, bezeichnen, daß man bei der Verfolgung eines beinahe aus der Luft gegriffenen Problems die wahren Probleme der Wissenschaft entdeckte.

2.

Ein solches Problem war auch das von Johann Bernoulli[3]), damals Professor in Grönningen, im Juni 1696 aufgestellte Problem der Brachistochrone[4]), d. h. die Aufgabe:

„Zwischen zwei gegebenen Punkten A und B diejenige Curve zu finden, längs welcher ein „schwerer Punkt herabfallend in der kürzesten Zeit von A nach B gelangt".

Diesem schloß sich bald nachher das mit ihm scheinbar außer Zusammenhang stehende Problem von den Isoperimetern seines Bruders Jacob, Professor in Basel, an. Die Lösungen beider Probleme führten zu Methoden, welche den Grund zu der von Euler sogenannten Variationsrechnung legten, d. h. zu derjenigen mathematischen Disciplin, welche sich mit der Veränderung der analytischen Ausdrücke beschäftigt, die sie erleiden, wenn sich Functionen in ihnen ändern. Wie mächtig, leidenschaftlich erregend die genannten Probleme zu Ende des 17. und zu Anfang des 18. Jahrhunderts die Mathematiker ergriffen, ist bekannt genug.

Die Methoden der Tangenten und der **Maxima** und **Minima**, wie sie, abgehend von der streng geometrischen Methode des Apollonius von Perga[5]), Serenus von Antissa[6]), Viviani[7]) und seines Zeitgenossen Ricci[8]), nach vorhergehenden Lösungen specieller Probleme von Tartaglia[9]), Kepler[10]), zuerst und in genialer Auffassung von Fermat[11]) und gleichzeitig, wenn schon in nicht vollkommen entwickelter Form, von Descartes[12]) aufgestellt, und von deren Zeitgenossen und Nachfolgern Roberval[13]), Renaldini[14]), Huygens[15]), Hudde[16]), de Sluse[17]), Barrow[18]), Tschirnhausen[19]), entweder rein beibehalten, oder theilweise modificirt und erweitert waren, reichten zu ihrer Lösung nicht hin. Hier machte sich vorzüglich die Kraft und Fruchtbarkeit der durch jene Methoden angebahnten, von Leibnitz[20]) und Newton erfundenen neuen Infinitesimalrechnung geltend. Ihr verdankte wohl Newton[21]) die früher schon gefundene, aber ohne Beweis hingestellte und darum auf die Entwicklung der Wissenschaft selbst keinen Einfluß habende Lösung des Problems des sog. kleinsten Widerstandes.

Nur von denjenigen gegen das Ende des 17. Jahrhunderts lebenden Mathematikern, welche in das Wesen der Differenzialrechnung eingedrungen waren, haben wir daher Lösungen des äußerst schwierig erachteten[22]) Problems der Brachistochrone, wie von Leibnitz[23]), L'Hopital[24]), Johann[25]) und Jacob Bernoulli[26]), Newton[27]), Duillier[28]), Craig[29]), während Andere, wie Sauveur[30]), Tschirnhausen[31]) u. s. f. die Lösung nicht fanden.

3.

Gehen wir dazu über nachzuweisen, wie Johann Bernoulli zu seinem Probleme und dessen Lösung geführt ward, und ob nicht eingreifende Anschauungen in früherer Zeit zu Tage traten. Veranlassung zu jenem von Galilei[32]) bereits versuchten, aber falsch gelösten Probleme der Brachistochrone gab dem Johann Bernoulli eine physikalische Aufgabe, welche Huygens[33]) wohl aufgestellt, deren Untersuchung er aber nicht weiter verfolgt hatte, die Aufgabe nämlich:

„Die Bahn eines leuchtenden Punktes zu finden, welcher durch ein Medium hindurchgeht, dessen „Dichtigkeit sich continuirlich ändert".

Die Hypothese, welche diese Aufgabe modificirt mit der von der Brachistochrone in Einklang brachte, war die, daß der Lichtstrahl, indem er aus einem dünnern in ein dichteres Mittel übergeht, so gebrochen werde, daß, unter Berücksichtigung der Zeit, der Strahl den kürzesten Weg mache oder überhaupt, daß sein Weg ein solcher, für welchen die Summe der auf ihm sich darbietenden Widerstände ein Minimum ist, also der am wenigsten beschwerliche (**facillima**) sei. Diese Idee, daß bei den Naturkräften ein Minimum stattfinde, sehen wir bei der Untersuchung ähnlicher Fragen schon früher auftauchen. So hat Heron, nach der Angabe des Damianus[34]), eines Schülers des Heliodorus von Larissa, in seiner verloren geglaubten, in jüngster Zeit aber in der bisher fälschlich dem Ptolemaeus[35]) zugeschriebenen Schrift de speculis wieder aufgefundenen Catoptrik[36]) und nach ihm Vitellio[37]), diese Hypothese, daß der Weg des Lichtstrahles bei seiner Reflexion ein Minimum sei, benutzt, um den Satz zu beweisen, daß der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel ist; noch klarer finden wir obige Hypothese ausgesprochen und angewendet von Fermat[38]), Leibnitz[39]) zu dem Beweise des Satzes, daß bei dem Uebergange eines Lichtstrahles aus einem Mittel in ein andres der **sinus** des Einfallswinkels zu dem **sinus** des Brechungswinkels (für dieselben zwei Media) in einem constanten Verhältniß stehe. Auch in späteren Zeiten sehen wir jene Idee wiederholt zur Geltung gebracht von Maupertuis[40]) bei seinem sogenannten Prinzipe der kleinsten Wirkung, von Euler[41]) u. A.

Von dem gleichen Gedanken ausgehend bestimmt Johann Bernoulli als die Bahn, welche ein schwerer Punkt durchläuft, um fallend von einem Punkte zu einem andern in der kürzesten Zeit zu gelangen, oder als die Curve, welche ein Lichtmolecül beschreibt, das sich von dem leuchtenden Punkte nach dem erleuchteten in einem Medium bewegt, dessen Dichtigkeit sich continuirlich im Verhältnisse der Geschwindigkeit, welche der Körper beim freien Falle erlangen würde, ändert, diejenige, welche durch die Gleichung:

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{x-a}}\ ^{42)}$$

ausgedrückt ist, d. h. die Cycloide. Dieselbe Gleichung fand Leibnitz[43]) vermittelst einer der eben erwähnten ähnlichen Lösung, indem er den gemeinsamen Punkt B zweier unendlich kleinen auf einanderfolgenden Elemente AB und BC der als ein Polygon von unendlich vielen Seiten betrachteten und zu suchenden Curve auf der durch B gehenden Horizontallinie so bestimmte, daß der Weg von A über B nach C der leichteste sei.

Das Prinzip aber, auf welches sich jene beiden Lösungen, ohne daß es in ihnen bestimmt und klar ausgesprochen wäre, stützen, das Prinzip, welches auch den andern, von den eben angeführten, — vielleicht mit alleiniger Ausnahme der von Jacob gegebenen, — wenig verschiedenen Lösungen zu Grunde liegt, findet sich deutlich und bestimmt in dem von Jacob Bernoulli gegebenen Beweise seiner Lösung aufgestellt, wie denn Jacob sich überhaupt in seinen Arbeiten meist strenger, conciser und gediegener zeigte, als Johann, dem freilich ein länger währendes Leben wiederum mehr zu produciren gestattete, als jenem.

Dieses Prinzip nun lautet:

„Gehört einer Curve in ihrer vollen Ausdehnung irgend ein Maximum oder Minimum als in-
„härirende Eigenschaft an, so findet dies auch für jeden noch so kleinen Theil derselben Statt.“[44])

Mit Hülfe dieses Prinzips und auf die Eigenthümlichkeit des Maximums oder Minimums, wie solche von Kepler[10]) normirt war, fußend gab er, ohne auf jene oben erwähnte Hypothese Rücksicht zu nehmen, folgenden directen Beweis, welcher der Methode den Weg zu ihrer weitern Ausdehnung bahnte:

4.

Es sei ACB (Fig. 1) diejenige in einer beliebig gegen den Horizont geneigten Ebene zu suchende Curve, auf welcher ein Körper herabfallend in kürzerer Zeit von A nach B gelangt, als auf einer andern in derselben Ebene gelegenen Curve, und seien ferner C und D zwei einander unendlich nahe liegende Punkte der Curve ACB, so wird, wenn die mit $t.\ AB$ bezeichnete Zeit des Falles von A nach B ein Minimum sein soll, in Folge des oben aufgestellten Prinzips auch $t.\ CD$ — die während des Falles des Körpers von C nach D verflossene Zeit — ein Minimum sein. Fällt man nun von C auf die durch A gezogene horizontale Linie AH ein Loth CH und auf dessen Verlängerung über C hinaus von D aus das Loth DF, halbirt CF in E, construirt das Rechteck $FEID$ und bezeichnet den Durchschnittspunkt von EI und der zu suchenden Curve mit G, so besteht die Aufgabe darin, einen solchen Punkt G, d. h. die gegenseitige Neigung der unendlich kleinen Elemente CG und GD, zu finden, daß $t.\,CG + t.\,GD$ ein Minimum sei.

Man nehme daher auf EI einen beliebigen Punkt L an, so jedoch, daß $\frac{LG}{EG}$ unendlich klein sei, beschreibe sodann mit CL um C und mit DG um D die Bogenelemente LM und GN, so ist, für den Fall, daß ein Minimum stattfinden soll, in Folge der specifischen Eigenthümlichkeit desselben:

$$t.\,CG + t.\,GD = t.\,CL + t.\,LD \text{ oder}$$
$$1)\ t.\,CG - t.\,CL = t.\,LD - t.\,GD.$$

Nach dem Gesetze für den Fall der Körper ist nun:

$$CE : CG = t.\,CE : t.\,CG \text{ und}$$
$$CE : CL = t.\,CE : t.\,CL$$
$$CE : CG - CL = t.\,CE : t.\,CG - t.\,CL \text{ oder}$$
$$2)\ CE : MG = t.\,CE : t.\,CG - t.\,CL$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke MLG und ECG ergibt sich aber:

$$3)\ MG : GL = EG : CG$$

und durch Zusammensetzung der Proportionen 2 und 3

$$\text{I.}\ CE : GL = EG \times t.\,CE : CG \times (t.\,CG - t.\,CL)$$

Auf gleiche Weise erhält man in Folge des Gesetzes für den Fall der Körper auch:

$$EF : LD = t.\,EF : t.\,LD$$
$$EF : GD = t.\,EF : t.\,GD$$
$$EF : LD - GD = t.\,EF : t.\,LD - t.\,GD \text{ oder}$$
$$4)\ EF : LN = t.\,EF : t.\,LD - t.\,GD$$

und in Folge der Aehnlichkeit der Dreiecke LNG und GID

$$5)\ LN : LG = GI : GD$$

und durch Zusammensetzung der Proportionen 4 und 5, sowie, da $EF = EC$ ist,

$$\text{II.}\ EC : LG = GI \times t.\,EF : GD \times (t.\,LD - t.\,GD)$$

Aus I. und II. ergibt sich nun unmittelbar:

$$EG \times t.\,CE : CG \times (t.\,CG - t.\,CL) = GI \times t.\,EF : GD \times (t.\,LD - t.\,GD)$$

oder $6)\ EG \times t.\,CE : GI \times t.\,EF = CG \times (t.\,CG - t.\,CL) : GD \times (t.\,LD - t.\,GD)$

$$= CG : GD \text{ in Folge Gl. (I.)}$$

Ferner ist aber auch nach dem Fallgesetze:

$$t.\,CE : t.\,EF = \frac{1}{\sqrt{HC}} : \frac{1}{\sqrt{HE}} \text{ also}$$

$$7)\ EG \times t.\,CE : GI \times t.\,EF = \frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}}$$ und folglich ergibt sich aus 6 und 7:

$$\frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}} = CG : GD \text{ d. h.}$$

die Elemente CG und GD der zu suchenden Curve stehen zu einander in einem Verhältnisse, welches zusammengesetzt ist aus dem Verhältnisse der zugehörigen Abscissenelemente und dem umgekehrten Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den zugehörigen Ordinaten, eine Eigenschaft, von welcher sofort nachgewiesen wird, daß sie der Cycloide zukommt, die durch die Punkte A und B gehet, und deren Construction ganz mit der von Newton in seiner Lösung gegebenen zusammenfällt[27].

5.

Zu gleicher Zeit legte Jacob mit dieser Lösung andere Probleme den Mathematikern, vorzüglich jedoch seinem Bruder, vor, unter diesen das sogenannte Problem von den Isoperimetern, nämlich:

„Unter allen zwischen denselben zwei festen Punkten gelegenen isoperimetrischen Curven diejenige „zu finden, welche bewirkt, daß der von einer andern Curve, deren jede Ordinate eine gewisse „bestimmte Function der derselben Abscisse entsprechenden Ordinate oder des entsprechenden „Bogens der zu suchenden Curve ist, ferner den Ordinaten ihrer Endpunkte und dem zwischen „diesen gelegenen Theile der Abscissenaxe eingeschlossene Flächenraum ein Maximum oder ein „Minimum ist[45]."

Auch Probleme dieser Art waren im Alterthume behandelt worden, und gerade die älteste geometrische Schrift, die uns übrig geblieben und vom Theon von Alexandrien[46]) in seinem Commentar zur Μεγάλη Σύνταξις uns überliefert worden ist, handelt ausschließlich von isoperimetrischen Aufgaben. Als ihr Verfasser wird Zenodorus, ein Schüler des Oenopidas von Chios, angegeben. Vor ihm soll schon Pythagoras[47]) den Satz aufgestellt haben, daß unter allen Figuren von gleichem Umfange der Kreis den größten Flächeninhalt umschließe. Die Beweise des Zenodorus sind rein geometrisch und lassen erkennen, daß bereits zu seiner Zeit die Geometrie tüchtig ausgebildet war. Aehnlich, wie dem Theon der Versuch nachzuweisen, weshalb der Himmel kugelförmig sei, Veranlassung gab, jene Schrift in seinen Commentar aufzunehmen, gab solche dem Zenodorus sie zu verfertigen, wie es scheint, die Widerlegung der allgemein verbreiteten irrigen Ansicht, daß Flächen von gleichem Umfang auch gleichen Inhalt hätten[48]). Daß auch Archimedes über die Isoperimeter geschrieben hat, scheint aus dem Catalog des Maurolycus[49]) und aus einer Bemerkung Kepler's[50]) in seiner **stereometria doliorum** hervorzugehen. Den Gedankengang des Zenodorus finden wir auch vom Pappus[51]) im fünften Buche seiner Μαθηματικαὶ Συναγωγαὶ wiedergegeben, ohne daß er jedoch denselben als den Autor erwähnt. Auch ihn bewog zu seiner Darstellung die Idee, bei den Naturkräften ein Minimum zu finden, da, wie er in seiner Vorrede zum 5. Buche sagt, die Bienen deshalb ihre Zellen nach ihrer Weise baueten, weil sie so beim passend kleinsten Umfang der Zelle den größten Inhalt für dieselbe erzielten[52]).

Der Gang der von ihm gegebenen, auf einfache geometrische Betrachtungen sich stützenden Darstellung ist folgender: Zuerst beweist er, daß von zwei beliebigen isoperimetrischen regulären Polygonen dasjenige den größeren Flächeninhalt habe, dessen Seitenanzahl die größere ist (**Theorema I.**)[53]) und darauf, daß die Fläche des Kreises größer ist, als die jedes beliebigen regulären Polygons, welches mit ihm gleichen Umfang hat (**Theorema II.**). Um nun zu beweisen, daß überhaupt der Kreis größer ist, als irgend ein beliebiges nicht reguläres Vieleck, welches mit ihm gleichen Umfang hat, wird zunächst, nachdem gezeigt worden ist, daß von allen isoperimetrischen, über derselben Linie als gemeinsamer Grundlinie construirten Dreiecken das gleichschenklige (**Theorema V.**) das größte sei, nachgewiesen, daß von allen isoperimetrischen Vielecken von gleicher Seitenanzahl das reguläre das größte ist (**Theorema IX. prop. X**), woraus sich sofort der obige Satz ergibt. Hierzu wird noch eine Reihe interessanter Sätze gefügt. Gleiches bemüht er sich sodann von der Kugel zu beweisen, ohne daß es ihm vollständig gelingt. Veranlassung hierzu glaubte er, wie Theon, in der Begründung der Behauptung zu finden, daß die Welt nothwendig eine Kugel sein müsse[54]).

Diese Darstellung finden wir etwas verändert wiedergegeben vom Clavius in seinem Commentar zur **sphaera** des Sacro-Bosco[55]). In etwas kürzerer Weise sehen wir ferner dieselbe Lehre in den ersten Decennien des 14. Jahrhunderts bearbeitett von Thomas von Bradwardin[56]), Erzbischof von Canterbury, bekannter unter dem Namen des **doctor profundus**; ob er aber die Sätze selbst erfunden, oder sie dem Pappus oder Theon entnommen hat, bleibt unentschieden.

In noch kürzerer, auch rein geometrischer Weise wies später Galilei[57]) in seinen in jeder Beziehung so tiefdurchdachten und reichhaltigen **discorsi** nach, daß der Kreis von allen Isoperimetern den größten Flächeninhalt habe.

Schon früher, im 14. Jahrhundert, waren schwierigere isoperimetrische Probleme von unbekannt gebliebenen italienischen Mathematikern[58]) zu lösen versucht worden, jedoch mit Anwendung algebraischer Hilfsmittel; ebenso haben sich mit solchen Fermat[59]), Roberval, Wallis[60]) beschäftigt; jedoch waren ihre Lösungen theils sehr elementar, theils blieben sie ohne jeden weitern Einfluß. Erst der Beweis, welchen Leibnitz[61]), wie Johann Bernoulli von der Eigenschaft der Kettenlinie, als derjenigen Curve gaben, deren Schwerpunkt unter allen Isoperimetern am tiefsten liege, führte näher zu der Lösung des von Jacob aufgestellten Problems hin.

Jacob stellte die von ihm zur Lösung desselben angewendete Methode als verwandt mit der zu der Auffindung der Brachistochrone benutzten dar. Johann, hierauf sich stützend, gab schnell eine Lösung, welche sein Bruder als irrig verwarf [62]). Es entspann sich hierauf ein bittrer Hader zwischen beiden Brüdern, der bis zu dem Tode Jacob's währte. Nach zwei vergeblichen Versuchen Johann's seine Lösung als richtig darzustellen [63]) gab Jacob, nachdem er schon zuvor die Lösung [64]) seines isoperimetrischen Problems veröffentlicht hatte, deren Beweis und Begründung, indem er die zur Lösung des Problems von der Brachistochrone angewendete Methode dadurch, daß er nicht zwei, sondern drei aufeinanderfolgende Elemente der als ein Polygon von unendlich vielen Seiten angesehenen Curve betrachtete und also nicht, wie früher, nur eine, sondern zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Ordinaten der Curve variiren läßt, in seiner **Analysis magni problematis isoperimetrici** [65]). Ihr Gang ist folgender:

6.

Zunächst wird folgendes Theorem aufgestellt:

I. Sind x, x'', x''', x'''' .... resp. die Ordinaten, und y, y'', y''', y'''' ... die Abscissen, die den unmittelbar aufeinanderfolgenden unendlich kleinen Elementen $z, z'', z''' z''''$ einer beliebigen Curve entsprechen, so stehen die Ordinaten x'', x''', x'''' .... in solcher Beziehung zu x, daß:

$x'' = x \pm dx$	$dx'' = dx \pm d^2x$
$x''' = x'' \pm dx'' = x \pm 2dx + d^2x$	$dx''' = dx'' \pm d^2x'' = dx \pm 2d^2x + d^3x$
$x'''' = x''' \pm dx''' = x \pm 3dx + 3d^2x \pm d^3x$	$dx'''' = dx''' \pm d^3x''' = dx \pm 3d^2x + 3d^3x \pm d^4x$
	u. s. f.

in welchen Formeln das obere Zeichen (+) zu nehmen ist, wenn die Ordinaten x'', x''' .... der Ordinate x unmittelbar folgen, das untere Zeichen (—) hingegen, wenn sie der Ordinate x unmittelbar vorangehen.

Ganz gleiche Formeln werden für die Abscissen y'', y''', y'''' .... und für die Curvenelemente z'', z''', z'''' .... erhalten, wenn in den obigen Ausdrücken überall für x resp. y oder z gesetzt wird.

Theorem II. Von den 4 aufeinanderfolgenden Punkten $B, F, G, C,$ (Fig. 2) seien auf eine der Lage nach gegebene Linie AT die Lothe BH, FK, GL und Cl gefällt und durch dieselben $BX \parallel FY \parallel GZ \parallel AT$ gezogen; ferner mögen der Kürze halber

$$\begin{array}{llll} BX = l & FX = p & FB = s & HB = b \\ FY = m & GY = q & FG = t & KF = f = b + p \text{ also } df = dp \\ GZ = n & CZ = r & GC = u & LG = g = b + p + q \text{ also } dg = dp + dq \end{array}$$

gesetzt werden.

Fangen nun die Punkte F und G, während B und C fest bleiben, an sich längs der Graden FK und GL zu bewegen, so jedoch, daß die Summe $BF + GF + GC = s + t + u$ immer constant bleibt, so wird stets:

$$df : -dg = rst - qsu : qsu - ptu \text{ sein.}$$ [66])

Theorem III. Bewegen sich hingegen die Punkte F und G, indem sie auch die Graden FK und GL mit sich fortführen, und ebenfalls $s + t + u$ constant bleibt, auf den Peripherien der um B und C resp. mit BF und GC beschriebenen Kreise, so wird:

$$df : -dg = lmr - lnq : lnq - mnp \text{ sein.}$$ [67])

Theorem IV. Sind nun B, F, G, C Punkte der Curve ABD, und sind die resp. zu ihnen gehörigen, in unendlich kleinen, aber gleichen Intervallen von einander abstehenden

$$\begin{array}{llllll} \text{Ordinaten:} & HB = x & \text{ihre Abscissen:} & AH = y & \text{und die Curvenelemente:} & AB = z \\ & KF = x'' & & AK = y'' & & AF = z'' \\ & LG = x''' & & AL = y''' & & AG = z''' \text{ also} \end{array}$$

$BX = l \quad = dy$	$FX = p \quad = dx$	$BF = s \quad = dz$
$FY = m = dy'' = dy + d^2y$	$GY = q = dx'' = dx + d^2x$	$FG = t = dz'' = dz + d^2z$
$GZ = n = dy''' = dy + 2d^2y + d^3y$	$CZ = r = dx''' = dx + 2d^2x + d^3x$	$GC = u = dz''' = dz + 2d^2z + d^3z$,

so wird, wenn die Punkte F und G sich längs ihrer Ordinaten bewegen, indem jedoch die Länge des Curvenelementes $BFGC$ constant bleibt, in Folge von Theor. II sein:

$$df : -dg = dz^2d^2x + dz^2d^3x - dxd^2x^2 : dz^2d^2x + 2dxd^2x^2 \;[68]).$$

Theorem V. Bewegen sich hingegen, unter der Annahme, daß $BF = FG = GC$ und ebenfalls, daß $BF + FG + GC$ constant bleibt, F und G auf den Peripherien mit BF und GC resp. um B und C beschriebener Kreise, so wird:

$$df : -dg = dy^2d^2x + dy^2d^3x + dxd^2x^2 : dy^2d^2x - 2dxd^2x^2 \text{ sein.}$$

Vermittelst dieser und der vorhergehenden Proportion, des oben (pag. 5) angeführten Prinzips (Theorem VII) und des folgenden Satzes, Theorem VI.:

„Es sei g um eine unendlich kleine Größe größer, als f, und sei ferner $\mathfrak{F}$ eine gewisse Function „von f, und $\mathfrak{G}$ eine dieser ähnliche von g, so daß $ad\mathfrak{F} = hdf$ und $ad\mathfrak{G} = idg$, so ist „$i = h + dh$,"

werden die aufgestellten isoperimetrischen Probleme gelöst; von diesen möge hier nur die Lösung des bereits oben (pag. 7) aufgeführten folgen.

Problem.

„Seien (Fig. 2) AT und AM zwei aufeinander senkrechte Axen, AN eine ganz beliebige Curve; „es soll von allen zwischen denselben Punkten A und D gelegenen isoperimetrischen Curven diejenige ABD „gesucht werden, welche bewirkt, daß, wenn von den einzelnen Punkten B derselben auf jene Axen Lothe „gefällt werden, BHP und BMN, — wo N der Durchschnittspunkt des letztern Lothes und der beliebigen „Curve AN ist, — und HP stets $= MN$ angenommen wird, die von der so entstehenden Curve APV, „der Abscisse AT und der Ordinate TV eingeschlossene Fläche ein Maximum oder ein Minimum ist."

Es seien B, F, G, C vier unmittelbar aufeinanderfolgende Puncte der zu suchenden Curve, ferner $HB = b$, $KF = f$, $LG = g$ und $IC = c$ die zugehörigen, um unendlich kleine, aber gleiche Theile der Abscissenaxe: $HK = KL = LI = l$ von einander entfernten Ordinaten und $HP = \mathfrak{B}$, $KR = \mathfrak{F}$, $LS = \mathfrak{G}$, $IQ = \mathfrak{C}$ einander ähnliche Functionen der resp. je zu ihnen gehörigen Ordinate der zu suchenden Curve, so wird nach Theorem VII. der Raum

$$HPQI = HK.\,HP + KL.\,KR + LI.\,LS = l.\,\mathfrak{B} + l.\,\mathfrak{F} + l.\,\mathfrak{G}$$

ein Maximum oder ein Minimum sein müssen, daher muß, da die Punkte B und C als fest, also b, c, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ als constant angesehen, hingegen F und G längs der Graden KF und LG sich bewegend angenommen werden, und also f, g, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ variiren:

$$l.d\mathfrak{F} + l.d\mathfrak{G} = o \text{ oder}$$
$$d\mathfrak{F} + d\mathfrak{G} = o \text{ sein.}$$

Setzt man nun $d\mathfrak{F} = \frac{h.df}{a}$ und $d\mathfrak{G} = \frac{i.dg}{a}$, so wird $h.df + i.dg = o$,

also $df : -dg = i : h = h + dh : h$ sein (Theor. VI). In Folge von Theor. IV

ist aber $df : -dg = dz^2d^2x + dz^2d^3x - dxd^2x^2 : dz^2d^2x + 2dxd^2x^2$, also auch

$$h + dh : h = dz^2d^2x + dz^2d^3x - dxd^2x^2 : dz^2d^2x + 2dxd^2x^2 \text{ oder}$$
$$dh : h = dz^2d^3x - 3dxd^2x^2 : dz^2d^2x + 2dxd^2x^2, \text{ und folglich wird}$$
$$hdz^2d^3x - 3hdxd^2x^2 = dhdz^2d^2x + 2dhdxd^2x^2 \text{ oder}$$
$$hdz^2d^3x - 3hdxd^2x^2 = dhdz^2d^2x, \text{ — da } 2dhdxd^2x^2$$

gegenüber den andern Größen der Gleichung verschwindet —, die Differenzialgleichung der gesuchten Curve sein, welche integrirt [69]) die Gleichung $dy = \frac{pdx}{\sqrt{a^2 - p^2}}$ für diejenige Curve APV, für welche $\int pdy$ ein

Maximum und die Gleichung $dy = \frac{(a-p)\,dx}{\sqrt{2ap-p^2}}$ für diejenige Curve APV gibt, für welche $\int pdy$ ein Minimum ist, worin p für F gesetzt ist.

Die im Jahre 1706 [70]) veröffentlichte Lösung Johann's geht von dem oben (pag. 5) angeführten Hauptprinzipe aus, berücksichtigt aber, indem Abscisse und Ordinate des Punktes O zugleich variiren und der Punkt O nach einem andern ω versetzt gedacht wird, nur zwei Elemente FO und $O\varphi$ der zu suchenden Curve, so jedoch, daß $FO + O\varphi = F\omega + \omega\varphi =$ einer constanten Größe ist, welche Bedingung dadurch erfüllt wird, daß O und ω auf der Peripherie einer Ellipse, deren Brennpunkte F und φ und deren große Axe $= FO + O\varphi$ ist, liegend angenommen werden; eine Art und Weise der Betrachtung, welche, wie Lagrange [71]) bemerkt, richtig wäre, wenn die Untersuchung nur mit endlichen Größen zu thun hätte, die aber hier, wo dies nicht der Fall ist, zu einer identischen Endgleichung führt, welche nichts erkennen läßt. Es ist wahrscheinlich, daß Johann Bernoulli, nachdem er auf indirekte Weise durch mechanische Betrachtungen die gesuchte Curve gefunden hatte, dadurch, daß er hierauf die für die Auffindung der Brachistochrone benutzte Methode unmittelbar anzupassen sich bemühte, eine Beweisführung zu Stande brachte, welche allerdings für den ersten speciellen Fall des Problems ein richtiges Resultat lieferte, die aber, als er sie auf die Lösung des andern Falles anwendete, zu einem falschen Resultate führte, über dessen Unrichtigkeit er sich durch die Richtigkeit des zuerst gewonnenen Resultates täuschen ließ.

Diesen seinen Irrthum sowohl im Betreff des Resultats, als der Beweisführung einzugestehen und, Jacob's Modification der zur Lösung des Problems von der Brachistochrone angewendeten Methode aufnehmend, eine einfache Lösung des (pag. 7) gedachten isoperimetrischen Problems zu geben, fühlte sich Johann viele Jahre nachher, 1718, [72]) bewogen, zwar, wie er sagt, auf den Rath eines Freundes, vielleicht aber nur, um die von Taylor [73]) gegebene klare, dieselben Prinzipien, wie sie Jacob aufgestellt hatte, adoptirende Lösung des gleichen Problems als verworren darzustellen.

Aus den gegebenen Auseinandersetzungen ergibt sich, daß es lediglich Jacob Bernoulli's Verdienst ist, die der Lösung des Problems der Brachistochrone zu Grunde liegende Methode durch die Aufnahme der Isoperimetrie einen wichtigen Schritt vorwärts geführt zu haben.

7.

Zugleich mit dem Problem von den Isoperimetern hatte jedoch Jacob verwandte aufgestellt, vorzüglich folgendes:

> „Unter allen Cycloiden, welche von einem gegebenen Punkte ausgehen und über derselben Basis „construirt sind, diejenige zu finden, auf welcher ein von dem gegebenen Punkte aus herab„fallender Körper in der kürzesten Zeit auf einer gegebenen Linie anlangt." [74])

Dieses und das sog. isoperimetrische Problem sind beide deshalb wichtig, weil in ihnen die Keime zweier Hauptzweige der Variationsrechnung enthalten sind; das erste gehört dem Theile an, in welchem die Grenzgleichungen in die Betrachtung eingreifen, das andere hingegen der Theorie der sog. relativen Maxima und Minima. Jedoch nahmen auch diese Probleme immer noch eine isolirte Stellung ein. Neben ihnen wurden auch noch andere ihnen mehr oder minder verwandte aufgestellt und gelöst, z. B. das Problem des kleinsten Widerstandes, dessen bereits oben gedacht ward [21]), das Problem, die Linie der kürzesten Entfernung zweier Punkte auf einer gegebenen Oberfläche zu finden u. A. [75]). Mit dem ersten Probleme beschäftigten sich L'Hopital, Johann Bernoulli, Duillier [76]), alle die zur Lösung der Aufgabe von der Brachistochrone benutzte Methode auch hierbei anwendend. Die Lösung des zweiten Problems beschäftigte Jacob Bernoulli, sowie in spätern Jahren Johann eine allgemeine Lösung gab, bei derselben die Variation zweier unmittelbar auf einander folgender Ordinaten berücksichtigend [77]). Dasselbe Problem zu lösen, forderte Johann seinen Schüler Euler auf. In seinem 21. Jahre, ein Jahr nach seiner Berufung an die Petersburger Akademie, gab Euler folgende Lösung desselben [78]).

Nachdem er zuerst erwähnt hat, daß die mechanische Construction der gesuchten Curve vermittelst eines zwischen den zwei gegebenen Punkten I und K auf der gegebenen Oberfläche fest angespannten Fadens geometrisch nicht brauchbar sei, da hierdurch die Natur der gesuchten Curve nicht erkannt werden könne, geht er, um die Gleichung der Curve *IGHK* zu finden, zunächst davon aus, die Lage eines Punktes $M\ (a, x, y)$ zwischen den einander unendlich nahen Punkten $G\ (b, c)$ und $H\ (2a, f, g)$ so zu bestimmen, daß $GM + MH$ ein Minimum sei. Es wird deshalb $GM + MH = \sqrt{a^2 + (x-b)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{a^2 + (f-x)^2 + (g-y)^2}$ differenzirt und das Resultat $= o$ gesetzt. Hieraus ergibt sich die Gleichung $\frac{(x-b)dx + (y-c)dy}{\sqrt{a^2+(x-b)^2+(y-c)^2}} = \frac{(f-x)dx + (g-y)dy}{\sqrt{a^2+(f-x)^2+(g-y)^2}}$. Da nun GM und MH zwei unendlich kleine auf einander folgende Elemente der gesuchten Curve sind, so werden die Coordinaten der Punkte G und H — ($a = dt$ gesetzt) — durch diejenigen des Punktes M und deren Differenziale bestimmt, so daß $f = x + dx,\ g = y + dy;\ b = x - dx + d^2x,\ c = y - dy + d^2y$, und ihre so gefundenen Werthe in die obige Gleichung eingesetzt; die auf diese Weise sich ergebende Gleichung wird einer weitern Behandlung und Vereinfachung unterworfen und aus der sich hierdurch ergebenden Endgleichung mit Hilfe der Differenzialgleichung der gegebenen Oberfläche die Gleichung der kürzesten Linie bestimmt.

Zwei Jahre zuvor, 1726,[79]) hatte Euler die Lösung des Problems vorgeschlagen, „die Brachistochrone in irgend einem widerstehenden Mittel zu finden." Sein Freund und Landsmann Hermann hatte es unternommen diese Aufgabe zu lösen. Seine Lösung war jedoch unrichtig. Dies gab Euler Veranlassung im Jahre 1734[80]) seine Lösung desselben Problems zu veröffentlichen; aber auch sie war falsch, wie dies bald nachher Daniel Bernoulli[81]) erkannte, und wie es sich auch sogleich ergibt, wenn man das Resultat dieser Lösung mit dem später von Euler in der **Methodus inveniendi etc. (pag. 126 ff.)** gefundenen vergleicht. Gibt es, wie wir später sehen werden, Probleme, in denen die Eigenschaft, ein Maximum oder Minimum zu sein, für die Curve in ihrer ganzen Ausdehnung Statt hat, ohne daß sie in jedem ihrer Elemente gilt — z. B., wenn die Function, deren Integral ein Maximum oder ein Minimum sein soll, eine andere Integralfunktion enthält, welche nach den Bedingungen der Aufgabe nicht, wie dies bei den isoperimetrischen Problemen der Fall ist, einen constanten Werth hat —, in denen es daher, um sie zu lösen, nicht gestattet ist, von der Betrachtung zweier oder einer beschränkten Anzahl Elemente auszugehen, so wird eine gleiche Betrachtungsweise — und einer solchen folgte Euler in der zuletzt erwähnten Abhandlung[82]) — eben so wenig die richtige sein, wenn die Function, welche ein Maximum oder ein Minimum werden soll, von einer Größe abhängt, welche durch eine im Allgemeinen nicht integrable Differenzialgleichung bestimmt ist. So irrte Euler, indem er das bisher als allgemein gültig angesehene Prinzip, daß die Eigenschaft, welche für die ganze Curve gilt, auch für jedes ihrer Elemente Geltung habe, seiner Lösung des Problems der Brachistochrone im widerstehenden Mittel zu Grunde legte.

8.

Dem generalisirenden und immer neu producirenden Geiste Euler's genügte es aber nicht, nur Lösungen specieller Probleme zu geben. Bereits im Jahre 1733 bemühte er sich, die verschiedenen bisher behandelten Aufgaben als specielle Fälle eines einzigen Problems darzustellen, und die früher zu ihrer Lösung angewendete Methode zu erweitern.

Ein schönes Zeugniß gibt hiervon seine: „**Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis**"[83]). Nach einer kurzen allgemeinen Betrachtung der bisher behandelten und Andeutung andrer noch nicht aufgestellter oder gelöster Probleme geht er zur folgenden allgemeinen Classification derselben über:

1) Es soll von allen Curven diejenige bestimmt werden, für welche eine Eigenschaft A ein Maximum oder ein Minimum ist.
2) Es soll von allen Curven, welche eine und dieselbe Größe A gemeinsam haben, diejenige bestimmt werden, für welche die Eigenschaft B ein Maximum oder ein Minimum ist.
3) Von allen die Größen A und B als gemeinsame Eigenschaften habenden Curven soll diejenige bestimmt werden, welche eine Eigenschaft C als ein Maximum oder ein Minimum hat.[84])

u. s. f.

Ist schon eine solche Unterordnung der bisher mehr oder minder isolirt dastehenden, speciellen Probleme unter die beiden zuerst aufgestellten allgemeinen Klassen von großem Nutzen für die klarere Einsicht in ihre Zusammengehörigkeit und ihre Natur, so wächst Euler's Verdienst noch mehr dadurch, daß er durch Hinzufügung der dritten und der folgenden Klassen die Methode über die Grenzen, innerhalb deren sie sich früher bewegte, erweiterte und in Folge dessen neue specielle Aufgaben der Maxima und Minima in das Bereich der Rechnung hineinzog.

Nach Aufstellung jener Classification wird nun von Euler zunächst nachgewiesen, daß zur Lösung von Aufgaben der ersten Abtheilung die Betrachtung von zwei Elementen der gesuchten Curve ausreiche, daß bei den Aufgaben der zweiten drei Elemente, bei denen der dritten Abtheilung vier u. s. f. Elemente in Rechnung gezogen werden müßten.

I. Der Gang, welchen er bei der Auflösung des ersten Problems einschlägt, ist einfach und wenig von der früher in speciellen Fällen angewendeten Methode verschieden; dieselben Prinzipien, welche die Bernoulli's u. A. ihren Lösungen zu Grunde legten, sind auch hier benutzt. Die Betrachtung schließt sich noch ganz und gar an die Figur an. Dasselbe gilt auch von der Betrachtungsweise, welche Euler für die Lösung der Probleme der zweiten Klasse in Anwendung bringt. Dieselbe ist folgende:

II. Durch die Punkte a und d (Fig. 3) der unmittelbar aufeinander folgenden Elemente ab, bc, cd der zu suchenden Curve wird eine andre von dieser unendlich wenig verschiedene Curve gelegt, deren Elemente $a\beta$, $\beta\gamma$, γd zu denselben einander gleich angenommenen Elementen der Axe OD gehören, auf welche sich resp. ab, bc, cd beziehen. Es werden nun diese beiden Triaden von Elementen $ab + bc + cd$ und $a\beta + \beta\gamma + \gamma d$ so angenommen, daß die Eigenschaften A und B für beide in gleichem Maße gelten. Gehen nun die Elemente ab, bc, cd resp. in die Elemente $a\beta$, $\beta\gamma$, γd über, so wird, wie aus der Betrachtung der Figur sofort hervorgeht, ab vermehrt um $+ m\beta$, bc um $-(b\mu + c\nu)$ und cd um $+ \gamma n$, ferner bM um $+ b\beta$, cN um $-(b\beta + c\gamma)$ und dP um $+ c\gamma$. Da nun $\triangle\, aMb \sim \triangle\, bm\beta$, $\triangle\, cNb \sim b\mu\beta$, $\triangle\, cNb \sim \triangle\, c\nu\gamma$ und $\triangle\, Pcd \sim \triangle\, nc\gamma$ ist, so folgt hieraus:

$$\beta m = \frac{bM.b\beta}{ab},\ b\mu = \frac{cN.b\beta}{bc},\quad c\nu = \frac{cN.c\gamma}{cb},\ \gamma n = \frac{Pd.c\gamma}{cd}.$$

Hierdurch sind nun die Incremente der Größen ab, bc u. s. f. sämmtlich durch $b\beta$ und $c\gamma$ allein bestimmt. Durch Substitution dieser so veränderten Größen ab, bc u. s. f. in A und B werden diese Ausdrücke Incremente erhalten, deren einzelne Terme lediglich entweder in $b\beta$ oder in $c\gamma$ multiplicirt sind; werden sodann — was in Folge der Eigenthümlichkeit des Maximums oder Minimums und in Folge der gemeinsamen Eigenschaft geschehen kann — beide Incremente, jedes für sich, $= o$ gesetzt, und aus den beiden sich ergebenden Gleichungen $b\beta$ und $c\gamma$ eliminirt, so erhält man eine Gleichung, welche nur aus x, y, s und Constanten besteht, durch welche also die gesuchte Curve bestimmt ist.

Jene beiden Gleichungen haben aber, wie Euler bemerkt, die Form:

$$P.b\beta - Q.c\gamma = o \text{ und } R.b\beta - S.c\gamma = o,$$

in welchen Gleichungen die Größen Q und S meist in einer solchen Beziehung zu P und R stehen, daß $Q = P + dP$ und $S = R + dR$ ist, wenn P und R der Abscisse x und Q und S der Abscisse $x + dx$ entsprechen. Werden nun diese Werthe für Q und S in die gewonnenen zwei Gleichungen eingesetzt, darauf $b\beta$ und $c\gamma$ aus ihnen eliminirt, so erhält man die Gleichung $R.dP = P.dR$ oder $\frac{dP}{P} = \frac{dR}{R}$ oder durch Integration, wenn a eine willkürliche Constante bezeichnet:

$$P + aR = o$$

als Gleichung der gesuchten Curve, eine Gleichung, in deren Herleitung die später von Euler in dem fünften Capitel der Methodus inveniendi etc. aufgestellte allgemeine, der Lösung der isoperimetrischen Probleme zu Grunde liegende, auch gegenwärtig noch volle Geltung habende Methode bereits enthalten ist. Nach dieser allgemeinen Lösung behandelt Euler einige specielle Fälle und stellt darauf eine Reihe von Formeln auf, vermittelst deren die Lösung einer jeden besonderen Aufgabe auf eine rein mechanische Arbeit zurückgeführt wird[85]).

Soll z. B. „unter allen Curven von gleichem Umfange diejenige gesucht werden, welche den größten „Flächeninhalt einschließt," so ist in diesem Falle $A = \int y dx$ und $B = \int ds$. Es entspricht nun A in der gegebenen Formelnreihe der ersten Formel $\int T dx$, wo $dT = M dy$ und $P = M dx$ ist; da nun hier $dT = dy$, also $M = 1$ ist, so ist $P = dx$. Hingegen entspricht B in derselben Reihe der dritten Formel:

$\int Tds$, wo $P = d.Tq$ ist, da aber $T = 1$, so ist P oder in diesem Falle $R = dq$, also geht die oben aufgestellte allgemeine Gleichung der zu suchenden Curve $P - aR = o$ für den vorliegenden Fall über in $dx - a.dq = o$, oder $dx = adq$, also

$$x = a.q \text{ d. h. } x = a.\frac{dy}{ds} \text{ oder } dy = \frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$ welche integrirt $y^2 + x^2 = a^2$,

die Gleichung des Kreises, gibt.

III. Die Betrachtung, welche Euler für die allgemeine Lösung der Probleme der dritten Abtheilung anstellt, ist der vorhergehenden ganz analog. Für diesen Fall müssen, wie schon bemerkt ward, vier auf einander folgende Elemente ab, bc, cd, de der zu suchenden Curve in Rechnung gezogen werden; sind sodann $a\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, δe die den zu ab, bc, cd, de gehörigen Abscissenelementen entsprechenden Elemente einer andern, der zu suchenden unendlich nahen und ebenfalls durch die Punkte a und e gehenden Curve, so wird, da die drei gegebenen Eigenschaften für jede der beiden Elementensummen in gleichem Maße gelten, jede derselben einmal durch die Elemente ab, bc, cd und de und sodann durch die auf diese bezogenen Elemente $a\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ und δe ausgedrückt sein; die Differenz von je zwei auf diese Weise sich ergebenden zusammengehörigen Ausdrücken gibt das Increment der betreffenden Formel an. Werden nun die Incremente dieser drei die specielle Eigenthümlichkeit der zu suchenden Curve ausdrückenden Formeln analog, wie es für den vorhergehenden Fall geschah, jedes für sich $= o$ gesetzt, so ergeben sich drei Gleichungen von der Form:

$$P.b\beta - Q.c\gamma + R.d\delta = o$$

Die Größen P, Q und R stehen aber in einer solchen gegenseitigen Beziehung zu einander, daß $Q = P + dP$ und $R = P + 2dP + d^2P$ ist. Werden diese Werthe für die entsprechenden in die eben aufgestellte und die ähnlichen in die beiden andern Gleichungen eingesetzt, so gehen diese Gleichungen in folgende über:

$$P.b\beta - (P + dP).c\gamma + (P + 2dP + d^2P).d\delta = o$$
$$p.b\beta - (p + dp).c\gamma + (p + 2dp + d^2p).d\delta = o$$
$$\pi.b\beta - (\pi + d\pi).c\gamma + (\pi + 2d\pi + d^2\pi).d\delta = o$$

Durch Elimination von $b\beta$, $c\gamma$ und $d\delta$ aus diesen Gleichungen und nachfolgende Integration ergibt sich, wenn m und n zwei willkürliche Constanten bedeuten,

$$P + m.p + n.\pi = o$$

als Gleichung der zu suchenden Curve. Diese Gleichung wird nun von Euler benutzt, um die Aufgabe zu lösen: „Unter allen Curven, welche bei derselben Länge und demselben Flächeninhalte um dieselbe Axe „rotiren, diejenige zu finden, welche um diese Axe gedreht einen Körper erzeugt, dessen Oberfläche ein „Minimum ist."

Bald nachher fand jedoch Euler bei der Behandlung gewisser neuer Probleme, in welchen die Funktion T, deren Integral $\int Tdx$ ein Minimum sein soll, von einer Differenzialgleichung höhern Grades, als des ersten abhängt, daß die von ihm in der eben besprochenen Abhandlung aufgestellten allgemeinen Formeln[85]) zu ihrer Lösung nicht ausreichend seien, in den Fällen aber, wo T eine Funktion des Bogens der zu suchenden Curve ist, — natürlich mit Ausnahme der isoperimetrischen Probleme — sogar zu falschen Resultaten führten. Bei weiterer Untersuchung gelang es ihm, eine einzige Gleichung aufzustellen, welche nicht allein alle früher wie später construirten Formeln als specielle Fälle in sich schloß, sondern auch von so umfassender Allgemeinheit war, daß sie gegenwärtig noch dieselbe große Bedeutung hat, welche Euler in ihr erkannte, und die ihn veranlaßte, die Entwicklung dieser Gleichung, den Nachweis ihrer Wichtigkeit und ihrer allgemeinen Anwendung auf die Probleme der Variationsrechnung zum Gegenstand der Abhandlung: **„Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis"**[86]) zu machen.

I. Euler behandelt hierin zuerst die Aufgabe: „Unter allen zwischen denselben Grenzen gelegenen „Curven diejenige zu finden, für welche $\int Qdx$ ein Minimum sein soll, wo Q eine Function von x, y, s „und $p = \frac{dy}{dx}$, so daß $dQ = Lds + Mdy + Ndx + Vdp$ ist." Es seien ab und bc (Fig. 4) zwei auf einander folgende Elemente der Curve $oabc$ und $a\beta$, βc zwei die Punkte a und c verbindende Elemente einer andern, der zu suchenden unendlich nahen Curve. Da nun $\int Qdx$ ein Maximum oder ein Minimum sein soll für die Curve oa, so wird angenommen, daß der Ausdruck Qdx dem Elemente ab und $Q'dx$ dem

Elemente bc, demnach der Ausdruck $(Q + Q')dx$ der Summe $ab + bc$ entspreche. Werden nun die entsprechenden Ausdrücke für $a\beta$ und βc gesucht, und wird ihre Summe von $(Q + Q')dx$ abgezogen, so erhält man einen Rest $= P.b\beta$, aus welchem sich $P = o$ als die Gleichung der gesuchten Curve ergibt. Der Ausdruck Qdx geht aber, da x, y, s allein vom Punkte a abhängen, welcher beiden Elementen ab und $a\beta$ gemeinsam ist, in den dem Elemente $a\beta$ entsprechenden über, wenn in demselben $p + \frac{b\beta}{dx}$ für p gesetzt wird. Der Unterschied der den Elementen ab und $a\beta$ entsprechenden Ausdrücke wird demnach erhalten, wenn man Qdx differenziirt und in dem entstehenden Differenziale $ds = o$, $dy = o$, $dx = o$ und $dp = \frac{b\beta}{dx}$ setzt.

Es wird daher, da $dQdx = (Lds + Mdy + Ndx + Vdp)dx$ ist, dieser Unterschied $= V.b\beta$ sein. Auf ähnliche Weise[87]) wird der Unterschied der den Elementen bc und $b\beta$ entsprechenden Ausdrücke, $dQ'dx = \frac{L'dx.dy.b\beta}{ds} + M'dx.b\beta - V'.b\beta$ gefunden. Demnach ist der Unterschied der den Elementensummen $ab + bc$ und $a\beta + \beta c$ entsprechenden Ausdrücke $= \left(V + \frac{L'dxdy}{ds} + M'dx - V'\right).b\beta = \left(\frac{Ldxdy}{ds} + Mdx - dV\right).b\beta = P.b\beta$. Also ist die Gleichung der gesuchten Curve:

$$\frac{Ldxdy}{ds} + Mdx - dV = o.$$

Wäre Q nur eine Function von x, y, p, also $dQ = Ndx + Mdy + Vdp$, demnach $L = o$, so wird man als Gleichung der gesuchten Curve: $Mdx - dV = o$ oder:

$$M - \frac{dV}{dx} = o \text{ erhalten.}$$

II. Kommen nun in Q außer x, y, p, s noch Differenziale der **zweiten** Ordnung vor, ist also $dQ = Lds + Mdy + Ndx + Vdp + Wdr$, so werden außer den Elementen ab und bc auch noch das vorhergehende, wie das folgende, also vier Elemente $ab + bc + cd + de$ in Rechnung gezogen, von denen $bc + cd$ in $b\gamma + \gamma d$ variirend angenommen wird. Von dem Ausdrucke $\int Qdx$ entspricht ähnlich, wie vorhin, der Summe der Elemente $ab + bc + cd + de$ der Werth $Qdx + Q'dx + Q''dx + Q'''dx$, dessen aus der Verschiebung des Punktes c nach γ hervorgehendes Increment: $d^2W - dVdx + \frac{Ldx^2dy}{ds} + Mdx^2 = o$ gesetzt, die verlangte Curve bestimmt. Diese Gleichung geht für den Fall, daß $L = o$ ist, in folgende über: $M - \frac{dV}{dx} + \frac{d^2W}{dx^2} = o$.

III. **Allgemein**, wird $dy = p.dx$, $dp = r.dx$, $dr = t.dx$, $dt = u.dx$ . . gesetzt, und ist $dQ = Ndx + Mdy + Vdp + Wdr + Xdt + Ydu \ldots$, so wird man als Gleichung der Curve, für welche $\int Qdx$ ein Maximum oder ein Minimum sein soll, erhalten:

$$P = M - \frac{dV}{dx} + \frac{d^2W}{dx^2} - \frac{d^3X}{dx^3} + \frac{d^4Y}{dx^4} \ldots = o,$$

eine Gleichung, welche auch jetzt noch als die allgemeine Lösung des angeführten Problems benutzt wird und Geltung hat.

9.

Je mehr auf diese Weise **Euler** in den besprochenen Abhandlungen zur Vervollkommnung der allgemeinen Methode bereits beigetragen hatte, um so dringender mochte er wohl das Bedürfniß fühlen, seine glänzenden Entdeckungen zu einer klareren systematischen Einheit zusammenzufassen und ihnen dadurch einen vollständigeren Abschluß zu geben. Dies erfolgte in der im Jahre 1744 veröffentlichten Abhandlung: „**Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes**“[88]), ein Werk, welches in der That als das erste vollständige Lehrbuch der Variationsrechnung angesehen werden kann und mit Recht von **Lagrange**[89]) „**un ouvrage original, qui brille partout d'une profonde science de calcul**“ genannt wird.

Die große Fülle der Aufgaben, welche in diesem Werke behandelt werden, und welche auch gegenwärtig noch als die zur Erläuterung der Lehren der Variationsrechnung instruktivsten in den betreffenden Lehrbüchern benutzt werden, noch mehr die Frische und Klarheit der Gedanken, sowie die Classicität der ganzen Darstellung, welche die **Methodus inveniendi** in fast gleichem Maße, wie die **Analysis infinitorum** auszeichnet und bewirkt, daß, wie Euler's Werke überhaupt, so vorzüglich diese bei einem wiederholten, eingehenderen Studium derselben eine immer größere Anziehungskraft ausüben; vor allen Dingen jedoch die Wichtigkeit der Stellung, welche die **Methodus** in der Geschichte der Variationsrechnung einnimmt, werden ein ausführlicheres Resümé derselben nicht unzweckmäßig erscheinen lassen.

Das Werk zerfällt, mit Ausnahme zweier Anhänge **de curvis elasticis** und **de motu projectorum**, zunächst in zwei Haupttheile. In dem ersten wird die Methode zur Lösung derjenigen Probleme gegeben, in welchen unter allen Curven, die eine Eigenschaft W gemeinsam haben, diejenige gefunden werden soll, für welche diese Größe ein Maximum oder ein Minimum ist. (**Methodus maximorum et minimorum ad lineas curvas inveniendas absoluta.**) Der zweite behandelt die sogenannten isoperimetrischen Probleme, d. h. diejenigen, in welchen jene Curven außerdem noch eine oder mehre Eigenschaften mit einander gemein haben. (**Methodus maximorum ac minimorum relativa.**)

Das erste Capitel (p. I. — p. 31) enthält die Einleitung zur ganzen Abhandlung, es wird zunächst im Allgemeinen von der Eigenthümlichkeit der zu behandelnden Probleme gesprochen und ihre wesentliche Verschiedenheit von verwandten auseinandergesetzt, sodann wird auf die eben angeführten beiden Hauptgruppen der Aufgaben aufmerksam gemacht und eine Idee von der zu ihrer Lösung erforderlichen Methode gegeben, und zu diesem Zwecke werden noch einige wichtige vorbereitende Sätze vorangeschickt.

Erstens, damit die Curve amz durch diejenige Größe W, welche in ihr einen größten oder kleinsten Werth erhalten soll, (**maximi minimive formula**) genau bestimmt werde, muß W ein Integralausdruck sein, welcher nur durch eine zwischen x und y Statt habende Gleichung integrirt werden kann (prop. I., p. 15) d. h. W muß die Form $\int Zdx$ haben, wo Z eine Function von $x, y, p, q, r \ldots$ ist. (prop. 16. Scholion.)

Je nachdem nun Z eine algebraische oder bestimmte Function dieser Größen ist, oder zweitens außerdem noch gewisse Integrale involvirt, oder drittens durch eine im Allgemeinen nicht integrable Differenzialgleichung bestimmt ist, unterscheidet Euler drei Haupttheile (p. 17.). Bevor aber zur speciellen Discussion derselben übergegangen wird, beweist Euler zweitens, daß das oft erwähnte Prinzip (prop. II. p. 17.):

„Die Eigenschaft des Maximums oder Minimums ist für jeden noch so kleinen Theil der „Curve gültig, wenn sie für die ganze Curve Statt finden soll,"

nur auf den ersten der erwähnten drei Fälle zu beschränken sei, daß hingegen in den andern auf die Curve in ihrer ganzen Ausdehnung Rücksicht genommen werden müsse (prop. III. p. 21.). Darauf gibt er die zur bequemern Beweisführung ihm wünschenswerth erscheinende Bezeichnungsart (p. 23 — p. 26) und fügt drittens noch einen aus der Natur des Maximums und Minimums hergeleiteten Beweis des Satzes hinzu:

„Wenn die Eigenschaft des Maximums oder Minimums für eine gewisse Curve gilt, so hat sie „auch für eine von dieser unendlich wenig abweichende Curve Statt, (prop. IV. p. 27)"

mit Andeutung der Ausnahmefälle.

Im zweiten Capitel (p. 31 — p. 82) wird nun die Entwicklung der Methode zur Lösung der Aufgabe gegeben, eine Curve zu finden, für welche $\int Zdx$, wo Z eine bestimmte Function von $x, y, p, q \ldots$ ist, ein Maximum oder ein Minimum ist. Den Anfang macht folgender Satz:

I. „Die Incremente oder Decremente zu finden, welche die einzelnen zu einer „Curve amz gehörigen Größen $p, q, r \ldots$ erleiden, wenn eine beliebige „Ordinate Nn der Curve um eine unendlich kleine Größe $n\nu$ wächst „(prop. I. p. 31.)".

Die einzelnen zur Curve gehörigen Größen sind außer der unverändert bleibenden Abscisse x (— eine Annahme, welche Euler in dem ganzen Werke der Betrachtungsweise zu Grunde legt —), die Größen $y, p, q, r, s \ldots$ und ihre derivirten Werthe.

Setzen wir nun (Fig. 5) $AM = x$ und $Mm = y$, so mögen, wenn die unendlich klein angenommenen Größen HI, IK, KL, LM u. s. f. einander gleich gesetzt werden, sein:

$$Nn = y' \;,\; Oo = y'' \;,\; Pp = y''' \,,\, Qq = y'''' \;.\;.\;.\;.\;.$$
$$Ll = y_{,} \;,\; Kk = y_{,,} \;,\; Ii = y_{,,,} \,,\, Hh = y_{,,,,} \;.\;.\;.\;.\;.$$

Dann wird, da $p = \frac{dy}{dx} = \frac{Nn - Mm}{dx} = \frac{y' - y}{dx}$ ist, $p' = \frac{y'' - y'}{dx}$, $p'' = \frac{y''' - y''}{dx} \ldots$ $p_{,} = \frac{y - y_{,}}{dx}$, $p_{,,} = \frac{y_{,} - y_{,,}}{dx} \ldots$ sein. Ferner ist, da $q = \frac{dp}{dx} = \frac{p' - p}{dx} = \frac{y'' - 2y' + y}{dx^2}$ ist, $q' = \frac{y''' - 2y'' + y'}{dx^2} \ldots$, hingegen $q_{,} = \frac{y' - 2y + y_{,}}{dx^2}$. Auf ähnliche Weise erhält man leicht:
$r = \frac{y''' - 3y'' + 3y' - y}{dx^3}$, $s = \frac{y'''' - 4y''' + 6y'' - 4y' + y}{dx^4} \ldots$ (p. 24 und 25.)

Ist nun (p. 26.) $\int Zdx$ allein auf die Abscisse $AM = x$ bezogen, so wird sein dem folgenden Elemente der Abscissenaxe, $MN = dx$, entsprechender Werth $= Zdx$ sein, während die den Elementen NO, OP, PQ . . . . und den Elementen LM, KL, IK . . . . entsprechenden Werthe von $\int Zdx$ resp. mit $Z'dx$, $Z''dx$, $Z'''dx$ . . . und mit $Z_{,}dx$, $Z_{,,}dx$, $Z_{,,,}dx$ .. bezeichnet werden. Erstreckt sich daher $\int Zdx$ nur auf die Abscisse $AM = x$, so wird der Werth des gleichen, aber über die Abscisse AZ sich erstreckenden Ausdrucks $= \int Zdx + Zdx + Z'dx + Z''dx + \ldots$ sein.

Wächst nun $Nn = y'$ durch Versetzung des Punktes n nach ν um $n\nu$, so bleiben die übrigen Ordinaten y'', y''', ... $y_{,}$, $y_{,,}$ . . . . unverändert, und nur die von y' abhängigen Größen werden eine Veränderung erleiden. Da nun $p = \frac{y' - y}{dx}$ ist, so wird p um $\frac{n\nu}{dx}$ wachsen, und p', da es $= \frac{y'' - y'}{dx}$ ist, um $-\frac{n\nu}{dx}$. Es werden daher (p. 32) wachsen:

$$\begin{array}{lllll}
y' \text{ um } + n\nu\,, & p \text{ um } + \frac{n\nu}{dx}\,, & p' \text{ um } - \frac{n\nu}{dx}\,, & q_{,} \text{ um } + \frac{n\nu}{dx^2}\,, & q \text{ um } - \frac{2n\nu}{dx^2} \\
q' \;\text{„}\; + \frac{n\nu}{dx^2}\,, & r_{,,} \;\text{„}\; + \frac{n\nu}{dx^3}\,, & r_{,} \;\text{„}\; - \frac{3n\nu}{dx^3}\,, & r \;\text{„}\; + \frac{3n\nu}{dx^3}\,, & r' \;\text{„}\; - \frac{n\nu}{dx^3} \\
s_{,,,} \;\text{„}\; + \frac{n\nu}{dx^4}\,, & s_{,,} \;\text{„}\; - \frac{4n\nu}{dx^4}\,, & s_{,} \;\text{„}\; + \frac{6n\nu}{dx^4}\,, & s \;\text{„}\; - \frac{4n\nu}{dx^4}\,, & s' \;\text{„}\; + \frac{n\nu}{dx^4} \\
t_{,,,,} \;\text{„}\; + \frac{n\nu}{dx^5}\,, & t_{,,,} \;\text{„}\; - \frac{5n\nu}{dx^5}\,, & t_{,,} \;\text{„}\; + \frac{10n\nu}{dx^5}\,, & t_{,} \;\text{„}\; - \frac{10n\nu}{dx^5}\,, & t \;\text{„}\; + \frac{5n\nu}{dx^5} \\
 & & t' \;\text{„}\; - \frac{n\nu}{dx^5} \text{ u. s. f.} & &
\end{array}$$

Anstatt des Beweises des nächstfolgenden Problems (prop. 2 p. 34), welches den Fall behandelt, wenn Z eine bestimmte Function von x und y allein ist, möge die Lösung des dritten (prop. 3. p. 42) folgen. Dasselbe lautet:

II. „Ist Z eine solche Function von x, y und p, daß $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ „ist, so soll unter allen zu derselben bestimmten Abscisse x gehörigen „Curven diejenige gefunden werden, für welche $\int Zdx$ ein Maximum oder „ein Minimum ist."

Es sei amz die verlangte Curve, und ferner wachse $Nn = y'$ um $n\nu$, so muß nach den bekannten Regeln der Maxima und Minima das hieraus hervorgehende Increment von $\int Zdx$ oder der diesem gleichen Summe: $Zdx + Z'dx + Z''dx \ldots\ldots + Z_{,}dx + Z_{,,}dx + \ldots\ldots$ oder, was dasselbe ist, die Summe der Incremente derjenigen Terme dieser Reihe, welche in Folge der Versetzung des Punktes n nach ν eine Veränderung erleiden, $= o$ sein.

Durch diese Versetzung erleiden aber nur diejenigen Terme eine Aenderung, in welchen die Größen y', p und p' vorkommen. Deshalb sind nur diese Terme zu differenziiren und in ihren Differenzialen anstatt dy', dp und dp' die obigen Werthe $+ n\nu$, $+ \frac{n\nu}{dx}$ und $- \frac{n\nu}{dx}$ zu setzen. Es ist aber $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ und also $dZ' = M'dx + N'dy' + P'dp'$. Es wird also der Zuwachs von dZ

durch die obige Substitution $= P.\frac{n\nu}{dx}$ und von $dZ' = N'.\, n\nu - P'.\frac{n\nu}{dx}$ sein, und demnach der von $\int Zdx = n\nu.(P + N'dx - P')$. Nun ist aber $P' - P = dP$, und für N' kann N gesetzt werden, also ist jenes Increment $= n\nu.(Ndx - dP)$, daher ist die Gleichung der gesuchten Curve: $Ndx - dP = o$ oder $N - \frac{dP}{dx} = o$.

Bemerkung:

„Diese Gleichung würde nun aus der Gleichung $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ hervorgehen, wenn „man darin $M = o$ setzen, Ndy unverändert lassen, aber für Pdp schreiben könnte $- pdP$ und den „nach diesen Veränderungen sich ergebenden Ausdruck $Ndy - pdP = o$ setzt; denn hieraus ergibt sich, da „$pdx = dy$ ist, unmittelbar die obige Gleichung $N - \frac{dP}{dx}$. (p. 56. Scholion)".

Das folgende Problem (prop. IV. pag. 57) ist, wie das eben bewiesene, nur ein specieller Fall des letzten Problems des zweiten Capitels. Es möge daher nur dieses hier wiedergegeben werden. Es lautet (prop. V. p. 71):

III. „Diejenige Curve zu finden, für welche $\int Zdx$ ein Maximum oder ein „Minimum ist, vorausgesetzt, daß $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq +$ „$Rdr + Sds + Tdt + \ldots$ ist".

Zunächst möge Hh (Fig. 5) als erste Ordinate angenommen werden, so daß sich die aus dem der Ordinate Nn zu Theil werdenden Incremente hervorgehenden Aenderungen nicht über Hh hinaus erstrecken, (— dies wird der Fall sein, wenn in Z die Differenziale nicht den 5. Grad übersteigen —). Die sich ergebende Lösung wird sich sofort auf den im Problem enthaltenen allgemeinen Fall ausdehnen lassen. Es sei, wie oben, $AH = x$, $Hh = y$, so werden den einzelnen Punkten H, I, K, L, M, N folgende Werthe von p, q, r, s, t entsprechen:

Zu	H	gehören	y,	p,	q,	r,	s,	t.
„	I	„	y',	p',	q',	r',	s',	t'.
„	K	„	y'',	p'',	q'',	r'',	s'',	t''.
„	L	„	y''',	p''',	q''',	r''',	s''',	t'''.
„	M	„	y^{IV},	p^{IV},	q^{IV},	r^{IV},	s^{IV},	t^{IV}.
„	N	„	y^{V},	p^{V},	q^{V},	r^{V},	s^{V},	t^{V}.

Sobald nun Nn sich um $n\nu$ vergrößert, so werden hierdurch den eben aufgeführten Größen folgende Incremente zu Theil werden:

$$\begin{array}{llllll}
dy = o & dy' = o & dy'' = o & dy''' = o & dy^{IV} = o & dy^{V} = +\, n\nu \\
dp = o & dp' = o & dp'' = o & dp''' = o & dp^{IV} = +\frac{n\nu}{dx} & dp^{V} = -\frac{n\nu}{dx} \\
dq = o & dq' = o & dq'' = o & dq''' = +\frac{n\nu}{dx^2} & dq^{IV} = -\frac{2n\nu}{dx^2} & dq^{V} = +\frac{n\nu}{dx^2} \\
dr = o & dr' = o & dr'' = +\frac{n\nu}{dx^3} & dr''' = -\frac{3n\nu}{dx^3} & dr^{IV} = +\frac{3n\nu}{dx^3} & dr^{V} = -\frac{n\nu}{dx^3} \\
ds = o & ds' = +\frac{n\nu}{dx^4} & ds'' = -\frac{4n\nu}{dx^4} & ds''' = +\frac{6n\nu}{dx^4} & ds^{IV} = -\frac{4n\nu}{dx^4} & ds^{V} = +\frac{n\nu}{dx^4} \\
dt = +\frac{n\nu}{dx^5} & dt' = -\frac{5n\nu}{dx^5} & dt'' = +\frac{10n\nu}{dx^6} & dt''' = -\frac{10n\nu}{dx^5} & dt^{IV} = +\frac{5n\nu}{dx^5} & dt^{V} = -\frac{n\nu}{dx^5}
\end{array}$$

Nach der Annahme bleibt nun aber der der Absciſſe AH entſprechende Werth von $\int Zdx$ ungeändert; hingegen erhalten die den folgenden Abscissenelementen HI, IK u. s. f. entsprechenden Werthe Zdx, $Z'dx$ .... Incremente, welche gefunden werden, wenn man diese Werthe differenziirt und in diese Differenzialausdrücke für dy, dp, dq ..., dy', dp', dq' .... ihre in $n\nu$ ausgedrückten Werthe einsetzt. Es ist nun $dZdx =$ $(Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + Tdt)dx$. Hierin $dx = o$, $dy = o$ ...... $ds = o$

und $dt = \frac{n\nu}{dx^5}$ gesetzt gibt: $dZdx = n\nu.dx.\ \frac{T}{dx^5}$. Ferner ist $dZ'dx = (M'dx + N'dy' + \ldots + S'ds' + T'dt').dx$. Hierin $dy' = o, \ldots\ldots, ds' = + \frac{n\nu}{dx^4}$ und $dt' = - \frac{5n\nu}{dx^5}$ gesetzt, gibt:
$dZ'dx = n\nu.dx \left\{\frac{S'}{dx^4} - \frac{5T'}{dx^5}\right\}$, und auf ähnliche Weise findet man weiter:

$$dZ''dx = n\nu.dx \left\{\frac{R''}{dx^3} - \frac{4S''}{dx^4} + \frac{10T''}{dx^5}\right\};\ dZ'''dx = n\nu.dx \left\{\frac{Q'''}{dx^2} - \frac{3R'''}{dx^3} + \frac{6S'''}{dx^4} - \frac{10T'''}{dx^5}\right\}$$

$$dZ^{\mathrm{iv}}dx = n\nu.dx \left\{\frac{P^{\mathrm{iv}}}{dx} - \frac{2Q^{\mathrm{iv}}}{dx^2} + \frac{3R^{\mathrm{iv}}}{dx^3} - \frac{4S^{\mathrm{iv}}}{dx^4} + \frac{5T^{\mathrm{iv}}}{dx^5}\right\}$$

$$dZ^{\mathrm{v}}dx = n\nu.dx \left\{N^{\mathrm{v}} - \frac{P^{\mathrm{v}}}{dx} + \frac{Q^{\mathrm{v}}}{dx^2} - \frac{R^{\mathrm{v}}}{dx^3} + \frac{S^{\mathrm{v}}}{dx^4} - \frac{T^{\mathrm{v}}}{dx^5}\right\}.$$

Da nun aber diese Elemente $Zdx, Z'dx \ldots$. allein Incremente erhalten, wenn n nach ν versetzt wird, so wird die Summe dieser Incremente auch die vollständige Veränderung geben, welche $\int Zdx$ auf die ganze Abscisse AZ ausgedehnt, erleidet, und diese ist $= n\nu.\ dx \left\{ N^{\mathrm{v}} - \frac{P^{\mathrm{v}} - P^{\mathrm{iv}}}{dx} + \frac{Q^{\mathrm{v}} - 2Q^{\mathrm{iv}} + Q'''}{dx^2} - \frac{R^{\mathrm{v}} - 3R^{\mathrm{iv}} + 3R''' - R''}{dx^3} + \frac{S^{\mathrm{v}} - 4S^{\mathrm{iv}} + 6\,S''' - 4S'' + S'}{dx^4} - \frac{T^{\mathrm{v}} - 5T^{\mathrm{iv}} + 10T''' - 10T'' + 5T' - T}{dx^5}\right\}$. Nun ist aber $P^{\mathrm{v}} - P^{\mathrm{iv}} = dP^{\mathrm{iv}}$, $Q^{\mathrm{v}} - 2Q^{\mathrm{iv}} + Q''' = d^2Q'''$, $R^{\mathrm{v}} - 3R^{\mathrm{iv}} + 3R''' - R'' = d^3R''$, $S^{\mathrm{v}} - 4S^{\mathrm{iv}} + 6S''' - 4S'' + S' = d^4S'$ und $T^{\mathrm{v}} - 5T^{\mathrm{iv}} + 10T''' - 10T'' + 5T' - T = d^5T$, also wird das vollständige Increment von $\int Zdx$ sein:

$$= n\nu.dx \left\{N^{\mathrm{v}} - \frac{dP^{\mathrm{iv}}}{dx} + \frac{d^2Q'''}{dx^2} - \frac{d^3R''}{dx^3} + \frac{d^4S'}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5}\right\}$$

oder, weil jeder Unterschied zwischen N^{v} und N, zwischen dP^{iv} und dP ..... verschwindet,

$$= n\nu.dx \left\{N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5}\right\}.$$

Hieraus ergibt sich nun sofort, wenn in Z außerdem noch Differenziale höhern Grades enthalten sind, als Increment von $\int Zdx$ folgender Ausdruck: $n\nu.dx \left\{N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5} + \ldots\right\}$ und hieraus für die gesuchte Curve folgende Gleichung:

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5} + \ldots.$$

Außer den angeführten Sätzen enthält das zweite Capitel noch viele wichtige Bemerkungen hinsichtlich ihrer Anwendung auf specielle Fälle und, wie die übrigen Capitel, eine Fülle schöner Aufgaben [20]), deren Aufzählung die Grenzen der vorliegenden Abhandlung überschreiten würde, deren Lösungen aber unmittelbar aus denen der allgemeinen Probleme hervorgehen, nur daß auch hier wieder bei einzelnen sich Euler's Talent offenbart, mit großer Leichtigkeit bedeutende Schwierigkeiten der Rechnung zu überwinden.

Das dritte Capitel (p. 83 — p. 129) behandelt nun die Fälle, für welche die Größe Z in dem zu einem Maximum oder Minimum zu machenden Ausdruck $\int Zdx$ noch ein oder mehre Integrale involvirt oder von einer im Allgemeinen nicht integrablen Differenzialgleichung abhängt.

Problem I. (prop. I. p. 83): „Es sollen die Incremente gefunden werden, „welche ein Integralausdruck für jeden Punkt der Abscissenaxe erleidet, „wenn eine Ordinate Nn um die unendlich kleine Größe $n\nu$ wächst."

Es sei (Fig. 5) die Abscisse $AH = x$, die zugehörige Ordinate $Hh = y$, und ferner sei Π das der Abscisse AH entsprechende Integral, welches, so lange es nur der Abscisse AH oder dem Punkte H entspricht, in Folge der Aenderung der Ordinate Nn sich nicht ändert, (— dies wird der Fall sein, wenn Nn von Hh aus gerechnet die fünfte Ordinate ist, und die in Π vorkommenden Differenziale den fünften

Grad nicht übersteigen —). Entspricht nun dem Punkte **H** der Werth Π, so werden den Punkten **I**, **K**, **L** . . . die Werthe Π' Π'' Π''' . . . entsprechen; die Incremente dieser Größen sind nun zu suchen, wenn **n** nach ν versetzt wird. Wird nun $\Pi = \int [Z]dx$ gesetzt, so daß $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr + [S]ds + [T]dt$ ist, woraus sofort die Werthe $d[Z']$, $d[Z'']$ .... gebildet werden können, so ist $\Pi' = \int[Z]dx + [Z]dx$, $\Pi'' = \int[Z]dx + [Z]dx + [Z']dx$, $\Pi''' = \int[Z]dx + [Z]dx + [Z']dx + [Z'']dx$ u. s. f. .... Aus dem Obigen ergibt sich nun, daß, wenn **Nn** um $n\nu$ wächst, analog sein wird:

$$d[Z]dx = n\nu.dx\frac{[T]}{dx^5};\; d[Z']dx = n\nu.dx\left(\frac{[S']}{dx^4} - \frac{5[T']}{dx^5}\right);\; d[Z'']dx = n\nu.dx\left(\frac{[R'']}{dx^3} - \frac{4[S'']}{dx^4} + \frac{10[T'']}{dx^5}\right);$$

$$d[Z''']dx = n\nu.dx\left(\frac{[Q''']}{dx^2} - \frac{3[R''']}{dx^3} + \frac{6[S''']}{dx^4} - \frac{10[T''']}{dx^5}\right);\; d[Z^{IV}]dx = n\nu.dx\left(\frac{[P^{IV}]}{dx} - \frac{2[Q^{IV}]}{dx^2} + \frac{3[R^{IV}]}{dx^3} - \frac{4[S^{IV}]}{dx^4} + \frac{5[T^{IV}]}{dx^5}\right);$$

$$d[Z^{V}]dx = n\nu.dx\left([N^{V}] - \frac{[P^{V}]}{dx} + \frac{[Q^{V}]}{dx^2} - \frac{[R^{V}]}{dx^3} + \frac{[S^{V}]}{dx^4} - \frac{[T^{V}]}{dx^5}\right);\; d[Z^{VI}] = 0,$$

$d[Z^{VII}] = 0$ u. s. f. Hieraus ergeben sich nun als Incremente von Π', Π'' .... folgende:

$$d\Pi = 0;\; d\Pi' = n\nu.dx\frac{[T]}{dx^5};\; d\Pi'' = n\nu.dx\left(\frac{[S']}{dx^4} - \frac{4[T'] + d[T]}{dx^5}\right) = n\nu.dx\left(\frac{[S']}{dx^4} - \frac{4[T] + 5d[T]}{dx^5}\right)$$

$$d\Pi''' = n\nu.dx\left(\frac{[R'']}{dx^3} - \frac{3[S''] + d[S']}{dx^4} + \frac{6[T''] + 4d[T'] - d[T]}{dx^5}\right) = n\nu.dx\left(\frac{[R'']}{dx^3} - \frac{3[S'] + 4d[S']}{dx^4} + \frac{6[T] + 15d[T] + 10d^2[T]}{dx^5}\right)$$ [91]

$$d\Pi^{IV} = n\nu.dx\left(\frac{[Q''']}{dx^2} - \frac{2[R'''] + d[R'']}{dx^3} + \frac{3[S'''] + 3d[S''] - d[S']}{dx^4} - \frac{4[T'''] + 6d[T''] - 4d[T'] + d[T]}{dx^5}\right)$$

$$= n\nu.dx\left(\frac{[Q''']}{dx^2} - \frac{2[R''] + 3d[R'']}{dx^3} + \frac{3[S'] + 8d[S'] + 6d^2[S']}{dx^4} - \frac{4[T] + 15d[T] + 20d^2[T] + 10d^3[T]}{dx^5}\right)$$

$$d\Pi^{V} = n\nu.dx\left(\frac{[P^{IV}]}{dx} - \frac{[Q^{IV}] + d[Q''']}{dx^2} + \frac{[R^{IV}] + 2d[R'''] - d[R'']}{dx^3} - \frac{[S^{IV}] + 3d[S'''] - 3d[S''] + d[S']}{dx^4} + \frac{[T^{IV}] + 4d[T'''] - 6d[T''] + 4d[T'] - d[T]}{dx^5}\right)$$

$$= n\nu.dx\left(\frac{[P^{IV}]}{dx} - \frac{[Q'''] + 2d[Q''']}{dx^2} + \frac{[R''] + 3d[R''] + 3d^2[R'']}{dx^3} - \frac{[S'] + 4d[S'] + 6d^2[S'] + 4d^3[S']}{dx^4} + \frac{[T] + 5d[T] + 10d^2[T] + 10d^3[T] + 5d^4[T]}{dx^5}\right)$$

$$d\Pi^{VI} = n\nu.dx\left([N^{V}] - \frac{d[P^{IV}]}{dx} + \frac{d[Q^{IV}] - d[Q''']}{dx^2} - \frac{d[R^{IV}] - 2d[R'''] + d[R'']}{dx^3} + \frac{d[S^{IV}] - 3d[S'''] + 3d[S''] - d[S']}{dx^4} - \frac{d[T^{IV}] - 4d[T'''] + 6d[T''] - 4d[T'] + d[T]}{dx^5}\right)$$

$$= n\nu.dx\left([N^{V}] - \frac{d[P^{IV}]}{dx} + \frac{d^2[Q''']}{dx^2} - \frac{d^3[R'']}{dx^3} + \frac{d^4[S']}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5}\right),$$

welchem Incremente auch die Incremente von Π^{VI}, Π^{VII} ... gleich sind.

Problem II. (prop. II. p. 88). „Es sei $\Pi = \int[Z]dx$, ferner $d[Z] = [M]dx + [N]dy$ „$+ [P]dp + [Q]dq + [R]dr + \ldots$. und Z eine solche Function von Π, daß „$dZ = Ld\Pi$ ist; man soll eine Curve finden, für welche $\int Zdx$ ein Maximum oder ein Minimum ist in Rücksicht auf die der Größe nach gegebene „Abscisse **AZ** = a."

Ist wiederum **AH** = x, **HZ** in die unendlich kleinen Elemente **HI**, **IK** .... getheilt, so muß $\int Zdx + Zdx + Z'dx + Z''dx + \ldots$. ein Maximum oder ein Minimum sein; daher muß die = o gesetzte Summe der Incremente, welche diese einzelnen Terme in Folge der Versetzung des Punktes **n** nach ν erleiden, die Gleichung für die verlangte Curve geben. Da nun, nach der vorläufigen Annahme, diese Verschiebung ihren Einfluß nicht über **H** hinaus erstreckt, so wird das Increment des Termes $\int Zdx$ = o sein. Die Incremente der übrigen Terme aber werden gefunden, wenn sie differenziirt und in ihre Differenziale die im vorhergehenden Satze gefundenen Incremente eingesetzt werden. Nun ist:

$$d.Zdx = Ldx.d\Pi = o$$

$$d.Z'dx = L'dx.d\Pi' = n\nu.L'dx^2.\frac{[T]}{dx^5}$$

$$d.Z''dx = L''dx.d\Pi'' = n\nu.L''dx^2\left(\frac{[S']}{dx^4} - \frac{4[T] + 5d[T]}{dx^5}\right)$$

$$d.Z'''dx = L'''dx.d\Pi''' = n\nu.L'''dx^2\left(\frac{[R'']}{dx^3} - \frac{3[S'] + 4d[S']}{dx^4} + \frac{6[T] + 15d[T] + 10d^2[T]}{dx^5}\right)$$

$$d.Z^{IV}dx = L^{IV}dx.d\Pi^{IV} = n\nu.L^{IV}dx^2\left(\frac{[Q''']}{dx^2} - \frac{2[R''] + 3d[R'']}{dx^3} + \frac{3[S'] + 8d[S'] + 6d^2[S']}{dx^4} - \frac{4[T] + 15d[T] + 20d^2[T] + 10d^3[T]}{dx^5}\right)$$

$$d.Z^{V}dx = L^{V}dx.d\Pi^{V} = n\nu.L^{V}dx^2\left(\frac{[P^{IV}]}{dx} - \frac{[Q'''] + 2d[Q''']}{dx^2} + \frac{[R''] + 3d[R''] + 3d^2[R'']}{dx^3} - \frac{[S'] + 4d[S'] + 6d^2[S'] + 4d^3[S']}{dx^4} + \frac{[T] + 5d[T] + 10d^2[T] + 10d^3[T] + 5d^4[T]}{dx^5}\right)$$

$$d.Z^{VI}dx = L^{VI}dx.d\Pi^{IV} = n\nu.L^{VI}dx^2\left([N^{V}] - \frac{d[P^{IV}]}{dx} + \frac{d^2[Q''']}{dx^2} - \frac{d^3[R'']}{dx^3} + \frac{d^4[S']}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5}\right)$$

$$d.Z^{VII}dx = L^{VII}dx.d\Pi^{VII} = n\nu.L^{VII}dx^2\left([N^{V}] - \frac{d[P^{IV}]}{dx} + \frac{d^2[Q''']}{dx^2} - \frac{d^3[R'']}{dx^3} + \frac{d^4[S']}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5}\right)$$

u. s. f.

Hieraus ergibt sich, daß das vollständige Increment der ersten sechs Terme $Zdx + Z'dx + Z''dx + Z'''dx + Z^{IV}dx + Z^{V}dx$

$$= n\nu.dx^2\left(\frac{L^{V}[P^{IV}]}{dx} - \frac{[Q''']dL^{IV} + 2L^{IV}d[Q''']}{dx^2} + \frac{[R'']d^2L''' + 3d[R'']dL''' + 3L'''d^2[R'']}{dx^3} - \frac{[S']d^3L'' + 4d[S']d^2L'' + 6dL''d^2[S'] + 4L''d^3[S']}{dx^4} + \frac{[T]d^4L' + 5d[T]d^3L' + 10d^2[T]d^2L' + 10dL'd^3[T] + 5L'd^4[T]}{dx^5}\right)$$ [92] ist,

in welchem Ausdrucke schließlich, wie oben, die Indices weggelassen werden können. Das vollständige Increment aller folgenden Terme $Z^{VI}dx + Z^{VII}dx + \ldots$ wird aber sein

$$= n\nu.dx\left([N^{V}] - \frac{d[P^{IV}]}{dx} + \frac{d^2[Q''']}{dx^2} - \frac{d^3[R'']}{dx^3} + \frac{d^4[S']}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5}\right).\left(L^{VI}dx + L^{VII}dx + L^{VIII}dx + \ldots\ldots\right)$$

Der letzte Factor dieses Produkts ist aber $= (H - \int Ldx)$, wenn hierin H der Werth des über die ganze Abscisse AZ sich erstreckenden $\int Ldx$ ist, $\int Ldx$ aber derjenige Werth desselben, welcher der Abscisse $AH = x$ entspricht. Deshalb erhält man das vollständige Increment von $\int Zdx$

$$= n\nu.dx(H - \int Ldx)\left([N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{d^2[Q]}{dx^2} - \frac{d^3[R]}{dx^3} + \frac{d^4[S]}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5}\right) + n\nu.dx\left(L[P] - \frac{[Q]dL + 2Ld[Q]}{dx} + \frac{[R]d^2L + 3d[R]dL + 3Ld^2[R]}{dx^2} - \frac{[S]d^3L + 4d[S]d^2L + 6dLd^2[S] + 4Ld^3[S]}{dx^3} + \frac{[T]d^4L + 5d[T]d^3L + 10d^2[T]d^2L + 10dLd^3[T] + 5Ld^4[T]}{dx^4}\right)$$

$$= n\nu.dx\left([N](H - \int Ldx) - \frac{d.[P](H - \int Ldx)}{dx} + \frac{d^2.[Q](H - \int Ldx)}{dx^2}\text{ [93] } - \frac{d^3.[R](H - \int Ldx)}{dx^3} + \frac{d^4.[S](H - \int Ldx)}{dx^4} - \frac{d^5.[T](H - \int Ldx)}{dx^5}\right)$$

welcher Ausdruck $= 0$ gesetzt die Gleichung der gesuchten Curve gibt.

Das eben angeführte, sowie das dritte Problem (prop. III. p. 97) sind specielle Fälle des folgenden (prop. IV. p. 106):

Problem III. „Es soll eine Curve az bestimmt werden, für welche, in Rücksicht auf die gegebene Abscisse $AZ = a$, der Ausdruck $\int Zdx$ ein Maximum „oder ein Minimum ist, wenn Z eine solche Function von x, y, p, q und Π „ist, daß $dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$ und, $\Pi = \int [Z]dx$ gesetzt, $d[Z]$ „$= [L]d\pi + [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq$, worin $\pi = \int [z]dx$ und $d[z] =$ „$[m]dx + [n]dy + [p]dp + [q]dq$ ist.“

Es sei (Fig. 5) $AL = x$ und $Ll = y$; der Abscisse $AL = x$ entspreche der von $n\nu$ nicht afficirt werdende Werth $\int Zdx$, während den folgenden Elementen der Abscisse die Werthe Zdx, $Z'dx$, $Z''dx$ .... entsprechen. Die Incremente dieser Terme werden, wie immer, durch Differentiation derselben gefunden, und indem statt der Differenziale dy, dp, dq, die Werthe $dy = o$, $dy' = o$, $dy'' = +n\nu$; $dp = o$, $dp' = + \frac{n\nu}{dx}$, $dp'' = -\frac{n\nu}{dx}$; $dq = +\frac{n\nu}{dx^2}$, $dq' = -\frac{2n\nu}{dx^2}$, $dq'' = +\frac{n\nu}{dx^2}$ substituirt werden. Man erhält daher:

I) $d.Zdx = dx\left(Ld\Pi + \frac{Q.n\nu}{dx^2}\right)$; $d.Z'dx = dx\left(L'd\Pi' + \frac{P'.n\nu}{dx} - \frac{2Q'.n\nu}{dx^2}\right)$; $d.Z''dx = dx\left(L''d\Pi'' + N''.n\nu - \frac{P''.n\nu}{dx} + \frac{Q''.n\nu}{dx^2}\right)$; $d.Z'''dx = dxL'''d\Pi'''$; $d.Z^{IV}dx = dxL^{IV}d\Pi^{IV}$ u. s. f. Hierin sind die Incremente $d\Pi$, $d\Pi'$ u. s. f. durch $n\nu$ zu bestimmen. Es ist nun $\Pi = \int [Z]dx$, $\Pi' = \int [Z]dx + [Z]dx$, $\Pi'' = \int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx$; $\Pi''' = \int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx + [Z'']dx$ u. s. f.

Da nun $\int [Z]dx$ sich nur auf die Abscisse AL erstreckt, so erleidet es durch die Versetzung von n nach ν keine Aenderung, also ist sein Increment $= o$. Es ist aber, dem Obigen entsprechend:

II) $d[Z]dx = dx\left([L]d\pi + \frac{[Q].n\nu}{dx^2}\right)$; $d.[Z']dx = dx\left([L']d\pi' + \frac{[P'].n\nu}{dx} - \frac{2[Q'].n\nu}{dx^2}\right)$; $d.[Z'']dx = dx\left([L'']d\pi'' + [N''].n\nu - \frac{[P''].n\nu}{dx} + \frac{[Q''].n\nu}{dx^2}\right)$; $d.[Z''']dx = dx[L''']d\pi'''$, u. s. f.

Nun ist aber $\pi = \int [z]dx$; $\pi' = \int [z]dx + [z]dx$; $\pi'' = \int [z]dx + [z]dx + [z']dx$; $\pi''' = \int [z]dx + [z]dx + [z']dx + [z'']dx$. Es ist ferner ähnlich, wie vorhin: $d.[z]dx = n\nu.dx\frac{[q]}{dx^2}$; $d.[z']dx = n\nu.dx\left(\frac{[p']}{dx} - \frac{2[q']}{dx^2}\right)$; $d.[z'']dx = n\nu.dx\left([n''] - \frac{[p'']}{dx} + \frac{[q'']}{dx^2}\right)$; $d.[z''']dx = o$ u. s. f.

Hieraus ergibt sich, daß $d.\pi = o$; $d.\pi' = n\nu.dx\frac{[q]}{dx^2}$; $d.\pi'' = n\nu.dx\left(\frac{[p']}{dx} - \frac{[q]}{dx^2} - \frac{2d[q]}{dx^2}\right)$; $d.\pi''' = n\nu.dx\left([n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{d^2[q]}{dx^2}\right)$; alle übrigen Incremente $d\pi^{IV}$ ... werden diesem gleich sein.

Werden nun diese Werthe in II) substituirt, so erhalten wir: $d[Z]dx = n\nu.dx.\frac{[Q]}{dx^2}$; $d[Z']dx = n\nu.dx\left(\frac{[L'].[q]}{dx} + \frac{[P']}{dx} - \frac{2[Q']}{dx^2}\right)$; $d[Z'']dx = n\nu.dx\left([L'']dx\left(\frac{[p']}{dx} - \frac{[q] + 2d[q]}{dx^2}\right) + [N''] - \frac{[P'']}{dx} + \frac{[Q'']}{dx^2}\right)$; $d[Z''']dx = n\nu.dx.[L''']dx\left([n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{d^2[q]}{dx^2}\right)$; $d[Z^{IV}]dx = n\nu.dx[L^{IV}]dx\left([n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{d^2[q]}{dx^2}\right)$ u. s. f.

Hieraus ergibt sich nun: $d.\Pi = 0$; $d.\Pi' = n\nu.dx.\frac{[Q]}{dx^2}$; $d.\Pi'' = n\nu.dx\left([L']dx.\frac{[q]}{dx^2} + \frac{[P']}{dx} - \frac{[Q] + 2d[Q]}{dx^2}\right)$;

$d.\Pi''' = n\nu.dx\left([L''][p'] - \frac{[q]d[L'] + 2[L']d[q]}{dx} + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{d^2[Q]}{dx^2}\right)$;

$d.\Pi^{IV} = n\nu.dx\left([L''']dx\left([n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{d^2[q]}{dx^2}\right) + [L''][p'] - \frac{[q]d[L'] + 2[L']d[q]}{dx} + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{d^2[Q]}{dx^2}\right)$;

$d.\Pi^{V} = n\nu.dx\left(([L''']dx + [L^{IV}]dx)\left([n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{d^2[q]}{dx^2}\right) + [L''][p'] - \frac{[q]d[L'] + 2[L']d[q]}{dx} + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{d^2[Q]}{dx^2}\right)$ u. s. f.

und durch Substitution dieser Werthe in (I), wenn man noch der Kürze halber $[n''] - \frac{d[p']}{dx} + \frac{d^2[q]}{dx^2} = [n] - \frac{d[p]}{dx} + \frac{d^2[q]}{dx^2} = [h]$ und $[L''][p'] - \frac{[q]d[L'] + 2[L']d[q]}{dx} + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{d^2[Q]}{dx^2} = [L][p] - \frac{[q]d[L] + 2\,[L]d[q]}{dx} + [N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{d^2[Q]}{dx^2} = [H]$ setzt, erhält man:

$$d.Zdx = n\nu.dx.\frac{Q}{dx^2};$$

$$d.Z'dx = n\nu.dx.\left(L'dx.\frac{[Q]}{dx^2} + \frac{P'}{dx} - \frac{2Q'}{dx^2}\right);$$

$$d.Z''dx = n\nu.dx.\left(L''dx\left([L']dx.\frac{[q]}{dx^2} + \frac{[P']}{dx} - \frac{[Q] + 2d[Q]}{dx^2}\right) + N'' - \frac{P''}{dx} + \frac{Q''}{dx^2}\right);$$

$$d.Z'''dx = n\nu.dx.L'''dx.[H];$$

$$d.Z^{\mathrm{iv}}dx = n\nu.dx.L^{\mathrm{iv}}dx\left([L''']dx.[h] + [H]\right);$$

$$d.Z^{\mathrm{v}}dx = n\nu.dx.L^{\mathrm{v}}dx\left(([L''']dx + [L^{\mathrm{iv}}]dx).[h] + [H]\right);$$

$$d.Z^{\mathrm{vi}}dx = n\nu.dx.L^{\mathrm{vi}}dx\left(([L''']dx + [L^{\mathrm{iv}}]dx + [L^{\mathrm{v}}]dx).[h] + [H]\right),$$ u. s. f.

Es wird also die Summe aller dieser Incremente, d. h. das zu suchende Increment von $\int Zdx$ sein: $= n\nu.dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}\right) + n\nu.dx\left(L.[P] - \frac{[Q]dL + 2Ld[Q]}{dx}\right) + n\nu.dx.L[L].[q] + n\nu.dx.[H].(L'''dx + L^{\mathrm{iv}}dx + L^{\mathrm{v}}dx + \ldots) + n\nu.dx.[h].\Big(L^{\mathrm{iv}}dx.[L''']dx + L^{\mathrm{v}}dx([L''']dx + [L^{\mathrm{iv}}]dx) + L^{\mathrm{vi}}dx.([L''']dx + [L^{\mathrm{iv}}]dx + [L^{\mathrm{v}}]dx) + L^{\mathrm{vii}}dx([L''']dx + [L^{\mathrm{iv}}]dx + [L^{\mathrm{v}}]dx + [L^{\mathrm{vi}}]dx) + \ldots\Big)$.

Nun ist $L'''dx + L^{\mathrm{iv}}dx + L^{\mathrm{v}}dx + \ldots = H - \int Ldx$, wo H den Werth von $\int Ldx$ bedeutet für $x = a$. Setzt man ferner $S = L^{\mathrm{iv}}dx.[L''']dx + L^{\mathrm{v}}dx([L''']dx + [L^{\mathrm{iv}}]dx) + \ldots$, so wird $S' = S + dS = L^{\mathrm{v}}dx.[L^{\mathrm{iv}}]dx + L^{\mathrm{vi}}dx.([L^{\mathrm{iv}}]dx + [L^{\mathrm{v}}]dx) + \ldots$ sein, also: $S - S' = - dS = L^{\mathrm{iv}}.[L''']dx^2 + L^{\mathrm{v}}.[L''']dx^2 + L^{\mathrm{vi}}.[L''']dx^2 + \ldots = [L''']dx(L^{\mathrm{iv}}dx + L^{\mathrm{v}}dx + L^{\mathrm{vi}}dx + \ldots)$, also $- dS = [L''']dx(H - \int Ldx)$ und integrirt, $S = G - \int[L]dx(H - \int Ldx)$, wo G dadurch bestimmt ist, daß $S = o$ ist für $x = a$; also ist das Increment von $\int Zdx$

$$= n\nu.dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} + L[P] - \frac{[Q]dL + 2Ld[Q]}{dx} + L[L][q] + (H - \int Ldx)\left([L].[p] - \frac{[q]d[L] + 2[L]d[q]}{dx} + [N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{d^2[Q]}{dx^2}\right) + \left(G - \int[L]dx(H - \int Ldx)\right)\left([n] - \frac{d[p]}{dx} + \frac{d^2[q]}{dx^2}\right)\right)$$

$$= n\nu.dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}\right) + n\nu.dx\left([N](H - \int Ldx) - \frac{d.[P](H - \int Ldx)}{dx} + \frac{d.^2[Q](H - \int Ldx)}{dx^2}\right)$$
$$+ n\nu.dx\left([n](G - \int[L]dx(H - \int Ldx)) - \frac{d.[p](G - \int[L]dx(H - \int Ldx))}{dx} + \frac{d.^2[q](G - \int[L]dx(H - \int Ldx))}{dx^2}\right)$$

welches Increment $= o$ gesetzt die Gleichung der verlangten Curve gibt; zu gleicher Zeit erhellet aus der letzten Formel leicht, wie die Form des Incrementes sein würde, wenn in Z, $[Z]$, $[z]$ Differenziale eines höhern Grades, als des zweiten, enthalten wären.

Hieran schließt sich nun als letztes Problem des dritten Capitels das folgende (**prop. V. p. 114**):

Problem IV. „Es soll diejenige Curve gefunden werden, für welche $\int Zdx$ „ein Maximum oder ein Minimum ist, wenn $dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$ ist und Π durch die Differenzialgleichung $d\Pi = [Z]dx$ bestimmt ist, wo $d[Z] = [L]d\Pi + [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq$ ist."

Es werde, wie vorhin, angenommen, daß die in Z und in $[Z]$ vorkommenden Differenziale den zweiten Grad nicht übersteigen. Es sei nun (Fig. 5) $AZ = x$, $Ll = y$, so wird $\int Zdx$ dadurch, daß $Nn = y''$ um $n\nu$ wächst, keinen Zuwachs erhalten. Deshalb wird das Increment des sich über die ganze Abscisse AZ erstreckenden $\int Zdx$ gleich der Summe der Incremente von Zdx, $Z'dx$, $Z''dx$ .... sein. Diese werden aber wie gewöhnlich gefunden, wenn die letzteren Größen differenziirt werden und in die erhaltenen Ausdrücke für dy, dy', dy'', dp ... dq'' ihre oben (S. 21) aufgestellten Werthe substituirt werden.

Es seien angenommen:

I) $d\Pi = n\nu.\alpha$, $d\Pi' = n\nu.\beta$, $d\Pi'' = n\nu.\gamma$, $d\Pi''' = n\nu.\delta$, $d\Pi^{\mathrm{IV}} = n\nu.\varepsilon$, $d\Pi^{\mathrm{V}} = n\nu.\zeta$, $d\Pi^{\mathrm{VI}} = n\nu.\eta$ ....., so wird $d.Zdx = n\nu.dx\left(L\alpha + \frac{Q}{dx^2}\right)$, $d.Z'dx = n\nu.dx\left(L'\beta + \frac{P'}{dx} - \frac{2Q'}{dx^2}\right)$, $d.Z''dx = n\nu.dx\left(L''\gamma + N'' - \frac{P''}{dx} + \frac{Q''}{dx^2}\right)$, $d.Z'''dx = n\nu.dxL'''\delta$, $d.Z^{\mathrm{IV}}dx = n\nu.dxL^{\mathrm{IV}}\varepsilon$, $d.Z^{\mathrm{V}}dx = n\nu.dxL^{\mathrm{V}}\zeta$, .. Da nun: $\Pi = \int [Z]dx$, $\Pi' = \int [Z]dx + [Z]dx$; $\Pi'' = \int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx$, ... und $d.[Z]dx = n\nu.dx\left([L]\alpha + \frac{[Q]}{dx^2}\right)$, $d.[Z']dx = n\nu.dx\left([L']\beta + \frac{[P']}{dx} - \frac{2[Q']}{dx^2}\right)$, $d.[Z'']dx = n\nu.dx\left([L'']\gamma + [N''] - \frac{[P'']}{dx} + \frac{[Q'']}{dx^2}\right)$, $d.[Z''']dx = n\nu.dx[L''']\delta$, $d.[Z^{\mathrm{IV}}]dx = n\nu.dx[L^{\mathrm{IV}}]\varepsilon$, u. s. f., so folgt hieraus, daß $d\Pi = 0$, $d\Pi' = n\nu.dx\left([L]\alpha + \frac{[Q]}{dx^2}\right)$, $d\Pi'' = n\nu.dx\left([L]\alpha + [L']\beta + \frac{[P']}{dx} - \frac{[Q] + 2d[Q]}{dx^2}\right)$, $d\Pi''' = n\nu.dx.\left([L]\alpha + [L']\beta + [L'']\gamma + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{d^2[Q]}{dx^2}\right)$, $d\Pi^{\mathrm{IV}} = n\nu.dx\left([L]\alpha + [L']\beta + [L'']\gamma + [L''']\delta + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{d^2[Q]}{dx^2}\right)$, $d\Pi^{\mathrm{V}} = n\nu.dx\left([L]\alpha + [L']\beta + [L'']\gamma + [L''']\delta + [L^{\mathrm{IV}}]\varepsilon + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{d^2[Q]}{dx^2}\right)$, u. s. f. Diese Werthe mit den unter I) angenommenen verglichen geben: $\alpha = 0$, $\beta = [L]\alpha dx + \frac{[Q]}{dx}$, $\gamma = dx\left([L]\alpha + [L']\beta + \frac{[P']}{dx} - \frac{[Q] + 2d[Q]}{dx^2}\right)$, $\delta = dx\left([L]\alpha + [L']\beta + [L'']\gamma + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{d^2[Q]}{dx^2}\right)$, $\varepsilon = dx\left([L]\alpha + [L']\beta + [L'']\gamma + [L''']\delta + [N''] - \frac{d[P']}{dx} + \frac{d^2[Q]}{dx^2}\right)$ u. s. f., und folglich: $\alpha = 0$, $\beta = \frac{[Q]}{dx}$, $\gamma = [L'][Q] + [P'] - \frac{[Q] + 2d[Q]}{dx}$, $\delta = [L'][Q] + [L''][L'][Q]dx + [L''][P']dx - [L''][Q] - 2[L'']d[Q] + [N'']dx - d[P'] + \frac{d^2[Q]}{dx} = [L''][L'][Q]dx + [L''][P']dx - [Q]d[L'] - 2[L'']d[Q] + [N'']dx - d[P'] + \frac{d^2[Q]}{dx}$ und $\varepsilon = \delta(1 + [L''']dx)$, $\zeta = \delta(1 + [L''']dx)(1 + [L^{\mathrm{IV}}]dx)$, $\eta = \delta(1 + [L''']dx)(1 + [L^{\mathrm{IV}}]dx)(1 + [L^{\mathrm{V}}]dx)$ u. s. f.

Hieraus ergibt sich als das Increment von $Zdx + Z'dx + Z''dx$ folgender Ausdruck:

$$= n\nu.dx\left\{N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} + L[L][Q] + L[P] - \frac{[Q]dL + 2Ld[Q]}{dx}\right\}.$$

Um nun das Increment der Summe der übrigen Terme zu finden, setze man:

$V = [L]^2[Q] + [L][P] - \frac{[Q]d[L] + 2[L]d[Q]}{dx} + [N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{d^2[Q]}{dx^2}$ oder: $\delta = Vdx$, so wird es sein:

$$= n\nu.dx\left\{L'''dx + L^{\mathrm{IV}}dx(1 + [L''']dx) + L^{\mathrm{V}}dx(1 + [L''']dx)(1 + [L^{\mathrm{IV}}]dx) + L^{\mathrm{VI}}dx(1 + [L''']dx)(1 + [L^{\mathrm{IV}}]dx).(1 + [L^{\mathrm{V}}]dx) + \ldots\right\}.V.$$

Nimmt man nun an, daß diese Reihe $= S$ ist, so wird, wenn überall L anstatt L''' und $[L]$ anstatt $[L''']$ geschrieben wird:

$S = Ldx + L'dx(1 + [L]dx) + L''dx(1 + [L]dx)(1 + [L']dx) + L'''dx(1 + [L]dx)(1 + [L']dx)(1 + [L'']dx) + \ldots$,

also: $S' = S + dS = L'dx + L''dx(1 + [L']dx) + L'''dx(1 + [L']dx)(1 + [L'']dx) + \ldots$, also:

$-dS = Ldx + L'[L]dx^2 + [L]dxL''dx(1 + [L']dx) + [L]dxL'''dx(1 + [L']dx)(1 + [L'']dx) + \ldots$

$= Ldx + S'.[L]dx$ oder, $S' = S$ gesetzt, $dS + S\,[L]dx = -Ldx$ oder integrirt:
$e^{\int [L]dx}.S = C - \int e^{\int [L]dx}\,Ldx$, worin C dadurch bestimmt ist, daß $S = o$ ist für $x = a$.
Also ist der Werth jener Reihe: $S = e^{-\int [L]dx}.\left(C - \int e^{\int [L]dx}\,Ldx\right)$. Daher ist das vollständige Increment von $\int Zdx$:

$$= n\nu.dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} + L[L][Q] + L[P] - \frac{[Q]dL + 2Ld[Q]}{dx} + S\left([L]^2[Q] + [L][P] - \frac{[Q]d[L] + 2[L]d[Q]}{dx} + [N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{d^2[Q]}{dx^2}\right)\right)$$

$$= n\nu.dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} + [N]S - \frac{d.[P]S}{dx} + \frac{d^2.[Q]S}{dx^2}\right)$$

Sind in Z wie [Z] Differenziale höhern Grades, als des zweiten, enthalten, so erhält man analog, wenn man H den Werth von $\int e^{\int [L]dx}Ldx$ für $x = a$ nennt und der Kürze halber $V = e^{-\int [L]dx}\left(H - \int e^{\int [L]dx}Ldx\right)$ setzt, das Increment von $\int Zdx$

$$= n\nu.dx\left(N + [N]V - \frac{d.(P + [P]V)}{dx} + \frac{d^2.(Q + [Q]V)}{dx^2} - \frac{d^3.(R + [R]V)}{dx^3} + \ldots\ldots\right),$$

also die gesuchte Curve durch die Gleichung bestimmt:

$$0 = N + [N]V - \frac{d.(P + [P]V)}{dx} + \frac{d^2.(Q + [Q]V)}{dx^2} - \frac{d^3.(R + [R]V)}{dx^3} + \ldots\ldots$$

Im vierten Capitel (p. 129 — 170) werden die in den vorhergehenden Capiteln erhaltenen Resultate noch einmal übersichtlich zusammengestellt und dann eine Reihe von Problemen gelöst, z. B. die Curve zu finden, für welche $\int yxdx \times \int xdx\,\sqrt{1 + p^2}$ ein Maximum oder ein Minimum ist u. a., theils mit Benutzung jener Resultate, theils in Folge neuer Betrachtungen. [94])

Das fünfte Capitel (p. 171 — p. 227) behandelt, wie auch das folgende, die Methode der sogenannten relativen Maxima und Minima. — Nachdem ausführlich die Eigenthümlichkeit der hierher gehörigen Probleme erörtert worden ist, wird im zweiten Satze (p. 176) die Lösungsmethode der betreffenden Aufgaben im Allgemeinen angegeben. Es wird nachgewiesen, daß es, um diese Art von Aufgaben zu lösen, nicht mehr genüge, nur die Ordinate Nn um eine unendlich kleine Größe zu vermehren, weil, indem so die ganze Aenderung durch eine einzige Bedingung bestimmt wird, hierdurch nicht bewirkt werden könne, daß, wie die gemeinsame Eigenschaft B, so auch der Ausdruck des Maximums oder Minimums A auf die ursprüngliche Curve und auf die veränderte sich gleichmäßig erstrecke. Deshalb ist die Aenderung durch zwei Bedingungen zu bestimmen, was nur dadurch gelingt, daß zwei einander unendlich nahe Ordinaten Nn und Oo um unendlich kleine Größen $n\nu$ und $o\omega$ wachsen. Da nun die gemeinsame Eigenschaft B der ursprünglichen, wie der veränderten Curve gleichmäßig angehört, so muß ihr aus der Versetzung der Punkte n und o nach ν und ω hervorgehendes Increment $= o$ und ebenso auch, da der Ausdruck des Maximums und Minimums A für beide Curven Statt hat, das aus jener Versetzung hervorgehende Increment von $A = o$ gesetzt werden. So werden zwei Gleichungen erhalten, beide von der Form $S.n\nu + T.o\omega = o$; werden aus beiden Gleichungen die Größen $n\nu$ und $o\omega$ eliminirt, so ist die resultirende Gleichung die verlangte.

Nach dieser allgemeinen Auseinandersetzung wird nun zunächst folgendes Problem (prop. III p. 180) gelöst:

I. „Das aus der Verlegung zweier Punkte n und o nach ν und ω hervor„gehende Increment irgend eines auf die ganze Abscisse AZ bezogenen „Ausdrucks zu finden."

Es sei (Fig. 6) $AI = x$ und $Ii = y$, so wird $Kk = y'$, $Ll = y''$, $Mm = y'''$, $Nn = y^{IV}$, $Oo = y^{V}$, $Pp = y^{VI}$ u. s. f. sein. Von diesen Ordinaten werden nun zwei y^{IV} und y^{V} resp. um $n\nu$ und $o\omega$ vermehrt, die übrigen unverändert bleibend angenommen. Da nun $p = \frac{y' - y}{dx}$, so wird also auch das Increment von p, wie von p', $p'' = o$ sein; aber da $p''' = \frac{y^{IV} - y'''}{dx}$ ist, so wird sein Increment $= \frac{n\nu}{dx}$ sein, ähnlich wird das von $p^{IV} = \frac{o\omega}{dx} - \frac{n\nu}{dx}$ u. s. f.

Auf diese Weise erhalten wir:

$dy^{IV} = + n\nu$	$dq'' = + \frac{n\nu}{dx^2}$	$dr'' = - \frac{3n\nu}{dx^3} + \frac{o\omega}{dx^3}$	$ds' = - \frac{4n\nu}{dx^4} + \frac{o\omega}{dx^4}$
$dy^{V} = + o\omega$	$dq''' = - \frac{2n\nu}{dx^2} + \frac{o\omega}{dx^2}$	$dr''' = + \frac{3n\nu}{dx^3} - \frac{3o\omega}{dx^3}$	$ds'' = + \frac{6n\nu}{dx^4} - \frac{4o\omega}{dx^4}$
$dp''' = + \frac{n\nu}{dx}$	$dq^{IV} = + \frac{n\nu}{dx^2} - \frac{2o\omega}{dx^2}$	$dr^{IV} = - \frac{n\nu}{dx^3} + \frac{3o\omega}{dx^3}$	$ds''' = - \frac{4n\nu}{dx^4} + \frac{6o\omega}{dx^4}$ u. s. f.
$dp^{IV} = - \frac{n\nu}{dx} + \frac{o\omega}{dx}$	$dq^{V} = + \frac{o\omega}{dx^2}$	$dr^{V} = - \frac{o\omega}{dx^3}$	$ds^{IV} = + \frac{n\nu}{dx^4} - \frac{4o\omega}{dx^4}$
$dp^{V} = - \frac{o\omega}{dx}$	$dr' = + \frac{n\nu}{dx^3}$	$ds = + \frac{n\nu}{dx^4}$	$ds^{V} = + \frac{o\omega}{dx^4}$

Es kommen also in dieser Tabelle eben so viele mit $n\nu$, als mit $o\omega$ und zwar in ganz entsprechender Weise multiplicirte Terme vor, nur mit dem Unterschiede, daß jedem einen in $n\nu$ multiplicirten Term enthaltenden Incremente unmittelbar ein andres folgt, welches einen auf ganz gleiche Weise mit $o\omega$ behafteten Term enthält; z. B., während sich in dem Incremente von q''' der Term $- \frac{2n\nu}{dx^2}$ findet, findet sich entsprechend in dem unmittelbar folgenden Incremente von q^{IV} der Term $- \frac{2o\omega}{dx^2}$. Hieraus geht also hervor, daß das Increment eines ganz beliebigen Ausdrucks im Allgemeinen die Form: $n\nu.I + o\omega.K$ haben wird, worin $n\nu.I$ lediglich von dem der Ordinate y^{IV} allein ertheilten Zuwachse $n\nu$ abhängt, also auf ganz dieselbe Weise gebildet wird, wie in den vorhergehenden Capiteln gezeigt ward. Da aber alle in $o\omega$ multiplicirten Terme fortwährend Ausdrücken angehören, welche unmittelbar solchen, die auf ganz entsprechende Weise in $n\nu$ multiplicirte Terme enthalten, folgen, so ergibt sich hieraus, daß K derjenige Werth ist, in welchen die Größe I in ihrer unmittelbar nächstfolgenden Lage übergeht, d. h., daß $K = I' = I + dI$ ist. Da nun die Art und Weise der Bestimmung von I bekannt ist, so wird dadurch auch $o\omega.K = o\omega(I + dI)$ bestimmt sein. —

II. „Unter allen auf dieselbe Abscisse $AZ = a$ bezogenen und die Größe W „gemeinsam habenden Curven diejenige zu suchen, für welche V ein „Maximum oder ein Minimum ist. (prop. IV p. 184.)"

Angenommen, die Curve az (Fig. 6) sei die gesuchte, so habe W für sie den bestimmten Werth B, und V erhalte für sie den größten oder kleinsten Werth A. Es sei $AI = x$, $Ii = y$; die Ordinaten Nn und Oo mögen um $n\nu$ und $o\omega$ wachsen, so müssen die hierdurch sich ergebenden Incremente von V und W, jedes für sich, $= o$ sein. Es sei nun das lediglich und allein aus der Vergrößerung der Ordinate Nn um $n\nu$ hervorgehende Increment von $V = n\nu.dA$ und das Increment von W für denselben Fall $= n\nu.dB$, so wird in Folge des vorhergehenden Satzes das aus der Variation beider Ordinaten Nn und Oo hervorgehende Increment von $V = n\nu.dA + o\omega.dA'$ und das Increment von $W = n\nu.dB + o\omega.dB'$ sein. Zur Bestimmung der Curve hat man also die beiden Gleichungen: $n\nu.dA + o\omega.dA' = o$ und $n\nu.dB + o\omega.dB' = o$. Werden beide Gleichungen mit den beliebigen Größen α und β multiplicirt, so erhält man: $n\nu.\alpha.dA + o\omega.\alpha.dA' = o$ und $n\nu.\beta.dB + o\omega.\beta.dB' = o$. Um nun $n\nu$ und $o\omega$ aus ihnen zu eliminiren, setze man 1) $\alpha dA + \beta dB = o$ und 2) $\alpha dA' + \beta dB' = o$, wo α und β beliebige Constanten sind; denn wären sie variable Größen, so müßte in Folge von Gleichung 1): $\alpha' dA' + \beta' dB' = o$ sein, welche mit Gleichung 2) verglichen offenbar $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ gibt, daher beweist, daß α und β beliebige Constanten sind. Unter dieser Annahme wird also

$$\alpha dA + \beta dB = o$$

die Gleichung der gesuchten Curve sein, eine Gleichung, welche man auch durch unmittelbare Elimination von $n\nu$ und $o\omega$ aus den zuerst aufgestellten Gleichungen erhalten würde; denn aus diesen erhält man: $\frac{n\nu}{o\omega} = -\frac{dA'}{dA} = -\frac{dB'}{dB}$ oder, da $dA' = dA + d^2A$ ist, $\frac{d^2A}{dA} = \frac{d^2B}{dB}$, welche integrirt die Gleichung: $lg.dA = lg.dB + lg.C$ oder, $dA = C.dB$ und, $C = -\frac{\beta}{\alpha}$ gesetzt, die obige Gleichung: $\alpha dA + \beta dB = o$ gibt. Um also die gestellte Aufgabe zu lösen, suche man nach derselben Weise, wie früher, die Incremente von **W** und **V**, multiplicire sie mit beliebigen Constanten und setze ihre Summe $= o$, so ist damit die Gleichung der verlangten Curve gegeben. Hieran reihen sich noch zwei Sätze, welche nur eine Anwendung und Vereinfachung der aufgestellten allgemeinen Theorie für ganz specielle Fälle zum Zweck haben[95]).

Das sechste Capitel (p. 227—244) gibt die Lösung des Problems:

„Unter allen mehre Eigenschaften gemeinsam habenden Curven diejenige „zu finden, für welche eine bestimmte Größe ein Maximum oder ein „Minimum ist."

Es beginnt mit folgendem Satze **(prop. I. p. 227):**

I. „Die Curve, für welche unter allen Curven der Ausdruck $\alpha A + \beta B$ ein „Maximum ist, wird so beschaffen sein, daß sie unter allen **A** als gemein„same Eigenschaft habenden Curven den Werth **B** als ein Maximum „enthält." (Dasselbe gilt auch hinsichtlich des Minimums.)

Es sei **Q** diejenige Curve, für welche $\alpha A + \beta B$ ein Maximum ist, und **R** eine andre auf dieselbe Abscisse bezogene Curve, welche mit **Q** den Ausdruck **A** gemein habe, für welche aber $\alpha A + \beta B$ einen kleinern Werth habe, als für **Q**. Hieraus folgt, daß, da **A** beiden gemeinsam ist, in **Q** der Werth von **B** größer ist, als in **R**. Da nun **R** eine beliebige Curve bedeutet, welche mit **Q** den Werth **A** gemein hat, so ist klar, daß **Q** unter allen diesen Curven diejenige ist, für welche **B** ein Maximum ist.

Auf dieselbe Weise wird auch der folgende Satz **(prop. II. p. 230)** bewiesen:

II. „Diejenige Curve, für welche unter allen auf dieselbe Abscisse bezogenen „Curven $\alpha A + \beta B + \gamma C$ ein Maximum oder ein Minimum ist, wird so „beschaffen sein, daß für sie unter allen **A** und **B** als gemeinsame Eigen„schaften habenden Curven der Werth von **C** ein Maximum oder ein „Minimum ist."

Hierauf stützt sich nun die Lösung des folgenden Problems **(prop. III. p. 233):**

III. „Unter allen auf dieselbe Abscisse bezogenen und die Eigenschaften **A** „und **B** gemeinsam habenden Curven diejenige zu finden, für welche der „Werth von **C** der größte oder kleinste ist."

Aus dem vorhergehenden Satze ergibt sich sofort, daß die gesuchte Curve unter allen Curven diejenige ist, für welche $\alpha.A + \beta.B + \gamma.C$ ein Maximum oder ein Minimum ist. Sind nun die Incremente von **A, B, C** resp. $n\nu.dx.P$, $n\nu.dx.Q$, $n\nu.dx.R$, so wird die Gleichung der verlangten Curve $\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0$ sein. Außerdem fügt Euler noch eine andre Lösung hinzu, welche analog derjenigen des entsprechenden Problems im vorhergehenden Capitel ist, nur daß drei auf einander folgende Ordinaten **Nn, Oo, Pp** resp. um $n\nu$, $o\omega$, $p\pi$ wachsen. Es wird dann der Werth des Incrementes von $A = n\nu.P.dx + o\omega.P'.dx + p\pi.P''.dx$ gefunden, des von $B = n\nu.Q.dx + o\omega.Q'.dx + p\pi.Q''.dx$ und des von $C = n\nu.R.dx + o\omega.R'.dx + p\pi.R''.dx$. Werden diese drei Incremente $= 0$ gesetzt und resp. mit α, β, γ multiplicirt, so erhält man die drei Gleichungen:

$$0 = n\nu.\alpha.P + o\omega.\alpha.P' + p\pi.\alpha.P''$$
$$0 = n\nu.\beta.Q + o\omega.\beta.Q' + p\pi.\beta.Q''$$
$$0 = n\nu.\gamma.R + o\omega.\gamma.R' + p\pi.\gamma.R''$$

Um nun $n\nu$, $o\omega$, $p\pi$ zu eliminiren, setze man $0 = \alpha P + \beta Q + \gamma R$, $0 = \alpha P' + \beta Q' + \gamma R'$ und $0 = \alpha P'' + \beta Q'' + \gamma R''$. Sind nun α, β, γ beliebige Constanten, so ist ersichtlich, daß die erste dieser drei Gleichungen die zwei andern in sich faßt. Denn da $0 = \alpha P + \beta Q + \gamma R$, so ist auch $0 = \alpha dP + \beta dQ + \gamma dR$ und $0 = \alpha d^2P + \beta d^2Q + \gamma d^2R$, welche Gleichungen, da $P' = P + dP$, $Q' = Q + dQ$,

$R' = R + dR$, und $P'' = P + 2dP + d^2P$ u. s. f. sind, sofort in die zwei Gleichungen $0 = \alpha P' + \beta Q' + \gamma R'$ und $0 = \alpha P'' + \beta Q'' + \gamma R''$ übergehen. Es ist also durch die Gleichung $0 = \alpha P + \beta Q + \gamma R$, worin α, β, γ willkürliche Constanten sind, die Natur der gesuchten Curve ausgedrückt.[96])

Die beiden folgenden Anhänge bieten eine Anwendung der aufgestellten Theorie auf die Construction der sog. elastischen Curven und auf die Bestimmung der Bewegung der Körper im leeren Raume.

Indem Euler auf diese Weise an die Stelle isolirt für sich bestehender Lösungen von speciellen dem Gebiete der Variationsrechnung angehörenden Aufgaben zuerst eine allgemeine, umfassende Methode hatte treten lassen und zuerst erkannt hatte, daß die Lösungen aller Probleme dieser Rechnung auf eine und dieselbe Analysis zurückgeführt werden könnten, hatte er auch zuerst und allein das Fundament zu einem neuen, vollständigen wissenschaftlichen Lehrgebäude gelegt, welches in kurzer Zeit eben so sehr durch seine ferneren Arbeiten, wie durch diejenigen Lagrange's der Vollendung immer näher geführt ward. Gegen dieses hohe Verdienst, das sich Euler ebenfalls in dieser besonderen Disciplin um die Entwicklung der gesammten Mathematik erworben hat, verschwinden um so mehr die Mängel, welche in der Methodus nach und nach hervortraten, zumal Euler selbst gleich von Anfang an derselben sich mehr oder minder klar bewußt war. An die Bemerkung, welche oben (S. 17) der Lösung des dritten Problems im zweiten Capitel der Methodus zugefügt worden ist, reiht er (Scholion III. p. 56) die Worte: „Desideratur (itaque) methodus a resolutione geometrica et lineari libera, qua pateat in tali investigatione maximi minimive loco Pdp scribi debere — pdP". Euler fühlte also die großen Vortheile einer solchen Methode, so wenig es ihm auch wiederum, nach einer andern Aeußerung[97]) in seiner Methodus zu schließen, räthlich erscheint, eine rein analytische Methode aufzustellen. Der von ihm angeführte Grund, daß die Darstellung in diesem Falle eine weniger elegante und klare Form haben würde, und deshalb ihre Anwendung und Bedeutung weniger erkannt werden möchte, findet darin seine Berichtigung, als es ihm nicht geglückt war, eine neue Bezeichnungsart aufzufinden, durch welche sofort der eigenthümliche Charakter der Rechnung ausgedrückt würde, und welche unmittelbar den Unterschied zwischen dem von Euler sogenannten valor differentialis oder Incremente einer Function (— der Variation derselben —) und ihrem Differenziale selbst auch in der Formel sofort klar und deutlich hervortreten ließe. Hierdurch geschah es, daß er es vorzog, immer nur in der Figur die nöthigen Operationen vor sich gehen zu lassen und so eine analytische Methode zu schaffen, welcher doch eine rein analytische Grundlage fehlte. Abgesehen von der Beschränkung, welche durch dieses innige Anschließen an die Figur der Methode hinsichtlich ihrer weiteren und freieren Entwicklung erwuchs, ließen auch die zur Aufstellung der Endgleichungen nothwendigen Beweisführungen — wie aus den obigen Beispielen ersichtlich sein wird — immer noch eine größere Eleganz und Evidenz vermissen. Es drängte sich eben in dieselben allzusehr ein Gemisch geometrischer und analytischer Betrachtungen, ein Umstand, welcher nothwendig der Einfachheit und Präcision der Darstellung selbst Eintrag thun mußte. Sie bedingte ferner, daß, da die Abscisse, über welche sich das zu einem Maximum oder Minimum zu machende Integral $\int Zdx$ erstreckt, immerdar eine vorgeschriebene Größe hatte, in jedem Probleme der erste und der letzte Punkt der zu suchenden Curve als fest angenommen wurden, und also auch nicht der Fall betrachtet ward, wenn $\int Zdx$ nicht allein ein Maximum oder ein Minimum im Bezug auf die Form der Curve, sondern auch im Bezug auf ihre beiden Endpunkte ist. Daher fehlen denn auch die zur allgemeinen Lösung der Probleme nothwendigen Grenzgleichungen. Obgleich nun Euler diesen Theil der Aufgabe als der gewöhnlichen Differenzialrechnung zugehörig ansah, so ward doch in Folge dessen nie das allgemeine, sondern ein beschränkteres Problem gelöst. Ein fernerer Mangel der Euler'schen Darstellung bestand noch darin, daß, indem die Abscisse AZ in unendlich kleine, aber gleiche Theile getheilt, also dx stets constant angenommen ward, Euler nur die einzige Variable y und die von ihr abhängigen Größen in dem Ausdrucke $\int Zdx$ variiren ließ.

10.

Eine solche neue Bezeichnungsart, welche die angeführten wesentlichen Mängel hob, finden wir zuerst in einer Erstlingsarbeit Lagrange's, der so viele glänzende, durch ihre vollendete Form und ihren tiefen, reichen Gehalt ausgezeichnete Werke nachfolgen sollten. Elf Jahre nach dem Erscheinen der Methodus, im Jahre 1755[98]), hatte Lagrange in einem Alter von zwanzig Jahren dem Euler von dieser seiner

Entdeckung Mittheilung gemacht; aber erst im Jahre 1762 veröffentlichte er seine rein analytische Methode im zweiten Bande der Turiner Miscellaneen unter dem Titel:

„Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les **maxima** et les **minima** des „formules intégrales indéfinies"[99]).

Die neue Charakteristik ist δ; Lagrange beschränkt sich aber nur darauf, zu erwähnen, daß δZ ein Increment der Größe Z bezeichne, welches von ihrem Differenziale dZ zwar wesentlich verschieden, aber nach denselben Regeln, wie dieses, zu bilden sei, so daß, wenn $dZ = m.dx$ ist, ebenso $\delta Z = m.\delta x$ sei. Ohne sich auf irgend eine weitere Erörterung und Begründung seines Verfahrens einzulassen, geht er sofort zur Lösung der von Euler aufgestellten drei Hauptprobleme (S. 17, S. 19, S. 23) über.

I. „Gegeben sei das unbestimmte Integral $\int Z$, worin Z eine bestimmte „Function von $x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z \ldots\ldots$ bezeichnet; es soll die „gegenseitige Beziehung gefunden werden, in welcher diese Variablen „zu einander stehen müssen, damit $\int Z$ ein Maximum oder ein Minimum „werde (problème I. p. 174)."

Nach der bekannten Methode der Maxima und Minima muß die Gleichung für das Maximum oder Minimum von $\int Z$ sein: $0 = \delta.\int Z$ oder, was diesem gleichkommt, $\int \delta Z = 0$.

Es sei nun:
$$\begin{aligned}\delta Z = {} & n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + r\delta d^3x + \ldots\ldots\\ & + N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + R\delta d^3y + \ldots\ldots\\ & + \nu\delta z + \pi\delta dz + \chi\delta d^2z + \rho\delta d^3z + \ldots\ldots,\end{aligned}$$
so wird die verlangte Gleichung sein:
$$\begin{aligned}0 = \int\delta Z = {} & \int n\delta x + \int p\delta dx + \int q\delta d^2x + \int r\delta d^3x + \ldots\ldots\\ & + \int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2y + \int R\delta d^3y + \ldots\ldots\\ & + \int \nu\delta z + \int \pi\delta dz + \int \chi\delta d^2z + \int \rho\delta d^3z + \ldots\ldots\end{aligned}$$
Als sich von selbst verstehend setzt Lagrange $\delta dx = d\delta x$, $\delta d^2x = d^2\delta x$ u. s. f. Durch theilweise Integration wird nun $\int pd\delta x = p\delta x - \int dp\delta x$, $\int qd^2\delta x = qd\delta x - dq\delta x + \int d^2q\delta x$, $\int rd^3\delta x = rd^2\delta x - drd\delta x + d^2r\delta x - \int d^3r\delta x$ u. s. f. gefunden. In Folge dessen geht die obige Gleichung über in:
$$\begin{aligned}&\int(n - dp + d^2q - d^3r + \ldots\ldots)\delta x + \int(N - dP + d^2Q - d^3R + \ldots\ldots)\delta y + \int(\nu - d\pi + d^2\chi - d^3\rho + \ldots\ldots)\delta z\\ &\quad + (p - dq + d^2r - \ldots\ldots)\delta x + (q - dr + \ldots\ldots)d\delta x + (r - \ldots\ldots)d^2\delta x + \ldots\ldots\\ \text{(A)}\quad &\quad + (P - dQ + d^2R - \ldots\ldots)\delta y + (Q - dR + \ldots\ldots)d\delta y + (R - \ldots\ldots)d^2\delta y + \ldots\ldots\\ &\quad + (\pi - d\chi + d^2\rho - \ldots\ldots)\delta z + (\chi - d\rho + \ldots\ldots)d\delta z + (\rho - \ldots\ldots)d^2\delta z + \ldots\ldots = 0,\end{aligned}$$
woraus sich die beiden Gleichungen ergeben:
$$\text{(B)}\quad (n - dp + d^2q - d^3r + \ldots)\delta x + (N - dP + d^2Q - d^3R + \ldots)\delta y + (\nu - d\pi + d^2\chi - d^3\rho + \ldots\ldots)\delta z = 0$$
und
$$\begin{aligned}&(p - dq + d^2r - \ldots\ldots)\delta x + (q - dr + \ldots\ldots)d\delta x + (r - \ldots\ldots)d^2\delta x + \ldots\ldots\\ \text{(C)}\quad & + (P - dQ + d^2R - \ldots\ldots)\delta y + (Q - dR + \ldots\ldots)d\delta y + (R - \ldots\ldots)d^2\delta y + \ldots\ldots\\ & + (\pi - d\chi + d^2\rho - \ldots\ldots)\delta z + (\chi - d\rho + \ldots\ldots)d\delta z + (\rho - \ldots\ldots)d^2\delta z + \ldots\ldots = 0.\end{aligned}$$
Jeder Term dieser Gleichung ging nun durch eine theilweise Integration hervor, wie $p\delta x$ durch die des Ausdrucks $\int pd\delta x$, also kann man dazu noch eine constante Größe hinzuaddiren oder davon subtrahiren. Diese Constante wird nun z. B. für $p\delta x$ dadurch bestimmt, daß man diesen Term in dem Punkte, in welchem $\int pd\delta x$ beginnt, verschwinden läßt; man wird also von $p\delta x$ seinen Werth in diesem Punkte abziehen, und ähnlich für die übrigen Terme. Hierdurch erhält man folgende Regel: „Ist M der allgemeine Werth der Gleichung (C) und sei dieser für den Punkt, in welchem $\int Z$ beginnt, $= {}'M$ und für den Punkt, in welchem es endet, $= M'$, so wird der vollständige Ausdruck der Gleichung (C) sein: $M' - {}'M = 0$."

Sind nun in Folge des Problems eine oder mehre Gleichungen zwischen $\delta x, \delta y \ldots\ldots$ gegeben, so eliminire man vermittelst derselben diejenigen Variationen $\delta x, \delta y \ldots\ldots$, welche sich durch die übrigen ausdrücken lassen, aus Gleichung (C), — reducire also die Anzahl dieser Variationen $\delta x, \delta y \ldots\ldots$ auf die möglichst kleinste, — und setze den Coefficienten jeder übrig bleibenden Variation $= 0$. Sind die Variationen absolut von einander unabhängig, so erhält man zur Bestimmung des Maximums oder Minimums von $\int Z$ aus Gleichung (B) unmittelbar folgende drei Gleichungen:

$$n - dp + d^2q - d^3r + \ldots = 0,$$
$$N - dP + d^2Q - d^3R + \ldots = 0,$$
$$\nu - d\pi + d^2\chi - d^3\rho + \ldots = 0,$$ [100])

welche Gleichungen in einer solchen Beziehung zu einander stehen, daß eine jede Gleichung eine Folge der beiden andern ist. (No. VIII. p. 182.)

II. „Es sei Z eine beliebige algebraische Function von x, y, z, dx, dy, dz, „d^2x, d^2y, d^2z .... und der Größe $\Pi = \int Z'$, wo Z' eine andere beliebige „algebraische Function von x, y, z, dx, dy, dz ... ist; man soll die Gleichung „für das Maximum oder Minimum von $\int Z$ suchen. (problème 2. No. IX. p. 183.)“

Es sei: $\delta Z = L\delta\Pi + n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + \ldots + N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + \ldots + \nu\delta z + \pi\delta dz + \chi\delta d^2z + \ldots$

und $\delta Z' = \quad n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \ldots + N'\delta y + P'\delta dy + Q'\delta d^2y + \ldots + \nu'\delta z + \pi'\delta dz + \chi'\delta d^2z + \ldots,$

so wird nach der Annahme: $\delta\Pi = \delta.\int Z' = \int \delta Z' = \int [n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \ldots.]$ sein, also

$$\delta.\int Z = \int \delta Z = \int [n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + \ldots\ldots] + \int L \int [n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \ldots\ldots]$$

Für den ersten Theil der rechten Seite kann man nun, wie im vorhergehenden Problem, setzen:

$$\int (n - dp + d^2q - \ldots.)\,\delta x + (p - dq + \ldots.)\delta x + (q - \ldots.)d\delta x + \ldots.$$

und für den zweiten Theil:

$$\int L \times \int [n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \ldots.] - \int [\int L \times (n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \ldots)]$$

Setzt man nun den vollständigen Werth von $\int L = H$, betrachtet H als Constante, so wird der zweite Theil übergehen in: $\int [(H - \int L) \times (n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x + \ldots.)]$ und durch theilweise Integration in:

$$\int [n'(H - \int L) - d.p'(H - \int L) + d^2.q'(H - \int L) - \ldots.]\,\delta x + [p'(H - \int L) - d.q'(H - \int L) + \ldots.]\delta x$$
$$+ [q'(H - \int L) - \ldots]\,d\delta x + \ldots.$$

Setzen wir der Kürze halber:

$n + n'(H - \int L) = (n)$, $p + p'(H - \int L) = (p)$, $q + q'(H - \int L) = (q)$ und ebenso
$N + N'(H - \int L) = (N)$, $P + P'(H - \int L) = (P)$, $Q + Q'(H - \int L) = (Q)$ und
$\nu + \nu'(H - \int L) = (\nu)$, $\pi + \pi'(H - \int L) = (\pi)$, $\chi + \chi'(H - \int L) = (\chi)$, so erhält man:

$$\begin{aligned} \delta.\int Z = &\int [(n) - d.(p) + d^2.(q) - \ldots.]\delta x + \int [(N) - d.(P) + d^2.(Q) - \ldots.]\delta y + \int [(\nu) - d.(\pi) + d^2.(\chi) - \ldots.]\delta z \\ &+ [(p) - d.(q) + \ldots.]\,\delta x + [(q) - \ldots.]\,d\delta x + \ldots \\ \text{(D)}\quad &+ [(P) - d.(Q) + \ldots.]\,\delta y + [(Q) - \ldots.]\,d\delta y + \ldots. \\ &+ [(\pi) - d.(\chi) + \ldots.]\,\delta z + [(\chi) - \ldots.]\,d\delta z + \ldots. = 0 \end{aligned}$$

eine Gleichung, welche hinsichtlich ihrer Form ganz mit der Gleichung (A) im Problem I. übereinstimmt, welche also auf eine der obigen ganz analoge Weise weiter behandelt werden kann, um das vorgelegte Problem zu lösen.

Das beigefügte Corollar (No. X p. 185) enthält die Ausdehnung des Problems auf den Fall, in welchem die Größe Z' noch ein andres Integral $\Pi' = \int Z''$ involvirt, so daß

$\delta Z' = L'\delta\Pi' + n'\delta x + p'\delta dx + \ldots.$ und

$\delta Z'' = \quad n''\delta x + p''\delta dx + q''\delta d^2x + \ldots + N''\delta y + P''\delta dy + Q''\delta d^2y + \ldots + \nu''\delta z + \pi''\delta dz + \chi''\delta d^2z + \ldots$

Dann wird der obige Ausdruck $\delta\int Z$ im Problem II (No. IX) vermehrt um den Ausdruck:

$\int L \int L' \int (n''\delta x + p''\delta dx + q''\delta d^2x + \ldots.)$, welcher sich zuerst reducirt auf

$\int [(H - \int L)\, L' \int (n''\delta x + p''\delta dx + q''\delta d^2x + \ldots.)]$ und darauf, wenn man H' für den vollständigen Werth des Integrals $\int (H - \int L) L'$ setzt, auf: $\int [(H' - \int (H - \int L) L') \times (n''\delta x + p''\delta dx + q''\delta d^2x + \ldots.)]$. Man wird daher in diesem Falle dieselbe Gleichung (D), (wie in II), erhalten, wenn man nur darin den Werth von (n) um $n''[H' - \int (H - \int L) L']$, den von (p) um $p''[H' - \int (H - \int L) L']$ u. s. f. vermehrt. Analog ließe sich dieses Verfahren auf weitere complicirtere Fälle ausdehnen.

III. „Die Gleichung für das Maximum oder Minimum von $\int Z$ zu finden, „wenn Z einfach durch eine Differenzialgleichung ersten Grades bestimmt ist. (problème 3. No. XI. p. 185)“.

Welches auch die gegebene Gleichung sei, so ist, vorausgesetzt, daß sie von jedem Integrationszeichen befreit ist, klar, daß man sie, wenn man sie nach δ differenziirt, immer wird unter die Form bringen können: $\delta dZ + T\delta Z = n\delta x + p\delta dx + \ldots + N\delta y + P\delta dy + \ldots + \nu\delta z + \pi\delta dz + \ldots$ Hieraus ergibt sich, da $\delta dZ = d\delta Z$,

$$\delta Z = e^{-\int T} \int e^{\int T} (n\delta x + p\delta dx + \ldots.), \text{ und daher:}$$

$$\delta.\int Z = \int e^{-\int T} \int e^{\int T} (n\delta x + p\delta dx + \ldots.)$$

Nimmt man analog dem in dem vorhergehenden Probleme angewendeten Verfahren G als den vollständigen Werth von $\int e^{-\int T}$ an und setzt darauf:

$$ne^{\int T}\left(G - \int e^{-\int T}\right) = (n),\ pe^{\int T}\left(G - \int e^{-\int T}\right) = (p),\ qe^{\int T}\left(G - \int e^{-\int T}\right) = (q),$$

so erhält man einen der obigen Gleichung (D) ganz ähnlichen Ausdruck von $\delta \int Z$.

Die in den beiden letzten Problemen erhaltenen Gleichungen stimmen ebenfalls mit den von Euler bei den Lösungen derselben Aufgaben gegebenen (S. 20, 22, 24.) überein. Da Euler nicht weiter den Fall genauer untersucht hat, wenn Z von einer Differenzialgleichung eines höhern Grades, als des ersten, abhängt, so fügt Lagrange zur Ergänzung dem obigen Probleme noch folgendes Corollar hinzu, (No XIII. Corollaire. p. 186):

„Es werde angenommen, daß die gegebene Differenzialgleichung, durch welche Z bestimmt ist, von „der zweiten Ordnung sei, so daß man durch Differentiation nach δ erhält:"

$$\delta d^2 Z + T\delta dZ + V\delta Z = n\delta x + p\delta dx + \ldots. \text{ oder}$$
$$d^2\delta Z + Td\delta Z + V\delta Z = n\delta x + p\delta dx + \ldots.$$

Multiplicirt man beide Seiten der Gleichung mit der unbestimmten Variablen α und integrirt, so erhält man:

$$\int(\alpha d^2\delta Z + \alpha T d\delta Z + \alpha V\delta Z) = \int\alpha(n\delta x + p\delta dx + \ldots.) \text{ oder}$$
$$\alpha d\delta Z + (\alpha T - d\alpha)\delta Z + \int[\alpha V - d.(\alpha T - d\alpha)]\delta Z = \int\alpha(n\delta x + p\delta dx + \ldots.).$$

Werden nun beide Seiten mit α dividirt, und α als durch die Gleichung $\alpha V - d.(\alpha T - d\alpha) = o$ bestimmt angenommen, so erhält man die Gleichung:

$$d\delta Z + \frac{\alpha T - d\alpha}{\alpha}\delta Z = \frac{1}{\alpha}\int\alpha(n\delta x + p\delta dx + \ldots.) \text{ oder, indem man } \frac{\alpha T - d\alpha}{\alpha} = T' \text{ setzt:}$$

$$\delta Z = e^{-\int T'} \int \frac{e^{\int T'}}{\alpha} \int\alpha(n\delta x + p\delta dx + \ldots.) \text{ und endlich:}$$

$$\delta.\int Z = \int e^{-\int T'} \int \frac{e^{\int T'}}{\alpha} \int\alpha(n\delta x + p\delta dx + \ldots.),$$

wodurch die Frage auf die vorhin (S. 29. No. X) behandelte zurückgeführt ist.

Aehnlich würde das Verfahren sein, wenn, um $\delta.\int Z$ zu finden, Z durch eine Differenzialgleichung des dritten oder eines höhern Grades bestimmt wäre.

Durch Einführung der Charakteristik δ hatte Lagrange daher, wie aus der eben gegebenen Darstellung hervorgeht, der zur Lösung der Probleme der Variationsrechnung erforderlichen Methode das Gepräge allzu großer Künstlichkeit genommen, sie vielmehr in einer präcisen, eleganten Form hingestellt und zugleich auch damit die von ihm erkannten Mängel[101]) der Euler'schen Lösungsmethode insofern vermieden, als er in seinem „Essai" eben eine rein analytische, von jeder geometrischen Betrachtung freie Darstellung gab. Indem Lagrange nicht, wie Euler, die Variable y allein variiren ließ und eben so wenig den ersten wie den letzten Punkt der Curve als fest annahm, verlieh er seiner Methode außer ihrer Einfachheit noch dadurch höhern Werth, daß durch dieselbe auch die sogenannten Grenzgleichungen zugleich aufgestellt wurden und ferner, daß sie sich leicht auch auf diejenigen Fälle ausdehnen ließ, in welcher der zu einem Maximum oder Minimum zu machende Ausdruck ein Doppelintegral ist. Den Nachweis hiervon lieferte Lagrange in dem ersten Anhange zu seiner Abhandlung, in welchem er die Aufgabe löste, die kleinste unter allen Oberflächen zu finden, welche erstens einen gleichen bestimmten Umfang haben oder zweitens Körper einschließen, deren Volumina gleich sind. Von viel größerer Bedeutung und Wichtigkeit aber war die von Lagrange aus seiner Methode hergeleitete und auf dieselbe sich stützende neue Behandlungsweise der Mechanik [102]), deren eingehende Betrachtung in die Geschichte der Prinzipien der Mechanik gehört.

Anmerkungen.

1) **J. F. Montucla**: Histoire des mathématiques, nouvelle édition. Paris an VII (1799. 1800). 4 tomes. 4°.
Der vierte und ein Theil des dritten Bandes ist von Lalande bearbeitet und herausgegeben. Die erste Auflage in 2 Bänden war im Jahre 1758 erschienen.

C. Bossut: Essai sur l'histoire générale des mathématiques. Paris 1802. 2 tomes. 8°. Die zweite Auflage unter dem Titel: Histoire générale des mathématiques. Paris 1810.

Savérien: Histoire des progrès de l'esprit humain dans les sciences exactes et dans les arts, qui en dépendent, savoir, l'arithmetique, l'algèbre, la géométrie, l'astronomie etc., avec un abrégé de la vie des auteurs les plus célèbres dans ces sciences. Paris 1766. 8°.

A. G. Kästner: Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts. 4 Bände. Göttingen 1796—1800. 8°.

G. Libri. Histoire des sciences mathématiques en Italie. Paris 1838. 4 tomes. 8°.

2) **Pietro Cossali**: Origine, transporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra. Storia critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche. Parma 1797—99. 2 vol. 4°.

G. H. F. Nesselmann: Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra. Erster Theil: Die Algebra der Griechen. Berlin 1842. 8°.

Chasles: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles, qui se rapportent à la géométrie moderne. Bruxelles 1837. 4°.
Eine Uebersetzung in das Deutsche ist von Sohnke geliefert worden unter dem Titel:
Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neuern Methoden, von Chasles. Aus dem Französischen übertragen von L. A. Sohnke. Halle 1839. 8°.
Zu 1) und 2) vergleiche die ausführliche Darstellung Nesselmann's in seiner Algebra der Griechen. S. 1 bis S. 30.

3) Da die Bernoulli in der Geschichte der Mathematik des verflossenen Jahrhunderts eine so hervorragende Rolle spielen, so wird es nicht unzweckmäßig sein, wenn hier die genealogische Tabelle dieser Familie nach Fuß: „Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIième siècle. St. Pétersbourg 1843. 2 vol. 8°" folgt.

préface p. XXVII: **Nicolas Bernoulli**, le père.

1) **Jaques**, né le 27 déc. 1654. † le 16 août 1705.	**Nicolas.**	2) **Jean I.** né le 27 juillet 1667. † le 1 janvier 1748.
	3) **Nicolas.** né le 10 octobre 1687. † le 29 novem. 1759.	

Fils de Jean I.:

4) **Nicolas.** né le 27 janvier 1695. † le 27 juillet 1726.	5) **Daniel.** né le 29 janvier 1700. † le 17 mars 1782.	6) **Jean II.** né le 18 mai 1710. † le 17 juillet 1790.

Fils de Jean II.:

Daniel.	7) **Jean III.** né le 4 nov. 1744. † le 14 juillet 1807.	8) **Jacques.** né le 17 octobre 1758. † le 3 juillet 1789.

4) „Datis in plano verticali duobus punctis A et B, assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate „sua descendens et moveri incipiens a puncto A brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B."

Acta Eruditorum. 1696. p. 269. In Folge eines von Leibnitz ausgesprochenen Wunsches ward zur Lösung dieses Problems noch einmal eine Aufforderung erlassen in dem: „Programma editum Groningae 1691. (Johannis Bernoulli: Opera omnia. Lausannae et Genevae. 1742. IV Tomus. 4°. T. I. p. 166).

5) **Apollonii Pergaei**: Conicorum libri octo. Oxoniae. 1710. fol. Libri quatuor priores ex codd. mss. graecis
250 v. Chr. edidit Edmundus Halleius. (p. I — p. 250.) A. P. Conicorum libri tres posteriores ex arabico sermone in latinum conversi. Liber octavus restitutus. (p. I — 171.)

Das fünfte Buch (p. I — p. 58 des zweiten Theils) handelt von den größten und kleinsten unter allen Linien, welche von einem Punkte an einen Kegelschnitt gezogen werden können. Die vom Apollonius hierbei angewendete rein geometrische Methode besteht darin, daß er, nachdem von dem gegebenen Punkte aus an den Kegelschnitt die größte oder kleinste Linie gezogen und ihre Construction gegeben ist, nachzuweisen sucht, daß jede andre von jenem Punkte nach einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes gezogene Linie resp. kleiner oder größer ist, als die construirte. Der Beweis wird aus den Eigenschaften des betreffenden Kegelschnittes unter Zuziehung einfacher geometrischer Hilfssätze hergeleitet. Das angeführte fünfte Buch bietet von prop. IV (p. 3) an eine große Menge von Beispielen*) dar. Dieselbe rein geometrische Methode finden wir auch von den folgenden drei Mathematikern bei der Lösung der betreffenden Aufgaben angewendet.

6) **Sereni philosophi Antissensis**: De sectione cylindri et coni libri duo. Ex codd. mss. graecis edidit Ed-
2. Hälfte des 4. Jahrhund. n. Chr. mundus Halleius. Oxoniae. 1710. fol. p. 38. De sectione coni liber prop. V.

7) **Viviani**: De maximis et minimis divinatio in librum Vtum Conicorum Apollonii Pergaei adhuc desideratum.
1622—1703. Florentiae. 1679. Vgl. Montucla II. p. 93. 2. Auflage.

8) **Ricci**: Exercitatio geometrica de maximis et minimis. Romae 1666.
1619—1682. Vgl. Montucla II. p. 91. 2. Auflage.

9) **Nicolo Tartaglia**: General trattato di numeri e misure. Venezia. 1551—1560.
1505—1557. Im fünften Theile dieses Werkes gibt er die Lösung der Aufgabe: „Es soll die Zahl 8 in zwei solche Theile zerlegt werden, daß ihr Produkt mit ihrer Differenz multiplicirt ein Maximum ist." Seine Lösung ist ganz allgemein und dieselbe, welche die Regeln der Infinitesimalrechnung geben. Vgl. Montucla I. p. 569 und Chasles: Geschichte der Geometrie, übersetzt von Sohnke p. 640.

10) **Joannes Keppler**: Nova stereometria doliorum vinariorum inprimis Austriaci figurae omnium aptissimae.
1571 (27. Dec.)—1631 (15 Nov.) Lincii. 1615. fol.

II. pars: Stereometria dolii Austriaci in specie (N_2):

Theorema XXVII: In iis (vero) articulis, in quibus a minori ad maximum iterumque ad minus fit mutatio, lege aliqua circuli, semper est aliquousque insensibilis illa differentia,

In diesem wichtigen Satze finden wir zuerst die specifische Eigenthümlichkeit des Maximums klar ausgesprochen. Hierauf gründet sich Fermat's schöne Methode de maximis et minimis. (Vgl. La Place: Exposition du système du monde. Bruxelles 1827 p. 481).

11) **Petri de Fermat**, Senatoris Tolosani: Varia opera mathematica. Tolosae. 1679. fol. p. 63 sqq. Methodus
1593—1665. ad disquirendam maximam et minimam.

Dieselbe hatte er schon im Jahre 1629 veröffentlicht. Vgl. in der dem Werke beigefügten Briefsammlung den fünften Brief an Roberval vom 22. September 1636. Varia opera p. 125.

Seine Methode besteht darin, daß derjenige Ausdruck, welcher durch die nähere Bestimmung einer in ihm enthaltenen Größe A zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, demselben Ausdrucke gleichgesetzt wird, nachdem in ihm zuvor überall $A + E$ für A gesetzt worden ist (— die Größe E selbst ist unendlich klein —). Ist sodann die auf diese Weise gebildete Gleichung nach Möglichkeit durch Aufheben der auf beiden Seiten vorkommenden gleichen Größen und durch Division beider Seiten mit E vereinfacht, so werden diejenigen Terme, welche noch in E oder in eine Potenz von E multiplicirt sind, den übrigen gegenüber als verschwindend angesehen und daher weggelassen. Durch die sich so ergebende Gleichung ist derjenige Werth von A bestimmt, welcher den gegebenen Ausdruck zu einem Maximum oder Minimum macht. —

Auf diese Methode sich stützend reiht sich ihr unmittelbar an seine Tangentenmethode in der Abhandlung: de tangentibus linearum curvarum.

12) **Renati des Cartes**: Geometria anno 1637 Gallice edita . . . . in latinam linguam versa . . . . opera
1596—1650. atque studio Francisci a Schooten. 4°. Amstelaedami. 1659. II Tomus.

Tom I. p. 44 sqq. und Florimondi de Beaune notae breves p. 130 sqq.

Descartes, der Begründer der analytischen Geometrie, gibt an der citirten Stelle ein Verfahren an, Normalen und daher auch Tangenten an eine durch eine Gleichung 2. Grades ausgedrückte Curve zu ziehen, welches wesentlich folgendes ist: Um einen Punkt P (Fig. 7) der Abscissenaxe AP (— A sei der Anfangspunkt des Coordinatensystems —) wird ein Kreis mit dem Radius $PC = s$ beschrieben, welcher die gegebene Curve in zwei Punkten C und E schneidet; wird nun die Ordinate EQ mit x und die Abscisse QA mit y bezeichnet und $AP = v$ gesetzt, so ist $x^2 = s^2 - (v - y)^2$. Setzt man nun in diese Gleichung für x^2 seinen aus der Gleichung der Curve in y bestimmten Werth ein, ordnet die so erhaltene Gleichung nach Potenzen von y und sucht denjenigen Werth von v zu bestimmen, für welchen zwei Durchschnittspunkte der Curve und des Kreises in einen zusammenfallen, so ist in diesem Falle der Radius des Kreises die zu dem Berührungspunkte der Curve und des Kreises gehörige Normale der Curve. Dieser Werth von v wird aber erhalten durch Vergleichung der gefundenen Gleichung mit der Gleichung: $y^2 - 2ye + e^2 = o = (y - e)(y - e)$ nach der Methode der unbestimmten Coefficienten; der so gefundene in e oder, da $y - e = o$ d. h. $e = y$ ist, in y ausgedrückte Werth von v ist der verlangte. Werden nun nach dieser

*) Der der Abhandlung zugemessene Raum gestattet es nicht, die folgenden einzelnen Methoden sämmtlich an Beispielen zu erläutern und so tiefer auf ihre Eigenthümlichkeiten einzugehen. Es wird aber genügen, eine allgemeine Charakteristik der wichtigeren zu geben, oder die Belegstellen anzuführen, wenn diese selbst ein hinlänglich klares Verständniß bieten. Aus demselben Grunde fehlen auch die biographischen Mittheilungen.

Methode die Tangenten für die verschiedenen Punkte der Curve bestimmt, so ist, -- wenn nur die einfachsten Fälle berücksichtigt werden, — die Ordinate in demjenigen Punkte der Curve ein Maximum oder ein Minimum, in welchem die Tangente der Abscissenaxe parallel ist.

13) **Roberval**: Divers ouvrages de mathématique et de physique par MM. de l'académie royale des sciences. Paris. 1693. fol.
1602—1675.

p. 69. Observations sur la composition des mouvemens et sur le moyen de trouver les touchantes.

p. 80. *Problème I:* Donner les touchantes des lignes courbes par les mouvemens mélés.

Axiome: La direction du mouvement d'un point, qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point.

Règle générale: Par les propriétés specifiques de la ligne courbe, (qui vous seront données) examinez les divers mouvemens, qu'a le point, qui la décrit à l'endroit, où vous voulez mener la touchante; tous ces mouvemens composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

Die von ihm gegebene Methode geht also von der Idee aus, daß die Richtung des eine bestimmte Curve beschreibenden Mobils in irgend einem Punkte derselben mit der Richtung der Tangente der Curve in diesem Punkte zusammenfalle. Die Richtung des Mobils und also auch der Tangente wird nun vermittelst des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte durch zwei bewegende Kräfte bestimmt, deren Richtung und Größenverhältniß aus den Eigenschaften der gegebenen Curve (— z. B. bei der Parabel dadurch, daß jeder ihrer Punkte ebensoweit von der Directrix entfernt ist, als vom Brennpunkte —) bestimmt wird. Vgl. Fermati varia opera. p. 154 und 165.

14) **Caroli Renaldini**: Geometra promotus. Patavii. 1684. fol.
1615—1700.

p. 63. Appendix de maximis et minimis. Ohne Fermat zu erwähnen, gebraucht er dennoch lediglich seine Methode.

15) **Christiani Hugenii Zulichemii**: Opera varia. 4°. Lugduni Batavorum. 1724. p. 490 sqq.
1629—1695.

Früher waren sie erschienen in den: „Divers ouvrages de mathématique et de physique par MM. de l'académie royale des sciences. Paris. 1693" unter dem Titel: Divers ouvrages de M. Hugens de Zulichem. p. 326.

Nach vorangeschickter Erläuterung stellt er folgende zwei Regeln auf:

Quando termini, quos maximum aut minimum designare volumus, nullam fractionem habent, in cujus denominatore quantitas incognita quaesita continetur, multiplicandus est terminus quisque per numerum dimensionum quem in illo habet quantitas incognita, omissis terminis iis, in quibus incognita quantitas non reperitur; omniaque illa producta aequanda nihilo.

1" p. 493. 2" p. 328. Altera est hujusmodi: Si termini, quos maximum aut minimum designare volumus, fractiones habeant, in quarum denominatore occurrat quantitas incognita, delendae primum sunt quantitates cognitae, si quae adsint; deinde si reliquae quantitates non habeant eundem denominatorem, eo reducendae sunt. Tunc termini singuli numeratorem fractionis constituentes, ducendi in terminos singulos denominatoris, productaque singula multipla sumenda secundum numerum, quo dimensiones quantitatis incognitae in termino numeratoris differunt a dimensionibus ejusdem incognitae quantitatis in termino denominatoris. Signa autem affectionis productis singulis praeponenda, qualia lex multiplicationis exigit, quoties dimensiones quantitatis incognitae plures sunt in termino numeratoris quam in termino denominatoris: at quoties contra evenit, contraria quoque signa productis praeponenda, quae denique omnia aequanda nihilo.

16) **Johannis Huddenii**: Epistola secunda de maximis et minimis. Cartesii geometria in linguam latinam versa opera Schootenii. pars I. p. 507 sqq.
1640—1704.

Die Methode des Hudde stimmt im Wesentlichen mit der Methode von Huygens überein. Zu den zwei oben (Nr. 15) von Huygens gegebenen Regeln (p. 510) fügt er noch eine dritte (p. 513) für diejenigen Fälle hinzu, wenn die betreffende Function mehre Variablen enthält.

17) **Philosophical Transactions** for the years 1672 and 1673. p. 6059. **Illustrissimi Slusii** modus, qui demonstrat methodum suam ducendi tangentes ad quaslibet curvas absque calculo antehac traditam in horum actorum No. 90. p. 5143 des zweiten Bandes. Extrait of a letter from the excellent **Renatus Franciscus Slusius**.... concerning his short and easy method of drawing tangents to all geometrical curves without any labour of calculation...
1623—1685.

Seine allgemeine Regel ist:

1) Rejectis ab aequatione partibus, in quibus y et ν non invenitur, statuantur ab uno latere omnes, in quibus est y, et ab altero illa, in quibus habetur ν, cum suis signis + vel —. Hoc dextrum, illud sinistrum latus facilitatis causa vocabimus.
2) In latere dextro praefigatur singulis partibus exponens potestatis, quam in illis obtinet ν; seu, quod idem est, in illum ducantur partes.
3) Fiat idem in latere sinistro, praeponendo scilicet unicuique illius parti exponentem potestatis, quam in illa habet y. Sed et hoc amplius: Unum y in singulis partibus vertatur in a. —

Ajo, aequationem sic reformatam modum ostendere ducendae tangentis ad punctum D datum. Cum enim eo dato pariter data sunt y et ν et ceterae quantitates; a non poterit ignorari.

Seine Tangentenmethode besteht also darin, daß er den Werth der Subtangente a für eine bestimmte Curve durch einen Bruch bestimmt, dessen Zähler ein Aggregat von Größen ist, welche gebildet werden, indem in der auf o gebrachten Gleichung der gegebenen Curve jeder x (— für ν ist x gesetzt —) enthaltende Term mit dem Exponenten der in ihm enthaltenen Potenz von x multiplicirt wird, und dessen Nenner ein andres Aggregat ist, dessen einzelne Glieder erhalten werden, indem jeder y enthaltende Term mit dem Exponenten der in ihm vorkommenden Potenz von y multiplicirt und darnach durch y dividirt wird. (Wie in Nr. 12 sind hier die Abscissen mit y und die Ordinaten mit x bezeichnet).

18) **Isaac Barrow**: Lectiones opticae et geometricae. Londini. 1674. 4°. Pars II. p. 75. Lectio X.: Institutum circa tangentes negotium adhuc arguo etc.
1630—1677.

XIV. p. 80. sqq. (fig. 8). Sint AP, PM positione datae rectae lineae (quarum PM propositam curvam secet in M) et MT curvam tangere ponatur ad M, rectam AP secare ad T, ut ipsius jam rectae PT quantitatem exquiram, curvae arcum MN indefinite parvum statuo; tum duco rectas NQ ad MP et NR ad AP parallelas; nomino $MP = m$, $PT = t$, $MR = a$, $NR = e$, reliquasque rectas, ex speciali curvae natura determinatas, utiles proposito, nominibus designo, ipsas autem MR, NR (et mediantibus illis ipsas MP, PT) per aequationem e calculo deprehensam inter se comparo; regulas interim has observans:

1) Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipsarum a, vel e potestas habetur, vel in quibus ipsae ducuntur in se, (etenim isti termini nihil valebunt).

2) Post aequationem constitutam omnes abjicio terminos literis constantes quantitates notas seu determinatas designantibus, aut in quibus non habentur a vel e (etenim illi termini semper, ad unam aequationis partem adducti, nihilum adaequabunt).

3) Pro a ipsam m (vel MP), pro e ipsam t (vel PT) substituo. Hinc demum ipsius PT quantitas dignoscetur. Quodsi calculum ingrediatur curvae cujuspiam indefinita particula; substituatur ejus loco tangentis particula rite sumpta, vel ei quaevis (ob indefinitae curvae parvitatem) aequipollens recta. —

p. 82. Es sei z. B. (Fig. 8) AX ein der Größe nach bestimmter Theil der Graden AZ, ferner MP ein von einem beliebigen Punkte M der Curve AMO auf AZ gefälltes Loth und die Curve AMO durch die Gleichung bestimmt: $AP^3 + PM^3 = AX.AP.PM$. Man setze $AX = b$, $AP = f$, also: $AQ = f - e$, so ist nach 1) $AQ^3 = f^3 - 3f^2e$, sowie $QN^3 = m^3 - 3m^2a$, und $AQ.QN = fm - fa - me + ae = fm - fa - me$ also: $AX.AQ.QN = bfm - bfa - bme$. Daher:

$$f^3 - 3f^2e + m^3 - 3m^2a = bfm - bfa - bme.$$ Hieraus erhält man nach 2)

$$bfa - 3m^2a = 3f^2e - bme$$ und nach 3)

$$bfm - 3m^3 = 3f^2t - bmt,$$ also

$$t = \frac{bfm - 3m^3}{3f^2 - bm}.$$

19) **Tschirnhausen**: Nova methodus tangentes curvarum expedite determinandi. Acta Eruditorum. Lipsiae. 1682.
1651—1708. p. 391.

Während de Sluse (Nr. 17) durch seine Methode die Tangente durch die Subtangente bestimmte, bestimmt sie Tschirnhausen in der angeführten Abhandlung nur durch denjenigen Theil der Abscissenaxe, der zwischen den Durchschnittspunkten derselben mit der Tangente und der gegebenen Curve liegt und gibt folgende Regel:

Werden die Ordinaten mit y und die Abscissen mit x bezeichnet, so wird die höchste Potenz von y in der die gegebene Curve bestimmenden Gleichung auf die linke Seite dieser Gleichung geschafft, alle andern Terme auf die rechte Seite. Es ist dann t = einem Bruche, dessen Zähler ein Aggregat von Gliedern ist, welche gebildet werden, indem die bekannte Größen enthaltenden Terme je unter Beibehaltung ihres Vorzeichens mit dem Potenzexponenten der bekannten Größe multiplicirt werden, dessen Nenner aber ebenso gebildet wird, wie derselbe in Nr. 17 gebildet ward, nur daß man x für y schreibt.

Acta Eruditorum. 1683. p. 122: Nova methodus determinandi maxima et minima. Auctore D. T.

Nachdem er erwähnt hat, daß in demjenigen Punkte einer Curve die Ordinate eine größte oder kleinste ist, in welchem die Tangente der Abscissenaxe parallel, also $t = \infty$ ist, bestimmt er, wie vorhin, t und setzt den Nenner des dem t gleichen Bruches $= o$; dann ist durch diese Gleichung derjenige Werth von x bestimmt, welcher y zu einem Maximum macht.

20) **G. G. Leibnitii**: Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus. Acta Eruditorum. Lipsiae. 1684. p. 467.
1646 — 1716
(23. Juni) (14. Nov.)

Die Prinzipien seiner neuen Rechnung hatte er schon früher festgestellt im Jahre 1675 (21. Nov.) in der Abhandlung: Pro methodo tangentium inversa et aliis tetragonisticis specimina et inventa etc., vorzüglich aber in der 1677 (11. Juli) verfaßten Abhandlung: Méthode générale pour mener les touchantes des lignes courbes etc. Vgl. die Entdeckung der Differenzialrechnung durch Leibnitz, von Gerhardt. Salzwedel. 1848 p. 25 ff. Die angeführten Abhandlungen sind hierin außer anderen zuerst veröffentlicht p. 41, p. 59 und der Nachweis geführt worden, daß Leibnitz unabhängig von Newton die Differenzialrechnung erfunden hat. Für die Erfindung derselben Rechnung durch Newton (von diesem method of fluxions genannt) ist nach der Erklärung des Comité der königlichen Societät zu London vom 24. April 1712 das Jahr 1665 angenommen, in welchem er die Abhandlung: „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas" verfaßte, von welcher er 1669 seinem Lehrer Barrow Mittheilung machte. Vgl. Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de analysi promota jussu societatis regiae. Londini. 1712. Fluxionum methodus inversa etc. A. Georgio Cheynaeo. Londini. 1703. David Brewster: The life of Sir Isaac Newton. London. 1831. p. 189—218. A. v. Humboldt: Kosmos. II. p. 514.

21) **Isaac Newton**: Philosophiae naturalis principia mathematica. Londini. 1687. 4°. Liber II. prop. XXXV. theor. XXVIII. Scholium. p. 326.
1642 — 1727.
(25. Dez.) (20. März.)

Philosophiae naturalis principia mathematica auctore Isaaco Newtono, commentariis illustrata communi studio P.P. Thomae Le Seur et Francisci Jaquier. II Tom: Genevae. 1739. Tomus II. prop. XXXIV. theor. XXVIII. Scholium. p. 261.

Quodsi figura $DNFB$ (fig. 9) ejusmodi sit curva, ut, si ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM et a puncto dato G*) ducatur recta GR, quae parallela sit rectae figuram tangenti in N et axem productum secet in R, fuerit MN ad GR ut GR^3 ad $4\,BR.\,GB^2$, solidum, quod figurae hujus revolutione circa axem facta describatur, in medio raro praedicto ab A versus B movendo, minus resistetur, quam aliud quodvis eadem longitudine et latitudine descriptum solidum circulare. (Vgl. Nota p. 274).

*) GH est perpendicularis ad axem in puncto contactus B.

Hierdurch hat Newton, ohne die Methode, die ihn zu seiner Lösung führte, kennen lernen zu lassen, die Curve *DNFB* bestimmt, welche durch ihre Umdrehung um die Axe *AB* eine Oberfläche erzeugt, welche bei ihrer Bewegung in einer nach dem Gesetze des Quadrates der Geschwindigkeit Widerstand leistenden Flüssigkeit den kleinsten Widerstand erfährt.

22) Virorum celeberr. **Got. Gul. Leibnitii** et **Johann. Bernoullii** commercium philosophicum et mathematicum. II Tomus. Lausannae et Genevae. 1745. Tomus I ab anno 1694 ad annum 1699.

Ep. XXIX p. 177 (1696 Jul. B. an L.): testibus litteris Varignonii: „De tous ceux (inquit) à qui j'ai annoncé votre problème, je ne sais encore personne, qui l'ait résolu; je l'ai tenté, mais la difficulté m'a tout aussitôt rebuté."

23) **G. G. Leibnitii**: Communicatio suae pariter, duarumque alienarum . . . . . solutionum problematis curvae celerrimi descensus. Acta Eruditorum. 1697. p. 201 sqq.

Commercium epistolicum: Ep. XXVIII (1696 Juni) p. 172. Er gibt der zu suchenden Curve den Namen: „tachystoptota" und bestimmt sie durch die Gleichung $dy : dx = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{b - x}}$.

24) Domini Marchionis **Hospitalii**: Solutio problematis de linea celerrimi descensus. Acta Eruditorum. 1697. p. 217.
1661 – 1704.

Vgl. Comm: ep. Ep. XLV. Er bestimmt die Curve durch die Gleichung: $dx = \frac{my^m dy}{\sqrt{1 - m^2 y^{2m}}}$

25) **Joh. Bernoulli**: Curvatura radii in diaphanis non uniformibus, solutioque problematis ..... de invenienda linea brachystochrona ... Acta Eruditorum. 1697. p. 206.

Sie war beigelegt dem 29. Briefe des Comm. ep. (Juli 1696) „Mitto hic solutionem etc." Johannis Bernoulli: Opera omnia T. I. N. XXXVII

26) **Jac. Bernoulli**: Solutio problematum fraternorum etc. A. E 1697. p. 211. Jacobi Bernoulli Basilensis: Opera II T. Genevae. 1744. T. II. p. 768. N. LXXV.

27) **(Isaaci Newtonii)**: Epistola missa ..... A. E. 1697. p. 223. Philosophical Transactions for the year 1697. Isaaci Newtonii: Opuscula mathematica, philosophica et philologica. Lausannae et Genevae. 1744. T. I. p. 289.

A dato puncto *A* (fig. 10) ducatur recta infinita *APCZ* horizonti parallela et super eadem recta describatur tum Cyclois quaecunque *AQP* rectae *AB* (ductae et si opus est productae) occurrens in puncto *Q*, tum Cyclois alia *ABC*, cujus basis et altitudo sit ad prioris basem et altitudinem respective ut *AB* ad *AQ*. Et haec cyclois novissima transibit per punctum *B* et erit curva illa linea, in qua grave a puncto *A* ad punctum *B* vi gravitatis suae citissime perveniet. Q. E. J.

28) **Nicolai Fatii Duilleri**: Lineae brevissimae descensus investigatio. Londini. 1699. A. E. 1699. p. 510.

29) **Joh. Craigii**: Epistola continens duorum problematum solutionem. Philosophical Transactions for the year 1701. p. 746.

30) Domini **Sauveur**: Scheda latine versa in dem Comm. ep. Leibnitii et Bernoullii. Ep. XLI. p. 234 bis p. 236.
1653 – 1716.

B. an L. p. 233. Mitto ecce scriptum certi cujusdam mathematici Salvatoris, quod Dominus Marchio mihi communicavit, ubi auctor erroneam quandam solutionem mei problematis exhibet, ... peccat in principia calculi differentialis, quando considerat duas lineas, angulum infinite parvum constituentes, ut absolute parallelas . . . .

31) **D. Tschirnhausen**: De problemate Bernoulliano. A. E. 1697. p. 220.

32) **Galileo Galilei**: Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali. In Leida. 1638. p. 96 (ma) il tempo brevissimo e in consequenza il moto velocissimo è quello, che si fa per l'arco, del quale la linea retta è la corda.
1564–1642.

p. 231, theorema XXII. prop. XXXVI. Scholium. Ex his, quae demonstrata sunt, colligi posse videtur lationem omnium velocissimam ex termino ad terminum non per brevissimam lineam, nempe per rectam, sed per circuli portionem fieri. —

33) **Christian Huygens**: Traité de la lumière. A Leide. 1690.
1629 — 1695
(14. April) (5. Juni)

Diese Abhandlung war bereits 1678 niedergeschrieben und seitdem verschiedenen Bekannten mitgetheilt worden. Chap. IV, p. 46 . . . . Or ces rayons au lieu, qu'ils sont droits dans des diaphanes homogènes, doivent être courbes dans un air d'inégale pénétrabilité.

34) **Damiani** philosophi, **Heliodori** Larissaei: De Opticis libri II. (*Περὶ ὀπτικῶν βιβλία β'*) nunc primum editi ab Erasmo Bartholino. Parisiis. 1658.
Mitte des 3. Jahrh. n. Chr.

p. 24. *Ἀπέδειξέ γε ὁ μηχανικὸς Ἥρων ἐν τοῖς αὐτοῦ κατοπτρικοῖς, ὅτι αἱ πρὸς ἴσας γωνίας κλώμεναι εὐθεῖαι ἐλάχισταί εἰσι μέσων τῶν ἀπὸ τῆς αὐτῆς καὶ ὁμοιομεροῦς γραμμῆς πρὸς τὰ αὐτὰ κλωμένων πρὸς ἀνίσους γωνίας. τοῦτο δὲ ἀποδείξας φησίν· ὅτι εἰ μὴ μέλλοι ἡ φύσις μάτην περιάγειν τὴν ἡμετέραν ὄψιν, πρὸς ἴσας αὐτὴν ἀνακλάσει γωνίας.*

35) **Caroli Renaldini**: De resolutione et compositione mathematica. p. 130. Animadversiones in libros Opticorum Heliodori Larissaei ed. ab Bartholino. 1658. p. 111. A. E. 1682. p. 185.

36) Mémoires présentées par divers savants à l'académie des inscriptions et des belles-lettres de l'institut impérial de France. Première série: Sujets divers d'érudition. Tome IV. Paris. 1854.
Heron um 60 v. Chr.

Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie, disciple de Ctésibius etc. par M. Th. Henri Martin.

p. 56. La catoptrique d'Héron l'Ancien existe encore si non tout entière, du moins, en abrégé et elle est imprimée, mais sous le faux nom de Ptolemée.

p. 60. Cette catoptrique se trouve dans une collection d'auteurs sur la sphère, qui, formée et publiée par Geronimo Nucerello, physicien et médecin, a été imprimée à Venise en 1518 . . . . le dernier (ouvrage) du recueil est Ptolemaeus de speculis. . . . .

Die Gründe, weshalb diese Schrift nicht den Ptolemäus zum Verfasser hat, sondern die verloren geglaubte Catoptrik des Heron oder ein Bruchstück derselben ist, siehe p. 66, p. 70, p. 84.

37) **Vitellionis**, mathematici doctissimi: *Περὶ ὀπτικῆς* id est de natura, ratione et projectione radiorum visus . . . .
in der 2. Hälfte des 13. Jahrh. Libri X. Norimbergae. 1535.

f. 5. Liber primus. XVI. Lineae rectae continentes angulos aequales cum linea recta, cui ad unum punctum incidunt, simul junctae sunt breviores omnibus lineis ab eisdem terminis super eandem lineam ad unum punctum productis, continentibus cum eadem angulos inaequales simul junctis. cf. f. 6. XXVI, f. 9. XXX, liber V. f. 122. Natura agit in omnibus secundum lineas breviores.

38) **Fermat**: Varia opera . . . . Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur ***. p. 156. Dès que j'eus vu le livre de feu Monsieur Descartes . . . . je soupçonnai sa preuve; sa démonstration me sembla un véritable paralogisme.

Nach Erörterung der Gründe und Auseinandersetzung seines Streites mit Descartes und seines Briefwechsels darüber erwähnt er einen Brief an de la Chambre, dans laquelle je lui témoignai, que, pour nous garantir des paralogismes en une matière si obscure, je ne voyais point de moyen plus assuré, que de chercher les réfractions dans cet unique principe, que la nature agit toujours par les voies les plus courtes, sur le fondement duquel je lui indiquai, qu'on pouvait chercher par géométrie le point de réfraction en le réduisant au problème, que vous savez. Der rein geometrische Beweis, welchem dieses Prinzip zu Grunde gelegt ist, folgt p. 158. Vgl. Lettres de Mr. Descartes. Tome troisième Paris. 1667. p. 32 ...., lettre VII—LXII.

Ueber die Refractionsbeweise des Fermat und Descartes siehe: Christiani Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae. — Fasciculus I., continens Chr. Hugenii, Leibnitii et Hospitalii epistolas mutuas. — Hagae Comitum 1838. p. 8, p. 17, p. 20 und ferner: Disquisitio catoptrico-dioptrica etc., auctore Joh. Bernoulli. A. E. 1701. p. 20.

39) **G. G. Leibnitii**: Unicum opticae, catoptricae et dioptricae principium. A. E. 1682. p. 185—190.

Sint rectae m et n repraesentantes resistentiam respectu luminis, illa aeris, haec aquae; erit difficultas viae a C ad E, ut rectangulum sub CE et m, a E ad G, ut rectangulum sub EG et n. (— Vorher war schon gesagt worden: E sumi debet tale, ut via (a C per E ad G) sit omnium facillima —). Ergo, ut difficultas viae CEG sit omnium minima, debet summa rectangulorum CE in m + EG in n esse omnium possibilium minima, woraus er die Richtigkeit des in der Abhandlung angeführten Satzes schließt. Den Beweis gab er in seiner berühmten Abhandlung: Nova methodus pro maximis et minimis. A. E. 1684. p. 472.

40) a) Mémoires de mathématique et de physique de l'académie royale des sciences de Paris de l'année 1744.
1698—1759. p. 417. Accord de différentes lois de la nature, qui étaient jusqu'ici incompatibles par M. de Maupertuis.

p. 421. La nature agit dans la production de ses effets toujours par les moyens les plus simples.

p. 423. Le chemin qu'elle (— la lumière —) tient, est celui, par lequel la quantité d'action est la moindre. (— La quantité d'action est proportionelle à la somme des espaces multipliés chacun par la vitesse, avec laquelle le corps les parcourt. —)

b) Mémoires de l'académie royale des sciences et des belles-lettres de Berlin de l'année 1746.

p. 266. Les lois du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique.

p. 286. C'est le principe de la moindre quantité d'action, principe si sage, si digne de l'Etre suprême et auquel la nature paroît si constamment attachée, qu'elle observe non seulement dans tous ses changemens, mais que dans sa persévérance elle tend encore à l'observer. Dans le choc des corps le mouvement se distribue de manière, que la quantité d'action, que suppose le changement arrivé, est la plus petite, qu'il soit possible etc.

Die Berichtigung und weitere Umgestaltung dieses Prinzips durch Euler in Folge des Streites zwischen Maupertuis und König gehört in die Geschichte der Prinzipien der Mechanik.

41) **Leonhardi Euleri**: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes etc. Lausannae et Genevae. 1744.
1707 — 1783. (15. April) (18. Sept.)

p. 245. Cum enim mundi fabrica sit perfectissima atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quaepiam eluceat . . . .

p. 311. Quoniam omnes naturae effectus sequuntur quandam maximi minimive legem, dubium est nullum, quin in lineis curvis, quas corpora projecta, si a viribus quibuscunque sollicitentur, describunt, quaepiam maximi minimive proprietas locum habeat.

p. 320. Quamobrem sublata omni resistentia in motu corporum projectorum perpetuo haec constans proprietas locum habebit, ut summa omnium motuum elementarium sit minima.

42) **Joh. Bernoullii**: Curvatura radii in diaphanis non uniformibus. A. E. 1697. p. 206.

p. 208. Das Problem der Brachistochrone wird darauf zurückgeführt, die Bahn eines Lichtmoleküls zu suchen, welches sich in einem Medium bewegt, dessen Dichtigkeit sich nach einem bestimmten Gesetze continuirlich ändert. Daher muß diese Curve die Eigenschaft haben, daß die sinus ihrer Neigungen gegen die Vertikallinie zu einander immer in demselben Verhältnisse der Geschwindigkeiten des Moleküls stehen, da die sinus der Brechungswinkel in den einzelnen Punkten resp. den Dichtigkeiten des Mediums oder den Geschwindigkeiten des Moleküls proportional sind. Es sei nun (Fig. 11) FGD das Medium, begränzt durch die Horizontallinie FG, auf welcher der leuchtende Punkt A liege; Es sei ferner das in A auf FG errichtete Loth AD die Abscissenaxe der gegebenen Curve AHE, deren Ordinaten HC die Dichtigkeiten des Mittels in den Entfernungen AC des Moleküls von FG bestimmen, oder die Geschwindigkeiten des Lichtmoleküls in den Punkten M, und sei AMB die von ihm durchlaufene Bahn. Es werde $AC = x$ angenommen, $CH = t$, $CM = y$, $Cc = dx$, $nm = dy$, $Mm = dz$ und sei a eine willkürliche Constante. Es ist nun $\frac{mn}{Mm}$ der sinus des Brechungswinkels oder der Neigung der Curve gegen die Verticale Ma, und daher steht in Folge der oben gegebenen Andeutung mn zu HC in einem constanten Verhältniß; d. h. es ist $dy : t = dz : a$ oder $ady = tdz$, daher $a^2dy^2 = t^2dz^2 = t^2dx^2 + t^2dy^2$ oder $dy = \frac{tdx}{\sqrt{a^2 - t^2}}$. Aendert sich nun die Dichtigkeit des Mediums continuirlich in dem Verhältnisse der Geschwindigkeit, welche das Molekül beim freien Falle erlangen würde, so ist $t^2 = ax$ (— also AHE eine Parabel —) oder $t = \sqrt{ax}$; wird dieser Werth für t in die obige Gleichung substituirt, so geht sie über in $dy = dx \sqrt{\frac{x}{x - a}}$.

43) Commercium epistolicum Leibnitii et Bernoullii. Ep. XXX. p. 183. Zuerst gab Leibnitz die Lösung im 28. Briefe p. 172. Ueberhaupt handeln von dem Problem der Brachistochrone die Briefe 27—32, 34, 41—45, 47—51, 52, 53.

44) **Jacobi Bernoullii**: Opera. II. p. 769. A. E. 1697. p. 212:

Si curva $ACEDB$ talis sit, quae requiritur *h.e* per quam descendendo grave brevissimo tempore ex A ad B perveniat atque in illa assumantur duo puncta quantumlibet propinqua C et D: Dico portionem curvae CED omnium aliarum punctis C et D terminatarum curvarum illam esse, quam grave post lapsum ex A brevissimo quoque tempore emetiatur. Si dicas enim breviori tempore emetiri aliam CFD, breviori ergo emetietur $ACFDB$, quam $ACEDB$, contra hypothesin. Dieses Prinzip finden wir auch ferner wiederholt ausgesprochen von Johann Bernoulli in seiner 1706 veröffentlichten: solution du problème proposé par M. Jacques Bernoulli . . (Opera Johannis Bernoulli. II. p. 424): „toute courbe, qui doit donner un maximum conserve aussi dans toutes ses parties les lois de ce même maximum; ferner von Taylor in seiner: Methodus incrementorum. p. 67. Lemma III.

45) Acta Eruditorum. 1697. p. 214. Jac. B. Opera II. p. 773:

„Quaeritur (fig. 12) ex omnibus Isoperimetricis super communi base BN constitutis illa BFN, quae non ipsa quidem maximum comprehendat spatium, sed faciat, ut aliud curva BZN comprehensum sit maximum, cujus applicata PZ ponitur esse in ratione quavis multiplicata vel submultiplicata rectae PF vel arcus BF, hoc est, quae sit quotacunque proportionalis ad datam A et rectam PF curvamve BF?" Hierzu fügt er noch folgenden seinen Bruder Johann herausfordernden Zusatz: Et cum iniquum sit, ut quis ex labore in alterius gratiam et cum proprii temporis dispendio rerumque suarum damno suscepto nihil emolumenti percipiat, prodit nonnemo, pro quo caveo, qui solituro fratri, ultra laudes promeritas, honorarium quinquaginta imperialium decrevit, hac tamen lege, ut intra tertium ab hujus publicatione mensem se suscepturum promittat ipsasque solutiones finito anno utcunque licet per quadraturas exhibeat.

46) *Κλ. Πτολεμαίου: Μεγάλης συντάξεως βιβλία ιγ.*

Theon lebte in der 2. Hälfte des 4. Jahrh. n. Chr.

Θέωνος Ἀλεξανδρέως εἰς τὰ αὐτὰ ὑπομνημάτων βιβλία ια. Basileae. 1538. fol.
Εἰς τὸν πρῶτον τοῦ Πτολεμαίου μαθηματικὰς συντάξεως.
Γ 5. ὅτι σφαιροειδὴς ὁ οὐρανὸς φέρεται.
ὥστε ἀκόλουθον ἂν εἴη ἡγεῖσθαι τὸν οὐρανὸν σφαιρικὸν ἔχειν τὸ σχῆμα, ὡσαύτως ὅτι τὴν ἴσην περίμετρον ἐχόντων σχημάτων διαφόρων, ἐπειδὴ μείζονά ἐστι τὰ πολυγωνιώτερα, τῶν ἐπιπέδων ὁ κύκλος γίνεται μείζων, τῶν δὲ στερεῶν ἡ σφαῖρα· ποιησόμεθα δὴ τὴν τούτων ἀπόδειξιν ἐν ἐπιτομῇ ἐκ τῶν Ζηνοδώρῳ δεδειγμένων ἐν τοῖς περὶ ἰσομέτρων σχημάτων λέγοντι οὕτως· τὴν ἴσην περίμετρον ἐχόντων τεταγμένων εὐθυγράμμων σχημάτων λέγω τῶν ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων τὸ πολυγωνιώτερον μεῖζον εἶναι . . . .

im 5. Jahrh. v. Chr.

Hierzu bemerkt Jacobi am Rande des Exemplars der Berliner Königlichen Bibliothek: forte *Πάππῳ* legendum, ex cujus quinto haec saepe ad verba depromta sunt.

47) Diogenis Laertii de vitis, dogmatis et apophtegmatis clarorum philosophorum libri decem. Ed. H. G. Huebnerus. Lipsiae. 1831.

580—500 v. Chr.

Πυθαγόρας (Vol. II. XIX. 35. p. 268) *καὶ τῶν σχημάτων τὸ κάλλιστον σφαῖραν εἶναι τῶν στερεῶν, τῶν δὲ ἐπιπέδων κύκλον.*

Die in der Abhandlung nach Chasles: Geschichte der Geometrie, p. 1, Klügel: Mathematisches Wörterbuch, 2. Theil, p. 317 (Artikel: Geometrie) u. A. aufgestellte Vermuthung würde, vorausgesetzt auch, daß Diogenes zuverlässig wäre, richtig sein, wenn mit dem *καλός* derselbe Begriff zu verbinden wäre, welchen Pappus (Collectiones . . . . V, f. 83. Siehe Note 54) in ihn hineinzulegen scheint.

48) **Procli** Diadochi Lycii . . . . in primum Euclidis elementorum librum commentariorum libri IV a Francisco Barocio conversi. Patavii. 1560. fol. p. 135.

in der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts n. Chr.

Evenit autem ambitibus etiam aequalibus existentibus spatia inaequalia esse et quidem olim suos participes in agrorum divisionibus fraude deceperunt, quippe qui propter aequalitatem juxta ambitum majorem agrum sumpsisse ... (liber III. prop. 4. theor. I.) Cf. p. 148...

49) Histoire des sciences mathématiques en Italie par G. Libri. Tome IIIième p. 241. Note XXIII. **Archimedis Syracusani**: De isoperimetris figuris tam planis quam solidis, ubi planarum circulus, solidarum vero figurarum isoperimetricarum sphaera concluditur esse maxima.

287—212 v. Chr.

50) Nova stereometria doliorum. Autore Kepplero. Lincii. 1615. 4°. Pars II. Stereometria dolii Austriaci in specie. Theor. IV.

In der Einleitung zum Beweise sagt Kepler: Sed et de segmentis diversorum globorum isoperimetris demonstravit Archimedes, capacissimum esse hemisphaerium omnium globi segmentorum, quae aequali superficie contineantur. Vgl. aber auch: Archimedis opera methodo nova illustrata et succincte demonstrata per Isaacum Barrow. Londini. 1675. p. 262 (praefatio). Huic (Archimedi) etiam tribuerant libellum, qui erat Zenodori de Isoperimetris.

51) **Pappi Alexandrini**: Mathematicae collectiones a Frederico Commandino in Latinum conversae et commentariis illustratae. Venetiis. 1589. fol. Liber quintus (p. 73 bis p. 115).
2. Hälfte d. 4. Jahrh. n. Chr.

52) In der Einleitung zum 5. Buche sagt Pappus: Sapientiae et disciplinarum cognitionem optimam quidem et perfectissimam Deus hominibus impertivit. Animalium vero rationis expertium nonnullis particulam quandam assignavit... Hoc autem quisque intelligere potest ita esse, tum in aliis multis animalium generibus, tum maxime in apibus... Et apes quidem illud tantum, quod ipsis utile est, cognoscunt, videlicet hexagonum quadrato et triangulo esse majus et plus mellis capere posse, nimirum aequali materia in constructionem uniuscujusque consumta etc.

53) *Theorema I. prop. I.* Prius autem ostendemus polygonorum ordinatorum, quae angulos quidem numero inaequales habent, ambitum vero aequalem, illud, quod ex pluribus angulis constat, semper etiam majus esse.

Der Beweis ist folgender. Sind ABC und DEF (Fig. 13) zwei reguläre Polygone, und sei die Seitenanzahl von DEF größer, als die von ABC, während die Perimeter beider einander gleich sind. Ferner seien G der Mittelpunkt von ABC und H der von DEF, ferner GA und HD die großen, GK und HL die kleinen Radien, sei noch $MK = DL$ und M mit G verbunden, so wird zunächst bewiesen, daß $AK : MK$ kleiner, als Winkel AGK : Winkel MGK. Nach der Annahme ist nun AC größer, als DF, also auch AK größer, als DL. Nun ist

Perimeter $ABC : AC = 4R$: Winkel AGC,
„ $DEF : DF = 4R$: Winkel DHF. Da nun Perimeter ABC = Perimeter DEF, so ist auch
$AC : DF$ = Winkel AGC : Winkel DHF oder
$AK : DL$ = „ AGK : „ DHL oder, da $DL = MK$ ist
$AK : MK$ = „ AGK : „ DHL. Es ist aber $AK : MK$ kleiner, als Winkel AGK : Winkel MGK
also Winkel DHL kleiner, als Winkel MGK, und da Winkel DLH = Winkel MKG ist, so ist
„ HDL größer „ „ GMK, also LH größer, als GK.

Nun ist die Fläche von $ABC = \frac{1}{2} . GK$. Perimeter ABC, und Fläche von $DEF = \frac{1}{2} . LH$. Perimeter DEF also, da die Perimeter gleich sind, ist Fläche von ABC : Fläche von $DEF = GK : LH$, also, da LH größer als GK ist, ist auch Fläche von DEF größer, als Fläche von ABC.

In ähnlicher rein geometrischer Weise sind auch die Beweise der andern Theoreme gehalten. Mehre derselben, sowie Beispiele zu den in Nr. 5, Nr. 11, Nr. 16 und Nr. 19 erörterten Methoden finden sich in der Dissertation von *J. A. Arndt*: Disquisitiones historicae de maximis et minimis. Berolini. 1833.

54) p. 83. Primum et effectorem omnium Deum mundo sphaericam figuram merito ac jure dedisse philosophi asserunt, cum omnium optimam pulcherrimamque delegisset, quae ipsi sphaerae insunt naturalia symptomata dicentes praeterea et illud addunt, omnium solidarum figurarum, quae aequalem superficiem habeant, sphaeram maximam esse. ....

55) **Christophori Clavii** Bambergensis: In sphaeram Joannis de **Sacro-Bosco** Commentarius. Lugduni. 1593. 4°.

Clavius: 1537—1612.
Joh. v. Holywealde oder Holywood (Halifax in Yorkshire) bekannter unter dem Namen Sacro-Bosco, lebte in der ersten Hälfte des 13. Jahrhunderts.

p. 96. Ceterum licet in hoc tractatu solum demonstretur, sphaeram esse majorem corpore quolibet sibi isoperimetro, in quo sphaera aliqua describi possit, et quod contineatur vel superficiebus planis vel conicis, ut suo loco apparebit. Pappus tamen idem de omni corpore demonstravit 70 propositionibus .... — „De figuris isoperimetris" p. 96 — p. 119.

56) **Thomae Bradvardini**: Geometria speculativa etc. Vgl. Chasles: Geschichte der Geometrie, übersetzt von Sohnke. p. 612. ff.

57) Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali del Signor **Galileo Galilei** .... In Leida. 1638.

p. 57. Ma nel proposito toccato adesso veramente non credo, che tra quelli, che mancano di qualche cognizione di geometria se ne trovassero quattro per cento, che non restassero a prima giunta ingannati, che quei corpi, che da superficie eguali son contenuti, non fossero ancora in tutto eguali.

Il cerchio è medio proporzionale tra qualsivoglia due poligoni regolari tra di loro simili, dei quali uno gli sia circoscritto, e l'altro gli sia isoperimetro: inoltre essendo egli minore di tutti i circoscritti, e all'incontro massimo di tutti gl'isoperimetri. Dei medesimi poi circoscritti quelli, che hanno più angoli, son minori di quelli, che ne hanno manco: ma all'incontro degl' isoperimetri quelli di più angoli son maggiori.

Der Beweis ist folgender:

Sind f_1 und f_2 die Flächen zweier regulären Polygone von gleicher Seitenanzahl, p_1 und p ihre Perimeter, und seien f und p Fläche und Peripherie eines Kreises, welchem das erste Polygon umschrieben ist, und mit welchem das zweite gleichen Umfang hat, so ist $f_1 : f = p_1 : p$, also auch 1) $f_1^2 : f^2 = p_1^2 : p^2$. Ferner, da die beiden Polygone ähnlich sind, auch 2) $f_1 : f_2 = p_1^2 : p^2$. Aus 1) und 2) folgt daher, daß $f_1^2 : f^2 = f_1 : f_2$ oder $f_1 : f = f : f_2$ w. b. w. s. Hieraus folgt unmittelbar, daß der Kreis von allen regulären isoperimetrischen Polygonen die größte Fläche hat.

p. 59 und 60 wird der Beweis des zweiten Theiles des obigen Satzes speciell an einem regulären Fünfeck und Siebeneck durchgeführt.

58) Histoire des sciences mathématiques en Italie par G. Libri. Tome II. p. 213 ff.

Note: Dans un manuscrit d'algèbre anonyme, que je possède et qui très probablement a été écrit à Florence au quatorzième siècle, on trouve parmi les questions résolues les suivantes: 1° Inscrire dans un cercle, dans un triangle ou dans un carré un nombre donné de cercles, de triangles équilatéraux ou de carrés de manière, que la somme des aires des figures inscrites soit un maximum (fol. 94 etc.), 2° inscrire dans un cube une pyramide triangulaire de manière, que la solidité en soit un maximum (fol. 107).

59) Opera varia D. Petri de Fermat .... Lettre de M. de Fermat à M.M. de Pascal et de Roberval (le 23 août 1636).

Er macht dem Roberval die Mittheilung, daß er seine Methodus maximorum schon gefunden habe und löst vermittelst derselben folgende Aufgabe: p. 132. Datae sphaerae inscribere conum (vel cylindrum) omnium inscribendorum ambitu maximum. p. 136. Trouver le plus grand cône de tous ceux, qui auront la superficie conique égale à un cercle donné. p. 151. S'il me restait du temps j'ajouterais suivant votre desir la démonstration des cônes isoperimètres.

60) **Johannis Wallis**: Opera mathematica. Oxoniae. 1695. fol. Vol. I p. 121 gibt er den Beweis des einfachen Satzes: „Ex parallelogrammis rectangulis isoperimetricis quadratum esse omnium maximum.
1616—1703.

61) Commercium mathematicum Leibnitii et Bernoullii. Ep. X. p. 47—49.

Leibnitz gibt hier eine Lösung der Aufgabe: „die Kettenlinie AC von constanter Länge z zu construiren, wenn man nur weiß, daß ihr Schwerpunkt am tiefsten liegt." Er bestimmt die gesuchte Curve durch eine Reihe, welche er aber nicht durch eine Differenzialgleichung auszudrücken vermag. In der Antwort auf diesen Brief gibt Bernoulli (Ep. XI) zu erkennen, daß ihm die Art und Weise der Lösung nicht gefällt und schlägt dem Leibnitz vor, seine Methode auf leichtere Probleme anzuwenden: z. B. 1) Welche über AC beschriebene Curve hat den größten Flächeninhalt u. s. f

Bernoulli selbst löst die Aufgabe in den Actis Eruditorum. 1691. p. 274. Vgl. Joh. B. Opera. T. I. No. IX.

62) A. E. 1698. p. 52. Joh. B. Opera. I. p. 194, sqq. No. XXXVIII. 1) Lettre de Mr. Jean Bernoulli à Mr. Basnage: Sur le problème des isoperimètres. (Histoire des ouvrages des Savans. Juin 1697. p. 452). 2) Joh. B. O. p. 206. No. XL. Lettre de M. Bernoulli, professeur de Groningue, à Mr. Varignon (15 oct. 1697): Sur le problème des isoperimètres (Journal des Savans. 1697. 2 dec. p. 462) Jacobi Bernoulli: Opera. T. II. p. 814 sqq.

In dem ersten Briefe gibt Johann einen Ueberblick über die verschiedenen Lösungen des Problems der Brachistochrone, wirft seinem Bruder vor, zu viel Mühe mit der Lösung gehabt zu haben, und fügt im Bezug auf das Problem der Isoperimeter hinzu: au lieu de trois mois, qu'on me donne pour sonder le gué, et au lieu de tout le reste de cette année pour trouver la résolution je n'ai employé en tout que trois minutes de temps pour trouver, commencer et achever d'approfondir tout le mystère et bien au-delà .... Au reste j'ai déjà envoyé à Mr. Leibnitz mes résolutions et je l'ai prié d'être notre juge. Comm. ep. Ep. LIII. (1697 Juni). — In dem zweiten Briefe gibt er seine Lösung:

1) Sei (Siehe Note 45, Fig. 12) PF oder $BG = x$, BP oder $GF = y$, ferner a eine beliebige Größe und bezeichne n den Exponenten der Potenz; man nehme GF oder $y = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}$, so wird F ein Punkt der gesuchten Curve sein. Speciell weist er die Richtigkeit der Lösung nach, wenn $n = 1$, $n = 2$ und $n = \frac{1}{2}$ ist. Sodann gibt er aber noch eine allgemeine Lösung des Problems, indem er, vorausgesetzt, daß die andern Größen dieselben bleiben wie in 1), annimmt, daß 2) $PZ = GH$ eine beliebige Function der Ordinate $PF = GB = x$ sei und bestimmt die gesuchte Curve durch die Gleichung: $y = \int \frac{bdx}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, wo $b = \frac{GH.dx}{x}$ sei.

63) Nachdem Jacob von dieser Lösung Kenntniß genommen hatte, erklärte er (Avis sur les problèmes, dont il est parlé dans le Journal des Savans du 2 déc. 1697. J. d. S. 1698 du 17 févr. p. 78. Jac. B. O. p. 821 LXXXIII. Joh. B. O. XLI), daß die vorhergehende Lösung (Note 62, 2.) nicht ganz richtig sei und verpflichtet sich:

1) Die Analysis, welche seinen Bruder zu seiner Lösung geführt habe, zu errathen.

2) Die sich in ihr vorfindenden Widersprüche aufzudecken, falls sie veröffentlicht würde.

3) Die wahre vollständige Lösung des Problems zu geben und fügt noch die Wette hinzu, daß, wenn das Interesse Jemandes für die Entwicklung der Wissenschaft so weit ginge, irgend einen Preis auf jeden dieser Punkte zu setzen, er sich verpflichte, ebensoviel zu verlieren, wenn er den ersten nicht erfülle, das Doppelte im Betreff des zweiten und das Dreifache hinsichtlich des dritten

Dadurch ward Johann nur noch mehr gereizt. In seiner Entgegnung (Réponse de M. Bernoulli, professeur de Groningue, à l'avis inséré dans le VII. Journal des Savans du 17 février 1698; J. d. S. 1698. p. 172. (21 avril) Joh. B. O. T. I. XLII. Jac. B. O. LXXXIV p. 822) sagt er: Je vois bien par cet avis de mon frère, que l'inconnu Nonnemo n'a guère envie de se rendre à la raison, de peur sans doute d'être obligé de s'acquitter de sa promesse .... je mépriserai constamment toutes les chicanes, qu'on me fera ..., er behauptet die Richtigkeit der gegebenen Lösung (Note 62, 2.) und meint, daß er in der Eile ein kleines Versehen darin begangen habe, daß er $b = \int \frac{GH.dx}{x}$ gesetzt habe, während b nur die Ordinate GH bedeuten solle, sodaß also die obige Gleichung die verlangte Curve wirklich bestimme, für welche $\int bdy$ ein Maximum sei. Auf das Ersuchen Jacob's (Avis de M. Bernoulli, professeur des mathématiques à Bâle sur la réponse de son frère inserée dans le Journal du 21 avril. 1698. J. d. S. 1698 du 26 mai. p. 240. Jac. O. LXXXV. p. 287. Joh. O. XLIII), alle Punkte seiner Lösung genau zu prüfen gibt Johann (réponse de M. Bernoulli, professeur de Groningue à l'avis inseré dans le Journal du 26 mai 1698; J. d. S. 1698 du 23 juin. p. 284. Jac. O. LXXXVI. p. 828. Joh. O. XLIV), die Erklärung: Je n'ai que faire de repasser sur mes solutions des problèmes de mon frère; je sais qu'en penser et mon temps sera assurement mieux employé à faire de nouvelles découvertes. .... Cependant, pour couper pied à toutes ces chicanes, je soutiens, que j'ai exactement et légitimement résolu par mes brachystochrones le problème des courbes, dont les ordonnées élevées à une puissance donnée font un plus grand. Zu gleicher Zeit gab Jacob in einem interessanten Briefe an Varignon (Extrait d'une lettre de M. Bernoulli de Bâle du 26. juin 1698, contenant l'examen de la solution de ses problèmes, inserée dans le journal du 2 dec. 1697. J.

d. S. 1698 du 4. août p. 355. Jac. O. LXXXVII p. 829. Joh. O. XLV), die Resultate der Lösung Johann's vermittelst einer auf mechanische Prinzipien sich stützenden Analysis seines Problems, welche in sich fehlerhaft dennoch zu einem in speciellen Fällen richtigen Resultate führt, indem eine falsche Hypothese durch eine andre unrichtige fast vollständig wieder aufgehoben ward, und macht es auf diese Weise wahrscheinlich, daß seines Bruders Verfahren, wenn nicht dem gegebenen gleich, doch ihm ähnlich wäre. Bald nachher (Avis sur la réponse inserée dans le Journal du 23 juin 1698. J. d. S. 1698 p. 364. Jac. B. O. LXXXVIII, p. 839. Joh. Op. XLVI) bittet er wiederholt seinen Bruder seine Lösung nochmals zu prüfen, vorzüglich, in wiefern b eine Function des Bogens BF ist, oder wenigstens anzugeben, ob in die Gleichung $dv = \frac{d^2y}{\sqrt{dt^2 - dy^2}}$ sich nicht ein Druckfehler eingeschlichen habe. Dies Alles bewirkte, daß Johann in wenig maßvoller Weise seinem Bruder entgegentrat und ihn mit beleidigenden Aeußerungen überschüttete. (Extrait d'une lettre de M. Bernoulli, professeur de Groningue, du 22 août 1698, pour servir de réponse à celle de son frère, professeur à Bâle, inserée dans les journaux des 4. et 11. du même mois. J. d. S. 1698. p. 477. Jac. O. LXXXIX p. 841. Joh. O. XLVII.)

64) **Jacobi Bernoullii**: Solutio propria problematis isoperimetrici. A. E. 1700. p. 261. Jac. B. Opera. T. II. N. XCIII p. 874, sqq.

Am Ende dieser Abhandlung weist er durch Vergleichung mit den Resultaten seiner Lösung nach, daß Johann's obige Endgleichung im Allgemeinen falsch sein müsse, daß die richtige vielmehr folgende sei: $dv = \frac{ad^2y}{dx}$. — Hierauf übersandte Johann seine Lösung nebst Beweisführung im Januar 1701 versiegelt an die Pariser Academie mit der Bedingung, daß seine Abhandlung erst eröffnet werden sollte, wenn sein Bruder seine Methode mitgetheilt haben würde. (Extrait d'une lettre sur les problèmes des isoperimètres. J. d. S. 1701. p. 86. Joh. B. Opera. I. N. LXVI. p. 367).

65) Analysis magni problematis isoperimetrici in Actis Eruditorum Lips. mens. Mai. 1697. propositi sub praesidio **Jacobi Bernoulli** math. prof. et academiae p. t. rectoris publice defendendam suscepit Joh. Jacobus Episcopius Basil. Ipsis Calendis Martiis 1701. Edita primum Basileae 1701. — Incomparabilis virorum quadrigae, Dn. Marchionis Hospitalii, Dn. Godof. Guilielmi Leibnitii, Dn. Isaaci Newtoni, Dn. Nicolai Fatii Duillerii, principum mathematicorum, nominibus illustrissimis analysin suam devota mente inscribit, aequissimis censuris demisse subjicit praeses. Jacobi B. Opera. T. II. No. XCVI. p. 895 A. E. 1701. p. 213.

Anm. S. 8 der vorliegenden Abhandlung, Z. 18 muß es heißen:

$$dx'''' = dx''' \pm d^2x''' = dx \pm 3d^2x + \ldots$$

66) Jac. B. Opera. T. II. p. 900. A. E. 1701. p. 215.

Da die Dreiecke BXF, FYG und GZC (Fig. 2) rechtwinklige und die Punkte B und C als fest angenommen sind, sowie, da $BF + FG + GC$ constant bleibt, ist:

$BX^2 + FX^2 = BF^2$ oder: $l^2 + p^2 = s^2$ und $BX + FY + GZ =$ const. oder: $l + m + n =$ const.
$FY^2 + YG^2 = FG^2$ " $m^2 + q^2 = t^2$ " $FX + GY + CZ =$ const. " $p + q + r =$ const.
$GZ^2 + CZ^2 = GC^2$ " $n^2 + r^2 = u^2$ " $BF + FG + GC =$ const. " $s + t + u =$ const.

Hieraus ergeben sich, in wiefern F und G längs der Graden FK und GL sich bewegend angenommen werden, durch Differenziation dieser Gleichungen folgende:

$$ldl + pdp = sds,\quad mdm + qdq = tdt,\quad ndn + rdr = udu,$$
$$dl + dm + dn = o,\quad dp + dq + dr = o,\quad ds + dt + du = o.$$

Da nun allein die Ordinaten KF und GL variiren, also BX, FY, GZ oder l, m, n unverändert bleiben, so ist: 1) $pdp = sds$, 2) $qdq = tdt$, 3) $rdr = udu$, 4) $dp + dq + dr = o$, 5) $ds + dt + du = o$. Werden die durch 4) und 5) bestimmten Werthe von dr und du in 3) eingesetzt, so erhält man:

$$dt = \frac{rdp + rdq - uds}{u},$$ welcher Werth in 2) eingesetzt gibt: $$ds = \frac{rtdp + rtdq - qudq}{tu};$$

dieser Ausdruck für ds in Gleichung 1) substituirt gibt: $(ptu - rst)dp = (rst - qsu)dq$, also:

$dp : dq = rst - qsu : ptu - rst$, also $dp : dp + dq = rst - qsu : ptu - qsu$ oder, da $dp = df$ und $dp + dq = dg$
$df : dg = rst - qsu : ptu - qsu$, also auch $df : - dg = rst - qsu : qsu - ptu$.

67) Der Beweis von Theorem III ist dem vorhergehenden ganz ähnlich. In Folge der hier gemachten Annahme bleiben s, t und u unverändert, also verschwinden ds, dt, du und man erhält daher anstatt der Differenzialgleichungen in Nr. 66 folgende:

$$ldl + pdp = 0,\ mdm + qdq = 0,\ ndn + rdr = 0,\ dl + dm + dn = 0 \text{ und } dp + dq + dr = 0,$$

aus welchen auf ähnliche Weise, wie vorher, das gesuchte Verhältniß von $dp : dp + dq$ oder von $df : dg$ bestimmt wird.

68) Werden nach dem Gesetze der Homogeneität Producte, wie dzd^2zd^3x in der folgenden Rechnung den andern gegenüber als verschwindend angesehen, daher vernachlässigt, so ist:

$$rts = (dx + 2d^2x + d^3x)(dz + d^2z)dz = dxdz^2 + 2dz^2d^2x + dz^2d^3x + dxdzd^2z + 2dzd^2zd^2x$$
$$uqs = (dz + 2d^2z + d^3z)(dx + d^2x)dz = dxdz^2 + 2dxdzd^2z + dxdzd^3z + dz^2d^2x + 2dzd^2zd^2x$$
$$utp = (dz + 2d^2z + d^3z)(dz + d^2z)dx = dxdz^2 + 3dxdzd^2z + dxdzd^3z + 2dxd^2z^2$$
$$rst - qsu = dz^2d^2x + dz^2d^3x - dxdzd^2z - dxdzd^3z \text{ und}$$
$$qsu - ptu = dz^2d^2x + 2dzd^2zd^2x - dxdzd^2z - 2dxd^2z^2.$$ Nun ist $dz^2 = dy^2 + dx^2$.

Da aber die Ordinaten gleichweit von einander abstehend angenommen sind, so ist dy constant, also $dzd^2z = dxd^2x$ und also auch $dzd^3z + d^2z^2 = dxd^3x + d^2x^2$. Daher $dzd^3z = dxd^3x + d^2x^2 - d^2z^2 = dxd^3x + d^2x^2 - \frac{dx^2d^2x^2}{dz^2}$ Werden nun diese Werthe für dzd^2z und dzd^3z in die beiden vorhergehenden Gleichungen eingesetzt und überall $dz^2 - dx^2 = dy^2$ gesetzt, so erhält man:

$$rst - qsu = dy^2d^2x + dy^2d^3x - \frac{dxdy^2d^2x^2}{dz^2} \text{ und}$$

$qsu - ptu = dy^2d^2x + \frac{2dxdy^2d^2x^2}{dz^2}$, also, da $df : - dg = rst - qsu : qsu - utp$ ist, so ist auch

$$df : - dg = dy^2d^2x + dy^2d^3x - \frac{dxdy^2d^2x^2}{dz^2} : dy^2d^2x + \frac{2dxdy^2d^2x^2}{dz^2}$$

oder die Glieder des letzten Verhältnisses mit $\frac{dz^2}{dy^2}$ multiplicirt:

$$df : - dg = dz^2d^2x + dz^2d^3x - dxd^2x^2 : dz^2d^2x + 2dxd^2x^2.$$

Auf ähnliche Weise wird auch das folgende Theorem bewiesen.

69) Dividirt man beide Seiten der zu integrirenden Differenzialgleichung: $hdz^2d^3x - 3hdxd^2x^2 = dhdz^2d^2x$ mit hdz^2d^2x, so geht sie über in: $\frac{d^3x}{d^2x} - \frac{3dxd^2x}{dz^2} - \frac{dh}{h} = 0$, oder, da $dzd^2z = dxd^2x$ ist, weil dy const. in: $\frac{d^3x}{d^2x} - \frac{3d^2z}{dz} - \frac{dh}{h} = 0$, welche integrirt die Gleichung: $lg.d^2x - 3lg.dz - lg.h =$ const., oder 1) $\frac{d^2x}{hdz^3} = \text{const.} = \pm \frac{1}{a^2dy}$.

Es sei 2) $adx = tdy$, so ist $d^2x = \frac{dtdy}{a}$ $\frac{\text{und da } a^2dx^2 = t^2dy^2 \quad a^2dy^2 = a^2dy^2}{\text{auch } a^2dz^2 = (t^2+a^2)dy^2}$, also $dz = \frac{dy}{a}\sqrt{t^2+a^2}$.

Wird dieser Werth in Gleichung 1) eingesetzt, so geht sie über in: $\frac{a^2dt}{(a^2+t^2)\sqrt{a^2+t^2}} = \pm \frac{hdy}{a^2} = \pm \frac{hdx}{at}$ oder

3) $\pm \frac{a^2tdt}{(a^2+t^2)\sqrt{a^2+t^2}} = \left(\frac{h.dx}{a} = \frac{h.df}{a}\right) = d\mathfrak{F}$, (da $f = x$ ist und $d\mathfrak{F} = \frac{hdf}{a}$ gesetzt war. (Theor. VI.))

Diese Gleichung integrirt gibt: $c \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}} = \mathfrak{F}$.

Jacob B. leitet durch Integration aus Gleichung 3) als die beiden Werthe von $\mathfrak{F}$, d. h. von KR, oder für diese die unmittelbar vorangehende Ordinate $HP = MN = p$ gesetzt, folgende:

$p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}}$ und $p = a - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}}$. Demnach ist in Folge der ersten Geichung: $t = \frac{a\sqrt{a^2-p^2}}{p}$ und $t = \frac{a\sqrt{2ap-p^2}}{a-p}$. Werden diese Werthe für t in die Gleichung 2) eingesetzt, so erhält man: $dy = \frac{pdx}{\sqrt{a^2-p^2}}$ und $dy = \frac{[a-p]dx}{\sqrt{2ap-p^2}}$ als die Differenzialgleichungen der Curven, welche den Raum $ATV = \int pdy$ zu einem Maximum oder zu einem Minimum machen.

70) Solution du problème proposé par M. Jacques Bernoulli . . . . , trouvée en deux manières par M. Jean Bernoulli . . . . Sur les isoperimètres. (Cette solution était latine, présentée à l'académie . . . . de Paris le 1 fevrier 1701 par M. Varignon, ouverte le 17 avril 1706.) Mémoires de l'académie de Paris 1706. p. 235. Joh. B. Opera I. p. 424 sqq.

Zuerst löst er die Aufgabe für den Fall, in welchem die Ordinate PZ (Fig. 12) der Curve, deren Flächeninhalt ein Maximum sein soll, eine Function der zugehörigen Ordinate PF der zu suchenden Curve BFN ist, und erhält, nachdem er die Aufgabe (Note 45) darauf zurückgeführt hat, eine solche Curve $BF\varphi$ zu suchen, daß das Verhältniß des sinus ihrer Krümmung in jedem beliebigen ihrer Punkte F zu dem Differenzial der Function ihrer Ordinate constant ist, als Gleichung der zu suchenden Curve: $dy = \frac{Xdx}{\sqrt{a^2 - X^2}}$, welche für diesen Fall auch richtig ist.

Hingegen gab die Lösung des zweiten Falles (Joh. B. Opera I. p. 429), für welchen die Ordinate PZ eine gegebene Function nicht der Ordinate PF, sondern des Bogens BF ist, ein falsches Resultat. Er setzt wiederum das Differenzialelement des Bogens dt constant und stellt eine der vorhergehenden ganz analoge Betrachtung an; daher ist denn auch das Resultat $dv = \frac{adtd^2y}{dt^2 - dy^2} = \frac{adtd^2y}{dx^2}$, wo v die gegebene Function des Bogens ist, falsch. Vgl. Apologia D. Brook Taylor. Philosophical Transactions for the year 1719. p. 955.

71) **Lagrange**: Leçons sur le calcul des fonctions. Paris. 1806. p. 426.
25. Jan. 1736—10. Apr. 1813.

72) Johannis Bernoulli Opera. T. II. p. 205. No. CIII. Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isoperimètres . . . . par M. Jean Bernoulli, professeur à Bâle.

Mémoires de l'académie . . . . de Paris 1718. p. 100. A. E. 1718. p. 15 sqq. Joh. Bernoulli de solutionibus etc. p. 17. (sed) sciendum, quod . . . . methodi universalitati nimis confisus ex inadvertentia non attenderim ad certam quandam circumstantiam, quae prohibet, quominus . . . . quod leve perorama (?) id effecit, ut inciderim in aequationem $\frac{adtd^2y}{dx^2} = dv$, loco hujus $\frac{atdt^2d^2y}{dx^3} = dv$, quae genuina est aequatio . . . . .

Verum enim vero, quod ibi ex incuria praetervisum, reparabo hic . . . . p. 18. Taylorus, geometra insignis et acutus . . . . tantam rei affudit obscuritatem . . . . Hierdurch ward der Animosität, die durch den Prioritätsstreit über die Erfindung der Differenzialrechnung zwischen den Mathematikern Englands und des Continents hervorgerufen war, neue Nahrung und Veranlassung zu mehren gegenseitigen Angriffen gegeben. Vgl. Johannis B. Op. T. II. No. CXIV. CXVII—CXIX.

73) **Brook Taylor**: Methodus incrementorum directa et inversa. Londini. 1715.
1685—1731. prop. XVII. probl. XII. Detur positione recta DE et ducta perpendiculari DA, per punctum A transeat curva ABC etc. . . . .

74) **Jacobi Bernoulli**: Opera. T. II. p. 774. A. E. 1697. p. 213.

(Qaeritur), quaenam ex infinitis cycloidibus (aut saltem circulis, parabolis aliisve curvis) per A transeuntibus ac super eadem basi AH constitutis, illa sit, per quam descendens grave minimo tempore ex A ad datum perpendiculum ZB appellat. Lösungen dieses Problems gaben L'Hopital und Jacob Bernoulli: 1) A. E. 1698. p. 48. Domini Marchionis Hospitalii solutio problematis etc. 2) p. 223. Jac. B. Demonstratio synthetica problematis de infinitis cycloidibus etc. (Jac. B. Opera II. p. 785. No. LXXVIII.)

75) **Johannis Bernoullii**: Opera T. I. p. 204. No. XXXIX. Problèmes à résoudre. J. d. S. 1697. p. 394.

1) Deux points étant donnés sur une superficie convexe, on demande une manière d'y écrire géométriquement d'un de ces points à l'autre la ligne la plus courte. (On propose par exemple la superficie du conoide parabolique.) (Jac. B. O. II. LXXIX. p. 795.)

76) A. E. 1699. p. 354.

1) Domini Marchionis Hospitalii: facilis et expedita methodus inveniendi solidi rotundi, in quod secundum axem motum minor fiat a reside fluido resistentia, quam in quodvis aliud ejusdem longitudinis et latitudinis.

2) Excerpta ex literis Dn. Joh. Bernoullii Groningae 7. Augusti 1699 datis. (A. E. 1699. p. 513.) Joh. Bernoullii: de solido rotundo minimae resistentiae . . . (A. E. 1700. p. 208.)

3) Nicolai Fatii Duillerii: lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex, cui addita est investigatio geometrica solidi rotundi, in quo minima fiat resistentia. Londini. 1699. (A. E. 1699. p. 510.)

Excerpta ex responsione Dn. Nic. Fatii Duillerii ad excerpta ex literis Dn. Joh. Bernoullii. (A. E. 1701. p. 134.) — Solidi rotundi minime resistentis investigatio ex Fermatii doctrina refractionum. (p. 135.) —

77) **Jacobi Bernoullii**: solutio sex problematum fraternorum. Jacobi B. Opera II. LXXX. p. 796.

A. E. 1698. p. 226. problema I. In superficie dati conoidis, vel sphaeroidis ex. gr. parabolici inter duo puncta geometrice describere lineam omnium in illa superficie sic ductarum brevissimam. Er gibt hier nur die Lösung. Die Analysis findet sich: Jac. B. Opera II. p. 1023. No. CIII. Art. VI.

2) Joh. Bern. Opera. T. IV. p. 108. CLXVI. In superficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta brevissimam.

Die Methoden zu den Lösungen dieses und des vorhergehenden Problems stützen sich auf die von den Bernoulli's gegebenen Prinzipien. Eine specielle Auseinandersetzung wird um so weniger nöthig sein, da die Euler'sche Lösung des einen in der vorliegenden Abhandlung (S. 10 und 11), die des andern später (Nr. 90) gegeben wird.

78) Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. T. III. 1728. (ersch. 1732.) p. 110. „De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente. Auctore **Leonh. Eulero**."

§ 2. Quae autem in superficie quacunque sive convexa sive ex his mixta sit linea brevissima, quae ex dato puncto ad aliud quodcunque ducitur, nondum est generaliter determinatum. Proposuit mihi hanc quaestionem Cel. Joh. Bernoulli significans se universalem invenisse aequationem, quae ad lineam brevissimam determinandam cuique superficiei accomodari possit. Solvi ego etiam hoc problema solutionemque hac dissertatione exponere volui.

79) A. E. 1726. p. 361. Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente. Auctore Leonhardo Eulero Basileensi. p. 363. „Invenire lineam celerrimi descensus seu brachystochronam in medio quomodocunque resistente, saltem in hypothesi gravitatis uniformi."

80) Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. Tom. VII. (1734 und 1735.) p. 135. De linea celerrimi descensus in medio quocunque resistente. Auctore Leonh. Eulero.

1678—1733. Die Abhandlung Hermann's findet sich in den: Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. Tom. II. (1727.) p. 139. Theoria generalis motuum, qui nascuntur a potentiis quibusvis in corpora indesinenter agentibus, sive haec corpora in vacuo ferantur, sive in medio resistente. p. 162. Haec vero de lineis celerrimi descensus in vacuo sufficiunt, pergo ad eas, quae in medio resistenti describuntur. (§ 26.)

81) Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIième siècle, publiée par P. H. Fuss. T. II. St. Pétersbourg 1843.

Achter Brief Daniel Bernoulli's an Leonhard Euler (vom 12. Septbr. 1736) p. 434. In Dero Solution über die Brachystochrona's in medio resistente habe ich folgende Scrupel u. s. f.

82) In der Nr. 80 angeführten Euler'schen Abhandlung heißt es p. 137. § 5: Proximum, ad quod in solutione hujus problematis attendere debemus, est lemma ex natura maximi et minimi petitum, per quod dispositio duorum elementorum contiguorum curvae quaesitae determinatur, quo corpus ea breviori tempore absolvat descendendo, quam quaevis alia elementa intra eosdem terminos posita. § 6: Oportet igitur in recta FG definire punctum M, ex quo ad datos terminos L et N ductae lineae LM, MN a descendente corpore brevissimo tempore percurrantur etc.

83) Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. Tom. VI ad annos 1732 et 1733. (Petropoli. 1738). p. 123. Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis. Auctore Leonhardo Eulero.

84) In der eben angeführten Abhandlung p. 125. §. 4: Has igitur classes in sequentibus quaestionibus complectar maxime universalibus. I) Ex omnibus prorsus curvis eam determinare, quae proprietatem A maximo vel minimo gradu contineat. II) Ex omnibus curvis proprietate A aequaliter praeditis eam determinare, quae proprietatem B maximo vel minimo gradu contineat. III) Ex omnibus curvis et proprietate A et proprietate B aequaliter praeditis eam determinare, quae proprietatem C maximo minimove gradu contineat. IV) Ex omnibus curvis proprietatibus A, B et C singulis aequaliter praeditis eam determinare, quae proprietatem D maximo minimove gradu contineat. Simili modo quinta classis curvas quatuor proprietatibus praeditas contemplabitur et ita porro sequentes.

85) p. 141. (Ponatur $q = \frac{dy}{ds}$ et $d^2x = o$)

Proprietates propositae:	Valores literae P respondentes:
$I. \int T dx\ ,\ dT = M dy$	$P = M dx$
$II. \int T dy\ ,\ dT = N dx$	$P = N dx$
$III. \int T ds\ ,\ dT = N dx$	$P = d.Tq$
$IV. \int T ds\ ,\ dT = M dy$	$P = d.Tq - M ds$
$V. \int T dx\ ,\ dT = M dy + N dx$	$P = M dx$
.	.
.	.
.	.

86) Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. Tom. VIII ad annum **1736**. (Petropoli. **1741**). p. **159**: „Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis. Auctore Leonh. Eulero."

§ 1. . . . . nuper in ejusmodi hujus generis quaestiones incidi, ad quas solvendas formulae tum temporis a me exhibitae non erant sufficientes adeo, ut coactus fuerim novas formulas latius patentes contemplari atque pro iis ad problema solvendum idoneos valores investigare. In hoc autem negotio occupatus non solum faciliorem quam ante detexi viam ad solutiones hujusmodi problematum perveniendi, sed etiam omnes 24 formulas, quas ante tractaveram, in unicam sum complexus atque praeterea ad alias adhuc latius patentes calculum accomodare licuit.

87) p. 163. § 6. Ist $AB = BC = dx$ (Fig. 4), $Aa = y$, $Bb = y' = y + dy$. Da nun in dem dem Elemente bc entsprechenden Ausdrucke $Q'dx$ die Größe Q' dieselbe Function von s', y', x', p' ist, wie Q von s, y, x, p, so wird der dem Elemente βc entsprechende Ausdruck gefunden, wenn in jenem anstatt $y' = Eb$ gesetzt wird: $y' + b\beta$, anstatt $s' = oa + ab$ gesetzt wird: $s' + m\beta \left(= s' + \frac{bM.b\beta}{ab}\right) = s' + \frac{dy.b\beta}{ds}$ und anstatt $p' = \frac{cN}{bN}$ gesetzt wird $\frac{\gamma c}{\beta\gamma}\left(= \frac{Nc - N\gamma}{bN} = \frac{Nc}{bN} - \frac{N\gamma}{bN}\right) = p' - \frac{b\beta}{dx}$. Man wird also den Unterschied der den Elementen bc und βc entsprechenden Ausdrücke $Q'dx$ finden, wenn man $Q'dx$ differenziirt und darauf hierin überall $dy' = b\beta$, $ds' = \frac{dy.b\beta}{ds}$, $dp' = -\frac{b\beta}{dx}$ und $dx = o$ setzt. Da nun aber $dQ'dx = (L'ds + M'dy' + N'dx + V'dp')dx$ ist, so wird jener Unterschied $= \frac{L'.dx.dy.b\beta}{ds} + M'.dx.b\beta - V'.b\beta$ sein.

88) Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Auctore **Leonhardo Eulero**, Professore Regio et academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae Socio. Lausannae et Genevae. **1744**. 4°.

89) Miscellanea Taurinensia. Tomus alter. 2. Theil desselben. p. **173**. Essai d'une nouvelle méthode etc. par M. de La-Grange: . . . M. Euler a entrepris de réduire toutes les recherches de ce genre etc. . .

90) Es möge, um nur auf ein Beispiel Euler's Methode anzuwenden, die Lösung des oft erwähnten Problems des kleinsten Widerstandes gegeben werden. (**Methodus inveniendi . . . p. 51 Exemplum V**): „Unter allen auf denselben Theil der Absciſſenaxe bezogenen Curven diejenige zu bestimmen, für welche $\int \frac{y dy^3}{dx^2 + dy^2}$ oder $\int \frac{y p^3 dx}{1 + p^2}$ ein Maximum oder ein Minimum ist".

Diese Aufgabe kommt, wie bemerkt ward, mit folgender überein: denjenigen durch Rotation einer Curve um eine Axe entstehenden Körper zu finden, welcher nach der Richtung der Axe bewegt in einer Flüssigkeit den geringsten Widerstand erleidet. Dieser Widerstand wird der Größe $\int \frac{y p^3 dx}{1 + p^2}$ proportional angenommen. Es ist nun $Z = \frac{y p^3}{1 + p^2}$ und daher $dZ = \frac{p^3 dy}{1 + p^2} + \frac{y dp (3p^2 + p^4)}{(1 + p^2)^2}$, also $M = o$, $N = \frac{p^3}{1 + p^2}$ und $P = \frac{p^2 y (3 + p^2)}{(1 + p^2)^2}$. Da $M = o$ ist, ist $dZ = N dy + P dp$. Nach der (S. 16 und 17) gegebenen allgemeinen Lösung ist aber die gesuchte Curve durch die Gleichung: $N - \frac{dP}{dx} = o$ oder $N dy - \frac{dP dy}{dx} = N dy - p dP = o$ oder $N dy = p dP$ bestimmt, also ist $dZ = p dP + P dp$, folglich $Z + a = Pp$. Werden hierin für Z und P ihre obigen Werthe eingesetzt, so erhält man als Gleichung der verlangten Curve: $\frac{y p^3}{1 + p^2} + a = \frac{p^3 y (3 + p^2)}{(1 + p^2)^2}$ oder $a(1 + p^2)^2 = 2p^3 y$, also 1) $y = \frac{a(1 + p^2)^2}{2p^3}$. Da nun $dy = p dx$ ist, so wird $dx = \frac{dy}{p}$ also $x = \int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{y dp}{p^2}$ sein, oder hierin den für y eben gefundenen Werth eingesetzt: 2) $x = \frac{a(1 + p^2)^2}{2p^4} + a \int \frac{dp (1 + p^2)^2}{2p^5} = \frac{a}{2}\left(\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + lg.p\right)$. Wird p aus Gleichung 1) und 2) eliminirt, so ist die hierdurch sich ergebende Gleichung diejenide der gesuchten Curve.

91) Es ist $3[S''] = 3[S'] + 3d[S']$, folglich $3[S''] + d[S'] = 3[S'] + 4d[S']$

Ferner ist $[T''] = [T] + 2d[T] + d^2[T]$ also

$$\begin{array}{rcl} 6[T''] &=& 6[T] + 12d[T] + 6d^2[T] \\ +\ 4d[T'] &=& \quad\ \ + \ 4d[T] + 4d^2[T] \\ -\ d[T] &=& \quad\ \ - \ d[T] \\ \hline 6[T''] + 4d[T'] - d[T] &=& 6[T] + 15d[T] + 10d^2[T]. \end{array}$$

Hieraus ergibt sich sofort die Richtigkeit der S. 19 aufgestellten Gleichung $d\Pi''' = \ldots$; in ähnlicher Weise würde man auch die rechten Seiten der folgenden Gleichungen aus den entsprechenden linken Seiten herleiten.

92) Es möge genügen, die Richtigkeit der Bildung der beiden ersten Glieder in dem vollständigen Incremente der ersten sechs Terme $Zdx + \ldots + Z^v dx$ nachzuweisen. Durch Addition der ersten sechs Gleichungen (S. 20) erhält man:

$$\begin{aligned} d.Zdx + d.Z'dx + \ldots + d.Z^v dx &= n\nu(L^v.dx.[P^{iv}] - L^v.([Q'''] + 2d[Q''']) + L^{iv}.[Q'''] + \ldots) \\ &= n\nu(L^v.dx.[P^{iv}] - (L^{iv} + dL^{iv})([Q'''] + 2d[Q''']) + L^{iv}.[Q'''] + \ldots) \\ &= n\nu(L^v.dx.[P^{iv}] - L^{iv}[Q'''] - 2L^{iv}d[Q'''] - [Q''']dL^{iv} - 2dL^{iv}.d[Q'''] + L^{iv}.[Q'''] + \ldots) \\ &= n\nu(L^v.dx[P^{iv}] - [Q''']dL^{iv} - 2L^{iv}d[Q'''] + \ldots), \end{aligned}$$

da das Glied $2dL^{iv}d[Q''']$ nach dem Gesetze der Homogeneität den übrigen mit $[Q''']$ behafteten gegenüber als verschwindend vernachlässigt wird. Es ergibt sich also sofort, daß das vollständige Increment der ersten sechs Terme

$$= n\nu.dx^2\left(\frac{L^v.[P^{iv}]}{dx} - \frac{[Q''']dL^{iv} + 2L^{iv}d[Q''']}{dx^2} + \ldots\right) \text{ ist.}$$

93) Es ist $\dfrac{d.[Q](H - \int Ldx)}{dx} = (H - \int Ldx).\dfrac{d[Q]}{dx} - [Q].L$, also

$$\begin{aligned} \frac{d^2.[Q](H - \int Ldx)}{dx^2} &= (H - \int Ldx).\frac{d^2[Q]}{dx^2} - L.\frac{d[Q]}{dx} - [Q].\frac{dL}{dx} - L.\frac{d[Q]}{dx} \\ &= (H - \int Ldx).\frac{d^2[Q]}{dx^2} - \frac{[Q]dL + 2Ld[Q]}{dx}. \end{aligned}$$

NB. Die siebente Gleichung (S. 20) muß heißen $d.Z^{vi}dx = L^{vi}dx.d\Pi^{vi} = \ldots$ und ferner ist auf derselben Seite Z. 4 v. u. am Ende des die Zeile bildenden Gliedes eine Parenthese hinzuzufügen.

94) **Methodus inveniendi etc. p. 145. prop. II.** „Es soll eine solche Gleichung zwischen x und y gefunden werden, daß, $x = a$ gesetzt, das Produkt der beiden Integrale $\int Zdx$ und $\int Ydx$ ein Maximum oder ein Minimum ist".

Man nehme an, daß die gesuchte Gleichung bereits gefunden sei, und daß in Folge derselben für $x = a$ der Werth von $\int Zdx = A$ und der von $\int Ydx = B$ sei, so werden diese Größen A und B constant und ihr Produkt AB ein Maximum oder ein Minimum sein. Nimmt man ferner an, daß y um $n\nu$ wachse, so werden A und B Incremente dA und dB empfangen, welche auf dem gewöhnlichen Wege aus $\int Zdx$ und $\int Ydx$ gefunden werden können. Da nun, wenn y um $n\nu$ wächst, A in $A + dA$ und B in $B + dB$ übergeht, so wird AB in $AB + AdB + BdA + dAdB$ übergehen, also wird, da AB ein Maximum oder ein Minimum sein muß, $AB = AB + AdB + BdA + dAdB = o$ sein müssen, d. h. es muß, da $dAdB$ den übrigen Größen gegenüber vernachlässigt wird, $AdB + BdA = o$ sein. Hieraus ergibt sich folgende Lösung des Problems: Man suche das Increment dA von $\int Zdx$ und das Increment dB von $\int Ydx$, — (A und B seien die Werthe der entsprechenden Integrale für $x = a$) —, so wird die Gleichung $AdB + BdA = o$ die verlangte sein.

95) **Meth. inv. p. 217. prop. VI.** „Unter allen A als gemeinsame Eigenschaft habenden Curven diejenige zu bestimmen, für welche eine beliebige Function von A und einer andern Größe B ein Maximum oder ein Minimum ist".

Sind dA und dB die Incremente von A und B, so wird das Increment der zu einem Maximum oder Minimum zu machenden Function: $\alpha dA + \beta dB$ sein, worin α und β durch die Art der Zusammensetzung der Größen A und B in jener Function bestimmt sind. In Folge der gemeinsamen Eigenschaft A muß also γdA zu jener Summe addirt werden, und man erhält als Gleichung der verlangten Curve: $(\alpha + \gamma)dA + \beta dB = o$ oder $(\alpha + \gamma)\delta dA + \beta\delta dA = o$. Da α und β bestimmte, γ und δ willkürliche Constanten sind, so werden daher $(\alpha + \gamma)\delta = \xi$ und $\beta\delta = \eta$ willkürliche Constanten sein, also ist die Gleichung der verlangten Curve: $\xi dA + \eta dB = o$.

96) **Meth. inv. p. 238. Exemplum I.** „Unter allen sowohl gleichlangen, als auch eine gleiche Fläche DAD umschließenden und auf dieselbe Abscisse AC bezogenen Curven diejenige zu finden, welche um AC gedreht einen Körper von größtem oder kleinstem Inhalt erzeugt.

Es sei (Fig. 14) $AP = x$, $PM = y$ und $dy = pdx$, so sind $\int ydx$ und $\int dx\sqrt{1 + p^2}$ die beiden der Curve gemeinsamen Eigenschaften und $\int y^2dx$ die zu einem Maximum oder Minimum zu machende Größe. Das Increment der ersten Größe ist $= n\nu.\,dx$, das der zweiten $= -\,n\nu.d\dfrac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$ und das der dritten $= 2n\nu.ydx$, also ist in Folge der allgemeinen Lösung (S. 27) die Gleichung der gesuchten Curve:

$$\alpha.dx - \beta.d.\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} + 2\gamma ydx = o \text{ oder } c^2d.\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = bdx + 2ydx = \frac{c^2dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit p und integrirt, so erhält man:

$$f^2 + by + y^2 = -\frac{c^2}{\sqrt{1 + p^2}} \text{ oder } (f^2 + by + y^2)^2(1 + p^2) = c^4 \text{ und } p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{c^4 - (f^2 + by + y^2)^2}}{f^2 + by + y^2}, \text{ also } dx = \frac{(f^2 + by + y^2)dy}{\sqrt{c^4 - (f^2 + by + y^2)^2}},$$

welches die Differenzialgleichung der elastischen Curve ist.

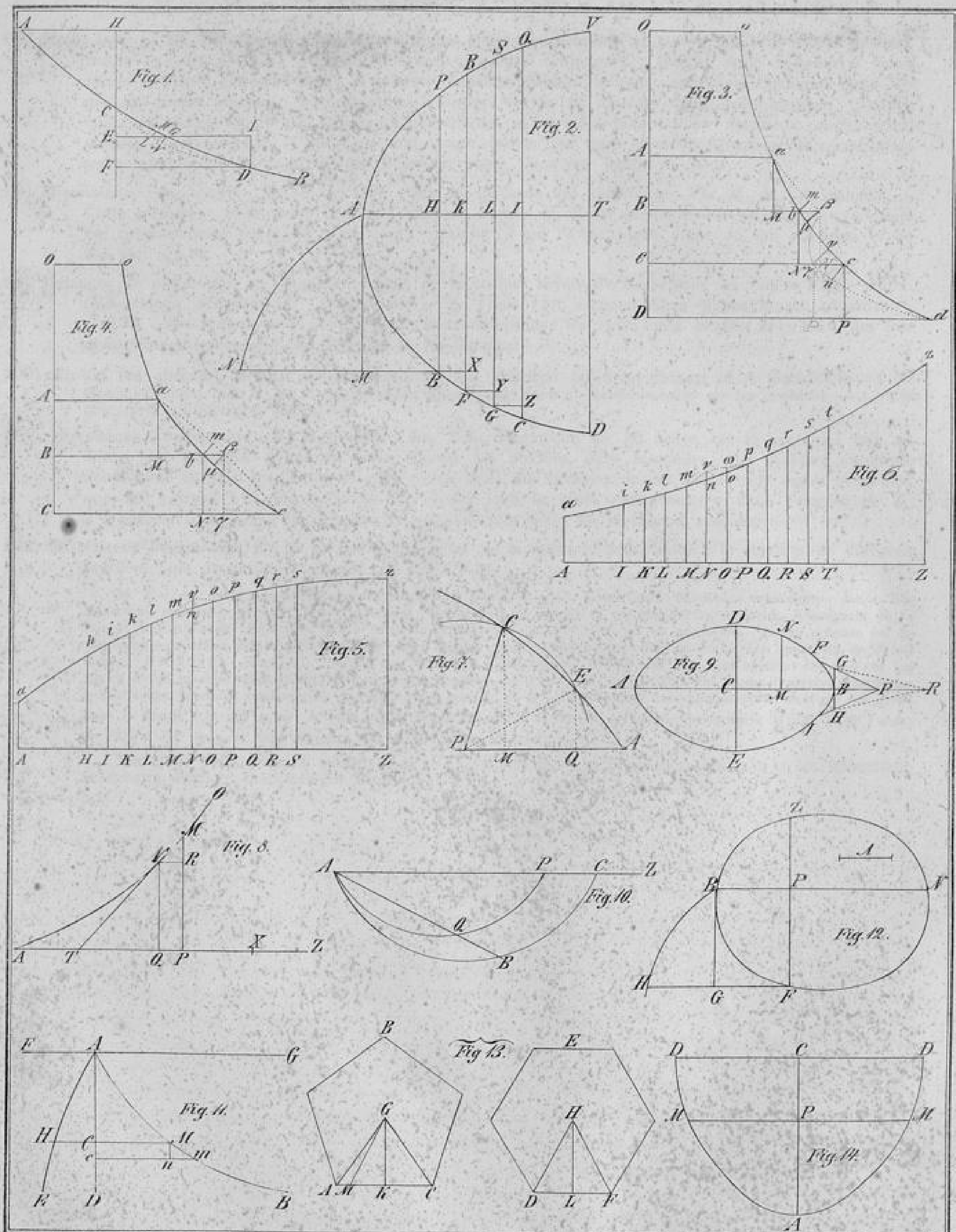
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.

97) Meth. inv. p. 13. Scholion II. Quamquam hujus generis quaestiones ad puram analysin reduci possunt, tamen expedit eas cum doctrina linearum curvarum conjungere. Quodsi enim animum a lineis curvis abducere atque ad solas quantitates absolutas firmare velimus; quaestiones primum ipsae admodum fierent abstrusae et inelegantes, ususque earum ac dignitas minus conspiceretur. Deinde etiam methodus resolvendi hujusmodi quaestiones, si in solis quantitatibus abstractis proponeretur, nimium foret abstrusa et molesta; cum tamen eadem per inspectionem figurarum et quantitatum repraesentationem linearem mirifice adjuvetur atque intellectu facilis reddatur.

98) Miscellanea Taurinensia. T. IV. p. 163. Sur la méthode des variations. Par M. de La-Grange. .... Cette méthode, qu'on peut très-bien appeler d'après M. Euler méthode des variations, avait déjà été communiquée dès 1755 à ce grand géomètre, qui l'avait jugée digne de son attention et de son suffrage.....

99) Mélanges de philosophie et de mathématique de la société royale de Turin pour les années 1760—1761. (Miscellanea Taurinensia. Tomus alter.) 2. Theil (die mathematischen Abhandlungen enthaltend). p. 173. Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies. Par M. de La-Grange.

100) Die auf das gewonnene Resultat sich stützende Lösung des Problems der Brachistochrone unter Berücksichtigung der Grenzgleichungen wird bei der Besprechung der Abhandlung Borda's: Eclaircissement sur les méthodes ..... eine genauere Berücksichtigung finden.

101) Miscellanea Taurinensia. T. II. p. 181. No. VII. Remarque I. M. Euler est le premier, qui ait donné des formules générales pour trouver les courbes, dans lesquelles une fonction intégrale donnée est la plus grande ou la plus petite, mais les formules de cet auteur sont moins générales que les nôtres; 1°. parcequ'il ne fait varier que la seule changeante y dans l'expression Z; 2°. parcequ'il suppose, que le premier et le dernier point de la courbe sont fixes.

102) Miscellanea Taurinensia, T. II. p. 196. Application de la méthode précédente à la solution de différens problèmes de dynamique. Par M. de La-Grange.

M. Euler dans une addition à son excellent ouvrage, qui a pour titre: Methodus maximorum etc. a démontré ce principe, que dans les trajectoires, que des corps décrivent par des forces centrales, l'intégrale de la vitesse multipliée par l'élément de la courbe fait toujours un maximum ou un minimum. Je me propose ici de généraliser ce même principe et d'en faire voir l'usage pour résoudre avec facilité toutes les questions de dynamique. Principe général. Soient tant de corps qu'on voudra M, M', M'', et qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, et qui soient de plus, si l'on veut, animés par des forces centrales proportionelles à des fonctions quelconques des distances; que s, s', s'' etc. dénotent les espaces parcourus par ces corps dans le temps t et que u, u', u'' etc. soient leurs vitesses à la fin de ce temps; la formule $M\int u ds + M'\int u'ds', + M''\int u''ds'' + \ldots$ sera toujours un maximum ou un minimum.

Mit Hülfe dieses Prinzips wendet Lagrange seine Methode auf die Lösung von zehn in der Abhandlung behandelten wichtigen Problemen der Mechanik an.