Die

planimetrische Lehraufgabe

für

Ober-Tertia und Unter-Sekunda des Realgymnasiums.

Von

Dr. Reinbeck, Oberlehrer.

Beilage zum 31. Jahresbericht

des Realprogymnasiums zu Uelzen.

Ostern 1900.

Uelzen 1900.
C. Beckers Buchdruckerei (v. Sterns Nachfolger).

VI. Kapitel. Lehre von der Proportionalität.

§ 20. Verhältnisse und Proportionen.

Vergleicht man zwei Strecken (Winkel, Flächenstücke u. s. w.) mit einander, z. B. 2 cm und 6 cm, so lässt sich das Ergebnis in doppelter Beziehung ausdrücken:

1) Die längere Strecke ist um 4 cm grösser als die kleinere,
2) die längere Strecke ist dreimal so gross wie die kleinere.

Im Falle 1) ist die Differenz der Masszahlen, in 2) ihr Quotient gebildet. Zu beachten ist, dass hier bei 1) eine benannte, bei 2) eine unbenannte Zahl auftritt. — Geometrische Deutung der beiden eben angewandten Rechnungsarten.

Im Falle 2) drückt man sich auch oft so aus: Das Verhältnis der grösseren Strecke zur kleineren ist 3.

Das Verhältnis zweier Strecken a und b kann nun sein:

1) eine ganze Zahl,
2) ein Bruch, und zwar
a. ein echter,
b. „ unechter (eine gemischte Zahl).

Ist ein Verhältnis in der besonderen Form eines Decimalbruches gegeben, so stellt man denselben als gewöhnlichen Bruch dar, z. B. $\frac{a}{b} = 0{,}75 = \frac{3}{4}$, woraus man erkennt, dass der dritte Teil von a sich viermal auf b abtragen lässt (oder auch?).

Ist der Decimalbruch ein periodischer, z. B.:

$$\frac{a}{b} = 0{,}15\ 15\ \ldots \quad \text{(Periode 15)},$$

so bezeichnet man denselben durch x und bildet:

$$\begin{array}{rl} 100\ x &= 15,\ 15\ \ldots \\ -)\quad x &= 0,\ 15\ \ldots \\ \hline 99\ x &= 15 \\ x &= \frac{15}{99} = \frac{5}{33}, \quad \text{also} \\ \frac{a}{b} &= \frac{5}{33}. \end{array}$$

Auch die Umwandlung unrein-periodischer Decimalbrüche gelingt nach dem vorigen Muster, z. B.:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{a}{b} & = & 0{,}2 \mid 15 \mid 15\,. \quad = x \\
100\,x & = & 21{,}5 \mid 15 \mid \,. \\
-)\quad x & = & 0{,}2 \mid 15 \mid \,. \\
\hline
99\,x & = & 21{,}3 \\
33\,x & = & 7{,}1 \\
x & = & \frac{71}{330}.
\end{array}$$

Früher (§ 10) wurde die Aufgabe gelöst: Eine gegebene Strecke in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu zerlegen. Teile AB in fünf gleiche Strecken (AC = CD = DE = EF = FB) und gieb die Grösse der Verhältnisse $\frac{AC}{AB}$, $\frac{AD}{DB}$, $\frac{CE}{CB}$, $\frac{CF}{EB}$ u. s. w. in Zahlen an!

Löse hiernach die Grundaufgabe: Eine gegebene Strecke AB im Verhältnis $\frac{2}{5}$ (oder in irgend einem anderen vorgeschriebenen Verhältnis) zu teilen.

Wieviele Teilpunkte findet man in jedem einzelnen Falle? — Giebt es auf der Verlängerung von BA einen Punkt X, so dass $\frac{XA}{XB} = \frac{2}{5}$ ist? — Innere und äussere Teilung der Strecke AB. AB heisst harmonisch geteilt, wenn das Verhältnis der inneren Abschnitte gleich dem der äusseren ist.

Besteht eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen, so heisst eine solche eine Proportion, z. B.: $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$ (zu lesen: 3 verhält sich zu 7 wie 6 zu 14, oder kurz 3 zu 7 wie 6 zu 14).

Wieviele Verhältnisse haben denselben Wert wie das erste und wie lassen sie sich alle aus diesem ableiten?

Eine Proportion enthält vier Glieder, die der Reihe nach numeriert werden (1., 2., 3., 4. Proportionale). Man unterscheidet äussere (3,14) und innere Glieder (7,6). Wieviele Glieder einer Proportion dürfen willkürlich gewählt werden? — Die unbekannte Proportionale wird durch Auflösung der betreffenden Gleichung gefunden, z. B.:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{2}{5} & = & \frac{9}{x} \\
.)\ 5\,x & = & 5\,x \\
\hline
2\,x & = & 5 \cdot 9 \\
x & = & \frac{45}{2} = 22\tfrac{1}{2}.
\end{array}$$

1. In jeder Proportion muss das Produkt der äusseren Glieder gleich dem der inneren sein. (Produktgleichung.)

Haben zwei Proportionen dieselbe Produktgleichung, so sagen sie dasselbe aus. Bildet man daher etwa aus der Produktgleichung

$$4 \cdot 9 = 3 \cdot 12$$

alle zu ihr gehörigen Proportionen, so lässt sich leicht erkennen, wie die Glieder einer Proportion mit einander vertauscht werden dürfen:

1. $4 : 3 = 12 : 9$
2. $4 : 12 = 3 : 9$
3. $9 : 3 = 12 : 4$
4. $9 : 12 = 3 : 4$
5. $3 : 4 = 9 : 12$
6. $3 : 9 = 4 : 12$
7. $12 : 4 = 9 : 3$
8. $12 : 9 = 4 : 3.$

2. Die inneren Glieder dürfen unter sich, ebenso die äusseren unter sich vertauscht werden, ferner darf man die inneren zu äusseren machen und umgekehrt.

Dagegen ist eine Vertauschung eines äusseren Gliedes mit einem inneren falsch. — Beweise den Satz:

3. Stimmen in zwei Proportionen drei gleichstellige Glieder überein, so sind auch die übrigen Glieder gleich.

Voraussetzung: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sei richtig (oder $ad = bc$).

Behauptung: $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$ ist auch richtig.

Beweis? — Beweise unter derselben Voraussetzung, dass

1. $\frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}.$
2. $\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}.$

Eine Proportion von der Form:

$$a : b : c = d : e : f$$

heisst eine fortlaufende. Eine solche ist nur eine Abkürzung für die beiden Proportionen:

$$a : b = d : e$$
$$b : c = e : f.$$

Ist das Verhältnis zweier Zahlen bekannt (z. B. $\frac{3}{5}$), so kennt man damit die Zahlen selbst noch nicht, aber es ist sicher, dass sie die Form haben: 3 x bezw. 5 x, wenn mit x der Faktor bezeichnet wird, der in dem Verhältnis durch Heben fortgefallen ist.

Ist allgemein:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = k,$$

wo k eine feste Zahl (den sog. Proportionalitätsfaktor) bedeutet, so kann man auch setzen:

$$a_1 = k b_1,\ a_2 = k b_2, \ldots$$

Ist

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = \ldots = k,$$

so heissen die Zahlen a den Zahlen b umgekehrt proportional, während man sie im vorigen Falle direkt proportional nennt.

Vergleiche die Flächen zweier Parallelogramme (Dreiecke) mit derselben Grundlinie, wenn die Höhe des einen doppelt, dreimal etc. so gross ist wie die des anderen. Drücke das Ergebnis durch Proportionen aus!

4. Parallelogramme (Dreiecke) mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie die zu diesen gehörigen Höhen.

Beweis:

$$\begin{array}{rcl} i_1 &=& g \cdot h_1 \\ i_2 &=& g \cdot h_2 \\ \hline \dfrac{i_1}{i_2} &=& \dfrac{h_1}{h_2} \end{array} \qquad\Bigg|\qquad \begin{array}{rcl} 2\, i_1 &=& g \cdot h_1 \\ 2\, i_2 &=& g \cdot h_2 \\ \hline \dfrac{i_1}{i_2} &=& \dfrac{h_1}{h_2} \end{array}$$

Wie lautet der entsprechende Satz unter der Voraussetzung gleicher Höhen?

Deute die Produktgleichung:

$$g_1 \cdot h_1 = g_2 \cdot h_2$$

geometrisch! — Die dazu gehörige Proportion lautet:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{h_2}{h_1}, \text{ d. h.:}$$

5. Haben zwei Parallelogramme denselben Inhalt, so verhalten sich ihre Grundlinien umgekehrt wie die zu ihnen gehörigen Höhen.

Gilt derselbe Satz auch für zwei Dreiecke von gleicher Grösse? —

6. In jedem Dreieck (Parallelogramm) verhalten sich zwei Seiten umgekehrt wie die zu ihnen gehörigen Höhen.

Beweis: Für irgend ein Dreieck ist

$$\begin{array}{r} 2i = a \cdot h_a \quad \text{und} \\ 2i = b \cdot h_b \\ \hline a \cdot h_a = b \cdot h_b \quad \text{oder} \end{array}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$$

Ist also das Verhältnis zweier Höhen vorgeschrieben, so kennt man auch das Verhältnis der zugehörigen Dreiecksseiten.

---

§ 21. Proportionalität von Strecken beim Dreieck.

Ziehe im Dreieck ABC durch die Mitte D von AC zu AB die Parallele DE. Welchen Wert hat das Verhältnis $\frac{CD}{AD}$? Welches andere Verhältnis hat denselben Wert? Welche Proportion ist demnach richtig?

Es fragt sich, ob diese Proportion auch Gültigkeit hat, wenn D nicht gerade die Mitte von AC ist. Zunächst leuchtet ein, dass es der Fall ist, wenn AC in eine beliebige Anzahl gleicher Teile (z. B. 5) zerlegt wird und D einen der Teilpunkte (z. B. den zweiten von C aus gerechnet) darstellt. Denn es verhält sich:

$$\begin{array}{rl} & \frac{CD}{DA} = \frac{2}{3} \; \left(\frac{m}{n}\right) \\ \text{und} & \frac{CE}{EB} = \frac{2}{3} \; \left(\frac{m}{n}\right) \quad \text{(nach § 10, No. 8)} \\ \hline & \frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB} \quad \text{(Grds. 1).} \end{array}$$

Wählt man D beliebig auf AC, so sind zwei Fälle denkbar:

1) Es giebt für CD und DA ein gemeinschaftliches Mass.
2) Es giebt kein solches.

Im ersten Falle passt der vorige Beweis.

Im zweiten Falle denkt man sich CD in m gleiche Strecken geteilt und $\frac{CD}{m}$ auf DA abgetragen.

Nach der Annahme kann A nicht mit einem Endpunkte der abgetragenen Strecke zusammenfallen. A soll z. B. zwischen F, dem n^{ten} und G, dem $(n + 1)^{\text{ten}}$ Teilpunkte liegen. Denkt man sich ferner durch alle diese Teilpunkte zu AB die Parallelen gezogen (durch F FH, durch G GJ), so ist nach dem Vorigen:

$$\frac{CD}{DF} = \frac{CE}{EH}.$$

DF unterscheidet sich von DA um so weniger, je grösser n gewählt wird, ebenso EH von EB. Unter Voraussetzung einer sehr grossen Zahl m darf man also mit grosser Annäherung DF durch DA, EH durch EB ersetzen; daher ist auch jetzt:

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}.$$

Ganz entsprechend schmiegt sich G dem Punkte A, J dem Punkte B und damit GJ der Dreiecksseite AB an.

Übrigens ist die Proportion:

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB} \text{ oder } \frac{DA}{CD} = \frac{EB}{CE}$$

nicht nur angenähert, sondern genau richtig. Denn es ist zugleich:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n}{m} < \frac{DA}{CD} < \frac{n+1}{m} \\ \frac{n}{m} < \frac{EB}{CE} < \frac{n+1}{m} \end{array}\right\} = \frac{n}{m} + \frac{1}{m}$$

d. h. jedes der Verhältnisse liegt zwischen zwei Werten eingeschlossen, deren Unterschied $\frac{1}{m}$ unter jede angebbare Grösse sinkt.

Eine Zahl, die man mit Hülfe von ganzen Zahlen und Brüchen nie völlig genau, aber mit beliebiger Annäherung angeben kann, heisst eine Irrationalzahl. Im Gegensatz dazu nennt man die ganzen Zahlen und Brüche (gemischte Zahlen) rationale Zahlen.

Allgemein gilt der Satz:

1. Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine parallele Transversale, so werden die beiden anderen Seiten in demselben Verhältnis geteilt.

Ausser I. $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$ (Verhältnis der Abschnitte unter sich)

sind noch zu merken: II. $\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}$ (Verhältnis des oberen Abschn. zur ganzen Seite)

und III. $\frac{DA}{CA} = \frac{EB}{BC}$ (Verhältnis des unteren Abschn. zur ganzen Seite).

Den Beweis des Satzes (1) kann man auch mit Hülfe der Flächenvergleichung führen: Verbindet man A mit E und B mit D, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle DAE = \triangle EBD \\ \frac{\triangle CDE}{\triangle DAE} = \frac{CD}{DA} \\ \frac{\triangle CDE}{\triangle EBD} = \frac{CE}{EB} \end{array}\right\} \text{(Grund?)}$$

$$\overline{}$$

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}.$$

Bilde aus den Proportionen I—III alle diejenigen, die sich von ihnen nur durch die Stellung der Glieder unterscheiden. —

Voraussetzung: DF nicht parallel zu AB.

Behauptung: $\frac{CD}{DA} \lessgtr \frac{CF}{FB}$.

Beweis: Zieht man durch D zu AB die Parallele DE, so ist:

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$$

$$\frac{CF}{FB} \lessgtr \frac{CE}{EB},$$

da sich mit der Lage eines Punktes auf BC auch das Teilungsverhältnis von BC ändert; also muss auch

$$\frac{CD}{DA} \lessgtr \frac{CF}{FB}$$

sein. Demnach ist der Gegensatz zu (1) richtig.

2. Umkehrung: Teilt man zwei Dreiecksseiten von dem gemeinschaftlichen Eckpunkt aus in demselben Verhältnis, so ist die Verbindungslinie der Teilpunkte der dritten Seite parallel.

Was ist früher von der Verbindungsstrecke der Mitten zweier Dreiecksseiten bewiesen? Gieb diesem Satz die Form einer Proportion.

Jetzt soll untersucht werden, ob allgemein unter der

Voraussetzung: $DE \parallel AB$

die Behauptung: $\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA}$ gültig ist.

Beweis: Zieht man durch D zu BC die Parallele DG, so ist DE = BG (Grund?) und

$$\frac{BG}{AB} = \frac{CD}{CA}$$

oder

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA},$$

d. h.:

3. Zieht man zu einer Dreiecksseite eine parallele Transversale, so verhält sich diese zu jener Seite wie der obere Abschnitt einer der anderen Seiten zu dieser ganzen Seite.

Beschreibt man um D mit DE als Radius einen Kreisbogen, so kann dieser BC in einem zweiten Punkte F schneiden, und es ist dann DF nicht parallel zu AB, aber trotzdem:

$$\frac{DF}{AB} = \frac{CD}{CA},$$

d. h. der Gegensatz zu (3) ist nicht allgemein richtig. Deshalb ist auch die zugehörige Umkehrung nicht gültig. Richtig ist aber die Umkehrung: Werden durch zwei Punkte A und B eines Strahles (Anfangspunkt S) zwei parallele Strecken AC und BD gezogen, so dass $\frac{AC}{BD} = \frac{SA}{SB}$, so liegen S, C und D in gerader Linie.

Auf den Sätzen (1) und (3) beruhen verschiedene Grundkonstruktionen der vierten Proportionale:

Gegeben sind drei Strecken a, b, c.

Gesucht wird eine vierte, so dass

$$a : b = c : x.$$

Nimmt man b = c, so handelt es sich um die Konstruktion der dritten Proportionale zu a und b.

Im gleichschenkligen Dreieck ist w_γ zugleich m_c, oder: Halbiert man den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, so verhalten sich die Abschnitte der Basis wie die Schenkel.

Allgemein gilt der Satz:

4. Die Halbierungslinie jedes Dreieckswinkels teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Voraussetzung: $\gamma_1 = \gamma_2$ (Abkürzung für ACD = BCD).

Behauptung: AD : DB = AC : BC.

Beweis: Zieht man BE ∥ AC (E bedeutet den Schnittpunkt mit der Verlängerung von AC), so ist:

$$\left.\begin{array}{l} \angle\, CBE = \gamma_2 \\ \angle\, CED = \gamma_1 \end{array}\right\} \text{(Grund?)}$$

$$\angle\, CBE = CED \quad \text{(Grund?)}$$

Daher muss auch CE = CB sein.

Da ferner:

$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CE}$ ist, so ergiebt sich durch

Einsetzung: $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$.

Führe den Beweis auf eine zweite Art mittels der Parallele DF zu BC!

Weshalb ist auch der Gegensatz zu (4) richtig?

Die Umkehrung lautet:

5. Teilt man eine Dreiecksseite im Verhältnis der anliegenden Seiten, so wird der gegenüberliegende Winkel durch

die Verbindungslinie seines Scheitels mit dem Teilungspunkt halbiert.

Beweise die Umkehrung direkt, d. h. ohne Bezug auf den Gegensatz.

Für die Halbierungslinie jedes Aussenwinkels gilt ein entsprechender Satz.

Beide Sätze lassen sich zu einem einzigen zusammenfassen:

6. Die Halbierungslinien eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die gegenüberliegende Seite harmonisch.

Welche Lage haben die beiden Halbierungslinien zu einander? —

Zeichnet man über einer Strecke AB als Seite beliebig viele Dreiecke ABC_1, ABC_2 etc., deren andere Seiten jedesmal dasselbe Verhältnis m : n haben, so müssen nach dem Vorigen die Halbierungslinien aller Winkel C_1, C_2 . . . durch denselben Punkt D auf AB gehen, die Halbierungslinien aller Aussenwinkel C_1, C_2 . . . durch einen festen Punkt E auf der Verlängerung von AB. — Wo liegen demnach alle Punkte C_1, C_2 . . . in Bezug auf DE?

Hat man aber ein Dreieck ABP, so dass nicht $\frac{AP}{BP} = \frac{m}{n}$ so gehen die Halbierungslinien der Winkel bei P nicht durch D bezw. E. Ändert sich also das Verhältnis der beiden Seiten, so liegen die dritten Ecken aller solchen Dreiecke nicht mehr auf dem Kreise über DE als Durchmesser.

Daher gilt auch umgekehrt:

7. Teilt man eine Strecke AB harmonisch in irgend einem Verhältnis und beschreibt über der Entfernung der Teilpunkte als Durchmesser den Kreis, so haben die Entfernungen aller Punkte dieses Kreises von A und B dasselbe Verhältnis. (Apollonischer Kreis.)

8. Zwei Mittellinien eines Dreiecks teilen sich in demselben Verhältnis. Das Verhältnis ihrer Abschnitte ist 1 : 2.

Voraussetzung: AD = DC, BE = EC.

Behauptung: $\frac{SD}{SB} = \frac{SE}{SA} = \frac{1}{2}$.

Beweis: Trägt man SD = SF auf SB, SE = SG auf SA ab und verbindet D mit E, G mit F, so ist:

$$\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} DE \parallel FG \\ DE \parallel AB \end{array}\right\} \text{(Grund?)} \\ \hline FG \parallel AB. \end{array}$$

Ferner ist:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{1}{2} \quad \text{(Grund?)}$$

und da auch

$$\frac{DE = FG}{\frac{FG}{AB} = \frac{1}{2}.}$$

Im Dreieck ABS ist nun:

$$\frac{SG}{SA} = \frac{FG}{AB},$$

folglich auch:

$$\frac{SG}{SA} = \frac{1}{2},$$

d. h.: SG (oder SE) lässt sich auf SA zweimal abtragen. Entsprechend ist BS = 2 DS.

Zusatz zu 8. Die drei Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich in demselben Punkte. Dieser heisst (aus physikalischen Gründen) der Schwerpunkt des Dreiecks.

Wiederhole die Sätze von den bisher erwähnten drei besonderen Punkten des Dreiecks!

Was bleibt von dem letzten Beweise unverändert, wenn man nur voraussetzt, dass DE ∥ AB ist? Was ist der Fall, wenn DE nicht parallel zu AB ist?

Zwei Ecktransversalen, die nicht Mittellinien sind, können sich demnach wohl in demselben Verhältnis teilen, aber nicht in dem besonderen 1 : 2.

9. Umkehrung: Teilen sich zwei Ecktransversalen im Verhältnis 1 : 2, so sind sie Mittellinien.

Beweise den letzten Satz auch direkt.

Der Satz (8) des § 10 lautet verallgemeinert:

Trägt man auf einer geraden Linie beliebig viele unter sich gleiche Strecken ab und zieht durch die Endpunkte Parallelen, so schneiden diese auf jeder anderen Gerade gleiche Strecken ab.

Die Verallgemeinerung besteht darin, dass 1) die Abtragung der gleichen Strecken nicht vom Schnittpunkt der beiden Geraden zu erfolgen braucht, 2) dass die Parallelen auf beiden Seiten des Schnittpunktes auftreten können. Beweis?

Auf dieser allgemeinen Grundlage in Verbindung mit (1) und (3) dieses Paragraphen beruhen die nachstehenden Lehrsätze:

10. Werden gerade Linien von drei oder mehreren Parallelen durchschnitten, so ist das Verhältnis irgend zweier

Abschnitte auf der einen gleich dem der entsprechenden auf jeder anderen. (Oder: Die Abschnitte aller geschnittenen Geraden sind proportioniert. — Das Verhältnis zweier Abschnitte einer Gerade wird durch Parallelprojektion auf jede andere übertragen.)

Erklärung: Die Gesamtheit aller von demselben Punkt ausgehenden Strahlen heisst ein Strahlenbüschel, der gemeinsame Punkt sein Scheitel.

11. Parallele Strecken zwischen denselben Geraden eines Strahlenbüschels verhalten sich wie die zugehörigen vom Scheitel gerechneten Abschnitte einer dieser Geraden.

12. Strahlen eines Büschels schneiden Parallele in proportionierten Abschnitten. (Durch Scheitelprojektion wird das Verhältnis zweier Abschnitte einergeraden Linie auf jede Parallele zu der letzteren übertragen.)

Aus 10 und 11 folgt ohne weiteres die Richtigkeit des Satzes:

13. Zieht man zu einem Durchmesser des einen zweier Kreise im anderen einen parallelen Radius, so wird die Centrale durch die Verbindungslinien der Endpunkte harmonisch geteilt, und zwar im Verhältnis der Radien.

Auf 13 beruhen die bequemsten Lösungen der Grundaufgaben:

I. **Eine gegebene Strecke in einem vorgeschriebenen Verhältnis harmonisch zu teilen.**

II. **An zwei gegebene Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten zu legen.**

Bei No. II braucht man nur von dem äusseren bezw. inneren Teilungspunkte an einen der Kreise die Tangente zu konstruieren. — Beweise, dass diese auch für den anderen Kreis Tangente ist.

Erörterung der einzelnen Fälle für die verschiedenen Lagen der Kreise.

§ 22. Ähnlichkeit der Dreiecke.

Die Kongruenz zweier Dreiecke bedeutet ihre völlige Übereinstimmung, d. h. sowohl in der Grösse als auch in der Gestalt. Stimmen zwei Dreiecke nur in der Grösse überein, so sagt man, sie seien inhalts- oder flächengleich oder kurz gleich; stimmen sie nur in der Gestalt überein, so sagt man, sie seien einander ähnlich. Eine schärfere Abgrenzung erhält der Begriff der Ähnlichkeit durch die

Erklärung: Zwei Dreiecke heissen ähnlich ($\sim$), wenn in ihnen sämtliche Winkel und alle Seitenverhältnisse paarweise gleich sind.

Bei welcher Gelegenheit waren alle diese Bedingungen erfüllt?

Jede zu einer Dreiecksseite parallele Transversale schneidet ein Dreieck ab, das dem ganzen ähnlich ist.

Sind die oben geforderten sechs Bedingungen von einander ganz unabhängig?

1.	$\alpha_1 = \alpha_2$	4.	$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$
2.	$\beta_1 = \beta_2$	5.	$c_1 : c_2 = b_1 : b_2$
3.	$\gamma_1 = \gamma_2$	6.	$a_1 : a_2 = c_1 : c_2$

Jetzt wird sich herausstellen, dass auch diese vier scheinbar unabhängigen Bedingungen sich noch um zwei vermindern. Wie dies zu verstehen ist, lehren die Ähnlichkeitssätze:

1. Ähnlichkeitssatz: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkelpaaren überein, so sind sie ähnlich.

Voraussetzung: 1. $\alpha_1 = \alpha_2$. 2. $\beta_1 = \beta_2$.

Behauptung: $\left\{\begin{array}{ll} (3.\ \gamma_1 = \gamma_2). & 4.\ a_1 : a_2 = b_1 : b_2. \\ 5.\ b_1 : b_2 = c_1 : c_2. & (6.\ a_1 : a_2 = c_1 : c_2.) \end{array}\right\}$

oder: $\triangle A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$.

Beweis: Trägt man $C_1D = C_2A_2$ auf C_1A_1 ab und zieht durch D zu AB die Parallele DE, so ist in den Dreiecken DEC_1 und $A_2B_2C_2$:

$$\begin{array}{ll} 1. & C_1D = C_2A_2 \\ 2. & \angle C_1 = C_2 \\ 3. & \angle C_1DE = A_2 \quad \text{(Grund?)} \\ \hline \end{array}$$

$\triangle DEC_1 \cong A_2B_2C_2$ nach d. 1. Kongruenzs.

Nach dem vorhergegangenen Satze ist ferner:

$$\triangle DEC_1 \sim A_1B_1C_1;$$

folglich ist auch:

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2.$$

2. Ähnlichkeitssatz: Stimmen zwei Dreiecke in einem Winkel und dem Verhältnis der ihn einschliessenden Seiten überein, so sind sie ähnlich.

Voraussetzung: $\gamma_1 = \gamma_2$; $\dfrac{A_1C_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2C_2}{B_2C_2}$.

Behauptung: $\triangle A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$.

Beweis: Zieht man $DE \parallel A_1C_1$, so dass $C_1D = C_2A_2$ ist, so besteht für das Dreieck $A_1B_1C_1$ die Proportion:

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{C_1D}{C_1E};$$

ferner ist nach Vor.: $$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{A_2C_2}{B_2C_2}$$

$$\overline{}$$
$$C_1E = B_2C_2,$$

da alle anderen gleichstelligen Glieder gleich sind.

In den Dreiecken DEC_1 und $A_2B_2C_2$ ist nun:

1. $C_1D = C_2A_2$
2. $C_1E = B_2C_2$
3. $\angle C_1 = C_2$

$$\triangle DEC_1 \backsim A_2B_2C_2$$

nach dem 2. Kongruenzsatze.

Schluss des Beweises wie vorher!

3. Ähnlichkeitssatz: Stimmen zwei Dreiecke in dem Verhältnis zweier Seiten und dem der grösseren von ihnen gegenüberliegenden Winkel überein, so sind sie ähnlich.

4. Ähnlichkeitssatz: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seitenverhältnissen überein, so sind sie ähnlich.

Die Beweise lassen sich nach dem vorigen Muster führen und zwar mit Anwendung des 3. bezw. 4. Kongruenzsatzes.

Ist die Ähnlichkeit zweier Dreiecke nachgewiesen, so folgt daraus jedesmal, dass auch die übrigen vier Beziehungen gelten. Man kann daher häufig z. B. die Richtigkeit einer Proportion dadurch beweisen, dass man zwei Dreiecke aufsucht, von denen das eine zwei Glieder der Proportion, das andere die übrigen derselben als Seiten enthält und die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke nachweist. Auch ist damit ein neues Mittel zum Beweise der Gleichheit zweier Winkel gegeben.

In allen diesen Fällen ist aber genau zu beachten, welche Stücke in den beiden ähnlichen Dreiecken einander entsprechen. Entsprechende Seiten sind hierbei solche, die gleichen Winkeln gegenüberliegen bezw. durch ihre Stellung in der Proportion als solche erkennbar sind.

Sind die Seiten eines Dreiecks doppelt, 3, 4 . . . mal so gross wie die eines anderen, so sind auch die Höhen, Winkelhalbierungslinien, Mittellinien, die Radien der um- und einbeschriebenen Kreise etc. doppelt, 3, 4 . . . mal so gross wie die entsprechenden des anderen. (Beweis?)

Ganz allgemein lässt sich behaupten, dass das Verhältnis zweier entsprechenden Strecken in ähnlichen Dreiecken dem Verhältnis entsprechender Seiten (dem regierenden Verhältnis) gleich ist. — Was folgt daraus weiter?

§ 23. Anwendungen der Ähnlichkeitslehre.

1. Beweise den Satz vom Verhältnis zweier Höhen eines Dreiecks mit Hülfe der Ähnlichkeit zweier Dreiecke.

2. Desgleichen den Satz von der Halbierungslinie eines Dreieckswinkels. (Fälle von den Endpunkten der gegenüberliegenden Seite auf die Winkelhalbierende die Lote!)

3. Desgleichen den Satz von den Mittellinien eines Dreiecks.

---

4. Die Höhe zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks teilt dasselbe in zwei Dreiecke, die unter sich und dem ganzen ähnlich sind. (Beweis?)

Ziehe alle Folgerungen aus der Ähnlichkeit dieser drei Paare von Dreiecken und präge die nachstehenden dem Gedächtnis ein:

I.	$h : p = q : h$	**oder:**	$h^2 = p \cdot q$
II.	$a : p = c : a$	„	$a^2 = c \cdot p$
III.	$b : q = c : b$	„	$b^2 = c \cdot q.$

Jede dieser Proportionen hat die Eigentümlichkeit, dass die äusseren (oder die inneren) Glieder einander gleich sind. (Stetige Proportionen.) In der Produktgleichung kommt daher jedesmal eine zweite Potenz (Quadrat) vor; die Basis dieser heisst die mittlere Proportionale zu den beiden anderen. Die obigen Proportionen lassen sich daher folgendermassen in Worte fassen:

5. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe zur Hypotenuse mittlere Proportionale zu den beiden Höhenabschnitten.

6. Jede Kathete ist mittlere Proportionale zu dem zu ihr gehörigen Höhenabschnitt (ihrer Projektion) und der Hypotenuse.

Auf 5 und 6 beruhen Lösungen der Grundaufgabe: Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu zeichnen.

Wie lauten diese Sätze mit Bezug auf die Flächenberechnung? Suche sie durch Flächenvergleich nochmals zu beweisen!

$$\begin{array}{lrl} \text{Aus} & a^2 &= c \cdot p \\ & b^2 &= c \cdot q \quad \text{folgt durch Addition:} \\ \hline & a^2 + b^2 &= c \cdot p + c \cdot q = c\,(p + q) \\ \text{oder:} & a^2 + b^2 &= c^2, \end{array}$$

d. h. der früher auf anderem Wege gefundene Lehrsatz des Pythagoras:

7. **Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der Katheten.**

Trägt man in dem rechtwinkligen Dreieck ABC AD (q) auf DB (p) bis E ab und verbindet C mit E, so gilt auch für das stumpfwinklige Dreieck BCE die Gleichung: $h^2 = p \cdot q$. Demnach ist der Gegensatz zu (5) nur unter welcher Einschränkung richtig? — Umkehrung?

Dagegen sind Gegensatz und Umkehrung zu (6) und (7) bedingungslos gültig. (Beweis?)

Die Umkehrung von (7) lautet:

8. **Ist die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten gleich dem Quadrat der dritten, so liegt dieser ein rechter Winkel gegenüber.**

---

§ 24. Ähnlichkeit der Vielecke.

1. **Sind zwei Vielecke entsprechend aus ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt, so stimmen sie paarweise in den Winkeln und den Verhältnissen entsprechender Seiten überein.**

Beweis? —

Erklärung: Solche Vielecke heissen ähnlich. —

Gegensatz und Umkehrung von 1.

2. **Sind zwei entsprechende Seiten ähnlicher Vielecke parallel, so sind auch je zwei andere entsprechende Seiten parallel.** — Beweis? —

3. **Die Verbindungslinien entsprechender Ecken solcher Vielecke schneiden sich in e i n e m Punkte.**

Beweis: Ist S der Schnittpunkt von A_1A_2 und B_1B_2, so ist:

$$\begin{array}{c} \dfrac{SB_1}{SB_2} = \dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} \\ \dfrac{B_1C_1}{B_2C_2} = \dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} \quad \text{(nach Vorauss.)} \\ \hline \dfrac{SB_1}{SB_2} = \dfrac{B_1C_1}{B_2C_2}. \end{array}$$

Nach einem Satze des § 21 liegen demnach C_1, C_2 und S in gerader Linie u. s. f.

Erklärung: Ähnliche Vielecke in solcher Lage heissen perspektivisch oder ähnlich liegend. Die Verbindungslinien entsprechender Ecken nennt man Ähnlichkeitsstrahlen, den Schnittpunkt der letzteren Ähnlichkeitspunkt. Wann liegt dieser auf derselben Seite beider Figuren, wann zwischen ihnen? (Äusserer bezw. innerer Ähnlichkeitspunkt.)

§ 25. Verhältnis der Flächen ähnlicher Figuren.

1. Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Voraussetzung: $\triangle A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$.

Behauptung: $\frac{i_1}{i_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$.

Beweis: Fällt man von A_1 auf a_1, von A_2 auf a_2 die Höhen h_1 bezw. h_2, so ist:

$$i_1 = \frac{a_1 \cdot h_1}{2}$$

$$:) \quad i_2 = \frac{a_2 \cdot h_2}{2}$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{a_1 \cdot h_1}{a_2 \cdot h_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}.$$

Wegen der Ähnlichkeit der betreffenden (welcher?) Dreiecke ist ferner:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

und nach Voraussetzung: $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Durch Einsetzung dieses Wertes in der vorigen Gleichung ergiebt sich:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}.$$

Der hiermit bewiesene Satz lässt sich als ein besonderer Fall der nachstehenden allgemeinen Lehrsätze auffassen:

2. Die Flächen von Dreiecken, die in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschliessenden Seiten. — (Beweis?)

3. Die Flächen ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Voraussetzung: $A_1B_1C_1D_1E_1 \ldots \sim A_2B_2C_2D_2E_2 \ldots$

Behauptung: $\frac{i_1}{i_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$.

Beweis: Zieht man in jedem der Vielecke von entsprechenden Ecken, z. B. A_1 und A_2, die Diagonalen, so ist nach dem vorigen Paragraphen und 1 dieses:

$$\frac{\triangle A_1B_1C_1}{\triangle A_2B_2C_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$$

$$\frac{\triangle A_1C_1D_1}{\triangle A_2C_2D_2} = \frac{c_1^2}{c_2^2}$$

$$\frac{\triangle A_1C_1D_1}{\triangle A_2C_2D_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2},$$

da nach Voraussetzg.: $\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$ ist.

Entsprechend findet man:

$$\frac{\triangle A_1D_1E_1}{\triangle A_2D_2E_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} \text{ u. s. f.}$$

also: $\frac{\triangle A_1B_1C_1}{\triangle A_2B_2C_2} = \frac{A_1C_1D_1}{A_2C_2D_2} = \frac{A_1D_1E_1}{A_2D_2E_2} = \ldots = k,$

wenn zur Abkürzung $\frac{a_1^2}{a_2^2} = k$ gesetzt wird.

Folglich ist:

$$\begin{array}{rl} & \triangle A_1B_1C_1 = k \cdot A_2B_2C_2 \\ +) & \triangle A_1C_1D_1 = k \cdot A_2C_2D_2 \\ +) & \triangle A_1D_1E_1 = k \cdot A_2D_2E_2 \\ +) & \ldots = \ldots \\ \hline & A_1B_1C_1D_1E_1 \ldots = k \cdot A_2B_2C_2D_2E_2 \ldots \end{array}$$

oder: $\frac{A_1B_1C_1D_1E_1 \ldots}{A_2B_2C_2D_2E_2 \ldots} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$.

4. Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie zwei entsprechende Seiten.

(Beweis nach dem vorigen Muster.)

5. Zeichnet man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks als entsprechenden Seiten ähnliche Vielecke, so ist die Summe der Vielecke über den Katheten gleich demjenigen über der Hypotenuse.

Beweis?

§ 26. Proportionalität von Strecken im und am Kreise.

1. Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises, so ist das Produkt der Abschnitte der einen gleich dem Produkte der Abschnitte der anderen.

Beweis mit Hülfe zweier ähnlichen Dreiecke.

2. Liegt einer der Endpunkte zweier sich schneidenden Strecken nicht auf dem durch die drei anderen Endpunkte bestimmten Kreise, so sind die Produkte der Abschnitte nicht gleich.

3. Schneiden sich zwei Strecken so, dass das Produkt der Abschnitte beider gleich ist, so liegen die vier Endpunkte auf einem Kreise.

Wie lautet 1 für den besonderen Fall, dass

a. eine der Sehnen die andere halbiert,

b. eine der Sehnen auf der anderen senkrecht steht.

4. Schneiden sich zwei Sekanten eines Kreises, so sind die ganzen Sekanten ihren äusseren Abschnitten umgekehrt proportional. (Zwei Beweise.)

5. Schneidet eine Sekante eine Tangente desselben Kreises, so ist die Tangente mittlere Proportionale zwischen der ganzen Sekante und ihrem äusseren Abschnitt.

Wie lauten zu 4 und 5 die Gegensätze und Umkehrungen?

Zusammenfassung der Sätze 1, 4, 5 zu einem einzigen:

Wird ein Kreis von beliebig vielen durch denselben Punkt gehenden Geraden geschnitten, so ist das Produkt (Rechteck) aus den Abschnitten konstant.

Hierbei gelten Tangenten als Sekanten, deren Schnittpunkte zusammenfallen; die Abschnitte sind immer vom Schnittpunkt aus zu rechnen!

---

§ 27. Teilung einer Strecke nach dem goldenen Schnitt.

Zeichnet man die Figur zu No. 5 des vorigen Paragraphen so, dass der Durchmesser des Kreises M gleich der Tangente AB ist, so hat man in Bezug auf die durch M gehende Sekante AD (C auf AD):

$$AB^2 = AC \cdot AD$$

oder wegen der Voraussetzung $AB = CD$:

$$CD^2 = AC \cdot AD,$$

d. h. die Strecke AD wird in C so geteilt, dass der grössere Abschnitt mittlere Proportionale zwischen dem kleineren und der ganzen Strecke ist. — Eine solche Teilung heisst die Teilung nach goldenem Schnitt (oder nach stetiger Proportion).

1. Trägt man den kleineren Abschnitt einer nach goldenem Schnitt geteilten Strecke auf dem grösseren ab, so wird auch dieser nach goldenem Schnitt geteilt.

Voraussetzung: $a^2 = s\,(s - a)$ (s bedeutet die Strecke, a den grösseren Abschnitt).

Behauptung: $(s - a)^2 = a\,(2\,a - s)$.

Beweis: Durch Ausrechnung erhält die Behauptung die Form:

$$s^2 - 2\,as + a^2 = 2\,a^2 - as$$

$$\text{oder:}\quad s^2 - as = a^2,$$

was dasselbe ist wie die Voraussetzung:

$$a^2 = s\,(s - a).$$

Es lassen sich demnach aus einer nach goldenem Schnitt geteilten Strecke unzählig viele von derselben Beschaffenheit ableiten, sowohl durch wiederholte Abtragung des kleineren Abschnitts auf dem grösseren, als auch durch Verlängerung um den grösseren.

Aufgabe: Eine gegebene Strecke AB soll nach dem goldenen Schnitt geteilt werden.

Konstruktion: Ich errichte auf AB in dem einen Endpunkte B die Senkrechte $BM = \frac{AB}{2}$, beschreibe um M mit MB den Kreis und verbinde A mit M. Trage ich den äusseren Abschnitt AC = AE auf AB ab, so ist E der gesuchte Teilpunkt.

Beweis? —

Verbindet man den Schnittpunkt D der Sekante mit B, so lässt sich das Teilungsverhältnis auch durch die Parallele durch C zu BD auf AB übertragen.

2. Trägt man die Seite eines regelmässigen Zehnecks auf dem Radius des umbeschriebenen Kreises ab, so wird er nach stetiger Proportion geteilt.

Zum Beweise vergleiche Übungsstoff § 4 No. 12.

Aufgabe: In einen gegebenen Kreis ein regelmässiges Zehneck zu zeichnen.

Konstruktion des Bestimmungsdreiecks; Beweis, dass der Centriwinkel 36^0 werden muss.

Da $60^0 - 36^0 = 24^0 = \frac{360^0}{15}$ ist, so lässt sich auch das regelmässige Funfzehneck mit Lineal und Zirkel konstruieren. —

Die Konstruktion eines regelmässigen n-Ecks ist gleichbedeutend mit der Teilung des Kreises in n gleiche Teile.

Diese Aufgabe ist nach den bisherigen Erörterungen gelöst für die Fälle $n = 4, 6, 10, 15$. Hieran schliessen sich noch die Fälle, die sich durch fortgesetzte Verdoppelung bezw. Halbierung aus ihnen ergeben. Demnach ist die Kreisteilung in 2^n, $3 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$ Teile (auf dem jetzigen Standpunkte) ausführbar, wo n die Werte aller ganzen Zahlen von 0 an durchlaufen kann. Wie führt man die zugehörigen Zeichnungen aus? — Wie gelangt man zu den betreffenden dem Kreise umbeschriebenen Figuren?

§ 28. Berechnung des Kreisumfangs und -Inhalts.

Die Berechnung des Kreisumfangs aus dem Radius ist möglich, wenn man den Kreis als Grenze eines ihm ein- oder umbeschriebenen regelmässigen Vielecks betrachtet. Beachtet man, dass eine Sehne sich dem kleineren der zu ihr gehörigen Bogen um so mehr anschmiegt, je kürzer sie ist, so kann man den Umfang eines dem Kreise einbeschriebenen regelmässigen Vielecks um so genauer dem Umfange des Kreises gleichsetzen, je grösser die Seitenzahl des Vielecks ist. Völlige Genauigkeit ist dabei allerdings unmöglich; wohl aber kann man dieselbe soweit treiben, wie man will.

1. Zur Berechnung des Umfangs können die beiden nachstehenden Hülfsaufgaben angewandt werden:

I. Aus dem Radius r eines Kreises und der Seite s des ihm einbeschriebenen regelmässigen n-Ecks die Seite x des einbeschriebenen regelmässigen 2 n-Ecks zu berechnen.

Auflösung: Fällt man von M auf die Seite AB des n-Ecks das Lot MC, das den Kreis in D schneidet, so ist $BD = x$. Es besteht dann die Gleichung:

$$x^2 = 2r \cdot CD. \quad \text{(Weshalb?)}$$

Da nun $CD = r - MC$

und $MC = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$ ist (weshalb?),

so ergiebt sich: $x^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}\right)$

oder: $$x = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}\right)}$$
$$= \sqrt{2r^2 - r\sqrt{(2r + s)(2r - s)}}.$$

II. Aus dem Radius r eines Kreises und der Seite s des demselben einbeschriebenen regelmässigen n-Ecks die Seite y des ihm umbeschriebenen regelmässigen n-Ecks zu berechnen.

Auflösung? — Endergebnis:

$$y = \frac{r \cdot s}{\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}} = \frac{2\,r \cdot s}{\sqrt{(2\,r + s)\,(2\,r - s)}}.$$

Zur Berechnung des Kreisumfangs genügt schon die erste dieser Aufgaben. Beginnt man z. B. mit dem regelmässigen Sechseck (Seite $s_6 = r = \frac{1}{2}$), so berechnet man zunächst s_{12}, aus dieser wieder s_{24} u. s. f. Es ist $s_{96} = 0{,}0327$, daher der Umfang $u_{96} = 3{,}141$. Der Umfang des Kreises ist grösser (weshalb), als alle diese Werte für u. Für viele Zwecke reicht aber eine Genauigkeit bis zur zweiten Decimale aus. Man hat also zu merken, dass der Umfang des Kreises vom Durchmesser 1:

$$3{,}14 = \pi$$

ist (π griechischer Buchstabe für p, Anfangsbuchstabe von Peripherie).

In manchen Fällen rechnet man mit $\pi = 3\frac{1}{7}$ bequemer; ist grössere Genauigkeit erforderlich, nimmt man $\pi = 3{,}141\overline{6}$ (π ist eine Irrationalzahl). Berechnet man mit Hülfe der Aufgabe II die Seiten der entsprechenden regelmässigen Vielecke, die dem Kreise umbeschrieben sind: S_6, S_{12}, S_{96} ... und daraus jedesmal den Umfang, so sind diese Werte immer grösser als der Umfang des Kreises, nähern sich aber immer mehr dem letzteren. Die Berechnung des obigen genaueren Wertes für π ($3{,}141\overline{6}$) auf dem hier angegebenen Wege ist für logarithmische Rechnung unbequem und ziemlich zeitraubend. Gewisse andere Methoden führen schneller zum Ziel; das kürzeste Verfahren beruht auf der Anwendung trigonometrischer Funktionen.

Z. B. hat man im Bestimmungsdreieck des regelmässigen 600-Ecks:

$$\sin \frac{360}{2 \cdot 600} = \sin 18' = \frac{s_{600}}{2\,r},$$

oder: $$s_{600} = 2\,r \cdot \sin 18'$$

daher: $$u_{600} = 2\,r \cdot 600 \cdot \sin 18'$$

Für $600 \cdot \sin 18'$ findet man: $3{,}141\overline{6}$.

Allgemein ist demnach der Umfang des Kreises vom Radius r:

$$\mathbf{1.}\quad u = 2\,r\pi.$$

Dass im allgemeinen Falle π mit dem Durchmesser zu multiplicieren ist, ergiebt sich auch aus dem Satze: Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie irgend zwei entsprechende Strecken. —

Wie der Umfang des Kreises näherungsweise durch den Umfang eines regelmässigen Vielecks von grosser Seitenzahl angegeben werden kann, so lässt sich auch der Flächeninhalt des Kreises mit beliebiger Genauigkeit durch denjenigen des Vielecks berechnen.

2. Der Inhalt des Vielecks ist nach § 18:

$$i = \frac{\rho \cdot u}{2} \quad (\rho \text{ ist der kleine Radius}).$$

Bei grosser Seitenzahl ist aber ρ von r nur wenig verschieden. Der Flächeninhalt des Kreises ist daher:

$$i = \frac{r \cdot u}{2}.$$

Setzt man hier $u = 2\,r\,\pi$, so ergiebt sich:

$$\textbf{2.}\quad \mathbf{i = r^2 \cdot \pi.}$$

Aus den Formeln: $u = 2\,r\pi$, $i = r^2\pi$ folgt durch Auflösung für r bezw.:

$$r = \frac{u}{2\,\pi}, \quad r = \sqrt{\frac{i}{\pi}}.$$

Beweise, dass

$$u = 2\sqrt{i\,\pi}, \quad i = \frac{u^2}{4\,\pi} \text{ ist.}$$

3. Für die Fläche eines Kreisringes hat man:

$$f = (r_1^2 - r_2^2)\,\pi = (r_1 + r_2)\,(r_1 - r_2)\,\pi,$$

wenn r_1 den Radius des grösseren Begrenzungskreises, r_2 den des kleineren bezeichnet.

---

4. **Zwei Bogen eines Kreises verhalten sich wie die zu ihnen gehörigen Centriwinkel.**

Beweis? — Welche Fälle sind zu unterscheiden?

Auf diesem Satz beruht die Berechnung der Länge eines beliebigen Bogens b; denn es ist:

$$\frac{b}{2\,r\pi} = \frac{\alpha}{360} \quad (\alpha \text{ bedeutet den zu b gehörigen Centriwinkel})$$

$$\text{oder} \quad b = \frac{2\,r\,\pi\,\alpha}{360} = \frac{r\,\pi\,\alpha}{180}.$$

Umgekehrt lässt sich aus der Bogenlänge und dem Centriwinkel der Radius des Kreises berechnen:

$$r = \frac{180\ b}{\alpha\pi};$$

ferner aus Bogenlänge und Radius der Centriwinkel:

$$\alpha = \frac{180\ b}{r\pi}.$$

Das von einem Bogen und den Radien nach seinen Endpunkten begrenzte Flächenstück eines Kreises heisst Kreisausschnitt (Sektor).

5. **Sektoren eines Kreises sind ihren Centriwinkeln, also auch ihren Bogen proportional.**

Soll ein Sektor x aus seinem Centriwinkel und dem Radius berechnet werden, so benutzt man die Proportion:

$$\frac{x}{r^2\pi} = \frac{\alpha}{360},$$

woraus sich ergiebt: $$x = \frac{r^2\pi\alpha}{360}.$$

Ist dagegen der Bogen und Radius gegeben, so hat man:

$$\frac{x}{r^2\pi} = \frac{b}{2\ r\pi}$$

$$x = \frac{b r^2\pi}{2\ r\pi} = \frac{b r}{2},\ \text{d. h.:}$$

6. **Der Sektor ist gleich einem Dreieck, das die Bogenlänge als Grundlinie, den Radius als Höhe hat.** — Löse die obigen Gleichungen für die anderen in ihnen vorkommenden Grössen auf!

Das von einem Bogen und der zugehörigen Sehne begrenzte Flächenstück eines Kreises heisst Kreisabschnitt (Segment).

7. Der Flächeninhalt eines solchen ergiebt sich durch Subtraktion des Dreiecks MAB von dem Sektor.

Sind r und α gegeben, so ist der Inhalt des Dreiecks MAB, wenn r als Grundlinie gewählt wird:

$$\frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2},\ \text{folglich}$$

$$\text{Segment (AB)} = \frac{r^2\pi\alpha}{360} - \frac{r^2\sin\alpha}{2} = \frac{r^2(\pi\alpha - 180\sin\alpha)}{360}$$

Übungsstoff.

§ 20.

1. In welchem Verhältnis steht der Gewinn zum Einkaufspreise bei 1%, 10%, 20%, 25%, 50% . . .? Wie gross ist in diesen Fällen das Verhältnis des Verkaufspreises zum Einkaufspreise?

2. Welches Verhältnis haben die von den Uhrzeigern in gleichen Zeiten beschriebenen Winkel?

3. Welches Verhältnis haben zwei gleiche Strecken?

4. Gieb für die Strecken a und b das grösste gemeinschaftliche Mass an, wenn 1) $\frac{a}{b} = \frac{6}{15}$, 2) $\frac{a}{b} = 0{,}317 \mid 317 \ldots$? 3) Eine Strecke a lässt sich auf einer anderen b 4 mal, der Rest auf a 5 mal, der neue Rest auf dem vorigen 6 mal abtragen. Bestimme das Verhältnis $\frac{b}{a}$.

5. Bestimme das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Strecken 3 a und 4 a; 8 s und 20 s; 6 x, 9 x, 14 x.

6. Das Verhältnis zweier Strecken sei $1\frac{4}{5}$. Wie gross ist das Verhältnis ihrer Summe, ihrer Differenz?

7. Eine Strecke ist 18 cm lang und ihr Verhältnis zu einer anderen ist 6 : 13. Wie lang ist die letztere?

7a. Die Höhe des Montblanc (4800 m) ist auf einer Höhentafel durch eine Strecke von 8 cm dargestellt. Welche Strecke würde die Höhe der Schneekoppe (1600 m), des Brockens (1140 m) angeben?

7b. Auf der Erde verhält sich die Landfläche zur Wasserfläche wie 27 : 73. Wie gross ist die Wasserfläche, wenn die Landfläche 135 Millionen qkm beträgt?

8. Jemand hat 5 km zurückzulegen und ist schon beim Kilometerstein 3,5 angekommen. Wie verhält sich die zurückgelegte Strecke zum Rest, wie die ganze Strecke zum zurückgelegten Wege?

9. Wie werden die verschiedenen Thermometerskalen (C., R., F.) geteilt durch den Strich bei 24^0?

10. Die Bogen zweier Centriwinkel verhalten sich wie 3 : 4. Wofür gilt dasselbe Verhältnis?

11. Ein Centriwinkel sei 120^0; wie verhält sich sein Bogen zum Umfang des Kreises?

12. Die Umfänge der Räder eines Wagens verhalten sich wie $4 : 2\frac{1}{2}$. Welches Verhältnis ist dadurch bestimmt?

13. Teile die Strecke AB durch C und D so, dass
1) $AC : CD = 2 : 1$ und $CD : DB = 3 : 1$,
2) $AD : DB = 4 : 3$ und $AC : AD = 2 : 5$.

14. Verdoppele, verdreifache, vervierfache etc. eine Strecke AB und gieb das Verhältnis der Entfernungen des Endpunktes von A und B jedesmal an.

15. Bestimme auf den Verlängerungen von AB = 40 mm die Punkte, die AB aussen teilen im Verhältnis $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{8}{3}$, 6.

16. Giebt es ein Verhältnis, dem kein äusserer Teilpunkt entspricht? — Entspricht auch der Mitte von AB ein Punkt mit demselben Teilungsverhältnis?

---

17. Sind die folgenden Proportionen richtig:

$$9 : 10 = 15 : 16$$
$$51 : 119 = 1\tfrac{1}{2} : 3{,}5?$$

Bestimme x aus

$$x : 35 = 88 : 77$$
$$5\,ab : x = 8{,}5\,b^2 : 3{,}4\,ab$$
$$9 : (5 - x) = 7 : x$$
$$x : (3{,}5 + x) = 1 : 0{,}4.$$

Wie gross sind x und y, wenn

$$x : y = a : b \text{ und } x + y = s.$$

Berechne $\frac{x + y}{x - y}$, wenn $x : y = 11 : 9$ ist.

18. Wie lang sind die Teile einer Strecke von 3,6 cm, wenn sie sich verhalten sollen wie 5 : 7?

19. Zwei Nebenwinkel verhalten sich wie 11 : 4; wie gross ist jeder?

20. Die Winkel eines Dreiecks verhalten sich wie 5 : 7 : 8; wie gross ist jeder?

21. Ein Sehnenwinkel und ein Centriwinkel desselben Kreises verhalten sich wie 4 : 5; wie verhalten sich die zu ihnen gehörigen Bogen?

22. Das Verhältnis eines Sehnen- und Centriwinkels (desselben Kreises) ist 1. Wie gross ist jeder?

---

23. Wie lautet das Hebelgesetz? — Eine 2 m lange Stange soll 1) als zweiarmiger, 2) als einarmiger Hebel gebraucht werden. Welche Kraft ist zur Hebung einer Last von 360 kg erforderlich, wenn in beiden Fällen der Lastarm 20 cm beträgt?

24. Unter welcher Bedingung herrscht Gleichgewicht a. bei der losen Rolle, b. beim Wellrad, c. bei der schiefen Ebene?

25. Ein Gas steht unter einem gewissen Druck. Wird der Druck verdoppelt, verdreifacht . . ., so sinkt das Volumen auf $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ . . . des ursprünglichen; der Hälfte, dem dritten Teile . . . des Drucks entspricht ein doppeltes, dreifaches . . . Volumen. Drücke dies Gesetz allgemein aus. (Mariottesches Gesetz.)

26. Platin hat das specifische Gewicht 21,5, Quecksilber 13,6, Eis 0,9, Alkohol 0,8, Kork $\frac{1}{4}$; was heisst das? — Wie verhalten sich in leitend verbundenen Gefässen die Höhen der Flüssigkeitssäulen, wenn die Schenkel verschiedene Flüssigkeiten enthalten?

---

27. Wiederhole den Übungsstoff zu § 17 und wende überall, wo es möglich ist, die neue Ausdrucksweise an.

28. Von zwei Dreiecken hat das eine die Hälfte der Grundlinie des anderen, aber eine dreimal so grosse Höhe; wie verhalten sich ihre Flächen?

29. Ein Dreieck ist doppelt so gross wie ein anderes. Das Verhältnis der Grundlinien ist 2 : 3; wie verhalten sich die zugehörigen Höhen?

30. In zwei gleich grossen Dreiecken verhalten sich die Höhen wie 4 : 5, die Grundlinie des ersten sei 3 cm; wie gross ist die des zweiten?

---

§ 21.

1. Im Dreieck ABC ist AC durch eine zu BC parallele Gerade im Verhältnis 2 : 3 geteilt. Wie gross sind die Abschnitte auf AB, wenn AB = 525 mm ist?

2. Ein Licht befindet sich 3 m über dem Fussboden, in einer Entfernung von 2 m steht ein 1 m hoher senkrechter Stab. Wie lang ist sein Schatten?

3. Zu einer Dreiecksseite eine parallele Strecke innerhalb des Dreiecks zu zeichnen, die gleich dem dritten Teile ($\frac{4}{7}$) der ersteren ist.

4. Zeichnung eines Transversalmassstabes.

---

5. Die von den Mitten zweier Dreiecksseiten auf die dritte gefällten Lote sind einander gleich und gleich der Hälfte der zur dritten Seite gehörigen Höhe.

6. Die durch die Mitten zweier Dreiecksseiten parallel zur Mittellinie der dritten Seite bis zum Schnittpunkt mit dieser gezogenen Strecken sind gleich der Hälfte der Mittellinie.

7. Werden zwei über derselben Grundlinie stehende Dreiecke, welche gleiche Höhe haben, durch eine zur Grundlinie parallele Gerade geschnitten, so sind die innerhalb der Dreiecke liegenden Strecken der Parallele gleich.

---

8. Gegeben ist ein Winkel A und innerhalb desselben ein Punkt P. — Gesucht wird eine Strecke durch P, deren Endpunkte auf den Schenkeln von A liegen und deren Mitte P ist.

9. Wie vorher, so dass P die Strecke in einem beliebigen Verhältnis teilt.

10. Gegeben ist ein Kreis M und ausserhalb desselben ein Punkt P. — Gesucht wird eine Sekante PS, so dass ihr äusserer Abschnitt gleich der Sehne ist. (Benutzung des Dreiecks PMS.)

11. Verallgemeinerung von 38.

---

12. Deute und löse folgende Gleichungen geometrisch:

1. $\frac{3}{4} = \frac{2}{x}$	4. $x : a = a : b$
2. $\frac{x}{5} = \frac{7}{8}$	5. $\frac{a}{a + b} = \frac{x}{c}$
3. $6\,x = 25$	6. $\frac{a - b}{c} = \frac{a}{x}$

---

13. Von P sind nach G Verbindungsstrecken gezogen. Wo liegen die Punkte, die diese Strecken in einem vorgeschriebenen Verhältnis $\left(1, \frac{2}{3}, \frac{m}{n}\right)$ teilen?

14. Wo liegen die Punkte, deren Entfernungen von einer gegebenen geraden Linie und einem auf ihr liegenden Punkte ein vorgeschriebenes Verhältnis $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{m}{n}\right)$ haben?

15. Wo liegen die Punkte, deren Entfernungen von den Schenkeln eines gegebenen Winkels ein vorgeschriebenes Verhältnis $\left(1, \frac{2}{3}, \frac{m}{n}\right)$ haben?

16. Teilt man einen Durchmesser AB eines Kreises in C so, dass $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$, so teilt der Kreis über AC als Durchmesser jede durch A gehende Sehne des grossen Kreises in demselben Verhältnis. — (Übungsstoff § 15, 3.)

17. Aus dem Verhältnis zweier Strecken und der einen von ihnen die andere zu finden.

18. Zwei Strecken zu zeichnen, deren Summe (Differenz) und Verhältnis gegeben ist.

19. Das Dreieck zu zeichnen, in dem a, b, a : c vorgeschriebene Grösse haben.

20. $c, \gamma, b : c$	23. $p : q, c, \gamma$
21. $a, b, b : h_c$	24. $c, a - b, a : b$
22. $c, m_a, c : a$	25. $p - q, p : q, r$

---

26. $a : b, c, h_c$
27. $a : b, c, r$
28. $a : b, c, p - q$
29. $a : b, c, m_c$
30. $a : b, c, p$
31. $a : b, p, q$
32. u, v, w_γ
33. $a : b, h_c, p - q$
34. $u, v, p - q$
35. $a, \alpha, b : m_a$

---

36. $a, \alpha, \frac{h_a}{h_b}$
37. $c, h_c, \frac{h_a}{h_b}$
38. $c, m_b, \frac{h_b}{h_c}$
39. $r, \alpha, \frac{h_a}{h_c}$
40. $r, \gamma, \frac{h_a}{h_b}$

---

41. Die Mittellinien eines Dreiecks halbieren die Seiten desjenigen Dreiecks, dessen Ecken die Mitten der Seiten des ersteren sind.

42. Die Entfernung des Schwerpunkts eines Dreiecks von einer Seite ist gleich dem dritten Teile der zu dieser Seite gehörigen Höhe.

43. Ziehe durch eine Ecke eines Dreiecks zu einer Mittellinie durch eine der anderen Ecken die Parallele bis zum Schnitt mit der gegenüberliegenden Seite.

Ziehe durch die Mitte einer Dreiecksseite zu einer der anderen Mittellinien die Parallele. Untersuche beide Figuren.

44. Beweise die Gleichheit folgender Dreiecke: ABE und ACE, SBE und SCE, ABS und ACS, ABS und BCS, BCS und ACS.

---

§ 22.

1. Welche besondere Form nehmen die Ähnlichkeitssätze an a. für rechtwinklige, b. für gleichschenklige Dreiecke?

2. Ziehe in einem Dreieck von den Endpunkten einer Seite aus zwei sich schneidende Gerade, die mit den beiden anderen Seiten gleiche Winkel einschliessen. Welche Dreiecke sind ähnlich, und welche Proportionen bestehen?

3. In jedem gleichschenkligen Dreieck verhält sich ein Schenkel zur Basishöhe wie der obere Abschnitt der zu diesem Schenkel gehörigen Höhe zur halben Basis.

4. Jede der Diagonalen eines Trapezes teilt die andere im Verhältnis der Grundseiten.

5. Ist in einem gleichschenkligen Trapez die Diagonale gleich der grösseren Grundseite, so ist das Verhältnis dieser Seite zum Schenkel gleich demjenigen des Schenkels zur Differenz der beiden Grundseiten.

6. Zeichne eine Strecke AB, beschreibe um A und B mit einer grösseren Strecke als AB Kreisbogen, die die Verlängerungen von AB in C und D treffen, um C und D mit der grösseren Strecke Kreisbogen und verbinde deren Schnittpunkt E mit A und B. Untersuche die Figur.

7. Zieht man von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks im umbeschriebenen Kreise eine Sehne, die (nötigenfalls verlängert) die Basis schneidet, so hat die Sehne zum Schenkel dasselbe Verhältnis wie der Schenkel zu dem an der Spitze des Dreiecks liegenden Abschnitt der Sehne.

8. Beweise, dass das Verhältnis der Radien zweier Kreise als regierendes Verhältnis gilt 1) für Sehnen von gleichem Centriwinkel, 2) für deren Abstände von den Mittelpunkten, 3) für Tangentenpaare, die gleiche Winkel einschliessen, 4) für deren Berührungssehnen.

9. Zeichne in dem einem Dreieck umbeschriebenen Kreise durch eine Ecke C einen Durchmesser CD, verbinde D mit B und fälle von C auf AB das Lot. Welche Dreiecke sind ähnlich? — Folgerungen daraus!

10. Verbindet man in einem Dreieck die Fusspunkte zweier Höhen, so ist das abgeschnittene Dreieck dem ganzen ähnlich.

---

11. Ein Dreieck hat die Seiten $a = 5$, $b = 4$, $c = 6$ cm; in einem ihm ähnlichen entspricht der Seite b die Seite $b_1 = 3$ cm; wie gross sind a_1 und c_1?

12. Zur Bestimmung der Höhe eines Gegenstandes wird ein daneben gestellter senkrechter Stab benutzt, und es werden sowohl die Schattenlängen des Gegenstandes und des Stabes gemessen. Darf man die Proportion bilden:

$$\frac{\text{Höhe des Gegenstandes}}{\text{Schattenlänge des Gegenstandes}} = \frac{\text{Stablänge}}{\text{Schattenlänge des Stabes}}?$$

Welche Voraussetzung für die Sonnenstrahlen ist gemacht? — Beispiel: Stablänge 1 m, Länge seines Schattens 0,5 m, Schattenlänge eines Turmes 20 m; wie hoch ist der Turm?

13. Ohne Benutzung der Schattenlängen kann man die Höhe eines Gegenstandes bestimmen, indem man zwei Stäbe senkrecht aufstellt, so dass ihre Spitzen mit der Spitze des Gegenstandes in gerader Linie liegen. Beweise, dass

$$\frac{x - s_2}{e_2} = \frac{s_1 - s_2}{e_2 - e_1}$$

ist (s_1, s_2 bedeuten hier die Längen der Stäbe, e_1, e_2 ihre bez. Entfernungen vom Fusspunkt des Gegenstandes). Beispiel: Die Stäbe sind bez. 3 m, 1,5 m lang, ihre Entfernungen vom Fuss eines Turmes 80 m, 75 m; wie hoch ist der Turm?

Die Ähnlichkeitssätze sagen aus, von welchen Stücken die Gestalt eines Dreiecks abhängig ist, nämlich:

1) von zwei Winkeln,
2) von einem Winkel und dem Verhältnis der ihn einschliessenden Seiten,
3) von dem Verhältnis zweier Seiten und dem der grösseren von ihnen gegenüberliegenden Winkel,
4) von zwei Seitenverhältnissen.

Hiervon wird in den nachstehenden Konstruktionsaufgaben Gebrauch gemacht. Es wird in jedem einzelnen Falle zuerst entschieden, welche von den gegebenen Stücken die Gestalt des gesuchten Dreiecks bestimmen. Dann wird aus diesen Stücken ein Dreieck gezeichnet, auf derjenigen Strecke, die der gegebenen entspricht, diese selbst abgetragen, und zuletzt das gesuchte Dreieck durch geeignete parallele Linien vollendet.

14. α, β, m_c
15. α, β, p
16. α, β, u
17. α, β, r
18. α, β, ρ
19. $\alpha, \beta - \gamma, h_a$
20. $a : b, \gamma, c.$
21. $a : b, \gamma, w_\gamma$
22. $a : b, \gamma, h_c$
23. $a : h_c, \alpha, c$
24. $a : h_c, \alpha, h_a$
25. $a : m_c, \alpha, \rho$
26. $a : w_\gamma, \gamma, b$
27. $h_c : p, \alpha, b$
28. $a : r, \beta, \rho$
29. $\alpha, \frac{h_b}{h_c}, a$
30. $\frac{a}{c}, \gamma, h_b$
31. $a : b : c, u$

---

§ 23.

1. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben:

1)	Hyp. $c = 5$ cm,	$b = 3$ cm	Welche Stücke sind dadurch bestimmt?
2)	$c = 25\,(7,5)$,	$p = 16\,(5)$	
3)	$a = 4,5$,	$h = 3,6$	Wie gross sind dieselben und der Inhalt?
4)	$h = 0,8$,	$p = 1,5$	
5)	$p = 16$,	$q = 9$	

2. Aus irgend zweien der Grössen

a, b, c, h, p, q, i (Inhalt)

die übrigen allgemein zu berechnen.

3. Wie lang sind die Sparren eines Giebeldaches, dessen Breite 24 und dessen Höhe 11,9 m beträgt?

4. Aus irgend zweien der Grössen

a, c, h_a, h_c, i

die anderen Stücke eines gleichschenkligen Dreiecks zu berechnen.

5. Berechne den Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks aus der Seite a und umgekehrt die Seite aus dem Inhalt.

6. Berechne aus der Diagonale d eines Quadrats den Flächeninhalt.

7. Aus den drei Seiten a, b, c eines ungleichseitigen Dreiecks den Inhalt zu berechnen.

8. Konstruiere x, wenn

$$x^2 = 3\,a^2, \qquad x^2 = \tfrac{1}{2}\,a^2,$$

$$\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad x = \sqrt{a^2 \pm b^2}, \quad x = \sqrt{2\,a^2 - b^2}$$

sein soll, und a, b Strecken bedeuten.

9. In einem Kreise mit dem Radius $r = 16$ cm ist eine Sehne von 8 cm gezogen. Wie gross ist die Projektion der Sehne auf den durch einen ihrer Endpunkte gehenden Durchmesser?

10. Wie verhalten sich die Quadrate der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks?

11. Die Katheten sind innere, die Hypotenuse und Höhe äussere Glieder einer Proportion.

12. Das geometrische Mittel zweier Grössen ist stets kleiner als ihr arithmetisches.

13. Werden zwei parallele Tangenten eines Kreises durch eine dritte geschnitten, so ist der Radius mittlere Proportionale zu den Abschnitten der dritten.

14. Innerhalb eines Rechtecks ABCD liegt ein Punkt P. Beweise, dass $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

15. Beweise, dass in jedem Dreieck

$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2 \text{ ist.}$$

16. Wie gross ist (nach 15) $2\,h^2$? — Wende auf das rechtwinklige Dreieck CDF (Übungsstoff Seite 70 No. 23) den Lehrsatz des Pythagoras an, setze den vorigen Ausdruck für $2\,h^2$ ein und beweise, dass

$$a^2 + b^2 = \frac{4\,mc^2 + c^2}{2} \quad \text{ist.}$$

Die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten ändert sich also nicht, wenn sich nicht die dritte Seite und die zu ihr gehörige Mittellinie ändern. — Beschreibt man demnach um die Mitte einer Dreiecksseite mit der zugehörigen Mittellinie als Radius den Kreis, so ist die Summe der Quadrate der Verbindungsstrecken von einem Punkte auf dem Kreise mit den Endpunkten der Seite konstant.

Deute No. 15 ähnlich.

17. Beweise, dass für $\gamma < 90^0$ $a^2 > cp$ ($b^2 > cq$) und für $\gamma > 90^0$ $a^2 < c \cdot p$ ($b^2 < cq$) ist.

18. Zeichne in einem Sehnenviereck ABCD die Diagonalen AC und BD, lege an AD in A den Winkel DAE (E auf BD) = BAC und bilde mit Hülfe zweier Paare ähnlicher Dreiecke die Produkte je zweier gegenüberliegenden Seiten. Welches Ergebnis findet man durch Addition jener Produkte? (Lehrsatz des Ptolemäus.) — Inwiefern ist in diesem der Lehrsatz des Pythagoras als besonderer Fall enthalten?

§ 24.

1. Stelle Ähnlichkeitssätze auf für Rechtecke, Rhomben, Parallelogramme.

2. Müssen regelmässige Vielecke von derselben Seitenzahl einander ähnlich sein?

3. Zu einem gegebenen Viereck ein ähnliches zu zeichnen, wenn eine Seite des letzteren vorgeschrieben ist. — Besondere Fälle: Die Seite des gesuchten Vierecks sei $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{m}{n}$ der entsprechenden des gegebenen. (Die bequemsten Lösungen mit Hülfe des Ähnlichkeitspunktes!)

4. Von einem Parallelogramm durch eine Parallele zu einer Seite ein ähnliches abzuschneiden.

5. Zeichne in einem Dreieck zu AB eine Parallele DE und über DE das Quadrat DEFG. Die Verbindungslinien CF, CG treffen AB in H bezw. J. In H und J errichte auf AB die Lote HK und JL (K und L auf den anderen Dreiecksseiten) und beweise, dass HJKL ein Quadrat ist.

6. Löse nach dem vorigen Muster die Aufgabe: In ein Dreieck ein Rechteck zu zeichnen, dessen Seiten ein gegebenes Verhältnis ($\frac{2}{3}$) haben.

§ 25.

1. Zu einer Dreiecksseite eine Parallele so zu ziehen, dass das abgeschnittene Dreieck $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$ . . . des ersten ist. (4 mal, 9 mal so gross.)

2. Ein Vieleck zu zeichnen, das einem gegebenen ähnlich ist und 4 mal (2 mal) so gross.

3. Von einem Dreieck durch eine Parallele ein anderes abzuschneiden, das einen vorgeschriebenen Umfang hat.

4. Zeichne ein Fünfeck, das zwei gegebenen Fünfecken ähnlich und gleich ihrer Summe ist.

§ 26.

1. Eine Sehne AB ist durch P in zwei Abschnitte von 3 und 12 cm Länge geteilt; wie lang ist die Sehne, deren Mitte P ist?

2. Von einem Punkte ausserhalb eines Kreises sind in denselben zwei Sekanten gezogen; der äussere Abschnitt der einen ist 6, der innere 4 cm, der äussere Abschnitt der anderen 3 cm. Wie gross ist der innere?

3. Eine Sehne von 7 cm wird um 3 cm verlängert und vom Endpunkt eine andere Sekante gezogen, deren äusserer Abschnitt 5 cm beträgt; wie lang ist die Sehne dieser Sekante?

4. Von demselben Punkte gehen aus eine Sekante von 8 cm und eine Tangente von 4 cm. Wie gross sind die Abschnitte der Sekante?

5. Ein Durchmesser ist um 4 cm verlängert, die vom Endpunkt an den Kreis gelegte Tangente 8 cm. Wie gross ist der Radius?

6. Zwei sich nicht schneidende Sehnen von 4 und 12 cm Länge werden bis zu ihrem Schnitt verlängert. Die Verlängerung der ersten Sehne beträgt 5 cm; wieviel die der anderen?

7. Errichte in irgend einem Punkte eines Durchmessers das Lot nach einer Seite bis zum Schnittpunkt mit dem Kreise und ziehe durch seine Mitte vom anderen Endpunkte des Durchmessers die Sehne. Welches Grössenverhältnis besteht zwischen dem Produkt der äusseren Abschnitte dieser Sehne und den Abschnitten des Durchmessers?

8. Zeichnet man durch einen Punkt auf der gemeinschaftlichen Sehne zweier sich schneidenden Kreise in jedem derselben eine Sehne, so sind die Produkte aus den Abschnitten dieser Sehnen gleich.

9. Beschreibt man um einen Punkt P der gemeinsamen Tangente zweier sich berührenden Kreise einen Kreis, der die beiden ersteren schneidet, und verbindet die Schnittpunkte mit P, so bilden diese Verbindungslinien bezw. ihre Verlängerungen gleiche Sehnen in beiden Kreisen.

10. Das Stück zwischen den Berührungspunkten einer gemeinsamen äusseren Tangente zweier sich von aussen berührenden Kreise ist mittlere Proportionale zu den Durchmessern.

---

11. Neue Konstruktionen der vierten und mittleren Proportionale.

12. Ein Rechteck in ein anderes zu verwandeln, dessen eine Seite eine vorgeschriebene Länge besitzt.

13. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

14. Gegeben P_1 und P_2, G. Gesucht der Kreis, der durch P_1 und P_2 geht und G berührt.

15. Durch P innerhalb eines Kreises eine Sehne so zu ziehen, dass der eine Abschnitt zweimal, dreimal . . . so gross ist wie der andere.

16. Durch P auf einem Kreise eine Sekante von vorgeschriebener Länge a so zu ziehen, dass die von ihrem Endpunkte an den Kreis gelegte Tangente die Länge b erhält.

---

§ 27.

1. Eine gegebene Strecke so zu verlängern, dass die ganze Strecke stetig geteilt ist.

2. Von einem Punkte in einen Kreis eine Sekante zu ziehen, so dass dieselbe durch den Kreis stetig geteilt wird.

3. Ein regelmässiges Fünfeck zu zeichnen, so dass eine gegebene Strecke eine Diagonale desselben wird.

---

§ 28.

1. Welchen Umfang hat ein Teller vom Durchmesser 20 cm?

2. Wie dick ist ein Baumstamm, der einen Umfang von 1,4 m hat?

3. Wie gross ist die Fläche eines Teiches, der einen Umfang von 350 m hat?

4. $r_1 = 6$, $r_2 = 10$ cm. Wie gross ist der Radius des Kreises, dessen Umfang gleich der Summe der beiden ersten Kreisumfänge ist?

5. Wie gross ist der von der Spitze eines Minutenzeigers an einem Tage zurückgelegte Weg, wenn die Länge des Zeigers 2 cm beträgt?

6. Auf dem Umfange eines Rades von 3,5 m Durchmesser sollen 360 Zähne angebracht werden. Wie gross sind die Bogenstücke zwischen den Mitten von zwei aufeinander folgenden Zähnen?

7. Die Treibräder einer Lokomotive haben einen Durchmesser von 1,75 m. Wie oft dreht sich ein solches Rad um auf einer Strecke von 1 km?

8. Welche Geschwindigkeit (in 1″) hat ein Punkt des Erdäquators bei der Achsenumdrehung, wenn der Erdradius 6370 km beträgt? —

9. Welche Fläche bedeckt eine Stadt, wenn der Radius ihres Umkreises 6 km beträgt?

10. Wie gross ist die Fläche eines Teiches von 350 m Umfang?

11. Im Altertum wurde gelehrt: Eine Kreisfläche sei gleich einem Quadrat, dessen Seite $\frac{1}{9}$ weniger als die Länge des Durchmessers beträgt. Welchem Näherungswert von π entspricht diese Regel?

12. Ein Quadrat mit der Seite 4,837 m soll gleich einer Kreisfläche sein. Wie gross ist der Radius dieses Kreises?

13. Ein Kreis hat einen Umfang von 15 cm. Welchen Umfang hat der Kreis vom dreifachen Flächeninhalt?

14. In der Mitte eines kreisförmigen Grasplatzes von 50 m Durchmesser befindet sich ein kreisförmiges Blumenbeet von 5 m Durchmesser. Wie gross ist die Grasfläche?

15. Um einen kreisförmigen Rasenplatz von 20 m Durchmesser soll ein Ring von 1,20 m Breite gepflastert werden. Wieviel Lohn ist für die Pflasterung zu bezahlen, wenn für 1 qm 0,30 M. berechnet wird?

16. Eine eiserne Röhre von 1,257 m Umfang hat eine Wandstärke von 0,03 m. Wie gross ist die metallische Querschnittsfläche?

17. Wie kann man den Inhalt eines Kreisringes durch eine Kreisfläche darstellen?

18. In einem Halbkreise ist über jedem Radius des Begrenzungsdurchmessers nach derselben Seite ein Halbkreis gezeichnet. Wie gross ist das Flächenstück zwischen den drei Kreisen?

19. Berechne aus r Seite, Umfang und Inhalt
a. des ein- und umbeschriebenen regelmässigen Sechsecks,
b. „ „ „ „ „ Dreiecks,
c. „ „ „ „ „ Vierecks.

20. Zieht man in einem Kreise zwei aufeinander senkrechte Sehnen und beschreibt über jedem Abschnitt als Durchmesser Kreise, so sind diese zusammen so gross wie der ganze Kreis.

21. Zeichnet man über jeder Seite eines rechtwinkligen Dreiecks als Durchmesser nach derselben Seite hin einen Halbkreis, so ist die Summe der sichelförmigen Flächenstücke über den Katheten gleich dem Inhalt des Dreiecks. — Berechne die Summe der Umfänge der Sicheln.

22. Wie lang ist ein Bogengrad auf dem Erdmeridian? (r = 6370 km.)

23. Wieviel Zeit wäre nötig, um diese Strecke zu Fuss zurückzulegen, wenn man auf 1 km 12 Minuten rechnet?

24. Wie lang ist eine Bogen-Minute? (Seemeile!)

25. Wieviel km ist ein Ort vom Äquator entfernt, wenn er auf dem 52. Breitengrade liegt?

26. Auf einem Parallelkreise ist die Länge eines Bogengrades 75 km. Wie gross ist der Radius desselben, und wie weit ist sein Mittelpunkt von dem der Erde entfernt?

27. Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde beträgt $60\frac{1}{3}$ Erdradien. Dabei erscheint der Monddurchmesser unter dem Winkel 31′ 4,8″. Wie gross ist das Verhältnis des Mondradius zum Erdradius?

28. Der Durchmesser der Sonne erscheint am 1. Januar unter $32\frac{1}{2}'$. Wie weit muss man eine Taschenuhr mit dem Durchmesser 5 cm vom Auge entfernen, damit sie ebenso gross erscheint wie die Sonne?

29. Der Inhalt eines Kreises beträgt 16 qm; wie gross ist die Länge des Bogens, der zu 102^0 32′ gehört?

30. Der Umfang eines Kreises sei 19,954 m, ein Bogen desselben 5,414 m. Wieviel beträgt derselbe in Bogenmass?

---

31. Der Radius eines Kreises ist 6 cm, ein Centriwinkel 30^0; wie gross ist der zugehörige Sektor?

32. Wie gross ist der Sektor, dessen Bogenlänge 4,75 m beträgt, wenn der Inhalt des ganzen Kreises 64 qm ist?

33. Die Länge eines Bogens sei gleich dem Durchmesser; wie gross ist der zugehörige Centriwinkel und Ausschnitt?

34. Der Inhalt eines Kreisausschnittes sei 24 qm, sein Centriwinkel 40^0. Wie gross ist der Radius eines Kreises, der mit ihm gleichen Umfang hat?

35. Der Bogen eines Sektors vom Centriwinkel 10^0 sei 10 m; wie gross ist der Umfang des Kreises, der mit dem Sektor gleichen Inhalt hat?

36. Berechne aus r den Kreisabschnitt eines Viertelkreises (Quadranten).

37. Desgleichen eines Sechstelkreises (Sextanten).

38. Wie gross ist in einem Kreise von 25 cm Radius das Segment, das zu $55^0\ 39{,}8'$ gehört?

39. $r = 57$, $b = 75$ cm. Wie gross ist das Segment?

40. $\alpha = 15^0\ 3'$, s (Sehne) $= 17$ cm. Wie gross ist das Segment?

41. Wie gross ist der Durchmesser eines Kreises, wenn ein Segment 36 qm und der Centriwinkel 50^0 beträgt?

Aufgaben für Dreieckskonstruktionen.

1. Gegeben ist ausser der Summe oder Differenz zweier Seiten die Differenz der Höhenabschnitte auf der dritten Seite.

Die früheren Aufgaben, bei denen $a + b$, $a - b$, $p - q$ einzeln gegeben waren, lassen sich einheitlich und zum Teil unter einem anderen Gesichtspunkt lösen, wenn man den ganzen Kreis in Betracht zieht, der um C mit a bezw. b beschrieben ist. Besonders ist die Abhängigkeit eines Peripheriewinkels von seinem Centriwinkel zu beachten. — Im Anschluss an diese Figur gelingt auch leicht die Lösung nachstehender Aufgaben:

1. $p - q$, $a + b$, β	5. $p - q$, $a - b$, γ
2. $p - q$, $a + b$, γ	6. $p - q$, $a - b$, $\alpha - \beta$
3. $p - q$, $a + b$, $\alpha - \beta$	7. $p - q$, $a + b$, α
4. $p - q$, $a - b$, β	8. $p - q$, $a - b$, α

---

2. Eine Mittellinie ist gegeben.

Bei der Voruntersuchung zu derartigen Aufgaben führt oft die Betrachtung der beiden Hülfsdreiecke, in welche ABC durch eine Mittellinie zerlegt wird, nicht zum Ziel. Die Lösung der nachstehenden Aufgaben gelingt, wenn man beachtet, dass durch Verlängerung von CD (m_c) um sich selbst und Verbindung des Endpunktes E mit A und B ein Parallelogramm entsteht. (Grund?) Weshalb ist $BAE = \beta$ und $CAE = 2R - \gamma$? Ferner ist zu beachten, dass h_a und h_b zugleich die Höhen des Parallelogramms vorstellen, und die Dreiecke ACD und BCD (für D als Spitze) bezw. $\frac{h_b}{2}$, $\frac{h_a}{2}$ als Höhen haben; wiederhole auch Seite 70, Übungsstoff betreffend $\frac{p - q}{2}$.

1. m_c, a, b	6. m_c, $p - q$, α
2. m_c, a, γ	7. m_c, $p - q$, γ
3. m_c, a, α	8. m_c, h_a, a
4. m_c, h_c, γ	9. m_c, h_a, γ
5. m_c, $p - q$, a	10. m_a, c, h_c

---

3. Zwei Mittellinien sind gegeben.

Zur Lösung sind zu beachten die Bemerkungen unter 1 und die Lehre vom Schwerpunkt.

1. m_a, m_b, c	5. m_a, m_c, h_c
2. m_a, m_c, c	6. m_a, m_c, p — q
3. m_a, m_c, γ	7. m_a, m_b, h_c
4. m_a, m_b, γ	8. m_a, m_b, m_c

4. Die Abschnitte, die auf einer Seite durch die Halbierungslinie des gegenüberliegenden Winkels entstehen, sind gegeben.

Ist CE w_γ, so gelangt Dreieck ACE durch Umklappung um CE in die Lage CEF (wo muss F liegen?), und es ist im Dreieck BEF: BE = u, EF = v, BF = a — b; BFE = 2 R — α, $\angle$ BEF = $\alpha - \beta$. Trägt man AE (v) auf EB (u) ab und verbindet den Endpunkt G mit F, so ist BGF = R + $\frac{\alpha - \beta}{2}$ und BFG = $\frac{\gamma}{2}$. Begründe alle diese Behauptungen.

Verschiedene Übergänge vom Hülfsdreieck BEF zum Dreieck ABC.

1. u, v, α	5. u, a — b, $\alpha - \beta$
2. u, v, $\alpha - \beta$	6. u — v, a — b, γ
3. u, v, a — b	7. u — v, a — b, $\alpha - \beta$
4. u, a — b, α	8. u, v, h_a

Welche von diesen Aufgaben lassen sich auch mit Hülfe des Apollonischen Kreises lösen?

5. Die Summe zweier Höhen ist gegeben.

AD sei h_a, BE h_b. Ist nun $h_a + h_b$ vorgeschrieben, so wird man z. B. BE um CF = AD verlängern und durch F zu AC die Parallele FG ziehen (G Schnittpunkt mit der Verlängerung von BC), um ein geeignetes Hülfsdreieck zu erhalten. Im Hülfsdreieck BFG ist BF = $h_a + h_b$, BG = a + b (beweise, dass CG = CA ist mit Hülfe eines mit ACD kongruenten Dreiecks), $\angle$ F = R, $\angle$ G = γ. Verbindet man G mit A, so wird $\angle$ G halbiert (Grund?).

Verschiedene Übergänge zum Dreieck ABC.

1. $h_a + h_b$, a, γ	6. $h_a + h_b$, a + b, c
2. $h_a + h_b$, c, γ	7. $h_a + h_b$, a + b, β
3. $h_a + h_b$, α, β	8. $h_a + h_b$, a + b, α
4. $h_a + h_b$, a, b	9. h_a, h_b, a + b
5. $h_a + h_b$, a — b, γ	

Eine der vorigen entsprechende Voruntersuchung führt zur Lösung nachstehender Aufgaben:

1. $h_b - h_a, a, \gamma$	4. $h_b - h_a, a + b, \gamma$
2. $h_b - h_a, \beta, \gamma$	5. $h_b - h_a, a - b, c$
3. $h_b - h_a, a, b$	6. $h_b - h_a, a - b, \alpha - \beta$

6. Der Radius des umbeschriebenen Kreises ist gegeben (oder der Mittelpunkt dieses Kreises ist zu bestimmen).

CD sei h_c, MF $\perp$ AB, MF schneide den Kreis in G und H, CG schneide AB in E, CM den Kreis in K; CJ $\parallel$ AB, B werde mit J und H verbunden. Beweise, dass DCM = CBJ = $\alpha - \beta$ ist, dass dieser Winkel durch CG halbiert wird, dass CJ = $p - q$ ist. Durch welchen Winkel des Dreiecks ist $\angle$ J bestimmt, $\angle$ BCJ = ?, $\angle$ CKB = ?

Beachte die Hülfsdreiecke CDE, CDF, BCJ!

1. r, h_c, m_c	10. $r, a + b, \gamma$
2. $r, h_c, p - q$	11. $r, a - b, \gamma$
3. $r, m_c, p - q$	12. $c + r, a, \gamma$
4. $r, h_c, \alpha - \beta$	13. $c - r, a, \alpha$
5. $r, m_c, \alpha - \beta$	14. $c + r, h_c, \gamma$
6. r, u, v	15. $h_c, m_c, \alpha - \beta$
7. $r, p - q, \gamma$	16. $h_c, w_\gamma, p - q$
8. r, h_c, w_c	17. $m_c, w_\gamma, \alpha - \beta$
9. $r, w_c, \alpha - \beta$	18. h_c, m_c, w_γ

7. Der Radius des einbeschriebenen Kreises ist gegeben.

O Mittelpunkt des Kreises, D, E, F Berührungspunkte bezw. mit AB, BC, AC. Beweise, dass $\angle$ AOB = $R + \frac{\gamma}{2}$ u. s. w., $AD = AF = \frac{b + c - a}{2} = s - a$ (wenn 2s den Umfang des Dreiecks ABC bedeutet), $BD = BE = s - b$; $CE = CF = s - c$ ist.

Wo gleitet O, wenn C sich auf dem um ABC beschriebenen Kreise bewegt?

1. ρ, w_γ, γ	6. $\rho, a + b, \gamma$
2. $\rho, h_c, \alpha - \beta$	7. $\rho, b - c, a$
3. ρ, c, γ	8. $\rho, s - a, \beta$
4. $\rho, s - c, h_a$	9. ρ, h_c, γ
5. $\rho, s - c, \alpha$	10. $s - b, \alpha, \beta$

Beweise, dass im rechtwinkligen Dreieck

$$\rho = s - c,\ a + b = 2\,(r + \rho) \text{ ist.}$$

8. Der Radius eines anbeschriebenen Kreises ist gegeben.

O' Mittelpunkt, G Berührungspunkt auf AB, H desgleichen auf der Verlängerung von CB, J auf der Verlängerung von CA, O'G ρ_c.

Beweise, dass

$$\angle\ AO'J = AO'G = \frac{\alpha}{2},\ BO'G = BO'H = \frac{\beta}{2},$$

$$HO'J = 2\ R - \gamma, \quad CO'G = \frac{\alpha - \beta}{2}\ \text{u. s. w.};$$

ferner, dass

$$CJ = CH = \frac{a + b + c}{2} = s,\ BH = BG = s - a,$$

$$AJ = AG = s - b,\ EH = FJ = c,\ DG = a - b\ \text{ist.}$$

1. $\rho_c,\ \alpha,\ \beta$	6. $\rho_c,\ \rho,\ \gamma$
2. $\rho_c,\ s,\ \alpha$	7. $s,\ w_\gamma,\ \gamma$
3. $\rho_c,\ s,\ h_c$	8. $s,\ \rho,\ \rho_c$
4. $\rho_c,\ c,\ \gamma$	9. $s - b,\ h_c,\ \alpha$
5. $\rho_c,\ b,\ \alpha$	10. $a - b,\ \rho,\ \rho_c$

Untersuche die Figur mit dem ein- und anbeschriebenen Kreise auf ähnliche Dreiecke und bilde einerseits das Produkt $\rho \cdot \rho_c$, andererseits das Verhältnis $\frac{\rho}{\rho_c}$. Was erhält man durch Multiplikation, was durch Division dieser Ausdrücke? Zeige, dass entsprechend der früheren (§ 18) Inhaltsformel für das Dreieck ABC auch gilt:

$$J = \rho_c\ (s - c).$$

Allgemeines über die Lösung von Konstruktionsaufgaben.

Die Methoden, welche zur Lösung der bisher gestellten Aufgaben führen, lassen sich in drei Gruppen einteilen:

I. Die Methode der geometrischen Ortslinien.
II. Die Methode der Hülfsfiguren.
III. Die Methode der ähnlichen Figuren.

Das Verfahren I ist auf Seite 65 im Anschluss an einige einfache Aufgaben kurz erläutert. Dasselbe lässt sich oft anwenden, wenn es sich um die Bestimmung eines Punktes handelt. Der gesuchte Punkt hat zwei verschiedenen Forderungen Genüge zu leisten, von denen jede einzeln*) in Form einer Frage scharf hervorgehoben und beantwortet werden muss. Jede Antwort giebt dann eine (gerade oder krumme) Linie an, auf welcher der gesuchte Punkt liegen muss. Die Gesamtheit aller Schnittpunkte dieser Linien bildet die Lösung der Aufgabe.

*) Sollte sich eine dieser beiden Fragen nicht sofort aufstellen lassen, so muss man noch eine durch die Bedingungen der Aufgabe nahe gelegte Hülfsfigur (durch geeignete Verbindungslinien, Parallele, Lote u. s. w.) zeichnen, wodurch die Fragestellung ermöglicht wird.

Anmerkung: Zuweilen kommt es vor, dass man mehr als zwei Fragen in dem angegebenen Sinne aufstellen kann, so dass noch eine dritte geometrische Ortslinie auftritt. In solchen Fällen ergiebt sich jedesmal ein Lehrsatz, der aussagt, dass gewisse drei Linien sich in einem Punkte schneiden müssen. Bei der Bestimmung des von den Ecken eines Dreiecks gleich weit entfernten Punktes z. B. ergiebt sich der Satz, dass sich die Mittellote der drei Seiten in einem Punkte schneiden. — Unbestimmte und überbestimmte Aufgaben.

Zur Übersicht werden hier die an verschiedenen Stellen des Lehrganges durchgenommenen geometrischen Ortslinien zusammengestellt (Fortsetzung von a) bis g), Seite 36, 37):

h) Die Scheitel aller gleichen Winkel, deren Schenkel durch A und B gehen, liegen auf dem zugehörigen Gleitbogen. (Oder: Die Spitzen aller Dreiecke, die in einer Seite und dem ihr gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen u. s. w.). — Besonderer Fall: R — Halbkreis!

i) Die Mitten aller Sehnen, die durch P (drei Lagen) gehen, liegen auf dem über MP als Durchmesser beschriebenen Kreise.

k) Die Schnittpunkte je zweier einen gegebenen Winkel einschliessenden Tangenten liegen auf einem konzentrischen Kreise.

l) Die Mittelpunkte aller Kreise vom Radius r, die G unter einer Sehne von gegebener Länge schneiden, liegen auf zwei zu G parallelen Geraden. (Beweis?)

m) Wie l), aber statt G „einen Kreis" lesen. (Beweis?)

n) Die Mittelpunkte aller Kreise, die den Kreis M in A berühren, liegen auf MA.

o) Die Mittelpunkte aller Kreise vom Radius r, die den Kreis M berühren, liegen auf zwei mit M konzentrischen Kreisen. — Wie gross sind die Radien?

p) Die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei konzentrische Kreise berühren, liegen auf zwei mit den ersten konzentrischen Kreisen. — Grösse der Radien?

q) Die Spitzen aller gleichen Dreiecke über derselben Grundlinie liegen auf einer Parallele zur letzteren.

r) Alle Punkte, welche die Verbindungsstrecken von P mit den Punkten von G in einem gegebenen Verhältnis teilen, liegen auf einer Parallele zu G.

s) Alle Punkte, welche die zwischen den Schenkeln eines Winkels liegenden einander parallelen Strecken in gegebenem Verhältnis teilen, liegen auf einer bestimmten durch den Scheitelpunkt gehenden Gerade.

t) Alle Punkte, welche die von einem Punkte A eines Kreises ausgehenden Sehnen in gegebenem Verhältnis teilen, liegen auf einem bestimmten, den ersten in A berührenden Kreise.

u) Alle Punkte, deren Entfernungen von zwei festen Punkten ein gegebenes Verhältnis haben, liegen auf dem Apollonischen Kreise.

v) Alle Punkte, deren Abstände von zwei Geraden ein gegebenes Verhältnis haben, liegen auf zwei bestimmten durch den Schnittpunkt der ersteren gehenden Geraden.

w) Alle Punkte, für welche die Summe der Quadrate ihrer Abstände von zwei festen Punkten einen gegebenen Wert hat, liegen auf einem bestimmten Kreise. — Welcher Punkt ist Mittelpunkt, welche Grösse hat der Radius?

x) Alle Punkte, für welche die Differenz der Quadrate ihrer Abstände von zwei festen Punkten einen gegebenen Wert hat, liegen auf einem bestimmten Lote zur Verbindungsstrecke.

y) Alle Punkte, von denen sich an zwei gegebene Kreise gleiche Tangenten ziehen lassen, liegen auf einem Lote zur Centrallinie.

II. Das zweite Verfahren zur Lösung von Konstruktionsaufgaben ist die Methode der Hülfsfiguren. Bei der Anwendung dieser Methode geht man von einer fertigen Probe- oder Musterfigur aus und zeichnet in dieser alle den vorgeschriebenen entsprechenden Stücke, soweit dieselben nicht schon vorhanden sind. Darauf sucht man durch geeignete Verbindungslinien, Parallele, Lote u. s. w. ein Hülfsdreieck herzustellen, das mit der Probefigur in Zusammenhang gebracht werden kann. Man ermittelt die Abhängigkeit der Seiten und Winkel des Hülfsdreiecks von denen der Probefigur, soweit es nötig ist. Stellt sich dann heraus, dass das Hülfsdreieck nach einer der Grundkonstruktionen konstruierbar ist, so muss noch der Übergang vom Hülfsdreieck zum Probedreieck als möglich erkannt werden. Solche Übergänge lassen sich meist auf verschiedene Arten ausführen.

Nach einer solchen Voruntersuchung wird die Zeichnung sorgfältig mit den vorgeschriebenen Masszahlen angefertigt, dann die Entstehungsweise der letzteren in kurzen, aber vollständigen Sätzen beschrieben (Konstruktion!) und schliesslich gezeigt, dass alle Forderungen der Aufgabe thatsächlich erfüllt sind (Beweis!). — Die Untersuchung, ob eine Aufgabe überhaupt lösbar ist, oder wieviele Lösungen möglich sind u. s. w., ist Sache der Determination, die aber in vielen Fällen die Anwendung der Trigonometrie und anderer Hülfsmittel erfordert.

Für die in diesem Lehrgange zusammengestellten Aufgaben ist jeder Gruppe die erforderliche Voruntersuchung vollständig angegeben oder genügend angedeutet. Besonders beachtenswert sind in jedem einzelnen Falle die Hülfsdreiecke, welche Data enthalten.

Häufig wird es nötig, die Methoden der Hülfsfiguren und der geometrischen Ortslinien zugleich zur Anwendung zu bringen.

III. Das dritte Verfahren (Methode der ähnlichen Figuren) ist im Übungsstoff zu § 22 erklärt und geübt.

IV. Ausser den genannten drei Methoden giebt es noch eine vierte, nämlich die durch Rechnung (algebraische Analysis).

Die Anwendung der Arithmetik auf die Planimetrie ist schon mehrfach vorgekommen, besonders bei der Lehre von der Proportionalität und der Flächenberechnung.

Deute zur Wiederholung die folgenden Rechnungsausdrücke geometrisch und konstruiere dieselben nochmals auf verschiedene Arten:

1. $x = a \pm b$.
2. $x = \frac{bc}{a} \left(\frac{b^2}{a}\right)$.
3. $x = \sqrt{ab}$.
4. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.
5. $x = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(a + c)(c - a)}$.

Diese bilden die Grundlage für die Methode der algebraischen Analysis.

In einer Probefigur bezeichnet man die gesuchte Strecke durch x, die bekannten Strecken dieser Figur mit den ersten Buchstaben des Alphabets und drückt die Beziehungen zwischen den bekannten und unbekannten Grössen den Vorschriften der Aufgabe und den Eigenschaften der Figur gemäss durch eine (oder mehrere) Gleichungen aus. Die sich daraus ergebenden algebraischen Ausdrücke für x sind dann auf einen der fünf obigen oder auf eine Verbindung derselben zurückzuführen und zu konstruieren. — Grad oder Dimension eines algebraischen Ausdrucks.

1. Eine Strecke so zu teilen, dass die Differenz der Quadrate der Abschnitte gleich einem gegebenen Quadrate sei.

2. Einen Durchmesser eines Kreises so zu verlängern, dass die vom Endpunkte der Verlängerung an den Kreis gelegte Tangente doppelt so gross wie die Verlängerung ist.

3. In einem Kreise eine Sehne zu zeichnen, die a) gleich ihrem Abstande, b) gleich dem doppelten Abstande von M ist.

4. Ein gleichseitiges Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln und umgekehrt.

5. Ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Seiten ein vorgeschriebenes Verhältnis haben.

6. Ein Dreieck durch eine Parallele zu einer Seite zu halbieren. — Verallgemeinerung!

7. Desgleichen ein Trapez.

8. Ein Dreieck durch eine Gerade so zu teilen, dass das abgeschnittene Dreieck gleichschenklig und halb so gross wie das entstandene Viereck ist.

9. Ein Dreieck durch eine Gerade so zu teilen, dass ein Sehnenviereck abgeschnitten wird, dessen Umfang gleich dem des abgeschnittenen Dreiecks ist.

10. Wann ist ein Rechteck seiner Hälfte ähnlich?

Es ist in jedem Dreieck:

$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2 = (p + q)(p - q).$$

Ist nun die Differenz der Quadrate zweier Dreiecksseiten d^2 vorgeschrieben und $c = p + q$ gegeben, so ist

$$p - q = \frac{d^2}{c}$$

konstruierbar, damit auch der Fusspunkt der Höhe h_c für alle diese Dreiecke bestimmt.

11. $a^2 - b^2 = d^2, c, \alpha$
12. $a^2 - b^2 = d^2, c, h_a$
13. $a^2 - b^2 = d^2, c, \gamma$
14. $a^2 - b^2 = d^2, c, m_c$
15. $a^2 - b^2 = d^2, c, m_a$

Es ist in jedem Dreieck:

$$a^2 + b^2 = 2\,m_c^2 + \frac{c^2}{2}.$$

Ist nun die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten s^2 und c gegeben, so ist

$$m_c = \sqrt{\frac{s^2}{2} - \frac{c^2}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,s^2 - c^2}$$

konstruierbar und damit auch der Kreis bestimmt, auf dem die dritten Ecken aller dieser Dreiecke liegen. — Ist m_c bekannt, so ist c konstruierbar.

16. $a^2 + b^2 = s^2, c, h_c$
17. $a^2 + b^2 = s^2, c, r$
18. $a^2 + b^2 = s^2, c, p$
19. $a^2 + b^2 = s^2, m_c, \alpha$
20. $a^2 + b^2 = s^2, m_c, h_a$

Hinsichtlich der Behandlung einer Konstruktionsaufgabe möge das folgende Beispiel als Muster dienen:

Gegeben sind zwei Strecken (3 und 4 cm) und ein Winkel (65°).

Gesucht wird das Dreieck, in dem $r = 3$ cm, $w_\gamma = 4$ cm, $\gamma = 65^0$ ist.

Voruntersuchung (Analysis): ABC sei das verlangte Dreieck, M der Mittelpunkt des ihm umbeschriebenen Kreises, CD w_γ. Durch r und γ kennt man c.

Verlängert man CD bis zum Schnittpunkt mit dem Kreise um M, so ist Bogen AE = BE, da zu den gleichen Sehnenwinkeln ACE und BCE gleiche Bogen gehören; E ist also bestimmbar. Verbindet man E mit B, so ist in den Dreiecken BCE und DBE:

1) $\angle$ BEC = BED, und da zu gl. Bogen auch
gl. Sehnenw. gehör., 2) $\angle$ BCE = DBE

$\triangle$ BCE $\sim$ DBE n. d. 1. Ähnlichkeitssatze.

Daraus folgt unter anderem:

$$CE : EB = EB : DE$$

oder $$EB^2 = CE \cdot DE.$$

In dieser Gleichung ist alles bekannt ausser CE, denn DE = CE — w_γ. Daher ist CE konstruierbar (und damit auch C) als Sekante eines bestimmten Kreises, der in B von BE berührt wird und eine Strecke gleich w_γ als Durchmesser hat.

Konstruktion: Ich zeichne um M mit 3 cm als Radius den Kreis und in diesem einen Centriwinkel AMB = 130°. A verbinde ich mit B und halbiere den kleineren Bogen AB in E. Auf der Verbindungsstrecke EB errichte ich in B das Lot BF = 4 cm und beschreibe über BF als Durchmesser den Kreis. Ziehe ich von E durch den Mittelpunkt G des letzteren die Sekante EHJ und beschreibe um E mit EJ einen Kreisbogen, so ist der Schnittpunkt C dieses Bogens mit dem Kreise um M die dritte Ecke des gesuchten Dreiecks. —

Beweis: 1. Die Ecken A, B, C liegen nach Konstruktion auf dem Kreise mit dem Radius 3 cm.

2. Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Peripheriewinkel, also ist $\angle$ ACE = BCE oder CD ist w_γ. — Es ist nun noch zu beweisen, dass w_γ = 4 cm ist. Die Dreiecke BCE und DBE sind wegen der Übereinstimmung ihrer Winkel nach dem 1. Ähnlichkeitssatze ähnlich. Daraus folgt, dass

$$EB^2 = EC \cdot DE.$$

Anderseits ist $$EB^2 = EJ \cdot EH \quad \text{n. d. Tangentensatze}$$

$$EC \cdot DE = EJ \cdot EH;$$

$$:) \quad EC = EJ \quad \text{nach Konstruktion}$$

$$DE = EH,$$

folglich auch $$EC - ED = EJ - EH$$

oder $$CD = HJ.$$

Da nach Konstruktion HJ = 4 cm, so muss auch CD oder w_γ = 4 cm sein.

3. Jeder Sehnenwinkel ist gleich der Hälfte des zu ihm gehörigen Centriwinkels:

$$\angle ACB = \frac{AMB}{2}$$

$$AMB = 130^0 \text{ nach Konstruktion}$$

$$\angle ACB = 65^0.$$

Inhalts-Verzeichnis.

…nis.