Ueber
das Princip der Wärme-Ausstrahlung und Mittheilung

von

J. Flesch.

Ce que nous connaissons est peu de chose,
Mais ce que nous ignorons est immense.

Laplace.

Seit Jahrtausenden hat sich der menschliche Geist bemüht, aus dem ewig wiederkehrenden Wechsel physischer Veränderlichkeit, wie Alex. von Humboldt [1]) sich ausdrückt, das Beharrliche des Gesetzes aufzufinden und die Kräfte zu erforschen, welche den Natur-Erscheinungen zu Grunde liegen. Das unmittelbar Gegebene in der Natur ist jedesmal ein sinnlich Wahrnehmbares, entweder also ein Materielles, Körperliches, oder eine Veränderung an diesem; die innere Ursache der Erscheinung, wenn diese nicht selbst wieder eine Erscheinung ist, fällt nicht in die Sinne, kann also auch nicht durch sie erkannt werden. Dieselbe lässt sich aus der sinnlichen Wahrnehmung selbst nicht einmal durch eine Verstandes-Operation, durch eine logische Schlussfolgerung, ableiten; da der Schluss eigentlich nichts enthalten kann, was nicht schon in den Prämissen, also hier in der Wahrnehmung selbst, enthalten und mit ihr also gegeben wäre. Die Sinne sind die Werkzeuge, welche die Wahrnehmung vermitteln; aber die Feinheit und Empfänglichkeit derselben in Bezug auf die äussere Einwirkung hat ihre Grenzen. Ist z. B. ein vom gewöhnlichen Tageslicht erleuchteter Gegenstand 5—6000 mal so weit von uns entfernt, als seine Grösse beträgt, so ist die Wirkung, welche er auf das Auge macht, nicht mehr von der Art, dass sie wahrgenommen und zur Unterscheidung gebracht werden könnte. Der Gegenstand verschwindet, ob er gleich jetzt nicht minder vorhanden ist, denn zuvor. Wird derselbe aber mit bewaff-

[1]) Kosmos, 1. Band S. 4.

netem Auge betrachtet, so erscheint er wieder in einer gewissen Grösse; aber auch jetzt noch sind hinlänglich kleine Theile von ihm nicht weniger unkenntlich, wie vordem. Durch eine stärkere Beleuchtung des Gegenstandes lassen sich auch diese Theilchen dem Auge wiederum darstellen; aber selbst für die stärkste Beleuchtung gibt es in Betreff ihrer Wahrnehmbarkeit immer noch eine Grenze. Es existiren daher in dem unermesslichen Weltenraume gewiss viele Sterne, deren Lichteinwirkung auf das Auge, ob sie gleich vorhanden ist, dennoch selbst durch die stärksten Riesenteleskope nicht mehr wahrgenommen wird. Wie mit dem Auge, verhält es sich auch beim Ohr. So bilden sich z. B. beim Eintreten der Ebbe auf dem von den Fluthen verlassenen Meeresboden unzählige Luftbläschen, welche nachher zerspringen. Die Wirkung des Zerspringens eines einzelnen Bläschens allein auf das Ohr wird von diesem nicht empfunden, wohingegen das Zerplatzen vieler zugleich ein ziemlich vernehmbares Geräusch verursacht. Und so ähnlich bei den übrigen Sinnen. Es gibt also für die Einwirkung der äusseren Gegenstände auf unsere Sinnesorgane bei jedem Sinne verschwindende Grössen, die, ungeachtet sie vorhanden sind, dennoch nicht wahrgenommen werden; und somit müssen wir also die erste Quelle unserer Naturkenntniss, nämlich die *Erfahrung,* als eine unvollständige und unzulängliche bezeichnen, nicht nur deshalb, weil sie uns in den wahren Zusammenhang der Erscheinungen gar nicht hineinzuführen und von den innern Ursachen derselben auch nicht die dunkelste Vorstellung zu geben vermag; sondern schon darum allein, weil sie selbst das, was in die Sinne fällt, nicht einmal ganz und ohne Rückhalt zur Anschauung bringt, und wenn sie das auch könnte, blosse Erfahrung, wie Baumgartner [1]) richtig bemerkt, keine strenge Allgemeinheit, mithin auch keine wissenschaftliche Festigkeit gewährt. Entweder werden nun auf jenen durch unmittelbare Wahrnehmung gewonnenen Erfahrungen als Grundlage die *Naturgesetze* erbaut, oder diese werden aus der beobachteten Art und Weise, wie die unbekannten Ursachen der Erscheinungen wirken, mathematisch abgeleitet. Wenn nun aber in letzterem Falle diese empirischen Gesetze als mathematische Consequenzen auch *alle Gewissheit der Thatsachen* haben, aus denen sie fliessen; dann sind dieselben in ersterem Falle doch nur *höchst wahrscheinliche,* da nämlich eine Regel, welche sich in einer grossen Anzahl willkührlich gewählter Fälle auch bestätigt hat, noch nicht nothwendig *allgemeingültig* sein muss, wie das dem *Gesetze der Induction* gemäss doch angenommen wurde. Ueber den innern *Causalnexus* und die *letzten Ursachen* der Natur-Erscheinungen aber gelangen wir hienieden niemals zur *Gewissheit,* sondern können darüber nur *Vermuthungen hegen* und *Hypothesen wagen,* bei deren Aufstellung man sich durch das *Gesetz der Analogieen* leiten lässt und ähnliche Erscheinungen ähnlichen Ursachen zuschreibt. Bevor man aber auf diesem Wege zu einer allgemeinen Idee über den ursachlichen Zusammenhang der Phänomene sich zu erheben mit Erfolg den Versuch machen darf, muss man zuvor durch eine langjährige Reihe von zuverlässigen, genauen und vollständigen Beobachtungen, so wie von zweckmässig und mit Sorgfalt angestellten Versuchen eine hinlängliche Menge von Materialien gesammelt haben, welche zu dem beabsichtigten Neubau zu verwenden sind. Denn gleichwie in allen Erfahrungswissenschaften

---

[1]) Naturlehre mit Rücksicht auf math. Begründung, 8. Aufl. S. 4.

jene Methode mit Recht eine unfruchtbare genannt zu werden verdient, welche sich damit begnügt, ohne Ende Thatsachen zu häufen, ohne jemals daran zu denken, diese durch Auffindung allgemeiner Gesetze unter einen höhern Gesichtspunkt zu bringen: ebenso war es auch — wie die Geschichte der inductiven Wissenschaften lehrt — ein unzeitiges und eiteles Bemühen, so oft man es unternahm, kaum bekannt mit einzelnen Erscheinungen und im Besitze von wenigen, nicht einmal hinlänglich begründeten Thatsachen, auf unsicherer Basis und mit vagen und unvollkommenen Begriffen, wenngleich nicht ohne Scharfsinn, eine Theorie aufzubauen, welche alle bekannten Thatsachen zu einem grossen wissenschaftlichen Ganzen vereinigen und zur Entdeckung neuer Wahrheiten anleiten sollte. Darum also muss man beim Studium der Naturkunde nicht zu frühzeitig von vereinzelten Anschauungen zu allgemeinen Prinzipien fortschreiten wollen, das *blos Hypothetische* immerdar streng von dem *fest Ergründeten* sondern, gegen jenes stets mit einem gewissen Misstrauen erfüllt sein und durch sorgfältige Vergleichung mit den Erscheinungen die theoretischen Ansichten immer wieder von neuem prüfen und dieselben mehr und mehr zu berichtigen, zu vereinfachen und zu erweitern bemüht sein. Jede Hypothese nun nimmt gewisse Stoffe oder Kräfte an, für deren Existenz, wie Berzelius [1]) sagt, kein anderer Grund vorhanden ist, als dass man ihrer zur Erklärung der Phänomene bedarf, und sucht die physischen Eigenschaften derselben und die Gesetze ihrer Wirkungsweise also zu bestimmen, dass sich dadurch *jede einzelne Thatsache*, ihrer wahrgenommenen Art und Grösse nach, einfach und vollständig erklären, und die *ganze* Masse *aller* wie durch ein unsichtbares Band mit einander in eine natürliche und ungezwungene Verbindung bringen lasse. Dieses geheimnissvolle Band der Hypothese ist nach dem Ausdruck von Alex. v. Humboldt [2]) ein Vorgefühl von dem inneren Zusammenhang der Natur-Dinge und Natur-Kräfte. Dieselbe darf in ihrem Werthe nicht überschätzt, sondern muss stets für das gehalten werden, was sie nur ist, nämlich eine *mögliche Erklärungsart der Phänomene*; da sie aber mehr enthält, als die Wahrnehmung, die sie erklären soll und dieses jederzeit *etwas Gedachtes ist*, so lassen sich aus ihr — und hierbei leistet die höhere mathematische Analysis wesentliche Dienste — logische Schlussfolgerungen ableiten, welche eben so viele neue, noch nicht erwiesene Thatsachen sind. Durch die Vergleichung dieser Thatsachen mit denjenigen Natur-Erscheinungen, die sich beim Eintritt der Umstände jener Folgerungen, sei dieser nun abgewartet (in der Beobachtung), oder absichtlich herbeigeführt (in dem Versuche), ereignen, wird die Hypothese der Prüfung unterworfen, und so stellt sich entweder die *Unstatthaftigkeit*, oder die *Wahrscheinlichkeit* derselben heraus. Die Natur aber antwortet auf die an sie gerichtete Frage, in der Beobachtung, wie beim Versuche, nie direkt, sondern sie bestätigt oder widerlegt unsere Schlüsse der Art, dass man sagen kann, es verhalte sich alles so, als wenn wir den wahren innern Grund der Erscheinungen errathen hätten, oder nicht. Je mehr nun aus der Hypothese unmittelbar abgeleitete Schlussfolgerungen auf diese Weise von der Natur bestätigt werden, desto mehr gewinnt die Hypothese an Wahrscheinlichkeit; dagegen beweiset eine einzige solche Folgerung, welche der

[1]) Lehrbuch der Chemie, 4. Aufl. Band I. S. 28.
[2]) Kosmos, 1. Band, S. 67.

Erfahrung oder irgend einer anerkannten Wahrheit widerspricht, die gänzliche Unzulässigkeit und Grundlosigkeit der gemachten Voraussetzung. Darum also ist es auch falsch, den Begriff des physikalisch-Wahrscheinlichen dahin definiren zu wollen, dass *für* dasselbe mehr Gründe sprächen, als *dawider*. Eine solche Wahrscheinlichkeit kennen die Naturwissenschaften nicht. Durch den Gebrauch der Hypothesen werden wir nun aber nie gewiss, *absolut wahre Erkenntnisse* gewonnen zu haben; denn *absolute Wahrheit* darf der Verstand nur da zu Tage zu fördern hoffen, wo er blos reine Begriffe zu combiniren hat; in allen *materiellen Wissenschaften* aber, die nicht, wie die *formellen*, aus reinen Begriffen abgeleitet sind, sind unsere Erkenntnisse, in wie fern dieselben als Verstandes-Produkt ausgegeben werden, im günstigsten Fall nur *höchst wahrscheinliche*. Die logische Wahrheit aber, dass *ein Satz, dessen Consequenzen allesammt wahr sind, nicht falsch sein könne,* leitet uns als Grundsatz bei Beurtheilung des Grades dieser Wahrscheinlichkeit.

An einem Beispiele aus der Theorie der Wärme wollen wir diese Methode der Naturforschung, so weit es unsere schwachen Kräfte vermögen, zu erläutern versuchen.

I.

Die Wärme hat mit dem Lichte viele merkwürdige Eigenschaften gemeinschaftlich und beide Imponderabilien stehen durch die unzweideutigsten Analogieen in ihren wichtigsten Erscheinungen zu einander in naher Beziehung. So pflanzen sich nämlich beide durch Strahlung gradlinig fort und werden durch gewisse materielle Stoffe in ihrem Fortgang aufgehalten, durch andere aber ungehindert hindurchgelassen. Beide werden beim Auffallen auf die Oberfläche der Körper entweder vorwaltend nach bestimmten, oder gleichmässig nach allen Richtungen zurückgeworfen und erfahren somit eine regelmässige Spiegelung, oder eine unregelmässige Zerstreuung. Beide werden ferner beim Eindringen in ein neues Medium von ihrer Richtung abgelenkt und in ihrer Intensität geschwächt und erleiden auf diese Weise im Innern der neuen Masse gleichzeitig eine Strahlen-Brechung und Einsaugung; und endlich können beide durch Spiegelung, so wie durch einfache und doppelte Brechung linear und circular polarisirt werden, und zwar zeigt sich — was am meisten überraschen muss — zwischen den thermischen und optischen Gesetzen der gradlinigen Fortpflanzung, der Reflexion und Diffusion, der Refraction, Absorption und Polarisation eine genaue Uebereinstimmung. Mag man nun aus dieser höchst auffallenden Aehnlichkeit, wie viele Naturforscher glauben, auf die Identität beider Agentieen mit Recht schliessen können, oder nicht: — die Natur des Fluidums, welches den Erscheinungen der Wärme zu Grundr liegt, ist uns darum gleichwohl nicht minder verborgen. Die erstaunenswürdigsten Entdeckungen aber, welche zur Ergründung derselben der Scharfsinn der Physiker über Wärme-Strahlung, Spiegelung, Brechung und Einsaugung gemacht hat, sind in folgenden empirischen Gesetzen ausgesprochen, welche ich, ohne Rücksicht auf chronologische Anordnung, hier mittheile und der ganzen Abhandlung zu Grunde lege.

1) Die Wärmestrahlen bewegen sich im leeren Raume und in einem homogenen Mittel

gradlinig und ihre Intensität ist dem Quadrat der Entfernung der Wärmequelle von der zu erwärmenden Stelle umgekehrt proportional.

2) Die Anzahl oder die Intensität der Wärmestrahlen, welche aus einem Körper auszufahren suchen, ist unter allen Verhältnissen der absoluten Temperatur des Körpers proportional; aber die Oberfläche des Körpers lässt nur einen gewissen, von ihrer Beschaffenheit abhängigen, constanten Theil dieser Wärme aus dem Körper wirklich austreten. Dieser constante Bruch drückt das *Emissions- oder Strahlungs-Vermögen*, *die wärmeausstrahlende Kraft, oder die Radiation der Oberfläche* aus.

3) Fällt die von dem ersten Körper ausgehende Wärme auf die Oberfläche eines zweiten Körpers auf, so dringt, welches auch ihre Intensität sein mag, gleichfalls nur ein gewisser, von der Beschaffenheit der Oberfläche abhängiger, constanter Theil in den Körper ein, während der Rest, der also ebenfalls beständig und nur mit der Natur der Oberfläche variabel ist, zurückgeworfen wird. Diese constanten Coefficienten stellen das *Absorptions- und Reflexions-Vermögen, die absorbirende und reflectirende Kraft der zweiten Oberfläche dar.*

An der Grenze zweier heterogener Mittel theilt sich also ein Wärmestrahl in zwei Strahlen, wovon der eine ins erste Mittel zurückkehrt, oder reflectirt, der andere ins neue Medium eindringt und gebrochen wird.

4) Die *Reflexion* geshieht bei der Wärme nach demselben Gesetze, wie beim Lichte: der reflectirte Strahl liegt mit dem auffallenden in einer auf der Oberfläche des Körpers im Einfallspunkte senkrechten Ebene und der Reflexionswinkel ist dem Einfallswinkel gleich.

5) Die *spiegelnde Kraft* eines Körpers ist um so grösser, je polirter seine Oberfläche ist; auch hat die Natur des Körpers selbst auf dieses Vermögen einen grossen Einfluss. Bei den Metallen ist dasselbe im Allgemeinen beträchtlicher, als bei den andern Körpern. Die Intensität der reflectirten Strahlen ist, gleichwie beim Lichte, ein Minimum bei senkrechter und ein Maximum bei horizontaler Incidenz und wächst von jener Grenze bis zu dieser continuirlich. Auch ist nach den Versuchen von Leslie, Melloni, Rumford u. a. dieses Vermögen für alle Körper, die Metalle ausgenommen, mit der Wärmequelle selbst variabel.

6) Wärmestrahlen, welche auf die Grenzfläche zweier heterogener Medien nicht senkrecht auffallen, werden beim Eindringen ins neue Mittel von ihrer Richtung abgelenkt, oder *gebrochen,* und diese *Ablenkung* ist um so grösser, je heisser die Quelle, von der sie ausströmen; im Allgemeinen ist dieselbe bei der Wärme geringer, als beim Lichte.

7) Die Wärme, welche ins Innere eines Körpers eindringt, strahlt entweder, ohne geschwächt zu werden, durch dessen Masse hindurch, oder aber sie wird auf ihrem Wege theilweise oder ganz von dem Körper absorbirt und erhöht in letzterem Falle dessen Temperatur. Körper, welche die Wärme, wie durchsichtige Stoffe das Licht, durch ihre Substanz hindurchstrahlen lassen, nennt man mit Melloni *diathermane,* und solche, welche diese Eigenschaft nicht besitzen, *athermane*.

8) Die Wärmestrahlen werden von einem diathermanen Körper im Allgemeinen um so mehr *absorbirt,* je tiefer sie in denselben eindringen; nach den Versuchen von Melloni aber ist die Grösse der *Absorption* auch mit der Natur des Körpers und selbst der Wärmequelle variabel.

9) Das *Emissionsvermögen* wächst mit der Temperatur des strahlenden Körpers und ist im Allgemeinen um so grösser, je weniger dicht der Körper ist. Dasselbe ist von der Temperatur der Umgebung, sofern dadurch der Wärmegrad des radiirenden Körpers nicht afficirt wird, unabhängig; ändert sich aber, gleichwie das reflectirende Vermögen, mit der Politur der strahlenden Oberfläche und nimmt ab, wenn diese grösser wird. Wie die radiirende Kraft eines Körpers sich vermindert, wächst also in gleichem Verhältniss seine reflectirende Kraft und umgekehrt.

10) Die *Wärme-emittirende und absorbirende Kraft* eines Körpers sind im leeren Raume für Wärmestrahlen von gleicher Intensität stets einander gleich; beide Vermögen aber wachsen mit der Energie der Wärmequelle.

11) Die Intensität der aus der Oberfläche eines Körpers schief ausfahrenden Wärmestrahlen ändert sich proportional dem Sinus des Winkels, den die Richtung der Radiation mit dem strahlenden Elemente bildet.

12) Wird die Wärme von einer dünnen Körperschicht ausgestrahlt, so ist ihre Intensität von der Dicke dieser Schicht im Allgemeinen in der Weise abhängig, dass, wenn die Schicht an Dicke zunimmt, ihre Radiation wächst bis zu einer gewissen Grenze, über welche hinaus eine Vergrösserung der Wärme aussendenden Schicht die Ausstrahlung des Körpers selbst nicht mehr ändert.

Aus diesem Erfahrungsgesetze scheint zu folgen:

dass die aus dem Körper entweichende Wärme nicht blos von der mathematischen Oberfläche desselben, sondern von allen bis zu einer gewissen, übrigens nur geringen, Tiefe unter dieser Fläche liegenden Theilchen des Körpers herrühre. Wahrscheinlicher aber ist es noch, dass *alle* Theile des Körpers Wärme aussenden, dass aber die Wärme, welche von einem unterhalb jener Grenze im Innern des Körpers befindlichen Theilchen ausgeht, wegen des Widerstandes der über ihm liegenden Körperschicht, oder was dasselbe heisst, wegen der an den Molekülen dieser Schicht Statt findenden Absorptionen und Reflexionen die Oberfläche selbst nicht erreichen kann, sondern in's Innere des Körpers zurückkehren muss. Und dieses führt auf folgende Hypothese, welche zuerst von Prevost in Genf aufgestellt wurde, in den Werken von Fourier, Laplace und Poisson über die Wärme streng definirt und entwickelt ist und seitdem von den Physikern als *Princip der Wärme-Ausstrahlung und Wärme-Mittheilung* angenommen wird, nämlich:

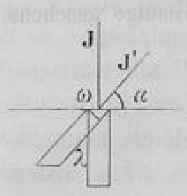
Jedes wägbare Körpertheilchen sendet Wärmestrahlen nach allen Richtungen unaufhörlich aus und besitzt ausserdem die Fähigkeit, gewisse Theile der auf dasselbe fallenden Wärme zu absorbiren und zu reflectiren. Die Intensität der Radiation ist hauptsächlich von der Temperatur des strahlenden Theilchens, die Grösse der Absorption und Reflexion aber von der Natur dieses Theilchens und der Dichtigkeit des Körpers, dem dasselbe angehört, abhängig.

Soll diese Vorstellungsweise der Physiker von einem Wärme-Austausch zwischen benachbarten Körpertheilchen in der Natur gegründet sein, so muss sie alle dahin gehörigen Thatsachen einfach und ungezwungen erklären und darf keine ihrer Schlussfolgerungen der

Erfahrung widerstreiten. Bis zu welchem Grade aber dieser Forderung Genüge geschehe, sind nachstehende Zeilen zu zeigen bestimmt.

II.

1) Zuvörderst erwächst aus dieser hypothetischen Eigenschaft der Körper-Moleküle eine Art von Widerstand, den die oberflächliche Schicht der Körper dem Durchgange der auf sie fallenden Wärmestrahlen entgegengesetzt und aus deren verschiedenen Wirkungen auf die Wärme sich die verschiedenartigen Phänomene der Radiation, Absorption und Reflexion erklären lassen. Denn ist dieser Widerstand bedeutend, so wird der grössere Theil der Wärmestrahlen, welche auf die äusserste Schicht des Körpers auffallen, von dieser aufgehalten und gespiegelt, wogegen nur ein geringer Antheil durch sie hindurch entweder in's Innere des Körpers eindringt, oder aus demselben ausströmt; und daher ist das äussere und innere Reflexionsvermögen eines solchen Körpers gross in Vergleich zu seinem Absorptions- und Strahlungs-Vermögen, während bei geänderter Voraussetzung das Gegentheil Statt findet. Aus dieser Erklärung folgt, dass, in Uebereinstimmung mit der Erfahrung, bei jeder Oberfläche das Wärme-absorbirende und ausstrahlende, so wie das äussere und innere Reflexionsvermögen stets in gradem, das Absorptions- und äussere, gleichwie das Emissions- und innere Spiegelungs-Vermögen aber in umgekehrtem Verhältniss zu einander stehen; noch mehr, dass, weil kein Grund gedacht werden kann, weshalb die oberflächliche Schicht des Körpers dem Durchgange der Wärme nach einer Richtung mehr Widerstand leisten sollte, als nach der entgegengesetzten, bei jedem homogenen Körper das Strahlungs- und Absorptions-Vermögen unter allen Verhältnissen einander gleich sind, und darum, sowie jenes, auch dieses von der Intensität der Wärmequelle und zwar nach dem nämlichen Gesetze abhängig ist. Ferner ergibt sich aus derselben Hypothese, dass jegliche Modifikation des Körpers oder der Wärme, welche das Reflexionsvermögen der Oberfläche vergrössert, deren Emissionsvermögen vermindern müsse und umgekehrt. Dieses ist aber auch wirklich der Fall; denn, gleichwie das reflectirende, ist auch das strahlende Vermögen eines Körpers mit der Politur seiner Oberfläche veränderlich und nimmt ab, wenn diese grösser wird; aber das Gesetz dieser Abhängigkeit konnte noch nicht mathematisch ausgedrückt werden, weil man kein Mittel kennt, den Grad der Politur einer Oberfläche zu messen und numerisch zu bestimmen; überdies steht die Intensität der Radiation mit dem Sinus des Winkels, unter welchem die Wärmestrahlen gegen das Element der Oberfläche des Körpers geneigt sind, in direktem, dagegen die Intensität der Reflexion mit derselben Grösse in umgekehrtem Verhältniss; und endlich sind beide Vermögen auch mit der Wärmequelle, aber ebenfalls in entgegengesetztem Sinne, variabel. Auf gleiche Weise ist, wie man sofort einsieht, das oben (§ I. 12) angegebene Erfahrungsgesetz eine unmittelbare Folge aus jenem Prinzip, so wie auch das daselbst unter (11) angeführte Gesetz über die Intensität der schief aus-



tretenden Wärmestrahlen. Denn ist λ die Grenze der Tiefe, von wo aus noch Wärmestrahlen aus dem Innern des Körpers zu dessen Oberfläche gelangen, und ω ein sehr kleines Element dieser Fläche: so bilden die durch dasselbe nach irgend einer Richtung aus dem Körper austretenden Wärmestrahlen einen Cylinder, dessen Basis ω und dessen Seite λ ist. Je nachdem nun diese Strahlen senkrecht, oder unter dem Winkel α aus dem Elemente ausfahren, ist die zu ihrer Richtung, oder was dasselbe heisst, zur Seite des Cylinders senkrechte Grundfläche des Cylinders gleich ω oder $\omega \sin \alpha$. Da aber je zwei Strahlen dieser Cylinder, weil sie aus gleicher Tiefe kommen und deshalb aus gleich vielen und gleich starken partiellen Strahlen bestehen, nothwendig von gleicher Intensität sind: so verhalten sich die Wärme-Intensitäten der Strahlencylinder selbst wie ihre Grundflächen, also wie

$$\omega : \omega \sin \alpha = 1 : \sin \alpha.$$

Bezeichnet man daher die Intensität der durch irgend ein Element der Oberfläche eines Körpers senkrecht austretenden Wärme durch i, so wird die aus demselben Elemente unter dem Winkel α ausströmende Wärmemenge durch $i \sin \alpha$ ausgedrückt sein; wie jenes Gesetz es fordert.

2) Dem angegebenen Prinzipe der Wärme-Mittheilung gemäss findet ferner zwischen benachbarten Körpern ein gegenseitiger Wärme-Austausch Statt und besteht darum das Gleichgewicht der Temperaturen zwischen denselben darin, dass ein jeder von ihnen in einer gewissen Zeit ebenso viel Wärme an seine Umgebung abgibt, als er von dieser absorbirt, und daher heisst dieser Zustand auch das *bewegliche Gleichgewicht der Temperaturen.* Aber auch von diesem Zustande, wie manchfaltig derselbe durch das verschiedenartige Verhalten der Körper gegen die Wärme sich auch gestalten mag, gibt obige Hypothese eine vollständige Erklärung.

Betrachtet man nämlich einen Punkt o im Innern einer von allen Seiten geschlossenen homogenen Umgebung, welche *überall gleiche* Temperatur und überdies die Eigenschaft hat, alle auf sie fallende Wärme *gänzlich zu absorbiren;* ist

r die Entfernung jenes Punktes von irgend einem Element ω dieser Hülle,

i die Intensität der Wärme, welche die Flächen-Einheit der Umhüllung in senkrechter Richtung ausstrahlt, und

α der Neigungswinkel der nach dem Punkt o gerichteten Radiation gegen die strahlende Fläche:

so ist

$$J = \frac{i \omega \sin \alpha}{r^2}$$

die Wärmemenge, welches dieses Element jenem Punkte zusendet. Denkt man sich nun diesen Punkt mit allen Punkten der das Element ω einschliessenden Curve durch grade Linien verbunden, so umhüllen diese einen Kegel, welcher auf der um den Punkt o als Centrum mit dem Radius r beschriebenen Kugeloberfläche ein Stück ω' begrenzet, das als die Projection des Elementes ω auf diese Kugeloberfläche angesehen und darum $\omega' = \omega \sin \alpha$

gesetzt werden darf. Das Flächenstück ω'', welches dieselbe Kegeloberfläche von einer zweiten, mit der Linien-Einheit gezogenen, concentrischen Kugel einschliesset, ist gleich

$$\omega'' = \frac{\omega'}{r^2} = \frac{\omega \sin \alpha}{r^2};$$

folglich ist die Wärmemenge, welche das Element ω der strahlenden Hülle dem Punkt o zuschickt, diesem letzteren Flächenstück ω'' proportional, oder

$$J = \frac{i\,\omega \sin \alpha}{r^2} = \frac{i\,\omega'}{r^2} = i\,\omega''.$$

Die Wärme-Quantität, welche der Punkt o von allen Theilen der Umhüllung empfängt, ist also der ganzen Kugeloberfläche vom Radius 1 proportional, mithin

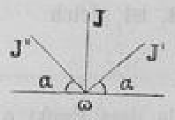
$$J = 4\,\pi\,i.$$

Liegt der Punkt aber auf der strahlenden Wand selbst, so erhält er von den Theilen derselben offenbar nur halb so viel Wärme, als im vorigen Fall; alsdann also ist

$$J = 2\,\pi\,i.$$

Hieraus folgt, dass jeder Punkt gleich viel Wärme empfängt, welches auch seine Lage *innerhalb* oder *auf* der strahlenden Wand und die Gestalt und Ausdehnung dieser letzteren immerhin sein mag. Die Wärme, welche von einem beliebigen Elemente der Hülle nach einer gewissen Richtung ausgestrahlt wird, bildet offenbar einen Strahlencylinder, dessen Intensität mit der Entfernung nicht abnimmt und dem senkrechten Schnitte des Cylinders proportional ist und daher, wenn dieser durch B bezeichnet wird, durch Bi ausgedrückt werden kann. Diese Wärme wird der Voraussetzung gemäss von dem Theile der Wand, auf welchen sie fällt, gänzlich absorbirt; dagegen strahlt derselbe Theil der Umhüllung nach der nämlichen Richtung auch genau eine gleich grosse Wärmemenge aus. Jeder Theil der Umhüllung empfängt daher von den übrigen ebenso viel Wärme, als er an diese ausstrahlt, so dass also durch die Radiation die Temperatur der homogenen Wand in keinerlei Weise geändert werden kann.

Es ändere nun aber ein einziges Element dieser Wand seine Natur der Art, dass es nicht mehr, wie vorhin, alle Wärme, welche auf dasselbe auffällt, *gänzlich absorbire*, sondern einen Theil davon *reflectire*, dagegen seine frühere Temperatur behalte; und untersuchen wir, welche Veränderung dadurch in den übrigen Theilen der strahlenden Umhüllung hervorgebracht wird. In dieser Voraussetzung empfängt das Element ω nach einer Richtung, welche mit seiner Fläche den Winkel α bildet, eine Quantität Wärme, welche durch $i\,\omega \sin \alpha$ bezeichnet werden kann und wovon das Element einen Theil $\frac{i\,\omega \sin \alpha}{m}$ absorbirt, den andern $\left(1 - \frac{1}{m}\right) i\,\omega \sin \alpha$ aber reflectirt. Hier stellen nun die Brüche $\frac{1}{m}$ und $\frac{m-1}{m}$ das absorbirende und reflectirende Vermögen des Elementes dar; und da das Absorptions- und Strahlungs-Vermögen des Elementes einander gleich sind, so ist letzteres ebenfalls durch den Bruch $\frac{1}{m}$ ausgedrückt, und das Element ω sendet also nach irgend einer Richtung in der Zeiteinheit genau ebenso viel Wärme aus, als es während dieser Zeit von der nach derselben Richtung auf dasselbe auffallenden Wärme absorbirt, so dass also seine Temperatur dadurch sich nicht



ändern kann. Liegen nun die Graden $\omega\,J'$ und $\omega\,J''$ in einer auf dem Elemente ω senkrechten Ebene und bildet jede von ihnen mit der Fläche des Elementes den Winkel α: so vereinigt sich mit der nach der Richtung $\omega\,J'$ von dem Elemente emittirten Wärme $\frac{i\,\omega\,\sin\alpha}{m}$ noch ein zweiter Theil, welcher von der nach der Richtung $J''\,\omega$ auf das Element auffallenden Wärmemenge $i\,\omega\,\sin\alpha$ herrührt und von dem Elemente reflectirt ist, nämlich $\left(1-\frac{1}{m}\right) i\,\omega\,\sin\alpha$; so dass also nach der Richtung $\omega\,J'$ von dem Elemente ausgeht die Wärme-Quantität

$$\frac{i\,\omega\,\sin\alpha}{m} + \left(1-\frac{1}{m}\right) i\,\omega\,\sin\alpha = i\,\omega\,\sin\alpha.$$

Und da diese Wärme derjenigen genau gleich ist, welche nach entgegengesetzter Richtung auf das Element auffällt, so bewirkt eine Veränderung der Natur des Elementes ω keine Modifikation in der Temperatur der übrigen Theile der Fläche. Aendern also auch einzelne Theile der strahlenden Wand ihre Natur, so hat dieses auf das Gleichgewicht der Temperaturen und die Bewegung der Wärme innerhalb des von der Umhüllung begrenzten Raumes keinen Einfluss. Jeder Theil der Wand empfängt nämlich während einer gewissen Zeit nach jeder beliebigen Richtung genau die gleiche Wärmemenge, welche er in derselben Zeit nach entgegengesetzter Richtung ausstrahlt; und dieses Resultat ist nicht von der *Höhe,* sondern nur von der *Beständigkeit und Gleichförmigkeit* der Temperatur der Umhüllung, in keinerlei Weise aber von der *Form und Ausdehnung* der letzteren, noch auch noch von der *homogenen* oder *heterogenen* Natur ihrer Theile abhängig, und bleibt darum — in Uebereinstimmung mit der Erfahrung — stets dasselbe, mögen auch einzelne Theile der Fläche *viel* oder *wenig, alle* oder *gar keine* Wärme *absorbiren,* oder *reflectiren,* oder *ausstrahlen.*

Jenes Prinzip gibt also eine einfache und vollständige Erklärung der verschiedenartigen Phänomene der Strahlung, Spiegelung und Einsaugung, so wie des Gleichgewichtes der Wärme zwischen benachbarten Körpern.

III.

Einer neuen Prüfung unterwirft man dieselbe Hypothese, indem man sie auf die Fortpflanzung der Wärme in festen (athermanen) Körpern anwendet und die aus ihr abgeleiteten Schlussfolgerungen mit der Erfahrung vergleicht.

1) Haben nämlich zwei sehr nahe gelegene Theilchen eines solchen Körpers die Temperaturen T und t, so strahlt dem Grundprinzipe gemäss ein jedes gegen das andere Wärme aus, und es wird die Wärmemenge, welche bei diesem Austausch das kältere Theilchen gewinnt, der Temperatur-Differenz beider Theilchen proportional gesetzt und durch

$$q = \alpha\,(T - t) \qquad (1)$$

ausgedrückt werden können, wo α eine blosse Function der Entfernung dieser Theilchen und von ihren Temperaturen unabhängig ist. Um nun das Gesetz der Wärme-Vertheilung im Innern des Körpers für den Zustand des Temperatur-Gleichgewichtes zu ergründen, wollen wir eine solide, homogene Mauer wählen, welche überall gleiche Dicke hat und deren beide Endflächen A und B einander parallel und von unbegrenzter Ausdehnung sind und stets auf denselben Temperaturen a und b erhalten werden. Ist $a > b$ und hat anfangs die Mauer in ihrer ganzen Dicke die Temperatur b, so ist klar, dass auch späterhin in jedem Augenblicke alle Punkte eines und desselben mit den beiden Grenzflächen parallelen Schnittes der Mauer dieselbe Temperatur haben werden, und es fragt sich nur, nach welchem Gesetze sich der Wärmegrad eines Punktes im Innern des Körpers mit seiner Entfernung von der Grenzfläche A ändert. Bezeichnet man durch e die constante Dicke der Mauer, durch T die Temperatur irgend eines Punktes und durch x dessen Entfernung von der Fläche A: so ist

$$T = \varphi(x),$$

und es handelt sich nur darum, die Form dieser Function zu bestimmen. Die einfachste Form aber, welche die Function haben kann, ist ausgedrückt durch die Bedingungsgleichung

$$\frac{dT}{dx} = \text{constant},$$

woraus $\qquad dT = c.\, dx$

und $\qquad T = cx + k$

folgen würde. Die beiden Constanten dieses Integrals bestimmen sich aus den Bedingungen

$$T = a \text{ für } x = o \text{ und}$$
$$T = b \;\ldots\; x = e,$$

wodurch dasselbe in $\qquad T = a - \frac{a - b}{e}.x \qquad (2)$

übergeht. Der Temperatur-Zustand, welcher durch diese Gleichung ausgedrückt ist, wird stationär sein, wenn sich zeigen lässt, dass jede Schicht des Körpers an die nächstfolgende ebenso viel Wärme abgibt, als sie von der vorhergehenden erhält. Dieses lässt sich aber auf folgende Weise leicht erkennen. Sind nämlich T, T', T'', T''' u. s. w. die Temperaturen mehrer unmittelbar auf einander folgender Parallel-Schnitte der Mauer, deren gegenseitige Entfernung ε heissen möge; so ist

$$T - T' = \frac{a - b}{e}.\varepsilon\,,\; T' - T'' = \frac{a - b}{e}.\varepsilon\,,\; T'' - T''' = \frac{a - b}{e}\varepsilon \text{ u. s. w.},$$

folglich $\qquad T - T' = T' - T'' = T'' - T''' \ldots$

also auch $\qquad \alpha(T - T') = \alpha(T' - T'') = \alpha(T'' - T''') \ldots.$

Diese letzteren Ausdrücke bezeichnen aber (Gl. 1.) die Wärmemengen, welche die erste Schnittfläche der Mauer der zweiten, diese der dritten u. s. f. zusendet, und da diese Grössen einander gleich sind, so erhält also jeder dieser Schnitte von dem vorhergehenden ebenso viel Wärme, als er an den nächstfolgenden abgibt und daher ist der Wärmegrad eines jeden Schnittes constant. Die Gleichung (2) drückt also wirklich den verlangten Zustand des Temperatur-Gleichgewichtes der Mauer aus.

Bezeichnet man durch A', B', a', b', e' und y die entsprechenden Grössen bei einer andern ähnlichen Mauer von derselben Substanz, so wird der Zustand des Gleichgewichtes der Temperaturen dieses Körpers durch die Gleichung

$$T = a' - \frac{a' - b'}{e'} . y$$

dargestellt. Sind nun T und t, so wie T' und t' die Temperaturen zweier Schnitte in jeder Mauer, welche um die Grösse ε von einander abstehen, so ist

$$T - t = \frac{a - b}{e} . \varepsilon , \quad T' - t' = a' - \frac{a' - b'}{e'} . \varepsilon ;$$

folglich

$$T - t : T' - t' = \frac{a - b}{e} : \frac{a' - b'}{e'} .$$

Drücken ferner Q und Q' die Wärmemengen aus, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit irgend eines Schnittes jeder Mauer durchströmen, so ist gleichfalls

$$T - t : T' - t' = Q : Q' ;$$

mithin

$$Q : Q' = \frac{a - b}{e} : \frac{a' - b'}{e'} .$$

Ist nun für $e' = 1$ und $a' - b' = 1$ der Werth von $Q' = K$, so vereinfacht sich die letzte Proportion in folgende

$$Q : K = \frac{a - b}{e} : 1 ,$$

woraus

$$Q = \frac{a - b}{e} . K \qquad (3)$$

sich ergibt. In dieser Gleichung bezeichnet die Grösse K offenbar die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit irgend eines Schnittes einer soliden homogenen Mauer durchdringt, deren Dicke der Linieneinheit gleich und deren beide dem genannten Schnitte parallele Endflächen von unbegrenzter Ausdehnung sind und auf constanten Temperaturen erhalten werden, die sich um die Temperatureinheit, etwa 1°, von einander unterscheiden. Diese Grösse K nennt man die *innere Wärme-Leitungsfähigkeit* der Mauer. Aus der letzten Gleichung folgt also, dass die Wärmemenge, welche während der Zeiteinheit die Flächeneinheit eines beliebigen Schnittes einer homogenen Mauer durchströmt, dem inneren Leitungsvermögen der Substanz und der Temperatur-Differenz der beiden Grenzflächen der Mauer direkt und ihrer Dicke umgekehrt proportional ist.

Strahlt die Endfläche B der Mauer, anstatt, wie vorhin, mit einer constanten Temperaturquelle in Verbindung zu stehen, beständig Wärme gegen ihre Umgebung, deren Temperatur c sein möge, aus, und bezeichnet man, wie oben, durch $b > c$ die für den Zustand des Gleichgewichtes nunmehr unbekannte Temperatur dieser Fläche: so kann ihr Wärmeverlust, wenn b und c nur wenig von einander verschieden sind, der Temperatur-Differenz $(b - c)$ proportional gesetzt werden. Nennt man darum H die *äussere Wärme-Leitungsfähigkeit* der Mauer, oder die Wärmemenge, welche während der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit von B ausströmt, wenn $b - c = 1$ ist; so ist $H (b - c)$ die Wärme-Quantität, welche im Allgemeinen durch die Flächeneinheit von B während derselben Zeit ausstrahlt; und da im Zustande des Gleichgewichtes diese Wärmemenge derjenigen gleich sein muss, welche in eben der Zeit die Flächeneinheit eines beliebigen Schnittes der Mauer durchdringt: so erhält man, wenn H bekannt ist, zur Bestimmung von b die Bedingungsgleichung

$$H(b - c) = \frac{a - b}{e} . K. \qquad (4)$$

In der Formel (3) drückt $\quad eQ = (a - b)K$

die Wärmemenge aus, welche im Zustande des Gleichgewichtes während der Zeiteinheit ein senkrechtes Parallelepipedon von der Substanz der Mauer durchdringt, das die Flächeneinheit zur Basis und die Dicke der Mauer zur Höhe hat. Diese Wärme-Quantität ist also von der absoluten Temperatur der Grundflächen des prismatischen Körpers unabhängig und bleibt dieselbe, wenn die Temperatur-Differenz dieser Flächen und das innere Leitungsvermögen der Substanz sich nicht ändert.

Schreibt man die Gleichung (3) folgendergestalt

$$Q = \frac{a}{e}.K - \frac{b}{e}.K,$$

so bezeichnen die Grössen der Differenz Q die Wärmemengen, welche während der Zeiteinheit die Flächeneinheit irgend eines Parallelschnittes der Mauer senkrecht auf ihre Endflächen in entgegengesetzten Richtungen durchströmen. Diese aber sind einander offenbar gleich, wenn die Grenzflächen der Mauer dieselbe Temperatur haben; und hieraus folgt wiederum, dass die Wärme die Substanz eines homogenen Körpers nach entgegengesetzten Richtungen mit gleicher Leichtigkeit durchdringt, dass also — im Einklang mit der Frfahrung § I. 10 — das Emissions- und Absorptions-Vermögen derselben Substanz einander gleich sind.

Die Grösse Q bezeichnet eine Differenz zweier Wärme-Quantitäten; die absolute Wärmemenge aber, welche die Flächeneinheit eines Parallelschnittes der Mauer während der Zeiteinheit nach entgegengesetzten Richtungen durchströmt, ist offenbar gleich

$$Q_2 = \frac{a + b}{e}.K.$$

Diese ist also zwar auch für alle Schnitte der Mauer dieselbe, von der absoluten Temperatur ihrer Grenzflächen aber nicht mehr unabhängig.

Aus Gleichung (4) folgt

$$\frac{K}{H} = e.\frac{b - c}{a - b}$$

und wenn $a - b = b - c$ ist

$$\frac{K}{H} = e.$$

Sind also im Zustande des Gleichgewichtes bei einer Mauer die Temperatur-Differenzen zwischen beiden Grenzflächen einerseits und der kältern Fläche und ihrer Umgebung andererseits einander gleich, so drückt die Dicke der Mauer das Verhältniss des innern und äussern Leitungsvermögens ihrer Substanz aus.

Die Gleichungen (3) und (4) enthalten 7 Grössen; 2 derselben lassen sich bestimmen, wenn man die übrigen kennt. Diese Gleichungen dienen also zur Lösung von 21 Aufgaben;

was hiermit angedeutet zu haben wir uns aber des beschränkten Raumes halber begnügen müssen.

2) Bezeichnet man durch dieselben Buchstaben mit Accenten die entsprechenden Grössen bei einer andern Mauer von verschiedener Substanz und Dimension, so ist

$$\left.\begin{aligned} e'Q' &= (a'-b')K' \\ e'H'(b'-c') &= (a'-b')K' \end{aligned}\right\}$$

folglich
$$\frac{Q}{Q'} = \frac{a-b}{a'-b'} \cdot \frac{K}{K'} \cdot \frac{e'}{e} = \frac{H(b-c)}{H'(b'-c')}.$$

Die Wärme-Quantitäten, welche im Zustande des Gleichgewichts während derselben Zeit gleiche Flächen zweier Parallelschnitte verschiedener Mauern durchdringen, stehen also zu einander in gradem Verhältniss der Temperatur-Differenzen der Endflächen und der innern Leitungsfähigkeiten der Mauern und in umgekehrtem Verhältniss ihrer Dicken; oder auch in direktem Verhältniss der äussern Leitungsvermögen der Körper und der Temperatur-Ueberschüsse ihrer kältern Grenzflächen über die Umgebung.

Ist $Q = Q'$, so ist
$$\frac{K}{K'} = \frac{e}{e'} \cdot \frac{a'-b'}{a-b} \text{ und } \frac{H}{H'} = \frac{b'-c}{b-c}.$$

Wird also der Flächeninhalt irgend eines Parallelschnittes bei zwei verschiedenen Mauern während der Zeiteinheit von derselben Wärmemenge durchströmt, so stehen die innern Leitungsfähigkeiten der Substanzen der Körper zu einander in gradem Verhältniss ihrer Dicken und in verkehrtem Verhältniss der Temperatur-Differenzen ihrer Endflächen; und die äussern Leitungsvermögen stehen zu einander in umgekehrtem Verhältniss der Temperatur-Ueberschüsse der kälteren Grenzflächen der Mauern über ihre Umgebung.

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Wenn } Q = Q' \text{ und } e = e', & & \text{so ist} & K:K' = a'-b' : a-b \\ \ldots\ Q = Q' & \ldots\ a-b = a'-b' & \ldots\ldots & K:K' = e:e' \\ \ldots\ Q = Q' & \ldots\ b-c = b'-c' & \ldots\ldots & H = H' \\ \ldots\ a-b : a'-b' = b-c : b'-c' & & \ldots\ldots & \dfrac{K}{K'} : \dfrac{H}{H'} = e:e' \end{array}\right\}$$

Diese Folgerungen lassen sich leicht in Worten ausdrücken und enthalten ebenso viele Sätze.

IV.

Als zweites Beispiel der Anwendung jenes Prinzips wollen wir das Gesetz der Wärme-Vertheilung in einer soliden homogenen Stange von prismatischer Gestalt und geringer Dicke, wovon ein Ende der Einwirkung einer constanten Wärmequelle von der Temperatur A beständig ausgesetzt ist, zu bestimmen suchen. Zu dem Ende seien

S der Flächeninhalt eines zur Länge normalen Schnittes der Stange,

P der Umfang dieses Schnittes,

K und H die Coeffizienten des innern und äussern Leitungsvermögens der Substanz des Stabes und zur Zeit t

y die Temperatur irgend eines Punktes der Masse und
x die Entfernung dieses Punktes von der Wärmequelle A: so ist
y eine Function von x und t; also

$$y = F(x, t).$$

Um nun die Form dieser Function zu bestimmen, seien c, c' und c'' drei auf einander folgende normale Schnitte des Körpers, welche von dem erwärmten Ende um die Grössen x, $x + dx$, $x + 2\,dx$ abstehen und deren Temperaturen respective y, y', y'' heissen mögen; alsdann ist

$$y > y' > y''$$

und

$$y' = y + dy,\ y'' = y' + dy' = y + 2\,dy + d^2y.$$

Die zwischen den beiden Schnitten c und c' enthaltene Schicht cc' der Stange empfängt während des unendlich kleinen Zeittheilchens dt in Folge innerer Strahlung der materiellen Theilchen durch die Basis c eine Wärmemenge, welche dem Vorhergehenden gemäss offenbar in gradem Verhältniss mit der Schnittfläche S, der innern Leitungsfähigkeit der Stange K, der Temperatur-Differenz $(y - y')$ der beiden Grundflächen der Schicht und der Zeit dt, aber in umgekehrtem Verhältniss mit der Dicke dx der Schicht steht und darum durch

$$SK.\frac{y - y'}{dx}\,dt$$

ausgedrückt werden kann. Dagegen theilt während derselben Zeit diese Schicht der nächstfolgenden $c'c''$ durch die gemeinschaftliche Basis c' die Wärmemenge

$$SK.\frac{y' - y''}{dx}\,dt$$

mit, und verliert ausserdem durch Radiation ihrer Oberfläche $P\,dx$ an die Umgebung, deren Temperatur gleich Null sein möge, die Wärmemenge

$$HPy\,dx.\,dt;$$

folglich bleibt ihr zur Erhöhung ihrer Temperatur nur mehr das Wärme-Quantum

$$SK\frac{y - y'}{dx}\,dt - SK.\frac{y' - y''}{dx}\,dt - HPy\,dx\,dt = \left(SK\frac{d^2y}{dx} - HPy\,dx\right)dt. \quad (5)$$

Bezeichnet D das spezifische Gewicht und μ die Masse der Schicht cc', so ist

$$\mu = SD\,dx.$$

Diese Masse wird also während des Zeittheilchens dt durch den vorstehenden Gewinn an Wärme in ihrer Temperatur um $\frac{dy}{dt}\,dt$ erhöht. Drückt daher γ die Wärme aus, welche die Temperatur der Masseneinheit der Stange um 1° zu erhöhen vermag, so ist

$$\gamma\mu = \gamma SD\,dx$$

die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um die Temperatur der Schicht cc' um 1°, also

$$\gamma SD\,dx.\frac{dy}{dt}\,dt \quad (6)$$

die Wärme, welche nöthig ist, um ihre Temperatur um $\frac{dy}{dt}\,dt$ zu erhöhen. Da aber beide

Ausdrücke (5) und (6) dieselbe Grösse bezeichnen, so müssen sie einander gleich sein, und es ist daher

$$\left(SK.\frac{d^2y}{dx} - HPy\,dx\right)dt = \gamma SD\,dx.\frac{dy}{dt}\,dt,$$

mithin
$$SK.\frac{d^2y}{dx^2} - HPy = \gamma SD.\frac{dy}{dt},$$

oder
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{HP}{KS}.y + \frac{\gamma D}{K}.\frac{dy}{dt}. \tag{7}$$

Diese Gleichung drückt also den veränderlichen Temperatur-Zustand der verschiedenen Theile der Stange aus. Zur Zeit des Gleichgewichtes hören die Temperaturen der einzelnen Punkte der Stange zu wachsen auf, und es ist alsdann

$$\frac{dy}{dt} = 0;$$

mithin vereinfacht sich für diesen Fall die vorstehende Gleichung in folgende

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{HP}{KS}.y,$$

oder wenn man der Kürze halber

$$\frac{HP}{KS} = a^2 \tag{8}$$

setzt,
$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 y. \tag{9}$$

Ist
$$\frac{d^2y}{dx^2} + P.\frac{dy}{dx} + U = 0 \tag{10}$$

und sind P und U constante Grössen, so ist [1])

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \tag{11}$$

das vollständige Integral dieser Gleichung, falls man durch m_1 und m_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$m^2 + Pm + U = 0$$

bezeichnet. In diesem Integral sind die Constanten C_1 und C_2 willkührlich und auf keinerlei Weise von x, noch von m abhängig. Vergleicht man mit der allgemeinen Differentialgleichung vom zweiten Grad (10) die besondere Gleichung (9), worin a^2 ebenfalls constant ist, so findet man das Integral dieser letztern, wenn man

$$P = 0, \qquad U = -a^2,$$

also
$$m^2 - a^2 = 0$$

und
$$m = \pm a$$

setzt; folglich ist
$$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} \tag{12}$$

das verlangte Integral. In demselben sind also ebenfalls die Constanten C_1 und C_2 weder von x, noch von a abhängig. Ist l die Länge der Metallstange, A die Temperatur der

[1]) Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral, par Lacroix, §. 313.

Wärmequelle und im Zustande des Gleichgewichtes $\alpha < A$ die Temperatur des freien Endes des Stabes, also

$$y = A \text{ wenn } x = o \text{ und}$$
$$y = \alpha \dots . x = l \quad ;$$

so erhält man zur Bestimmung der Constanten des Integrals die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} A &= C_1 + C_2 \\ \alpha &= C_1 e^{al} + C_2 e^{-al} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Statt der besondern Werthe aber, welche aus diesen Gleichungen für die Constanten sich ergeben, gebrauchen wir der Kürze halber im Verlaufe der Discussion der Gleichung (12) für diese Grössen die allgemeineren Zeichen.

Aus der ersten Bedingungsgleichung (13) folgt, dass die Summe der Constanten des Integrals nur von der Temperatur der Wärmequelle, nicht aber von den Dimensionen der prismatischen Stange, noch auch von der innern oder äussern Leitungsfähigkeit ihrer Substanz abhängig ist.

Die Function (12) führt zwischen den Temperaturen gewisser Punkte der Stange auf eine merkwürdige Relation, welche von den besonderen Werthen der Constanten unabhängig ist. Bezeichnen nämlich y_1, y_2, y_3 die Temperaturen derjenigen Punkte der Stange, welche in den Distanzen x, $x + d$, $x + 2d$ von der Wärmequelle liegen, so ist

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} \\ y_2 &= C_1 e^{ax} . e^{ad} + C_2 e^{-ax} . e^{-ad} \\ y_3 &= C_1 e^{ax} . e^{2ad} + C_2 e^{-ax} . e^{-2ad} . \end{aligned}\right\}$$

Da aber

$$C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_1 e^{ax} . e^{2ad} + C_2 e^{-ax} . e^{-2ad} = [C_1 e^{ax} . e^{ad} + C_2 e^{-ax} . e^{-ad}] (e^{ad} + e^{-ad}),$$

oder

$$y_1 + y_3 = y_2 (e^{ad} + e^{-ad})$$

ist, so folgt daraus

$$\frac{y_1 + y_3}{y_2} = e^{ad} + e^{-ad} = \text{Constant.} \quad (14)$$

Wählt man also auf der prismatischen Stange in gleicher Entfernung von einander drei beliebige Punkte, so ist das Verhältniss der Summe der Temperaturen der beiden äusseren zur Temperatur des mittleren constant und von der absoluten Lage der Punkte auf der Stange unabhängig und nur mit ihrer gegenseitigen Distanz veränderlich. Das Minimum für den Werth dieses Verhältnisses wird sogleich näher angegeben werden können.

Diese Folgerung aus der Theorie wird von der Erfahrung vollkommen bestätigt.

Wendet man zwei mit demselben Firniss überzogene Stäbe aus verschiedenen Metallen, aber gleichen Dimensionen an, so sind bei beiden die äussere Leitungsfähigkeit H, so wie die Fläche S des normalen Schnittes und dessen Umfang P dieselben; aber die Coefficienten der inneren Leitungsvermögen K und K' verschieden. Ist daher, wie oben, der Kürze halber

$$\frac{HP}{KS} = a^2 \text{ und } \frac{HP}{K'S} = a_1{}^2,$$

so folgt
$$K : K' = a_1^2 : a^2.$$
Setzt man nun
$$\left.\begin{aligned} e^{ad} + e^{-ad} &= 2n \\ e^{a_1 d} + e^{-a_1 d} &= 2n_1 \end{aligned}\right\},$$
so sind der Gleichung (14) gemäss n und n_1 zwei constante Zahlen, welche durch unmittelbare Beobachtung gefunden werden. Zur Bestimmung von a macht man in der ersten dieser Gleichungen
$$e^{ad} = \varepsilon,$$
so geht dieselbe über in
$$\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} = 2n,$$
oder
$$\varepsilon^2 - 2n\varepsilon = -1,$$
woraus
$$\varepsilon = n \pm \sqrt{n^2 - 1}.$$
Da ε immer reell und grösser als die positive Einheit ist, so kann n weder kleiner, noch auch gleich 1 sein; also ist, in Uebereinstimmung mit der Erfahrung, der Grenzwerth jenes constanten Verhältnisses (Gl. 14)
$$\frac{y_1 + y_3}{y_2} > 2.$$
Weil aber allgemein
$$\sqrt{n^2 - 1} = n - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} - \frac{1}{16n^5} - \frac{5}{128n^7} - \ldots\ldots,$$
folglich
$$n - \sqrt{n^2 - 1} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^3} + \frac{1}{16n^5} + \frac{5}{128n^7} + \ldots\ldots;$$
so ist der Werth von $n - \sqrt{n^2 - 1}$ um so kleiner, je grösser n ist. Da nun
$$n - \sqrt{n^2 - 1} = 1, \text{ wenn } n = 1, \text{ so ist}$$
$$n - \sqrt{n^2 - 1} < 1, \ldots\ldots n > 1;$$
und darum muss in dem Ausdrucke für ε das Zeichen minus vor der Wurzelgrösse getilgt werden; folglich ist
$$\varepsilon = e^{ad} = n + \sqrt{n^2 - 1}, \quad \text{also}$$
$$ad = \log\left[n + \sqrt{n^2 - 1}\right] \text{ und}$$
$$a = \frac{1}{d}\log\left[n + \sqrt{n^2 - 1}\right].$$
Auf gleiche Weise findet man
$$a_1 = \frac{1}{d}\log\left[n_1 + \sqrt{n_1^2 - 1}\right]; \text{ folglich ist}$$

$$K : K' = a_1{}^2 : a^2 = \left\{ \log \left[n_1 + \sqrt{n_1{}^2 - 1} \right] \right\}^2 : \left\{ \log \left[n + \sqrt{n^2 - 1} \right] \right\}^2. \qquad (15)$$

Durch diese Proportion bestimmt sich also das Verhältniss der inneren Leitungsfähigkeiten beider Metalle vermittels der Zahlen n und n_1. Nimmt man das Leitungsvermögen irgend eines Körpers als Einheit an, so dient die Gleichung (15), die spezifischen Leitungsfähigkeiten verschiedener fester Substanzen zu berechnen. Auf diese Weise hat Despretz das Leitungsvermögen vieler Körper bestimmt und z. B. gefunden, dass Kupfer die Wärme 2,408, also nahe $2\frac{1}{2}$ mal besser leitet, als Eisen [1]).

Hat man auf diesem Wege das Verhältniss der inneren Leitungsvermögen der angewandten Substanzen gefunden, so lässt sich durch ein zweites Experiment mit denselben Stäben ohne Firnissüberzug auch das Verhältniss der äusseren Leitungsfähigkeiten oder der Wärme-ausstrahlenden Kräfte ihrer Oberflächen ableiten.

Ist nämlich

$$\frac{H}{K} \cdot \frac{P}{S} = a^2 \text{ und } \frac{H'}{K'} \cdot \frac{P}{S} = a_1{}^2,$$

so verhält sich

$$\frac{H}{K} : \frac{H'}{K'} = a^2 : a_1{}^2. \qquad (16)$$

Setzt man nun, wie vordem, das constante Verhältniss

$$\left. \begin{array}{l} e^{ad} + e^{-ad} = 2m \\ e^{a_1 d} + e^{-a_1 d} = 2m_1 \end{array} \right\},$$

so sind m und m_1 zwei bekannte Zahlen, vermittels welcher sich die Grössen a und a_1, wie oben durch die Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{1}{d} \log \left[m + \sqrt{m^2 - 1} \right] \\ a_1 = \frac{1}{d} \log \left[m_1 + \sqrt{m_1{}^2 - 1} \right] \end{array} \right\}$$

bestimmen lassen. Substituirt man diese Werthe in die Proportion (16), so geht dieselbe über in

$$\frac{H}{H'} : \frac{K}{K'} = \left\{ \log \left[m + \sqrt{m^2 - 1} \right] \right\}^2 : \left\{ \log \left[m_1 + \sqrt{m_1{}^2 - 1} \right] \right\}^2;$$

folglich ist

$$\frac{H}{H'} = \frac{K}{K'} \cdot \left\{ \frac{\log (m + \sqrt{m^2 - 1})}{\log (m_1 + \sqrt{m_1{}^2 - 1})} \right\}^2 \qquad (17)$$

Sind die Stäbe aus demselben Stoffe, haben aber ihre Oberflächen eine verschiedene Politur, so ist $K = K'$ und man erhält

---

[1]) Cours de physique par Lamé, § 262.

$$\frac{H}{H'} = \left\{\frac{\log\left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right)}{\log\left(m_1 + \sqrt{m_1^{\,2} - 1}\right)}\right\}^2 \qquad (18)$$

für den Werth des fraglichen Verhältnisses der oberflächlichen Radiationen.

Da die Temperatur irgend eines Punktes der Stange im Zustande des Gleichgewichtes um so grösser ist, je grösser das innere Leitungsvermögen und die Fläche des Querschnittes und je kleiner die äussere Leitungsfähigkeit und der Umfang der Stange sind: so muss y wachsen, wenn a kleiner wird; denn der Gleichung (8) gemäss ist a die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Verhältniss des äusseren und inneren Leitungsvermögens der Substanz und dem Verhältniss des Umfanges und Inhaltes des Querschnittes der Stange. Die Vertheilung der Wärme im Innern der Stange bleibt also dieselbe, wenn sich diese beiden Verhältnisse entweder gar nicht, oder aber dergestalt ändern, dass ihr Produkt das nämliche ist. Dahingegen ändert sich der Werth von a und mit ihm also auch die Wärme-Vertheilung im prismatischen Körper jedesmal, wenn eines jener Verhältnisse allein veränderlich ist. Da nun der Umfang eines Kreises kleiner ist, als der Umfang eines Vieleckes von gleichem Inhalt [1]), und der Inhalt eines Kreises grösser, als der Inhalt jedes Polygons von gleichem Umfang [2]); so ergibt sich aus der vorstehenden Theorie folgender merkwürdige Satz:

> Macht man aus derselben Substanz verschiedene prismatische Stangen, deren Querschnitt gleichen Umfang, oder gleichen Inhalt hat, und bringt sie mit einem Ende in dieselbe constante Wärmequelle: so ist in gleicher Entfernung von dieser in der cylindrischen Stange die Temperatur jedesmal am höchsten.

2) Ist die Stange unbegrenzt, so werden diejenigen Punkte derselben, welche in unendlich grosser Entfernung von der Wärmequelle liegen, die Temperatur der Umgebung, also o^0, nicht übersteigen; und hieraus folgt, dass in der allgemeinen Gleichung (12) des Temperatur-Gleichgewichtes das erste Glied verschwinden, also $C_1 = o$ sein muss; mithin ist $C_2 = A$, was auch einfach aus der ersten der Gleichungen (13), oder aus der Bedingung $y = A$ für $x = o$ sich ergibt. Das Gesetz der stationären Temperaturen der Stange ist also für diesen Fall ausgedrückt durch die Gleichung

$$y = A e^{-ax}. \qquad (19)$$

Die Temperaturen der einzelnen Punkte der Stange nehmen mithin in geometrischer Reihe ab, wenn ihre Abstände von der Wärmequelle in arithmetischer Progression wachsen. Dieses Gesetz ist zuerst von Biot aufgestellt worden, aber die von ihm und von Despretz angestellten Versuche bestätigen dasselbe nicht für alle Fälle. Diese Abweichung der Theorie von der Erfahrung hat darin ihren Grund, dass oben bei Entwicklung der Formeln (12) und (19), zur Vereinfachung der Rechnung, das innere und äussere Leitungsvermögen der Stange als von der Temperatur unabhängig vorausgesetzt wurde, was der Wahrheit nicht ganz genau gemäss ist.

---

[1]) Mélanges de Mathématiques par Noël, § 126.

[2]) Eléments de Géométrie par Legendre édit. 12., pag. 136.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$y\, e^{ax} = A$$

$$\log y + ax = \log A. \qquad (20)$$

Für einen andern Punkt der Stange, dessen Temperatur y_1 und dessen Distanz von der Quelle x_1 ist, erhält man auf gleiche Weise

$$\log y_1 + ax_1 = \log A;$$

folglich durch Subtraction beider Gleichungen

$$\log y - \log y_1 = a\,(x_1 - x), \qquad (21)$$

und aus Gleichungen (20) u. (21)

$$a = \sqrt{\frac{HP}{KS}} = \frac{1}{x}\log\frac{A}{y} = \frac{\log y - \log y_1}{x_1 - x}. \qquad (22)$$

Die constante Grösse a der Gleichung (19) ist also bestimmt durch die Temperaturen *zweier* Punkte und deren Abstände von der Quelle, oder auch durch die Temperaturen der Quelle und *eines* solchen Punktes.

Substituirt man den Werth von a in Gleichung (20), so findet man

$$\log A = \frac{x_1 \log y - x \log y_1}{x_1 - x}. \qquad (23)$$

Die Temperatur der Wärmequelle lässt sich also aus den Temperaturen irgend zweier Punkte der Stange und ihren Entfernungen von der Quelle ableiten.

Aus Gleichung (22) folgt

$$\sqrt{\frac{H}{K}} = \sqrt{\frac{S}{P}} \cdot \frac{1}{x}\log\frac{A}{y} = \sqrt{\frac{S}{P}} \cdot \frac{\log y - \log y_1}{x_1 - x}. \qquad (24)$$

Kennt man also die Dimensionen der Stange und ausserdem entweder die Temperaturen der Wärmequelle und irgend eines Punktes, so wie dessen Entfernung von der Quelle; oder die Temperaturen zweier beliebigen Punkte der Stange und deren Distanzen von dem heissen Ende: so findet man vermittels dieser Gleichung das Verhältniss des äussern und innern Leitungsvermögens der angewandten Substanz.

Bezeichnet man durch $y, y_{,}, y_{,,}$ die Temperaturen dreier Punkte der Stange und durch $x, x_{,}, x_{,,}$ deren Abstände von der Wärmequelle; so ist Gl. (21)

$$\left.\begin{aligned} \log y - \log y_{,} &= a\,(x_{,} - x) \\ \log y_{,} - \log y_{,,} &= a\,(x_{,,} - x) \end{aligned}\right\},$$

folglich

$$\frac{\log y - \log y_{,}}{\log y_{,} - \log y_{,,}} = \frac{x_{,} - x}{x_{,,} - x_{,}},$$

und wenn die Punkte auf der Stange in gleicher Entfernung von einander sich befinden, oder

$$x_{,,} - x_{,} = x_{,} - x$$

ist,

$$\log y - \log y_{,} = \log y_{,} - \log y_{,,};$$

mithin

$$\log y + \log y_{,,} = 2 \log y_{,} \quad \text{und}$$

$$y y_{,,} = y_{,}^{2}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich also folgender Satz:

Wählt man auf einer prismatischen Stange, deren äusserstes Ende im Zustande des Gleichgewichtes von der Wärmequelle nicht afficirt wird, in gleicher Entfernung von einander drei willkührliche Punkte; so ist die Temperatur des mittleren Punktes jedesmal die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Temperaturen der beiden äusseren.

Ist der Stab cylindrisch und r der Radius seines kreisförmigen Querschnittes, so ist

$$\left.\begin{array}{l} S = \pi r^2 \\ P = 2\pi r \end{array}\right\};$$

mithin

$$\frac{S}{P} = \frac{r}{2}.$$

Vermittels dieses Werthes erhält man aus Gleichung (24)

$$\frac{r}{2} = \frac{H}{K} \cdot \frac{x^2}{(\log A - \log y)^2}. \qquad (25)$$

Aus dieser Gleichung bestimmt sich also der Durchmesser derjenigen cylindrischen Stange, welche in einer gegebenen Distanz von der Wärmequelle im Zustande des Gleichgewichtes eine bestimmte Temperatur zeiget. Aus ihr ergeben sich unter andern folgende Sätze:

1) Sollen zwei oder mehre cylindrische Stäbe aus verschiedenen Metallen, bei denen das Verhältniss der inneren und äusseren Leitungsfähigkeiten dasselbe ist, in gleicher Entfernung von derselben Wärmequelle dieselbe Temperatur zeigen, so müssen sie gleiche Durchmesser haben.

2) Sind die Stangen aus demselben Metalle verfertigt und mit einem Ende in dieselbe Wärmequelle gebracht; so zeigen diejenigen Punkte auf ihnen gleiche Temperatur, deren Abstände von der Quelle sich wie die Quadratwurzeln aus den Stangen-Durchmessern verhalten.

3) Sollen zwei Metallstäbe, welche mit demselben Firniss überzogen sind, in gleicher Entfernung von derselben Wärmequelle dieselbe Temperatur haben; so müssen sich ihre Durchmesser umgekehrt, wie die inneren Leitungsfähigkeiten der Substanzen verhalten.

V.

Um die allgemeine Gleichung (7) zu integriren, macht man

$$\frac{HP}{KS} = a^2 \text{ und } \frac{\gamma D}{K} = b,$$

so kommt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 y + b\frac{dy}{dt}. \qquad (26)$$

In dieser Gleichung ist y eine Function von x und t, oder

$$y = \psi(x, t);$$

setzt man daher [1])

$$y = Pe^{\alpha x} + Qe^{\beta x} + Re^{\gamma x} + \ldots \quad (27)$$

wo $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ constante Grössen und P, Q, R ... Functionen von t bedeuten, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dP}{dt} e^{\alpha x} + \frac{dQ}{dt} e^{\beta x} + \frac{dR}{dt} e^{\gamma x} + \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \alpha^2 Pe^{\alpha x} + \beta^2 Qe^{\beta x} + \gamma^2 Re^{\gamma x} + \ldots \end{aligned}\right\}$$

Durch Substitution dieser Werthe geht Gleichung (26) über in folgende

$$\begin{aligned} \alpha^2 Pe^{\alpha x} + \beta^2 Qe^{\beta x} + \gamma^2 Re^{\gamma x} + \ldots &= a^2 Pe^{\alpha x} + a^2 Qe^{\beta x} + a^2 Re^{\gamma x} + \ldots \\ &+ b\frac{dP}{dt} e^{\alpha x} + b\frac{dQ}{dt} e^{\beta x} + b\frac{dR}{dt} e^{\gamma x} + \ldots \end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung die Coeffizienten der entsprechenden Glieder zu beiden Seiten des Gleichungszeichens einander gleich, so findet man zur Bestimmung der Grössen P, Q, R ... als Functionen von t die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 P &= a^2 P + b\frac{dP}{dt} \\ \beta^2 Q &= a^2 Q + b\frac{dQ}{dt} \\ \gamma^2 R &= a^2 R + b\frac{dR}{dt} \\ &\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned}\right\}$$

also ist

$$\left.\begin{aligned} (\alpha^2 - a^2)\,dt &= b\cdot\frac{dP}{P} \\ (\beta^2 - a^2)\,dt &= b\cdot\frac{dQ}{Q} \\ (\gamma^2 - a^2)\,dt &= b\cdot\frac{dR}{R} \\ &\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned}\right\}$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha^2 - a^2}{b}\cdot t + C_1 &= \log P \\ \frac{\beta^2 - a^2}{b}\cdot t + C_2 &= \log Q \\ \frac{\gamma^2 - a^2}{b}\cdot t + C_3 &= \log R \end{aligned}\right\};$$

folglich

$$P = Ae^{\frac{\alpha^2 - a^2}{b}t}, \quad Q = Be^{\frac{\beta^2 - a^2}{b}t}, \quad R = Ce^{\frac{\gamma^2 - a^2}{b}t} \quad \ldots\ldots$$

---

[1]) Traité de Mécanique par Poisson, seconde édition, tome second, § 510.

Substituirt man diese Werthe in Gleichung (27), so kommt als Integral der Gleichung (26)

$$y = Ae^{\alpha x} . e^{\frac{\alpha^2 - a^2}{b} t} + Be^{\beta x} . e^{\frac{\beta^2 - a^2}{b} t} + Ce^{\gamma x} . e^{\frac{\gamma^2 - a^2}{b} t} + \ldots\ldots,$$

wo A, B, C... und α, β, γ... zwei Reihen von willkührlichen Constanten bezeichnen.

Auf direkte Weise kann man sich leicht überzeugen, dass dieses Integral die allgemeine Differentialgleichung befriedigt. Derselben Gleichung geschieht aber auch schon Genüge durch jedes einzelne Glied des Werthes von y.

Das Integral y lässt sich folgendergestalt einfacher schreiben

$$y = \Sigma A e^{\alpha x} . e^{\frac{\alpha^2 - a^2}{b} . t}, \tag{28}$$

wo also Σ die Summe von unzählig vielen Gliedern bedeutet, welche man erhält, wenn man den Constanten A und α successive alle möglichen Werthe beilegt.

In eine Discussion dieser Gleichung können wir uns, des beschränkten Raumes halber, hier nicht einlassen. —

VI.

Statt dessen wollen wir endlich aus jenem Prinzip der Wärme-Ausstrahlung und Mittheilung noch die Gesetze der Abkühlung der Körper herzuleiten suchen und dasselbe dadurch einer letzten Prüfung unterwerfen, indem wir die Resultate der Rechnung mit der Erfahrung vergleichen.

1) Wenn ein Körper an seine Umgebung mehr Wärme abgibt, als er von derselben erhält, so sinkt seine Temperatur und man sagt: *der Körper kühle sich ab.* Ist zur Zeit t

τ die Temperatur des Körpers,

$\varkappa$ die constante, oder wenigstens während eines kleinen Zeittheilchens als constant zu betrachtende Temperatur der Umgebung und

ϑ die Differenz zwischen beiden, oder

$$\tau = \varkappa + \vartheta;$$

so wird der Körper während des Zeitelementes dt einen bestimmten Wärme-Verlust erleiden, welcher offenbar eine Function seines Temperatur-Ueberschusses ϑ ist, die mit dieser Grösse zugleich verschwindet. Bezeichnet man diesen Verlust an Wärme durch

$$-d\tau = -d\vartheta,$$

so ist

$$-\frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\vartheta}{dt} = \varphi(\vartheta).$$

Gewöhnlich versteht man in der Theorie der Wärme unter dem Ausdruck: *Abkühlungsgeschwindigkeit eines Körpers* die Grösse seines Wärme-Abflusses während der Zeiteinheit sehr häufig aber auch nennt man den Differential-Coeffizienten $\left(-\frac{d\vartheta}{dt}\right)$ selbst die Abkühlungsgeschwindigkeit V des Körpers und setzt daher allgemein

$$V = -\frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\vartheta}{dt} = \varphi(\vartheta), \tag{29}$$

welches auch die Function sein möge, die den Wärme-Ueberschuss ϑ mit der Zeit t verbindet. Denkt man sich diese unbekannte Function nach dem Theorem von Taylor in eine Reihe entwickelt, welche nach steigenden Potenzen von ϑ fortschreitet; so kann man, wenn ϑ sehr klein ist, in erster Annäherung diejenigen Glieder der Reihe, in denen die zweite und die höhern Potenzen von ϑ vorkommen, vernachlässigen und man erhält alsdann

$$-\frac{d\vartheta}{dt} = k\vartheta,$$

wo k eine von ϑ unabhängige Constante bedeutet. Aus dieser Gleichung folgt

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -k\,dt, \text{ also}$$

$$\log\vartheta = -kt.$$

Setzt man daher $k = \log m$, also $\log\vartheta = -kt = -t\log m = \log m^{-t}$, so ist

$$\vartheta = m^{-t}. \tag{30}$$

Die Temperatur-Ueberschüsse zwischen der erkaltenden Masse und ihrer Umgebung nehmen also in geometrischer Reihe ab, wenn die Zeiten in arithmetischer Progression wachsen. Dieses ist das Gesetz, welches von Newton bei Abkühlung der Körper zum Prinzip erhoben worden, das aber offenbar nur approximative genau und blos in denjenigen Fällen ohne merklichen Fehler anwendbar ist, wenn der Temperatur-Ueberschuss des Körpers über seine Umgebung nicht bedeutend ist.

2) Könnte man einen Körper in eine Umgebung bringen, die aller Wärme gänzlich beraubt, oder auch nur unfähig wäre, Wärme auszustrahlen und zu reflectiren; so würde sein Wärmeverlust während einer sehr kurzen Zeit offenbar nur von seiner Temperatur abhangen. Da aber diese Bedingung sich nicht realisiren lässt, so muss man, um die Gesetze der Abkühlung der Körper zu ergründen, zu andern Mitteln seine Zuflucht nehmen. Zu diesem Ende beobachtet man den Körper in einem leeren Raume von constanter Temperatur, wo alsdann seine Abkühlungsgeschwindigkeit eine Function seiner eigenen, so wie der Temperatur der Umgebung sein wird. Bezeichnet man durch F die unbekannte Function der absoluten Temperatur, welche das Gesetz der Strahlung ausdrückt und zur Zeit t durch τ, $\varkappa$ und ϑ die absoluten Temperaturen des Körpers und seiner Umgebung, so wie den Temperatur-Ueberschuss jenes über diese: so ist

$$\left.\begin{array}{r} \tau = \varkappa + \vartheta \\ V = F(\varkappa+\vartheta) - F(\varkappa) \end{array}\right\} \tag{31}$$

Da aber die Versuche von Dulong und Petit das Gesetz bestätigt haben:

> dass für jeden beliebigen, constanten Temperatur-Ueberschuss die Abkühlungsgeschwindigkeit eines Körpers im Vacuum stets nach derselben geometrischen Progression wächst, wenn die Temperatur der Umgebung in arithmetischem Verhältnisse zunimmt;

so muss, diesem Gesetze gemäss, V von der Form

$$V = F(\varkappa+\vartheta) - F(\varkappa) = \varphi(\vartheta).c^{\varkappa}$$

sein, wo c eine Constante bedeutet. Nun aber ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$F(\varkappa+\vartheta) - F(\varkappa) = \frac{dF(\varkappa)}{d\varkappa}.\vartheta + \frac{d^2F(\varkappa)}{d\varkappa^2}.\frac{\vartheta^2}{1.2} + \frac{d^3F(\varkappa)}{d\varkappa^3}.\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \cdots$$

folglich

$$\varphi(\vartheta).c^{\varkappa} = \frac{dF(\varkappa)}{d\varkappa}.\vartheta + \frac{d^2F(\varkappa)}{d\varkappa^2}.\frac{\vartheta^2}{1.2} + \frac{d^3F(\varkappa)}{d\varkappa^3}.\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$\varphi(\vartheta) = \frac{1}{c^{\varkappa}}.\frac{dF(\varkappa)}{d\varkappa}.\vartheta + \frac{1}{c^{\varkappa}}.\frac{d^2F(\varkappa)}{d\varkappa^2}.\frac{\vartheta^2}{1.2} + \frac{1}{c^{\varkappa}}.\frac{d^3F(\varkappa)}{d\varkappa^3}.\frac{\vartheta^3}{1.2.3} + \cdots;$$

und da diese Reihe gültig ist für jeglichen Werth von ϑ, so müssen die Coefficienten der Potenzen von ϑ in den einzelnen Gliedern constant, also von ϑ und $\varkappa$ unabhängig sein. Setzt man daher

$$\frac{1}{c^{\varkappa}}.\frac{dF(\varkappa)}{d\varkappa} = m \log c,$$

so erhält man

$$\frac{dF(\varkappa)}{d\varkappa} = m \log c . c^{\varkappa},$$

$$dF(\varkappa) = m \log c . c^{\varkappa} d\varkappa; \text{ folglich}$$

$$F(\varkappa) = m \log c \int c^{\varkappa} d\varkappa = m c^{\varkappa} + C; \text{ also auch}$$

$$F(\varkappa + \vartheta) = m c^{\varkappa + \vartheta} + C; \text{ mithin endlich}$$

$$V = F(\varkappa + \vartheta) - F(\varkappa) = m c^{\varkappa}(c^{\vartheta} - 1) \qquad (32)$$

für die Form der gesuchten Function.

Dulong und Petit haben sich durch eine Reihe interessanter Versuche von der Genauigkeit des Gesetzes, welches diese Formel für die Abkühlung der Körper im leeren Raume aufstellt, direkt zu überzeugen gesucht und zwischen der Beobachtung und der Rechnung die genaueste Uebereinstimmung gefunden. Zu gleicher Zeit aber haben diese ausgezeichneten Physiker aus ihren Versuchen den Schluss gezogen, dass die constante Grösse c in dieser Gleichung für alle Körper denselben Werth hat und nur von der Eintheilung der Thermometer-Skale abhängt, dass hingegen der Coefficient m mit der Natur der strahlenden Oberfläche selbst veränderlich ist. Diese Formel enthält also den genauen und vollständigen Ausdruck des Naturgesetzes für die Abkühlung der Körper im Vacuum und liefert somit, da sie eine Folge aus dem von den Physikern aufgestellten Prinzip der Wärme-Ausstrahlung und Mittheilung ist, einen neuen Beweis für die Richtigkeit dieser Hypothese. Zu demselben Resultat aber gelangt man auch auf anderm Wege, indem man die aus jener Formel abgeleiteten Folgerungen der Natur zur Bestätigung vorlegt.

3) Könnte man nämlich einen Körper in einen wärmelosen, leeren Raum versetzen, dessen Temperatur also $\varkappa = -\infty$ wäre, so würde das Gesetz seiner Abkühlung, die alsdann nur eine Folge der Wärme-Ausstrahlung wäre, durch die Formel

$$V = m c^{\tau} \qquad (33)$$

ausgedrückt sein; da in der Gleichung

$$V = m c^{\varkappa + \vartheta} - m c^{\varkappa}$$

das letzte Glied

$$m c^{\varkappa} = m c^{-\infty} = o$$

wird, während

$$\varkappa + \vartheta = \tau$$

die absolute Temperatur des Körpers in Vergleich zu dem wärmelosen Zustand der Umgebung bezeichnet. Die Geschwindigkeiten der Abkühlung des Körpers würden also dann in geometrischer Progression abnehmen, wenn die absoluten Temperaturen desselben in arithmetischem Verhältnisse sich vermindern. Aus diesem besondern Gesetze der Radiation aber folgt, dass das Strahlungsvermögen eines Körpers im Vacuum mit seiner Temperatur sich ändert und in geometrischer Progression wächst, wenn sein Wärmegrad in arithmetischem Verhältnisse zunimmt; und da für

$$\tau = o \qquad V = m$$

ist, so bezeichnet die constante Grösse m das Strahlungsvermögen des Körpers bei o° Temperatur. Dieses ändert sich, wie oben gesagt, mit der Natur der Oberfläche; dagegen ist die constante Grösse c von der Beschaffenheit der Oberfläche des Körpers nicht abhängig, und hieraus folgt, dass die Abkühlung im leeren Raum für alle Körper die nämliche ist und die Wärme-ausstrahlenden Kräfte der verschiedenartigsten Materien bei allen Temperaturen dasselbe Verhältniss behalten; denn sind m und m_1, so wie V und V_1 die Strahlungsvermögen zweier heterogener Substanzen respective bei o° und τ° Temperatur: so ist

$$V = m c^{\tau} \text{ und } V_1 = m_1 c^{\tau} \text{; folglich}$$
$$V : V_1 = m : m_1$$

welches auch die absolute Temperatur des Körpers sein mag.

4) Befindet sich der Körper in einer Umgebung von constanter Temperatur, so ist das Gesetz seiner Abkühlung ausgedrückt durch die Gleichung

$$V = m c^{\varkappa + \vartheta} - m c^{\varkappa}.$$

Da aber für diesen Fall der durch Radiation entstandene absolute Wärme-Verlust $m c^{\tau} = m c^{\varkappa + \vartheta}$ durch einen Gewinn an Wärme, welche ihm von der Umgebung zuströmt, vermindert wird; so muss $m c^{\varkappa}$ diese durch Strahlung der Umgebung bewirkte Erwärmung, oder was dasselbe heisst, das Absorptionsvermögen des Körpers darstellen. Dieses Vermögen ist also nach demselben Gesetze, wie die radiirende Kraft, mit der Intensität der Wärmestrahlen verschieden und beide Vermögen sind — im vollkommensten Einklang mit der Erfahrung (§ I. 10) — für jeden Körper bei derselben Temperatur stets einander gleich. Die Grösse m, welche oben als das Emissionsvermögen des Körpers bei o° Temperatur bezeichnet wurde, drückt daher auch dessen Absorptionsvermögen für Wärmestrahlen von derselben Temperatur aus.

Da also die Richtigkeit des Gesetzes der Abkühlung der Körper im leeren Raume, wie es Formel (32) ausspricht, durch eine ausgedehnte Reihe direkter Versuche erwiesen ist; da überdies die Consequenzen aus demselben, dass nämlich das Strahlungs- und Absorptions-Vermögen eines Körpers beständig einander gleich, beide Vermögen aber mit der Energie der Wärmequelle nach einem und demselben Gesetze veränderlich sind, von der Natur vollkommen bestätigt werden; so muss die Grundlage, worauf jenes Gesetz erbaut ist, nämlich das Prinzip der Wärme-Ausstrahlung und Mittheilung, eine *Natur-Wahrheit* und keine *blosse Fiction der Physiker* sein. Wir sind also auf ganz entgegengesetzten Wegen, wenn auch nicht zur *absoluten Gewissheit*, dann aber doch zur *höchsten Wahrscheinlichkeit* der oben (§ I.) aufgestellten Hypothese gelangt, und das war der Hauptzweck dieser Zeilen.

VII.

Zum Schlusse wollen wir, da eine grössere Ausführlichkeit hier nicht gestattet ist, in Kürze nur noch andeuten, wie man aus Formel (32) den stufenweisen Gang der Abkühlung eines Körpers im Vacuum zu verschiedenen Zeiten ableiten könne.

1) Geschieht die Abkühlung in einem wärmelosen, leeren Raume, so ist (Gll. 29 und 33)

$$V = -\frac{d\tau}{dt} = m c^{\tau}; \qquad (34)$$

folglich

$$dt = -\frac{1}{m} \cdot c^{-\tau} \cdot d\tau$$

$$t = +\frac{1}{m} \int -c^{-\tau} \cdot d\tau. \qquad (35)$$

Setzt man daher

$$c^{-\tau} = u, \qquad (36)$$

so ist

$$-\tau \log c = \log u$$

$$-d\tau \log c = \frac{du}{u}; \qquad (37)$$

folglich erhält man durch Multiplikation der Gleichungen (36) und (37)

$$-\log c \, . \, c^{-\tau} \, . \, d\tau = du;$$

also ist

$$-c^{-\tau} \, . \, d\tau = \frac{du}{\log c}$$

und

$$\int -c^{-\tau} \, . \, d\tau = \frac{u}{\log c} = \frac{c^{-\tau}}{\log c} = \frac{1}{\log c \, . \, c^{\tau}};$$

mithin

$$t = \frac{1}{m \log c \, . \, c^{\tau}} + K.$$

Zur Bestimmung der willkührlichen Constanten dieses Integrals setze man $t = o$ für den Augenblick, in welchem die Temperatur des Körpers $\tau_{,} > \tau$ ist, und man findet

$$t = \frac{1}{m \log c \,.\, c^{\tau}} - \frac{1}{m \log c \,.\, c^{\tau_{,}}}, \text{ oder}$$

$$t = \frac{1}{m \log c} \cdot \frac{c^{\tau_{,}} - c^{\tau}}{c^{\tau_{,} + \tau}} = \frac{1}{m \log c} \cdot \frac{c^{\tau_{,} - \tau} - 1}{c^{\tau_{,}}}. \tag{38}$$

Ist die constante Grösse $K = o$, oder, was dasselbe heisst, rechnet man die Zeit der Abkühlung von dem Momente an, wo die absolute Temperatur des Körpers $\tau = +\infty$ war, so erhält man

$$t = \frac{1}{m \log c \,.\, c^{\tau}}, \text{ also}$$

$$V = m c^{\tau} = \frac{1}{t \,.\, \log c} \tag{39}$$

Das Strahlungsvermögen eines Körpers im leeren Raume ist also der Zeit seiner Abkühlung umgekehrt proportional.

Will man die Zeit $t_{,}$ finden, welche der Körper gebraucht, um sich von der Temperatur $\tau_{,,}$ auf $\tau_{,}$ abzukühlen, so erhält man zur Bestimmung derselben der Gleichung (38) analog

$$t_{,} = \frac{1}{m \log c} \cdot \frac{c^{\tau_{,,} - \tau_{,}} - 1}{c^{\tau_{,,}}}.$$

Ist also $\tau_{,,} - \tau_{,} = \tau_{,} - \tau$, so folgt

$$t : t_{,} = c^{\tau_{,,}} : c^{\tau_{,}}.$$

2) Kühlt sich der Körper in einer von wägbarer Materie freien, aber nicht wärmelosen Umgebung ab, so ist (Gll. 29 und 32)

$$V = -\frac{d\vartheta}{dt} = m c^{\varkappa} (c^{\vartheta} - 1).$$

In der Unterstellung, dass während der Abkühlung des Körpers die Temperatur der Umgebung sich nicht ändert, erhält man aus dieser Gleichung durch Integration

$$-\int \frac{d\vartheta}{c^{\vartheta} - 1} = m c^{\varkappa} \,.\, t.$$

Setzt man

$$c^{\vartheta} - 1 = x,$$

also

$$c^{\vartheta} = 1 + x,$$

$$d \,.\, c^{\vartheta} = c^{\vartheta} \,.\, \log c \,.\, d\vartheta = dx;$$

so ist

$$\frac{d\vartheta}{c^{\vartheta} - 1} = \frac{1}{\log c} \cdot \frac{dx}{x(x+1)} = \frac{1}{\log c} \left[\frac{dx}{x} - \frac{dx}{x+1} \right]; \text{ folglich}$$

$$\int \frac{d\vartheta}{c^{\vartheta}-1} = \frac{1}{\log c} \cdot \left\{ \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{\log c} \left\{ \log x - \log(x+1) - K \right\}$$

$$= \frac{1}{\log c} \left\{ \log(c^{\vartheta}-1) - \log c^{\vartheta} - K \right\};$$

mithin
$$m c^{\varkappa} . t = \frac{1}{\log c} \cdot \left\{ \log c^{\vartheta} - \log(c^{\vartheta}-1) + K \right\}$$

und
$$m \log c . c^{\varkappa} . t = \log c^{\vartheta} - \log(c^{\vartheta}-1) + K.$$

Rechnet man die Zeit von dem Augenblicke an, wo der Temperatur-Ueberschuss des strahlenden Körpers über die Umgebung $\vartheta_{,} > \vartheta$ war, so erhält man zur Bestimmung der willkührlichen Constanten in diesem Integral

$$o = \log c^{\vartheta_{,}} - \log(c^{\vartheta_{,}}-1) + K;$$

folglich durch Subtraction der letzten Gleichungen

$$m \log c . c^{\varkappa} . t = \left\{ \log c^{\vartheta} - \log(c^{\vartheta}-1) \right\} - \left\{ \log c^{\vartheta_{,}} - \log(c^{\vartheta_{,}}-1) \right\}. \quad (40)$$

Aus dieser Gleichung findet man die Zeit t, welche der Körper gebraucht, um von der Temperatur $\vartheta_{,}$ auf die Temperatur ϑ herabzusinken. Aus ihr lassen sich die verschiedenen Stufen der Abkühlung des Erdkörpers im Verlaufe der Jahrhunderte leicht ableiten.

Ein Beispiel wird dieses zeigen.

3) Nach dem jetzigen Stande unserer geologischen Kenntnisse war die Erde Anfangs eine glühende Kugel, welche sich in dem kalten Weltenraume von aussen nach innen in einer immer langsamer werdenden Progression abkühlte, bis sie endlich nach Millionen von Jahren zu ihrer jetzigen Temperatur gelangte, wo sie aus einem feurig-flüssigen inneren Kern von mehr als 840 Meilen Radius und einer starren äusseren Kruste von nicht 20 Meilen Dicke besteht und ihr Zustand fast stationär geworden zu sein scheint, da sich ihre Masse den scharfsinnigen Untersuchungen von Laplace und den Berechnungen Arago's [1]) zufolge seit den Zeiten Hipparch's bis auf unsere Tage, also binnen 1997 oder in runder Zahl 2000 Jahren, nicht um $0^{0},01$C abgekühlt haben kann. Nimmt man also mit vielen Naturforschern die Temperatur des Weltenraumes zu -57^{0} C und die mittlere Temperatur des Erdäquators zu $27^{0},5$C an, so war die Temperatur des Aequators vor etwa 2000 Jahren um $57^{0}+27^{0},5+0^{0},01 = 84^{0},51$C, und dieselbe ist also gegenwärtig um $84^{0},50$C höher, als die Temperatur des Weltenraumes; und hieraus ergibt sich für die geometrische Reihe der Abkühlung der Erde während eines Zeitraumes von zwei Jahrtausenden der Exponent

$$c = \frac{84,51}{84,50} = 1,000\,1183, \ \log c = 0,000\,0513.$$

Um also den Zustand der Abkühlung des Erdkörpers von den Zeiten des Astronomen von Alexandria bis auf unsere Tage zu umfassen, ist in der Gleichung (40)

---

[1]) Annuaire du bureau des longitudes pour 1834. Geschichte der Natur von Bronn. 1. Band, § 46.

$$\vartheta_{,} = 84^{0},51\,\mathrm{C}$$
$$\vartheta = 84\;,50\ldots \text{ also}$$

$\vartheta_{,} - \vartheta = \;0^{0},01$, $c = 1{,}000\,1183$ und $\log c = 0{,}000\,0513$ zu setzen; alsdann aber kommt

$$\log c^{\vartheta} = 84{,}50\,.\,0{,}000\,0513 = 0{,}004\,3348;\; c^{\vartheta} - 1 = 0{,}010031$$
$$\log\left(c^{\vartheta} - 1\right) = \log 0{,}010031 = 0{,}001\,3442 - 2; \text{ mithin}$$
$$\log c^{\vartheta} - \log\left(c^{\vartheta} - 1\right) = 2{,}002\,9906. \text{ Auf gleiche Weise findet man}$$
$$\log c^{\vartheta_{,}} - \log\left(c^{\vartheta_{,}} - 1\right) = 2{,}002\,9046; \text{ folglich durch Subtraction}$$
$$m \log c\,.\,c_{,}^{\varkappa}\,.\,t = \qquad 0{,}000\,0860.$$

Der Werth von t, welcher dieser Gleichung entspricht, ist also der Erfahrung gemäss wenigstens gleich 2000 Jahren, oder

$$t = 2000 \text{ Jahre.}$$

Will man nun die Zeit bestimmen, welche von jetzt ab unsere Erde gebrauchen wird, damit ihre mittlere Jahres-Temperatur am Aequator um $1^{0}\mathrm{R} = 1^{0},25\,\mathrm{C}$ sinke, so ist

$$\vartheta_{,} = 84^{0},50\,\mathrm{C}$$
$$\vartheta = 83\;,25\,, \text{ mithin}$$
$$\vartheta_{,} - \vartheta = \;1^{0},25\,\mathrm{C} = 1^{0}\mathrm{R};$$

und man findet, wenn $t_{,}$ diese unbekannte Zeit bezeichnet,

$$m \log c\,.\,c^{\varkappa}\,.\,t_{,} = 0{,}006\,5232.$$

Da nun aber

$$m \log c\,.\,c^{\varkappa}\,.\,t : m \log c\,.\,c^{\varkappa}\,.\,t_{,} = 0{,}000\,0860 : 0{,}006\,5232, \text{ so ist}$$
$$t : t_{,} = 860 : 65232$$
$$2000 : t_{,} = 860 : 65232\,; \text{ folglich wenigstens}$$
$$t_{,} = 151\,700 \text{ Jahre.}$$

Die mittlere Temperatur Deutschlands wird jetzt meistens zu $10^{0}\mathrm{C}$, also 67^{0} über die Temperatur des Weltenraumes geschätzt. Da nun die Geologen allgemein annehmen, dass die vegetabilischen Ueberreste, welche unsere Steinkohlenlager bilden, nur in einem Tropenklima, also zu einer Zeit, wo die Temperatur Deutschlands, gleichwie die gegenwärtige Temperatur des Erdäquators, wenigstens $84^{0},5\,\mathrm{C}$ über der Temperatur des Weltenraumes lag, entstanden sein können: so wird man das Alter der Steinkohlenformation finden, wenn man den Zeitraum zu bestimmen sucht, welcher seit jener tropischen bis zu der gegenwärtigen gemässigten Temperatur Deutschlands verstrichen ist. Setzt man zu dem Ende in Gl. (40)

$$\vartheta_{,} = 84^{0},50\,\mathrm{C}$$
$$\vartheta = 67\;,00, \text{ mithin}$$
$$\vartheta_{,} - \vartheta = 17\;,5\,; \text{ so erhält man}$$

$$m \log c\,.\,c^{\varkappa}\,.\,t_{,,} = 0{,}1003426, \text{ woraus mindestens}$$
$$t_{,,} = \quad 2333500 \text{ Jahre.}$$

Bedenkt man, dass durch die Bildung einer festen Rinde um die Erde latente Wärme frei wurde; dass die Rinde selbst aus schlechten Wärmeleitern zusammengesetzt ist und dadurch die Abkühlung der Erde in dem Grade verzögern musste, wie sie selbst an Dicke zunahm; dass derselben beständig neue Wärme, theils durch Conduction aus dem Erdinnern, theils durch Irradiation von der Sonne und den Sternen mitgetheilt wurde; dass ein Theil der von ihr gegen den Weltenraum ausgestrahlten Wärme von der Atmosphäre, welche überdies in früheren Perioden der Erdbildung viel mächtiger war und noch eine Menge von jetzt nur mehr tropfbar-flüssigen oder gar festen Stoffen in gasförmigem Zustande in sich enthalten musste, reflectirt und der starren Erdkruste wieder zugeführt wurde; zieht man diese und ähnliche Umstände, welche im Verlaufe der Abkühlung eintraten und auf dieselbe verzögernd wirkten, in Erwägung: so wird man begreifen, dass die aus Gleichung (40) abgeleiteten Zeiten für die verschiedenen Stufen der Abkühlung der Erdrinde noch viel zu klein sind und unvergleichlich grösser ausfallen würden, wenn es möglich wäre, alle die manchfaltigen Einflüsse, welche auf den Abkühlungsprozess der Erdkugel hemmend und fördernd wirkten, und von denen vielen wir kaum eine Vorstellung haben mögen, einen jeglichen nach seiner Art und Grösse, vollständig in Rechnung zu bringen. Wenn aber so die *genaue* Lösung des Problems selbst durch jenes mächtigste Hilfsmittel strenger Forschung und wunderbare Werkzeug der Entdeckung, das der menschliche Geist in der höheren mathematischen Analysis sich geschaffen hat, gegenwärtig wenigstens kaum möglich scheint: dann wird man ein, wenngleich auch nur *sehr entfernt angenähertes* Resultat nicht ganz werthlos erachten; — jedenfalls erkennen wir aus der hier versuchten Behandlung der Frage, wie unermesslich die Zeiträume sind, die dieses grossartige Phänomen beherrschen. —