VI. Kapitel. Lehre von der Proportionalität.

§ 20. Verhältnisse und Proportionen.

Vergleicht man zwei Strecken (Winkel, Flächenstücke u. s. w.) mit einander, z. B. 2 cm und 6 cm, so lässt sich das Ergebnis in doppelter Beziehung ausdrücken:

1) Die längere Strecke ist um 4 cm grösser als die kleinere,
2) die längere Strecke ist dreimal so gross wie die kleinere.

Im Falle 1) ist die Differenz der Masszahlen, in 2) ihr Quotient gebildet. Zu beachten ist, dass hier bei 1) eine benannte, bei 2) eine unbenannte Zahl auftritt. — Geometrische Deutung der beiden eben angewandten Rechnungsarten.

Im Falle 2) drückt man sich auch oft so aus: Das Verhältnis der grösseren Strecke zur kleineren ist 3.

Das Verhältnis zweier Strecken a und b kann nun sein:

1) eine ganze Zahl,

2) ein Bruch, und zwar

a. ein echter,

b. „ unechter (eine gemischte Zahl).

Ist ein Verhältnis in der besonderen Form eines Decimalbruches gegeben, so stellt man denselben als gewöhnlichen Bruch dar, z. B. $\frac{a}{b} = 0{,}75 = \frac{3}{4}$, woraus man erkennt, dass der dritte Teil von a sich viermal auf b abtragen lässt (oder auch?).

Ist der Decimalbruch ein periodischer, z. B.:

$$\frac{a}{b} = 0{,}15\ 15\ \ldots \quad \text{(Periode 15)},$$

so bezeichnet man denselben durch x und bildet:

$$\begin{array}{rl} 100\,x &= 15,\ 15\ \ldots \\ -)\quad x &= \ \ 0,\ 15\ \ldots \\ \hline 99\,x &= 15 \\ x &= \frac{15}{99} = \frac{5}{33}, \quad \text{also} \\ \frac{a}{b} &= \frac{5}{33}. \end{array}$$

Auch die Umwandlung unrein-periodischer Decimalbrüche gelingt nach dem vorigen Muster, z. B.:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \frac{a}{b} & = & 0{,}2 \mid 15 \mid 15\,. \;= x \\
 & 100\ x & = & 21{,}5 \mid 15 \mid\,. \\
-) & x & = & 0{,}2 \mid 15 \mid\,. \\
\hline
 & 99\ x & = & 21{,}3 \\
 & 33\ x & = & 7{,}1 \\
 & x & = & \frac{71}{330}.
\end{array}
$$

Früher (§ 10) wurde die Aufgabe gelöst: Eine gegebene Strecke in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu zerlegen. Teile AB in fünf gleiche Strecken (AC = CD = DE = EF = FB) und gieb die Grösse der Verhältnisse $\frac{AC}{AB}$, $\frac{AD}{DB}$, $\frac{CE}{CB}$, $\frac{CF}{EB}$ u. s. w. in Zahlen an!

Löse hiernach die Grundaufgabe: Eine gegebene Strecke AB im Verhältnis $\frac{2}{5}$ (oder in irgend einem anderen vorgeschriebenen Verhältnis) zu teilen.

Wieviele Teilpunkte findet man in jedem einzelnen Falle? — Giebt es auf der Verlängerung von BA einen Punkt X, so dass $\frac{XA}{XB} = \frac{2}{5}$ ist? — Innere und äussere Teilung der Strecke AB. AB heisst harmonisch geteilt, wenn das Verhältnis der inneren Abschnitte gleich dem der äusseren ist.

Besteht eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen, so heisst eine solche eine Proportion, z. B.: $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$ (zu lesen: 3 verhält sich zu 7 wie 6 zu 14, oder kurz 3 zu 7 wie 6 zu 14).

Wieviele Verhältnisse haben denselben Wert wie das erste und wie lassen sie sich alle aus diesem ableiten?

Eine Proportion enthält vier Glieder, die der Reihe nach numeriert werden (1., 2., 3., 4. Proportionale). Man unterscheidet äussere (3,14) und innere Glieder (7,6). Wieviele Glieder einer Proportion dürfen willkürlich gewählt werden? — Die unbekannte Proportionale wird durch Auflösung der betreffenden Gleichung gefunden, z. B.:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \frac{2}{5} & = & \frac{9}{x} \\
.) & 5\ x & = & 5\ x \\
\hline
 & 2\ x & = & 5 \cdot 9 \\
 & x & = & \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}.
\end{array}
$$

1. In jeder Proportion muss das Produkt der äusseren Glieder gleich dem der inneren sein. (Produktgleichung.)

Haben zwei Proportionen dieselbe Produktgleichung, so sagen sie dasselbe aus. Bildet man daher etwa aus der Produktgleichung

$$4 \cdot 9 = 3 \cdot 12$$

alle zu ihr gehörigen Proportionen, so lässt sich leicht erkennen, wie die Glieder einer Proportion mit einander vertauscht werden dürfen:

1. $4 : 3 = 12 : 9$
2. $4 : 12 = 3 : 9$
3. $9 : 3 = 12 : 4$
4. $9 : 12 = 3 : 4$
5. $3 : 4 = 9 : 12$
6. $3 : 9 = 4 : 12$
7. $12 : 4 = 9 : 3$
8. $12 : 9 = 4 : 3.$

2. Die inneren Glieder dürfen unter sich, ebenso die äusseren unter sich vertauscht werden, ferner darf man die inneren zu äusseren machen und umgekehrt.

Dagegen ist eine Vertauschung eines äusseren Gliedes mit einem inneren falsch. — Beweise den Satz:

3. Stimmen in zwei Proportionen drei gleichstellige Glieder überein, so sind auch die übrigen Glieder gleich.

Voraussetzung: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sei richtig (oder $ad = bc$).

Behauptung: $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$ ist auch richtig.

Beweis? — Beweise unter derselben Voraussetzung, dass

1. $\frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}.$
2. $\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}.$

Eine Proportion von der Form:

$$a : b : c = d : e : f$$

heisst eine fortlaufende. Eine solche ist nur eine Abkürzung für die beiden Proportionen:

$$a : b = d : e$$
$$b : c = e : f.$$

Ist das Verhältnis zweier Zahlen bekannt (z. B. $\frac{3}{5}$), so kennt man damit die Zahlen selbst noch nicht, aber es ist sicher, dass sie die Form haben: 3 x bezw. 5 x, wenn mit x der Faktor bezeichnet wird, der in dem Verhältnis durch Heben fortgefallen ist.

Ist allgemein:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = k,$$

wo k eine feste Zahl (den sog. Proportionalitätsfaktor) bedeutet, so kann man auch setzen:

$$a_1 = k b_1,\ a_2 = k b_2,\ \ldots$$

Ist

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = \ldots = k,$$

so heissen die Zahlen a den Zahlen b umgekehrt proportional, während man sie im vorigen Falle direkt proportional nennt.

Vergleiche die Flächen zweier Parallelogramme (Dreiecke) mit derselben Grundlinie, wenn die Höhe des einen doppelt, dreimal etc. so gross ist wie die des anderen. Drücke das Ergebnis durch Proportionen aus!

4. Parallelogramme (Dreiecke) mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie die zu diesen gehörigen Höhen.

Beweis:

$$\begin{array}{c|c} i_1 = g \cdot h_1 & 2\,i_1 = g \cdot h_1 \\ i_2 = g \cdot h_2 & 2\,i_2 = g \cdot h_2 \\ \hline \dfrac{i_1}{i_2} = \dfrac{h_1}{h_2} & \dfrac{i_1}{i_2} = \dfrac{h_1}{h_2} \end{array}$$

Wie lautet der entsprechende Satz unter der Voraussetzung gleicher Höhen?

Deute die Produktgleichung:

$$g_1 \cdot h_1 = g_2 \cdot h_2$$

geometrisch! — Die dazu gehörige Proportion lautet:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{h_2}{h_1},\ \text{d. h.:}$$

5. Haben zwei Parallelogramme denselben Inhalt, so verhalten sich ihre Grundlinien umgekehrt wie die zu ihnen gehörigen Höhen.

Gilt derselbe Satz auch für zwei Dreiecke von gleicher Grösse? —

6. In jedem Dreieck (Parallelogramm) verhalten sich zwei Seiten umgekehrt wie die zu ihnen gehörigen Höhen.

Beweis: Für irgend ein Dreieck ist

$$\begin{array}{rcl} 2\,i & = & a \cdot h_a \quad \text{und} \\ 2\,i & = & b \cdot h_b \\ \hline a \cdot h_a & = & b \cdot h_b \quad \text{oder} \\ \frac{a}{b} & = & \frac{h_b}{h_a} \end{array}$$

Ist also das Verhältnis zweier Höhen vorgeschrieben, so kennt man auch das Verhältnis der zugehörigen Dreiecksseiten.

§ 21. Proportionalität von Strecken beim Dreieck.

Ziehe im Dreieck ABC durch die Mitte D von AC zu AB die Parallele DE. Welchen Wert hat das Verhältnis $\frac{CD}{AD}$? Welches andere Verhältnis hat denselben Wert? Welche Proportion ist demnach richtig?

Es fragt sich, ob diese Proportion auch Gültigkeit hat, wenn D nicht gerade die Mitte von AC ist. Zunächst leuchtet ein, dass es der Fall ist, wenn AC in eine beliebige Anzahl gleicher Teile (z. B. 5) zerlegt wird und D einen der Teilpunkte (z. B. den zweiten von C aus gerechnet) darstellt. Denn es verhält sich:

$$\begin{array}{rrcll} & \frac{CD}{DA} & = & \frac{2}{3} \left(\frac{m}{n}\right) & \\ \text{und} & \frac{CE}{EB} & = & \frac{2}{3} \left(\frac{m}{n}\right) & \text{(nach § 10, No. 8)} \\ \hline & \frac{CD}{DA} & = & \frac{CE}{EB} & \text{(Grds. 1).} \end{array}$$

Wählt man D beliebig auf AC, so sind zwei Fälle denkbar:

1) Es giebt für CD und DA ein gemeinschaftliches Mass.
2) Es giebt kein solches.

Im ersten Falle passt der vorige Beweis.

Im zweiten Falle denkt man sich CD in m gleiche Strecken geteilt und $\frac{CD}{m}$ auf DA abgetragen.

Nach der Annahme kann A nicht mit einem Endpunkte der abgetragenen Strecke zusammenfallen. A soll z. B. zwischen F, dem n^{ten} und G, dem $(n + 1)^{\text{ten}}$ Teilpunkte liegen. Denkt man sich ferner durch alle diese Teilpunkte zu AB die Parallelen gezogen (durch F FH, durch G GJ), so ist nach dem Vorigen:

$$\frac{CD}{DF} = \frac{CE}{EH}.$$

DF unterscheidet sich von DA um so weniger, je grösser n gewählt wird, ebenso EH von EB. Unter Voraussetzung einer sehr grossen Zahl m darf man also mit grosser Annäherung DF durch DA, EH durch EB ersetzen; daher ist auch jetzt:

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}.$$

Ganz entsprechend schmiegt sich G dem Punkte A, J dem Punkte B und damit GJ der Dreiecksseite AB an.

Übrigens ist die Proportion:

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB} \text{ oder } \frac{DA}{CD} = \frac{EB}{CE}$$

nicht nur angenähert, sondern genau richtig. Denn es ist zugleich:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n}{m} < \frac{DA}{CD} < \frac{n+1}{m} \\ \frac{n}{m} < \frac{EB}{CE} < \frac{n+1}{m} \end{array}\right\} = \frac{n}{m} + \frac{1}{m}$$

d. h. jedes der Verhältnisse liegt zwischen zwei Werten eingeschlossen, deren Unterschied $\frac{1}{m}$ unter jede angebbare Grösse sinkt.

Eine Zahl, die man mit Hülfe von ganzen Zahlen und Brüchen nie völlig genau, aber mit beliebiger Annäherung angeben kann, heisst eine Irrationalzahl. Im Gegensatz dazu nennt man die ganzen Zahlen und Brüche (gemischte Zahlen) rationale Zahlen.

Allgemein gilt der Satz:

1. Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine parallele Transversale, so werden die beiden anderen Seiten in demselben Verhältnis geteilt.

Ausser I. $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$ (Verhältnis der Abschnitte unter sich)

sind noch zu merken: II. $\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}$ (Verhältnis des oberen Abschn. zur ganzen Seite)

und III. $\frac{DA}{CA} = \frac{EB}{BC}$ (Verhältnis des unteren Abschn. zur ganzen Seite).

Den Beweis des Satzes (1) kann man auch mit Hülfe der Flächenvergleichung führen: Verbindet man A mit E und B mit D, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle DAE = \triangle EBD \\ \frac{\triangle CDE}{\triangle DAE} = \frac{CD}{DA} \\ \frac{\triangle CDE}{\triangle EBD} = \frac{CE}{EB} \end{array}\right\} \text{(Grund?)}$$

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}.$$

Bilde aus den Proportionen I—III alle diejenigen, die sich von ihnen nur durch die Stellung der Glieder unterscheiden. —

Voraussetzung: DF nicht parallel zu AB.

Behauptung: $\frac{CD}{DA} \lessgtr \frac{CF}{FB}$.

Beweis: Zieht man durch D zu AB die Parallele DE, so ist:

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$$

$$\frac{CF}{FB} \lessgtr \frac{CE}{EB},$$

da sich mit der Lage eines Punktes auf BC auch das Teilungsverhältnis von BC ändert; also muss auch

$$\frac{CD}{DA} \lessgtr \frac{CF}{FB}$$

sein. Demnach ist der Gegensatz zu (1) richtig.

2. Umkehrung: Teilt man zwei Dreiecksseiten von dem gemeinschaftlichen Eckpunkt aus in demselben Verhältnis, so ist die Verbindungslinie der Teilpunkte der dritten Seite parallel.

Was ist früher von der Verbindungsstrecke der Mitten zweier Dreiecksseiten bewiesen? Gieb diesem Satz die Form einer Proportion.

Jetzt soll untersucht werden, ob allgemein unter der

Voraussetzung: $DE \parallel AB$

die Behauptung: $\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA}$ gültig ist.

Beweis: Zieht man durch D zu BC die Parallele DG, so ist DE = BG (Grund?) und

$$\frac{BG}{AB} = \frac{CD}{CA}$$

oder

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA},$$

d. h.:

3. Zieht man zu einer Dreiecksseite eine parallele Transversale, so verhält sich diese zu jener Seite wie der obere Abschnitt einer der anderen Seiten zu dieser ganzen Seite.

Beschreibt man um D mit DE als Radius einen Kreisbogen, so kann dieser BC in einem zweiten Punkte F schneiden, und es ist dann DF nicht parallel zu AB, aber trotzdem:

$$\frac{DF}{AB} = \frac{CD}{CA},$$

d. h. der Gegensatz zu (3) ist nicht allgemein richtig. Deshalb ist auch die zugehörige Umkehrung nicht gültig. Richtig ist aber die Umkehrung: Werden durch zwei Punkte A und B eines Strahles (Anfangspunkt S) zwei parallele Strecken AC und BD gezogen, so dass $\frac{AC}{BD} = \frac{SA}{SB}$, so liegen S, C und D in gerader Linie.

Auf den Sätzen (1) und (3) beruhen verschiedene Grundkonstruktionen der vierten Proportionale:

Gegeben sind drei Strecken a, b, c.

Gesucht wird eine vierte, so dass

$$a : b = c : x.$$

Nimmt man b = c, so handelt es sich um die Konstruktion der dritten Proportionale zu a und b.

Im gleichschenkligen Dreieck ist w_γ zugleich m_c, oder: Halbiert man den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, so verhalten sich die Abschnitte der Basis wie die Schenkel.

Allgemein gilt der Satz:

4. Die Halbierungslinie jedes Dreieckswinkels teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Voraussetzung: $\gamma_1 = \gamma_2$ (Abkürzung für ACD = BCD).

Behauptung: AD : DB = AC : BC.

Beweis: Zieht man BE ∥ AC (E bedeutet den Schnittpunkt mit der Verlängerung von AC), so ist:

$$\left.\begin{array}{l} \angle\, CBE = \gamma_2 \\ \angle\, CED = \gamma_1 \end{array}\right\} \text{(Grund?)}$$

$$\angle\, CBE = CED \quad \text{(Grund?)}$$

Daher muss auch CE = CB sein.

Da ferner:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CE}$$ ist, so ergiebt sich durch

Einsetzung: $$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}.$$

Führe den Beweis auf eine zweite Art mittels der Parallele DF zu BC!

Weshalb ist auch der Gegensatz zu (4) richtig?

Die Umkehrung lautet:

5. Teilt man eine Dreiecksseite im Verhältnis der anliegenden Seiten, so wird der gegenüberliegende Winkel durch

die Verbindungslinie seines Scheitels mit dem Teilungspunkt halbiert.

Beweise die Umkehrung direkt, d. h. ohne Bezug auf den Gegensatz.

Für die Halbierungslinie jedes Aussenwinkels gilt ein entsprechender Satz.

Beide Sätze lassen sich zu einem einzigen zusammenfassen:

6. Die Halbierungslinien eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die gegenüberliegende Seite harmonisch.

Welche Lage haben die beiden Halbierungslinien zu einander? —

Zeichnet man über einer Strecke AB als Seite beliebig viele Dreiecke ABC_1, ABC_2 etc., deren andere Seiten jedesmal dasselbe Verhältnis $m : n$ haben, so müssen nach dem Vorigen die Halbierungslinien aller Winkel C_1, C_2 . . . durch denselben Punkt D auf AB gehen, die Halbierungslinien aller Aussenwinkel C_1, C_2 . . . durch einen festen Punkt E auf der Verlängerung von AB. — Wo liegen demnach alle Punkte C_1, C_2 . . . in Bezug auf DE?

Hat man aber ein Dreieck ABP, so dass nicht $\frac{AP}{BP} = \frac{m}{n}$ so gehen die Halbierungslinien der Winkel bei P nicht durch D bezw. E. Ändert sich also das Verhältnis der beiden Seiten, so liegen die dritten Ecken aller solchen Dreiecke nicht mehr auf dem Kreise über DE als Durchmesser.

Daher gilt auch umgekehrt:

7. Teilt man eine Strecke AB harmonisch in irgend einem Verhältnis und beschreibt über der Entfernung der Teilpunkte als Durchmesser den Kreis, so haben die Entfernungen aller Punkte dieses Kreises von A und B dasselbe Verhältnis. (Apollonischer Kreis.)

8. Zwei Mittellinien eines Dreiecks teilen sich in demselben Verhältnis. Das Verhältnis ihrer Abschnitte ist 1 : 2.

Voraussetzung: AD = DC, BE = EC.

Behauptung: $\frac{SD}{SB} = \frac{SE}{SA} = \frac{1}{2}$.

Beweis: Trägt man SD = SF auf SB, SE = SG auf SA ab und verbindet D mit E, G mit F, so ist:

$$\frac{\left.\begin{array}{l} DE \parallel FG \\ DE \parallel AB \end{array}\right\} \text{(Grund?)}}{FG \parallel AB.}$$

Ferner ist:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{1}{2} \quad \text{(Grund?)}$$

und da auch

$$DE = FG$$

$$\frac{FG}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Im Dreieck ABS ist nun:

$$\frac{SG}{SA} = \frac{FG}{AB},$$

folglich auch:

$$\frac{SG}{SA} = \frac{1}{2},$$

d. h.: SG (oder SE) lässt sich auf SA zweimal abtragen. Entsprechend ist BS = 2 DS.

Zusatz zu 8. Die drei Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich in demselben Punkte. Dieser heisst (aus physikalischen Gründen) der Schwerpunkt des Dreiecks.

Wiederhole die Sätze von den bisher erwähnten drei besonderen Punkten des Dreiecks!

Was bleibt von dem letzten Beweise unverändert, wenn man nur voraussetzt, dass DE ∥ AB ist? Was ist der Fall, wenn DE nicht parallel zu AB ist?

Zwei Ecktransversalen, die nicht Mittellinien sind, können sich demnach wohl in demselben Verhältnis teilen, aber nicht in dem besonderen 1 : 2.

9. Umkehrung: Teilen sich zwei Ecktransversalen im Verhältnis 1 : 2, so sind sie Mittellinien.

Beweise den letzten Satz auch direkt.

Der Satz (8) des § 10 lautet verallgemeinert:

Trägt man auf einer geraden Linie beliebig viele unter sich gleiche Strecken ab und zieht durch die Endpunkte Parallelen, so schneiden diese auf jeder anderen Gerade gleiche Strecken ab.

Die Verallgemeinerung besteht darin, dass 1) die Abtragung der gleichen Strecken nicht vom Schnittpunkt der beiden Geraden zu erfolgen braucht, 2) dass die Parallelen auf beiden Seiten des Schnittpunktes auftreten können. Beweis?

Auf dieser allgemeinen Grundlage in Verbindung mit (1) und (3) dieses Paragraphen beruhen die nachstehenden Lehrsätze:

10. Werden gerade Linien von drei oder mehreren Parallelen durchschnitten, so ist das Verhältnis irgend zweier

Abschnitte auf der einen gleich dem der entsprechenden auf jeder anderen. (Oder: Die Abschnitte aller geschnittenen Geraden sind proportioniert. — Das Verhältnis zweier Abschnitte einer Gerade wird durch Parallelprojektion auf jede andere übertragen.)

Erklärung: Die Gesamtheit aller von demselben Punkt ausgehenden Strahlen heisst ein Strahlenbüschel, der gemeinsame Punkt sein Scheitel.

11. Parallele Strecken zwischen denselben Geraden eines Strahlenbüschels verhalten sich wie die zugehörigen vom Scheitel gerechneten Abschnitte einer dieser Geraden.

12. Strahlen eines Büschels schneiden Parallele in proportionierten Abschnitten. (Durch Scheitelprojektion wird das Verhältnis zweier Abschnitte einergeraden Linie auf jede Parallele zu der letzteren übertragen.)

Aus 10 und 11 folgt ohne weiteres die Richtigkeit des Satzes:

13. Zieht man zu einem Durchmesser des einen zweier Kreise im anderen einen parallelen Radius, so wird die Centrale durch die Verbindungslinien der Endpunkte harmonisch geteilt, und zwar im Verhältnis der Radien.

Auf 13 beruhen die bequemsten Lösungen der Grundaufgaben:

I. **Eine gegebene Strecke in einem vorgeschriebenen Verhältnis harmonisch zu teilen.**

II. **An zwei gegebene Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten zu legen.**

Bei No. II braucht man nur von dem äusseren bezw. inneren Teilungspunkte an einen der Kreise die Tangente zu konstruieren. — Beweise, dass diese auch für den anderen Kreis Tangente ist.

Erörterung der einzelnen Fälle für die verschiedenen Lagen der Kreise.

§ 22. Ähnlichkeit der Dreiecke.

Die Kongruenz zweier Dreiecke bedeutet ihre völlige Übereinstimmung, d. h. sowohl in der Grösse als auch in der Gestalt. Stimmen zwei Dreiecke nur in der Grösse überein, so sagt man, sie seien inhalts- oder flächengleich oder kurz gleich; stimmen sie nur in der Gestalt überein, so sagt man, sie seien einander ähnlich. Eine schärfere Abgrenzung erhält der Begriff der Ähnlichkeit durch die

Erklärung: Zwei Dreiecke heissen ähnlich (∞), wenn in ihnen sämtliche Winkel und alle Seitenverhältnisse paarweise gleich sind.

Bei welcher Gelegenheit waren alle diese Bedingungen erfüllt?

Jede zu einer Dreiecksseite parallele Transversale schneidet ein Dreieck ab, das dem ganzen ähnlich ist.

Sind die oben geforderten sechs Bedingungen von einander ganz unabhängig?

1.	$\alpha_1 = \alpha_2$	4.	$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$
2.	$\beta_1 = \beta_2$	5.	$c_1 : c_2 = b_1 : b_2$
3.	$\gamma_1 = \gamma_2$	6.	$a_1 : a_2 = c_1 : c_2$

Jetzt wird sich herausstellen, dass auch diese vier scheinbar unabhängigen Bedingungen sich noch um zwei vermindern. Wie dies zu verstehen ist, lehren die Ähnlichkeitssätze:

1. Ähnlichkeitssatz: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkelpaaren überein, so sind sie ähnlich.

Voraussetzung: 1. $\alpha_1 = \alpha_2$. 2. $\beta_1 = \beta_2$.

Behauptung: $\left\{ \begin{array}{ll} (3. \quad \gamma_1 = \gamma_2). & 4. \; a_1 : a_2 = b_1 : b_2. \\ 5. \; b_1 : b_2 = c_1 : c_2. & (6. \; a_1 : a_2 = c_1 : c_2.) \end{array} \right\}$

oder: $\triangle A_1B_1C_1 \infty A_2B_2C_2$.

Beweis: Trägt man $C_1D = C_2A_2$ auf C_1A_1 ab und zieht durch D zu AB die Parallele DE, so ist in den Dreiecken DEC_1 und $A_2B_2C_2$:

$$\begin{array}{ll} 1. & C_1D = C_2A_2 \\ 2. & \angle C_1 = C_2 \\ 3. & \angle C_1DE = A_2 \quad \text{(Grund?)} \\ \hline \end{array}$$

$\triangle DEC_1 \cong A_2B_2C_2$ nach d. 1. Kongruenzs.

Nach dem vorhergegangenen Satze ist ferner:

$$\triangle DEC_1 \infty A_1B_1C_1;$$

folglich ist auch:

$$\triangle A_1B_1C_1 \infty A_2B_2C_2.$$

2. Ähnlichkeitssatz: Stimmen zwei Dreiecke in einem Winkel und dem Verhältnis der ihn einschliessenden Seiten überein, so sind sie ähnlich.

Voraussetzung: $\gamma_1 = \gamma_2$; $\dfrac{A_1C_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2C_2}{B_2C_2}$.

Behauptung: $\triangle A_1B_1C_1 \infty A_2B_2C_2$.

Beweis: Zieht man $DE \parallel A_1C_1$, so dass $C_1D = C_2A_2$ ist, so besteht für das Dreieck $A_1B_1C_1$ die Proportion:

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{C_1D}{C_1E};$$

ferner ist nach Vor.: $$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{A_2C_2}{B_2C_2}$$

$$\overline{}$$
$$C_1E = B_2C_2,$$

da alle anderen gleichstelligen Glieder gleich sind.

In den Dreiecken DEC_1 und $A_2B_2C_2$ ist nun:

1. $C_1D = C_2A_2$
2. $C_1E = B_2C_2$
3. $\angle C_1 = C_2$

$$\triangle DEC_1 \backsim A_2B_2C_2$$

nach dem 2. Kongruenzsatze.

Schluss des Beweises wie vorher!

3. Ähnlichkeitssatz: Stimmen zwei Dreiecke in dem Verhältnis zweier Seiten und dem der grösseren von ihnen gegenüberliegenden Winkel überein, so sind sie ähnlich.

4. Ähnlichkeitssatz: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seitenverhältnissen überein, so sind sie ähnlich.

Die Beweise lassen sich nach dem vorigen Muster führen und zwar mit Anwendung des 3. bezw. 4. Kongruenzsatzes.

Ist die Ähnlichkeit zweier Dreiecke nachgewiesen, so folgt daraus jedesmal, dass auch die übrigen vier Beziehungen gelten. Man kann daher häufig z. B. die Richtigkeit einer Proportion dadurch beweisen, dass man zwei Dreiecke aufsucht, von denen das eine zwei Glieder der Proportion, das andere die übrigen derselben als Seiten enthält und die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke nachweist. Auch ist damit ein neues Mittel zum Beweise der Gleichheit zweier Winkel gegeben.

In allen diesen Fällen ist aber genau zu beachten, welche Stücke in den beiden ähnlichen Dreiecken einander entsprechen. Entsprechende Seiten sind hierbei solche, die gleichen Winkeln gegenüberliegen bezw. durch ihre Stellung in der Proportion als solche erkennbar sind.

Sind die Seiten eines Dreiecks doppelt, 3, 4 . . . mal so gross wie die eines anderen, so sind auch die Höhen, Winkelhalbierungslinien, Mittellinien, die Radien der um- und einbeschriebenen Kreise etc. doppelt, 3, 4 . . . mal so gross wie die entsprechenden des anderen. (Beweis?)

Ganz allgemein lässt sich behaupten, dass das Verhältnis zweier entsprechenden Strecken in ähnlichen Dreiecken dem Verhältnis entsprechender Seiten (dem regierenden Verhältnis) gleich ist. — Was folgt daraus weiter?

§ 23. Anwendungen der Ähnlichkeitslehre.

1. Beweise den Satz vom Verhältnis zweier Höhen eines Dreiecks mit Hülfe der Ähnlichkeit zweier Dreiecke.

2. Desgleichen den Satz von der Halbierungslinie eines Dreieckswinkels. (Fälle von den Endpunkten der gegenüberliegenden Seite auf die Winkelhalbierende die Lote!)

3. Desgleichen den Satz von den Mittellinien eines Dreiecks.

---

4. Die Höhe zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks teilt dasselbe in zwei Dreiecke, die unter sich und dem ganzen ähnlich sind. (Beweis?)

Ziehe alle Folgerungen aus der Ähnlichkeit dieser drei Paare von Dreiecken und präge die nachstehenden dem Gedächtnis ein:

I.	$h : p = q : h$	**oder:**	$h^2 = p \cdot q$
II.	$a : p = c : a$	„	$a^2 = c \cdot p$
III.	$b : q = c : b$	„	$b^2 = c \cdot q.$

Jede dieser Proportionen hat die Eigentümlichkeit, dass die äusseren (oder die inneren) Glieder einander gleich sind. (Stetige Proportionen.) In der Produktgleichung kommt daher jedesmal eine zweite Potenz (Quadrat) vor; die Basis dieser heisst die mittlere Proportionale zu den beiden anderen. Die obigen Proportionen lassen sich daher folgendermassen in Worte fassen:

5. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe zur Hypotenuse mittlere Proportionale zu den beiden Höhenabschnitten.

6. Jede Kathete ist mittlere Proportionale zu dem zu ihr gehörigen Höhenabschnitt (ihrer Projektion) und der Hypotenuse.

Auf 5 und 6 beruhen Lösungen der Grundaufgabe: Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu zeichnen.

Wie lauten diese Sätze mit Bezug auf die Flächenberechnung? Suche sie durch Flächenvergleich nochmals zu beweisen!

$$\begin{array}{rrl} \text{Aus} & a^2 = & c \cdot p \\ & b^2 = & c \cdot q \quad \text{folgt durch Addition:} \\ \hline & a^2 + b^2 = & c \cdot p + c \cdot q = c\,(p + q) \\ \text{oder:} & a^2 + b^2 = & c^2, \end{array}$$

d. h. der früher auf anderem Wege gefundene Lehrsatz des Pythagoras:

7. Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der Katheten.

Trägt man in dem rechtwinkligen Dreieck ABC AD (q) auf DB (p) bis E ab und verbindet C mit E, so gilt auch für das stumpfwinklige Dreieck BCE die Gleichung: $h^2 = p \cdot q$. Demnach ist der Gegensatz zu (5) nur unter welcher Einschränkung richtig? — Umkehrung?

Dagegen sind Gegensatz und Umkehrung zu (6) und (7) bedingungslos gültig. (Beweis?)

Die Umkehrung von (7) lautet:

8. Ist die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten gleich dem Quadrat der dritten, so liegt dieser ein rechter Winkel gegenüber.

---

§ 24. Ähnlichkeit der Vielecke.

1. Sind zwei Vielecke entsprechend aus ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt, so stimmen sie paarweise in den Winkeln und den Verhältnissen entsprechender Seiten überein.

Beweis? —

Erklärung: Solche Vielecke heissen ähnlich. —

Gegensatz und Umkehrung von 1.

2. Sind zwei entsprechende Seiten ähnlicher Vielecke parallel, so sind auch je zwei andere entsprechende Seiten parallel. — Beweis? —

3. Die Verbindungslinien entsprechender Ecken solcher Vielecke schneiden sich in einem Punkte.

Beweis: Ist S der Schnittpunkt von A_1A_2 und B_1B_2, so ist:

$$\begin{array}{rl} \frac{SB_1}{SB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} & \\ \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} & \text{(nach Vorauss.)} \\ \hline \frac{SB_1}{SB_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2}. & \end{array}$$

Nach einem Satze des § 21 liegen demnach C_1, C_2 und S in gerader Linie u. s. f.

Erklärung: Ähnliche Vielecke in solcher Lage heissen perspektivisch oder ähnlich liegend. Die Verbindungslinien entsprechender Ecken nennt man Ähnlichkeitsstrahlen, den Schnittpunkt der letzteren Ähnlichkeitspunkt. Wann liegt dieser auf derselben Seite beider Figuren, wann zwischen ihnen? (Äusserer bezw. innerer Ähnlichkeitspunkt.)

§ 25. Verhältnis der Flächen ähnlicher Figuren.

1. Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Voraussetzung: $\triangle A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$.

Behauptung: $\frac{i_1}{i_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$.

Beweis: Fällt man von A_1 auf a_1, von A_2 auf a_2 die Höhen h_1 bezw. h_2, so ist:

$$i_1 = \frac{a_1 \cdot h_1}{2}$$

$$:) \quad i_2 = \frac{a_2 \cdot h_2}{2}$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{a_1 \cdot h_1}{a_2 \cdot h_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}.$$

Wegen der Ähnlichkeit der betreffenden (welcher?) Dreiecke ist ferner:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

und nach Voraussetzung: $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Durch Einsetzung dieses Wertes in der vorigen Gleichung ergiebt sich:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}.$$

Der hiermit bewiesene Satz lässt sich als ein besonderer Fall der nachstehenden allgemeinen Lehrsätze auffassen:

2. Die Flächen von Dreiecken, die in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschliessenden Seiten. — (Beweis?)

3. Die Flächen ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Voraussetzung: $A_1B_1C_1D_1E_1 \ldots \sim A_2B_2C_2D_2E_2 \ldots$

Behauptung: $\frac{i_1}{i_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$.

Beweis: Zieht man in jedem der Vielecke von entsprechenden Ecken, z. B. A_1 und A_2, die Diagonalen, so ist nach dem vorigen Paragraphen und 1 dieses:

$$\frac{\triangle A_1B_1C_1}{\triangle A_2B_2C_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$$
$$\frac{\triangle A_1C_1D_1}{\triangle A_2C_2D_2} = \frac{c_1^2}{c_2^2}$$
$$\frac{\triangle A_1C_1D_1}{\triangle A_2C_2D_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2},$$

da nach Voraussetzg.: $\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$ ist.

Entsprechend findet man:

$$\frac{\triangle A_1D_1E_1}{\triangle A_2D_2E_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} \text{ u. s. f.}$$

also: $$\frac{\triangle A_1B_1C_1}{\triangle A_2B_2C_2} = \frac{A_1C_1D_1}{A_2C_2D_2} = \frac{A_1D_1E_1}{A_2D_2E_2} = \ldots = k,$$

wenn zur Abkürzung $\frac{a_1^2}{a_2^2} = k$ gesetzt wird.

Folglich ist:

$$\begin{array}{rl} & \triangle A_1B_1C_1 = k \,.\, A_2B_2C_2 \\ +) & \triangle A_1C_1D_1 = k \,.\, A_2C_2D_2 \\ +) & \triangle A_1D_1E_1 = k \,.\, A_2D_2E_2 \\ +) & \ldots = \ldots \\ \hline & A_1B_1C_1D_1E_1 \ldots = k \,.\, A_2B_2C_2D_2E_2 \ldots \end{array}$$

oder: $$\frac{A_1B_1C_1D_1E_1 \ldots}{A_2B_2C_2D_2E_2 \ldots} = \frac{a_1^2}{a_2^2}.$$

4. Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie zwei entsprechende Seiten.

(Beweis nach dem vorigen Muster.)

5. Zeichnet man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks als entsprechenden Seiten ähnliche Vielecke, so ist die Summe der Vielecke über den Katheten gleich demjenigen über der Hypotenuse.

Beweis?

§ 26. Proportionalität von Strecken im und am Kreise.

1. Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises, so ist das Produkt der Abschnitte der einen gleich dem Produkte der Abschnitte der anderen.

Beweis mit Hülfe zweier ähnlichen Dreiecke.

2. Liegt einer der Endpunkte zweier sich schneidenden Strecken nicht auf dem durch die drei anderen Endpunkte bestimmten Kreise, so sind die Produkte der Abschnitte nicht gleich.

3. Schneiden sich zwei Strecken so, dass das Produkt der Abschnitte beider gleich ist, so liegen die vier Endpunkte auf einem Kreise.

Wie lautet 1 für den besonderen Fall, dass

a. eine der Sehnen die andere halbiert,

b. eine der Sehnen auf der anderen senkrecht steht.

4. Schneiden sich zwei Sekanten eines Kreises, so sind die ganzen Sekanten ihren äusseren Abschnitten umgekehrt proportional. (Zwei Beweise.)

5. Schneidet eine Sekante eine Tangente desselben Kreises, so ist die Tangente mittlere Proportionale zwischen der ganzen Sekante und ihrem äusseren Abschnitt.

Wie lauten zu 4 und 5 die Gegensätze und Umkehrungen?

Zusammenfassung der Sätze 1, 4, 5 zu einem einzigen:

Wird ein Kreis von beliebig vielen durch denselben Punkt gehenden Geraden geschnitten, so ist das Produkt (Rechteck) aus den Abschnitten konstant.

Hierbei gelten Tangenten als Sekanten, deren Schnittpunkte zusammenfallen; die Abschnitte sind immer vom Schnittpunkt aus zu rechnen!

---

§ 27. Teilung einer Strecke nach dem goldenen Schnitt.

Zeichnet man die Figur zu No. 5 des vorigen Paragraphen so, dass der Durchmesser des Kreises M gleich der Tangente AB ist, so hat man in Bezug auf die durch M gehende Sekante AD (C auf AD):

$$AB^2 = AC \cdot AD$$

oder wegen der Voraussetzung $AB = CD$:

$$CD^2 = AC \cdot AD,$$

d. h. die Strecke AD wird in C so geteilt, dass der grössere Abschnitt mittlere Proportionale zwischen dem kleineren und der ganzen Strecke ist. — Eine solche Teilung heisst die Teilung nach goldenem Schnitt (oder nach stetiger Proportion).

1. Trägt man den kleineren Abschnitt einer nach goldenem Schnitt geteilten Strecke auf dem grösseren ab, so wird auch dieser nach goldenem Schnitt geteilt.

Voraussetzung: $a^2 = s\,(s - a)$ (s bedeutet die Strecke, a den grösseren Abschnitt).

Behauptung: $(s - a)^2 = a\,(2\,a - s)$.

Beweis: Durch Ausrechnung erhält die Behauptung die Form:

$$s^2 - 2\,as + a^2 = 2\,a^2 - as$$

$$\text{oder:}\quad s^2 - as = a^2,$$

was dasselbe ist wie die Voraussetzung:

$$a^2 = s\,(s - a).$$

Es lassen sich demnach aus einer nach goldenem Schnitt geteilten Strecke unzählig viele von derselben Beschaffenheit ableiten, sowohl durch wiederholte Abtragung des kleineren Abschnitts auf dem grösseren, als auch durch Verlängerung um den grösseren.

Aufgabe: Eine gegebene Strecke AB soll nach dem goldenen Schnitt geteilt werden.

Konstruktion: Ich errichte auf AB in dem einen Endpunkte B die Senkrechte $BM = \frac{AB}{2}$, beschreibe um M mit MB den Kreis und verbinde A mit M. Trage ich den äusseren Abschnitt AC = AE auf AB ab, so ist E der gesuchte Teilpunkt.

Beweis? —

Verbindet man den Schnittpunkt D der Sekante mit B, so lässt sich das Teilungsverhältnis auch durch die Parallele durch C zu BD auf AB übertragen.

2. Trägt man die Seite eines regelmässigen Zehnecks auf dem Radius des umbeschriebenen Kreises ab, so wird er nach stetiger Proportion geteilt.

Zum Beweise vergleiche Übungsstoff § 4 No. 12.

Aufgabe: In einen gegebenen Kreis ein regelmässiges Zehneck zu zeichnen.

Konstruktion des Bestimmungsdreiecks; Beweis, dass der Centriwinkel 36^0 werden muss.

Da $60^0 - 36^0 = 24^0 = \frac{360^0}{15}$ ist, so lässt sich auch das regelmässige Fünfzehneck mit Lineal und Zirkel konstruieren. —

Die Konstruktion eines regelmässigen n-Ecks ist gleichbedeutend mit der Teilung des Kreises in n gleiche Teile.

Diese Aufgabe ist nach den bisherigen Erörterungen gelöst für die Fälle $n = 4, 6, 10, 15$. Hieran schliessen sich noch die Fälle, die sich durch fortgesetzte Verdoppelung bezw. Halbierung aus ihnen ergeben. Demnach ist die Kreisteilung in 2^n, $3 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$ Teile (auf dem jetzigen Standpunkte) ausführbar, wo n die Werte aller ganzen Zahlen von 0 an durchlaufen kann. Wie führt man die zugehörigen Zeichnungen aus? — Wie gelangt man zu den betreffenden dem Kreise umbeschriebenen Figuren?

§ 28. Berechnung des Kreisumfangs und -Inhalts.

Die Berechnung des Kreisumfangs aus dem Radius ist möglich, wenn man den Kreis als Grenze eines ihm ein- oder umbeschriebenen regelmässigen Vielecks betrachtet. Beachtet man, dass eine Sehne sich dem kleineren der zu ihr gehörigen Bogen um so mehr anschmiegt, je kürzer sie ist, so kann man den Umfang eines dem Kreise einbeschriebenen regelmässigen Vielecks um so genauer dem Umfange des Kreises gleichsetzen, je grösser die Seitenzahl des Vielecks ist. Völlige Genauigkeit ist dabei allerdings unmöglich; wohl aber kann man dieselbe soweit treiben, wie man will.

1. Zur Berechnung des Umfangs können die beiden nachstehenden Hülfsaufgaben angewandt werden:

I. Aus dem Radius r eines Kreises und der Seite s des ihm einbeschriebenen regelmässigen n-Ecks die Seite x des einbeschriebenen regelmässigen 2 n-Ecks zu berechnen.

Auflösung: Fällt man von M auf die Seite AB des n-Ecks das Lot MC, das den Kreis in D schneidet, so ist $BD = x$. Es besteht dann die Gleichung:

$$x^2 = 2r \cdot CD. \quad \text{(Weshalb?)}$$

Da nun $CD = r - MC$

und $MC = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$ ist (weshalb?),

so ergiebt sich: $x^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}\right)$

oder:

$$x = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}\right)}$$
$$= \sqrt{2r^2 - r\sqrt{(2r + s)(2r - s)}}.$$

II. Aus dem Radius r eines Kreises und der Seite s des demselben einbeschriebenen regelmässigen n-Ecks die Seite y des ihm umbeschriebenen regelmässigen n-Ecks zu berechnen.

Auflösung? — Endergebnis:

$$y = \frac{r \cdot s}{\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}} = \frac{2\,r \cdot s}{\sqrt{(2\,r + s)\,(2\,r - s)}}.$$

Zur Berechnung des Kreisumfangs genügt schon die erste dieser Aufgaben. Beginnt man z. B. mit dem regelmässigen Sechseck (Seite $s_6 = r = \frac{1}{2}$), so berechnet man zunächst s_{12}, aus dieser wieder s_{24} u. s. f. Es ist $s_{96} = 0{,}0327$, daher der Umfang $u_{96} = 3{,}141$. Der Umfang des Kreises ist grösser (weshalb), als alle diese Werte für u. Für viele Zwecke reicht aber eine Genauigkeit bis zur zweiten Decimale aus. Man hat also zu merken, dass der Umfang des Kreises vom Durchmesser 1:

$$3{,}14 = \pi$$

ist (π griechischer Buchstabe für p, Anfangsbuchstabe von Peripherie).

In manchen Fällen rechnet man mit $\pi = 3\frac{1}{7}$ bequemer; ist grössere Genauigkeit erforderlich, nimmt man $\pi = 3{,}141\overline{6}$ (π ist eine Irrationalzahl). Berechnet man mit Hülfe der Aufgabe II die Seiten der entsprechenden regelmässigen Vielecke, die dem Kreise umbeschrieben sind: S_6, S_{12}, S_{96} . . . und daraus jedesmal den Umfang, so sind diese Werte immer grösser als der Umfang des Kreises, nähern sich aber immer mehr dem letzteren. Die Berechnung des obigen genaueren Wertes für π $(3{,}141\overline{6})$ auf dem hier angegebenen Wege ist für logarithmische Rechnung unbequem und ziemlich zeitraubend. Gewisse andere Methoden führen schneller zum Ziel; das kürzeste Verfahren beruht auf der Anwendung trigonometrischer Funktionen.

Z. B. hat man im Bestimmungsdreieck des regelmässigen 600-Ecks:

$$\sin \frac{360}{2 \cdot 600} = \sin 18' = \frac{s_{600}}{2\,r},$$

$$\text{oder:} \quad s_{600} = 2\,r \cdot \sin 18'$$

$$\text{daher:} \quad u_{600} = 2\,r \cdot 600 \cdot \sin 18'$$

Für $600 \cdot \sin 18'$ findet man: $3{,}141\overline{6}$.

Allgemein ist demnach der Umfang des Kreises vom Radius r:

$$\textbf{1.}\quad u = 2\,r\pi.$$

Dass im allgemeinen Falle π mit dem Durchmesser zu multiplicieren ist, ergiebt sich auch aus dem Satze: Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie irgend zwei entsprechende Strecken. —

Wie der Umfang des Kreises näherungsweise durch den Umfang eines regelmässigen Vielecks von grosser Seitenzahl angegeben werden kann, so lässt sich auch der Flächeninhalt des Kreises mit beliebiger Genauigkeit durch denjenigen des Vielecks berechnen.

2. Der Inhalt des Vielecks ist nach § 18:

$$i = \frac{\rho \cdot u}{2} \quad (\rho \text{ ist der kleine Radius}).$$

Bei grosser Seitenzahl ist aber ρ von r nur wenig verschieden. Der Flächeninhalt des Kreises ist daher:

$$i = \frac{r \cdot u}{2}.$$

Setzt man hier $u = 2\,r\pi$, so ergiebt sich:

$$\mathbf{2.}\quad \mathbf{i = r^2 \cdot \pi.}$$

Aus den Formeln: $u = 2\,r\pi$, $i = r^2\pi$ folgt durch Auflösung für r bezw.:

$$r = \frac{u}{2\,\pi}, \quad r = \sqrt{\frac{i}{\pi}}.$$

Beweise, dass

$$u = 2\sqrt{i\,\pi}, \quad i = \frac{u^2}{4\,\pi} \text{ ist.}$$

3. Für die Fläche eines Kreisringes hat man:

$$f = (r_1^2 - r_2^2)\,\pi = (r_1 + r_2)\,(r_1 - r_2)\,\pi,$$

wenn r_1 den Radius des grösseren Begrenzungskreises, r_2 den des kleineren bezeichnet.

---

4. **Zwei Bogen eines Kreises verhalten sich wie die zu ihnen gehörigen Centriwinkel.**

Beweis? — Welche Fälle sind zu unterscheiden?

Auf diesem Satz beruht die Berechnung der Länge eines beliebigen Bogens b; denn es ist:

$$\frac{b}{2\,r\pi} = \frac{\alpha}{360} \quad (\alpha \text{ bedeutet den zu b gehörigen Centriwinkel})$$

oder

$$b = \frac{2\,r\pi\alpha}{360} = \frac{r\pi\alpha}{180}.$$

Umgekehrt lässt sich aus der Bogenlänge und dem Centriwinkel der Radius des Kreises berechnen:

$$r = \frac{180\ b}{\alpha\,\pi};$$

ferner aus Bogenlänge und Radius der Centriwinkel:

$$\alpha = \frac{180\ b}{r\,\pi}.$$

Das von einem Bogen und den Radien nach seinen Endpunkten begrenzte Flächenstück eines Kreises heisst Kreisausschnitt (Sektor).

5. **Sektoren eines Kreises sind ihren Centriwinkeln, also auch ihren Bogen proportional.**

Soll ein Sektor x aus seinem Centriwinkel und dem Radius berechnet werden, so benutzt man die Proportion:

$$\frac{x}{r^2\pi} = \frac{\alpha}{360},$$

woraus sich ergiebt:

$$x = \frac{r^2\pi\,\alpha}{360}.$$

Ist dagegen der Bogen und Radius gegeben, so hat man:

$$\frac{x}{r^2\pi} = \frac{b}{2\ r\pi}$$

$$x = \frac{b\,r^2\pi}{2\,r\pi} = \frac{b\,r}{2},\ \text{d. h.:}$$

6. **Der Sektor ist gleich einem Dreieck, das die Bogenlänge als Grundlinie, den Radius als Höhe hat.** — Löse die obigen Gleichungen für die anderen in ihnen vorkommenden Grössen auf!

Das von einem Bogen und der zugehörigen Sehne begrenzte Flächenstück eines Kreises heisst Kreisabschnitt (Segment).

7. Der Flächeninhalt eines solchen ergiebt sich durch Subtraktion des Dreiecks MAB von dem Sektor.

Sind r und α gegeben, so ist der Inhalt des Dreiecks MAB, wenn r als Grundlinie gewählt wird:

$$\frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2},\ \text{folglich}$$

$$\text{Segment (AB)} = \frac{r^2\pi\,\alpha}{360} - \frac{r^2\sin\alpha}{2} = \frac{r^2(\pi\alpha - 180\sin\alpha)}{360}$$