Das Bifilarmagnetometer.

Um die täglichen Variationen der Intensität des Erdmagnetismus nachzuweisen, hat Gauss einen Apparat construirt, welcher das Bifilarmagnetometer genannt wird. In Folgendem sollen nun die Principien entwickelt werden, auf denen dieser Apparat beruht, und ausserdem soll gezeigt werden, wie man mit Hülfe dieses Magnetometers die horizontale Componente des Erdmagnetismus zu ermitteln vermag.

I.

Es sind gegeben zwei unbeweglich feste Punkte A und A_1. Dieselben sollen in einer Horizontalebene liegen und an ihnen seien befestigt zwei gleichlange gleichartige Fäden. An den beiden noch freien Enden der Fäden, deren Länge l heissen möge, ist ein Stab in Punkten B und B_1 so befestigt, dass er in einer horizontalen Lage, also parallel der Ebene der oberen Anknüpfungspunkte schwebt.

Der Stab sei zunächst ein unmagnetischer. Alsdann ist klar, dass im Gleichgewichtszustande die beiden Fäden sich in einer Verticalebene befinden werden. In dieser Ebene muss gleichfalls der Schwerpunkt des Stabes liegen, sowie ein Loth, welches vom Schwerpunkte auf die Verbindungslinie der beiden Punkte A und A_1 gefällt ist. Bringt man nun den Stab aus seiner Ruhelage vermittelst einer Drehung um das vorher erwähnte Loth, welches kurz die ideelle Axe des Systems heissen möge, so werden die beiden Fäden sich nicht mehr in einer Ebene befinden und der Stab selbst wird etwas gehoben werden. Sobald die Ablenkung ein Maximum erreicht hat, wird der Stab eine rückgängige Bewegung machen und um seine frühere Ruhelage hin und her pendeln, bis er in derselben wieder zur Ruhe kommt. Der Einfachheit wegen nehme man an $AA_1 = BB_1$; würde man dies nicht thun, so würde in den folgenden Gleichungen für l zu setzen sein $\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}$, wo λ das Loth von A oder A_1 auf BB_1 und ν die Projection von l auf BB_1 bedeuten würde. Ferner denke man noch den Stab so aufgehängt, dass der Schwerpunkt S desselben mit den Punkten B und B_1 ein gleichschenkliges Dreieck bildet.

Zur z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems nehme man die ideelle Axe, deren positive Richtung mit der Richtung der Schwere zusammenfallen mag. Der Punkt O, in welchem die ideelle Axe die Gerade AA_1 trifft, sei der Coordinatenanfang, AO die X-Axe. Da ferner SBB_1 nach der Annahme ein gleichschenkliges Dreieck ist, so halbirt SO die Gerade AA_1, deren Länge man mit a bezeichne. Unter ϑ werde ein veränderlicher Winkel verstanden, welchen bei der Bewegung des Stabes eine durch S gehende, mit BB_1 parallele Gerade mit der x-Axe macht.

Aus den Verbindungen des Systems geht eine Bedingung hervor; es müssen nämlich die Entfernungen der beiden Punkte B und B_1 von A und A_1 bei jeder Bewegung stets gleich der constanten Länge l bleiben. Die z-Coordinaten sind somit für jeden Moment der Bewegung einer gewissen Bedingungsgleichung unterworfen. Wenn B in Folge einer Drehung des Stabes um den Winkel ϑ nach B_0 gekommen ist, ist F nach F_0 gerückt, wo F bezeichnet den Schnittpunkt der z-Axe mit BB_1. Es wird nun sein $AB = AB_0 = l$, während OF_0 gleich ist der z-Coordinate z_0 des Punktes B_0. Den Punkt, in welchem die Coordinate z_0 die xy-Ebene schneidet, nenne man A_0 und ziehe die Geraden AA_0 und A_0O. Dann ist AOA_0 ein gleichschenkliges Dreieck und $\angle AOA_0 = \vartheta$. Fällt man in diesem gleichschenkligen Dreiecke die Höhe auf die Grundlinie, so ist:

$$AA_0 = a \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Daraus findet sich:

$$z_0 = \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

Bezeichnet man mit z_1 die z-Coordinate des Schwerpunkts S, so verwandelt sich obige Gleichung in:

$$z_1 = \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} + \varepsilon,$$

wo ε bezeichnet den constanten Abstand der beiden Punkte F und S. Da diese einzige existirende Bedingungsgleichuug die Zeit nicht explicit enthält, so lässt sich das Princip der lebendigen Kraft anwenden, d. h. es muss gelten:

$$\tfrac{1}{2} d \Sigma\, m v^2 = \Sigma\, (X dx + Y dy + Z dz).$$

Es mögen nun x y z die Coordinaten irgend eines Punktes des Stabes sein, $x_1\ y_1\ z_1$ die des Schwerpunkts, und $\xi\ \eta\ \zeta$ die Coordinaten jenes beliebigen ersten Punktes in Bezug auf ein neues Coordinatensystem, welches seinen Anfang im Schwerpunkte hat, und dessen Axen gleich und parallel gerichtet sind denen des ersteren.

Dann ist:

$$x = \xi\ ,\ y = \eta\ ,\ z = z_1 + \zeta\ ,$$
$$dx = d\xi\ ,\ dy = d\eta\ ,\ dz = dz_1 + d\zeta\ ,$$
$$v^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + 2 z_1' \zeta' + z_1'^2\ ,$$

wo der Kürze wegen $\xi' = \frac{d\xi}{dt}$ u. s. w. gesetzt ist. Bedenkt man, dass das ζ eines jeden Punkts bei der Bewegung constant bleibt, so ergiebt sich:

$$v^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + z_1'^2$$
$$\Sigma\, m v^2 = \Sigma\, m\, V^2 + \Sigma\, m\, z_1'^2\ ,$$

worin V bedeutet die Geschwindigkeit der Bewegung rücksichtlich des Schwerpunkts. Letztere Gleichung lässt sich noch schreiben:

$$\Sigma\, m v^2 = \Sigma\, m\, V^2 + z_1'^2\, \Sigma\, m \text{ oder:}$$
$$\Sigma\, m v^2 = \Sigma\, m\, V^2 + \mathfrak{M}.\, z_1'^2$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft wird demnach:

$$\text{I.,}\quad \tfrac{1}{2} d\, (\Sigma\, m\, V^2 + \mathfrak{M}\, z_1'^2) = \Sigma\, (X\, d\xi + Y\, d\eta) + dz_1\, \Sigma\, Z.$$

Dieser Gleichung kann eine andre Form gegeben werden dadurch, dass man ξ und η ausdrückt durch ϑ und zwar ist:

$$\xi = r\cos\vartheta \pm p\sin\vartheta$$
$$\eta = r\sin\vartheta \mp p\cos\vartheta$$

Es bezeichnet hier p den Abstand des beliebigen, auf die $\xi\eta$-Ebene projicirten Punktes von der durch den Schwerpunpt gehenden Geraden, welche die Winkel ϑ mit der ξ-Axe bildet, und r das auf jener Geraden durch p abgeschnitttene Stück. Demnach wird:

$$\frac{d\xi}{dt} = \left(-r\sin\vartheta \pm p\cos\vartheta\right)\frac{d\vartheta}{dt}$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \left(+r\cos\vartheta \pm p\sin\vartheta\right)\frac{d\vartheta}{dt}$$
$$\xi'^2 + \eta'^2 = \vartheta'^2 (r^2 + p^2)$$
$$\Sigma\, m\, V^2 = \Sigma\vartheta'^2 (r^2 + p^2).$$

ϑ'^2 kann vor das Summenzeichen treten, weil die Winkelgeschwindigkeit für einen jeden Punkt des Stabes dieselbe ist. Bezeichnet man ausserdem das Trägheitsmoment $\Sigma\,(r^2 + p^2)$ mit K, so ist:

$$\Sigma\, m\, V^2 = \vartheta'^2 K.$$

Die Gleichung I geht also in folgende über:

$$\text{II. } {}^1/_2\, d\,(\vartheta'^2 K + \mathfrak{M} z_1'^2) = \Sigma\,(X\, d\xi + Y\, d\eta) + dz_1\, \Sigma\, Z.$$

Es ist klar, dass $\Sigma\, Z = \mathfrak{M} g$ ist, weil längs der z-Axe die Schwere allein wirkt. In der xy-Ebene wirkt eine aus der Art der Aufhängung entspringeude Kraft D, welche die Directionskraft genannt werden kann, und die analog ist der Torsionskraft bei der unifilaren Aufhängung. Diese Kraft D, welche bei eingetretner Ablenkung den Stab wieder in seine Ruhelage zurückzudrehen strebt, und die desshalb parallel der ξ-Axe wirkt, kann als Kräftepaar aufgefasst werden, dessen Moment D sin ϑ und dessen Arm Eins ist. Den Arm des Kräftepaars lasse man zusammenfallen mit der durch S gehenden Geraden, welche mit der ξ-Axe die Winkel ϑ bildet, und verschiebe nun denselben so in seiner Richtung, dass der eine Endpunkt von ihm in den Coordinatenanfang zu liegen kommt. Alsdann ist:

$$\xi = 1.\cos\vartheta,\quad d\xi = -\sin\vartheta\, d\vartheta$$
$$\Sigma\,(X\, d\xi) = -D \sin\vartheta\, d\vartheta\ .$$

Die Gleichung I. erhält somit die Form:

$${}^1/_2\, d\,(\vartheta'^2 K + \mathfrak{M} z_1'^2) = -D\sin\vartheta\, d\vartheta + \mathfrak{M} g\, dz_1\ ,$$

woraus sich durch einmalige Integration findet:

$${}^1/_2\,(\vartheta'^2 K + \mathfrak{M} z_1'^2) = D\cos\vartheta + \mathfrak{M} g z_1 + C.$$

Bedeutet ϑ_0 den Ablenkungswinkel, so wird für $\vartheta = \vartheta_0$ und $v = o$:

$$C = -D\cos\vartheta_0 - \mathfrak{M} g z_0\ ,$$

wenn jetzt z_0 die der Ablenkung ϑ_0 entsprechende z-Coordinate des Schwerpunkts ist. Man hat also:

$$\text{III., } {}^1/_2\,(\vartheta'^2 K + \mathfrak{M} z_1'^2) = D\,(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0) + \mathfrak{M} g\,(z_1 - z_0).$$

In diese Gleichung sind einzusetzen die Werthe:

$$z_1 = \varepsilon + \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}}$$
$$z_1' = \frac{-a^2 \sin\vartheta\, \vartheta'}{4\sqrt{l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}}}$$
$$z_0 = \varepsilon + \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta_0}{2}}\ ,$$

wodurch man erhält:

$$\vartheta'^2 \left\{ K + \frac{\mathfrak{M}a^4 \sin^2\vartheta}{16\,(l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2})} \right\} = 2D\,(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0) + 2\mathfrak{M}g \left\{ \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}} - \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta_0}{2}} \right\}$$

$$\vartheta'^2 \left\{ 16\,K\left(l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) + \mathfrak{M}a^4 \sin^2\vartheta \right\} = 32 \left\{ D\,(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0) + \mathfrak{M}g\left[\sqrt{l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}} - \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta_0}{2}}\right] \right\} \times \left(l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$\vartheta'^2 = \frac{32 \left\{ D\,(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0) + \mathfrak{M}g\left[\sqrt{l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}} - \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta_0}{2}}\right] \right\} \left(l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)}{16\,K\left(l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) + \mathfrak{M}a^4 \sin^2\vartheta}$$

Durch nochmalige Integration findet sich:

$$\text{IV.,}\quad t = \frac{1}{4} \int \frac{\sqrt{16\,K\left(l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) + \mathfrak{M}a^4 \sin^2\vartheta}\; d\vartheta}{\sqrt{2D\,(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0) + 2\mathfrak{M}g\left[\sqrt{l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}} - \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta_0}{2}}\right]}\; \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}}} + C.$$

II.

Der horizontal aufgehängte Stab sei jetzt ein magnetischer. Alsdann kommt noch eine neue Kraft hinzu, nämlich die, welche die Erde ausübt auf jeden fertigen Magneten.

Zunächst setze man voraus, dass der gegebene Magnetstab ein solcher ist, dessen magnetische Axe bei seiner horizontalen Aufhängung in einer Horizontalebene liegt. Die Richtung der magnetischen Axe wird aber bestimmt durch das magnetische Moment, welches M genannt werde, d. h. auch M wird in seiner horizontalen Ebene liegen. Man zerlege nun die erdmagnetische Kraft in zwei Componenten PM und TM, welche als zwei resultirende Kräftepaare aufgefasst werden können, deren Arm M ist, und von denen das erstere in einer Verticalebene, das letztere in einer Horizontalebene wirkt. Die Wirkung des in der Verticalebene wirkenden Paares kann leicht auf die Wirkung der Schwere allein reducirt werden. Zu diesem Zwecke verlege man die magnetische Axe parallel mit sich selbst, so dass sie durch den Schwerpunkt S des Stabes geht. Bezeichnet nun p das Gewicht des Magnetstabes, so verändere man die Kraft des Paares, dessen Moment PM ist, so dass die Kraft p, der Hebelarm r wird. Es muss alsdann die Relation gelten $rp = PM$, woraus sich findet $r = \frac{PM}{p}$. Ferner verschiebe man r soweit in seiner Richtung, bis der eine Endpunkt mit S zusammenfällt, und zwar muss dies derjenige Endpunkt von r sein, an dem die Kraft p der Schwere gerade entgegengesetzt angreift. Alsdann wirken in S zwei gleich grosse, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte, welche sich aufheben, und es bleibt nur noch die eine in dem anderen Endpunkte von r, welcher S_1 heisse, wirkende verticale Kraft p. Dieser Punkt S_1 heisst der transponirte Schwerpunkt des Magnetstabes. Hängt man nun den Stab so auf, dass S_1 an Stelle von S tritt, dass also BB_1S_1 ein gleichschenkliges Dreieck ist, alsdann wird bei einer eintretenden Drehung der Punkt S_1 sich nur längs der ideellen Axe verschieben können und der Wirkung der Schwere allein unterworfen sein.

Lässt man die Gerade AA_1 mit dem magnetischen Meridian einen Winkel χ bilden, so wird der Magnetstab sich nicht in einer AA_1 parallelen Lage in Ruhe befinden, sondern er wird eine Stellung einnehmen zwischen AA_1 und dem magnetischen Meridian, da das eine Kräftepaar ihn in die Gerade AA_1, das andere in den Meridian zu drehen bestrebt ist. Zur ξ-Axe nehme man die Richtung des magnetischen Meridians und verstehe unter ϑ den veränderlichen Winkel, den die magnetische Axe des Stabes bei der Bewegung mit der Geraden AA_1 bildet. Das Moment des aus der Art der Aufhängung resultirenden Paares ist alsdann wiederum $D \sin \vartheta$. Diesem Kräftepaare gebe man den Arm M, was geschieht dadurch, dass man setzt $Md \sin\vartheta = D \sin\vartheta$ d. h. $Md = D$. Das Moment des zweiten Kräftepaares wird bei einer Drehung um den Winkel $\chi - \vartheta$ werden $T M \sin (\chi - \vartheta)$. Wird nun der neue Arm des ersten Paares so verlegt, dass der eine Endpunkt desselben mit S_1 zusammenfällt, so greifen in einem von S_1 um M entfernten Punkte senkrecht gegen M zwei entgegengesetzte Kräfte an, deren Wirkung ausgedrückt wird durch die Gleichung:

$$d \sin \vartheta - T \sin (\chi - \vartheta) = \sin \vartheta \, (d + T \cos \chi) - T \sin \chi \cos \vartheta$$

In Betreff des Winkels $\chi - \vartheta$ ist noch zu bemerken, dass wenn ϑ grösser als χ wird, für $-T \sin (\chi - \vartheta)$ einfach zu setzen ist $+ T \sin (\vartheta - \chi)$, wodurch die rechte Seite der obigen Gleichung keine Aenderung erfährt.

Selbstverständlich muss für die Ruhelage die Relation gelten:

$$d \sin \vartheta = T \sin (\chi - \vartheta) \text{ oder}$$
$$D \sin \vartheta = MT \sin (\chi - \vartheta) \quad ,$$

woraus sich der Winkel ϑ, welcher zur Ruhelage gehört, berechnen lassen würde.

Man zerlege nun die Kraft

$$\sin \vartheta \, (d + T \cos \chi) - T \sin \chi \cos \vartheta$$

nach der ξ- und η-Axe in zwei rechtwinkliche Componenten:

$$X = - \sin (\chi - \vartheta) \, [\sin \vartheta \, (d + T \cos \chi) - T \sin \chi \cos \vartheta]$$
$$Y = + \cos (\chi - \vartheta) \, [\sin \vartheta \, (d + T \cos \chi) - T \sin \chi \cos \vartheta]$$

und setze:

$$\xi = M \cos (\chi - \vartheta), \quad d\xi = M \sin (\chi - \vartheta) \, d\vartheta$$
$$\eta = M \sin (\chi - \vartheta), \quad d\eta = - M \cos (\chi - \vartheta) \, d\vartheta \, .$$

Durch Einsetzung dieser Werthe geht die Gleichung II. über in:

$$\tfrac{1}{2} d \, (\vartheta'^2 K + \mathfrak{M} z_1'^2) = - [\sin^2 (\chi - \vartheta) + \cos^2 (\chi - \vartheta)] \, [\sin\vartheta \, (d + T \cos\chi) - T \sin\chi \cos\vartheta] \, M d\vartheta + \mathfrak{M} g \, dz_1$$

$$\text{V.,} \quad \tfrac{1}{2} d \, (\vartheta'^2 K + \mathfrak{M} z_1'^2) = - [\sin\vartheta \, (D + T M \cos\chi) - T M \sin\chi \cos\vartheta] \, d\vartheta + \mathfrak{M} g \, dz_1 \, .$$

Durch zweimalige Integration und Bestimmung der Constanten auf ähnliche Weise, wie im ersten Abschnitt, würde die Endgleichung für t gefunden werden. Um die Rechnung zu vereinfachen nehme man nur sehr kleine Schwingungen an. Alsdann kann nämlich die Bewegung längs der z-Axe vernachlässigt werden, und es geht die Gleichung V. über in folgende:

$$\tfrac{1}{2} d \, (\vartheta'^2 K) = - [\sin\vartheta . (D + T M \cos\chi) - T M \sin \chi \cos\vartheta] \, d\vartheta \, ,$$

woraus sich durch einmalige Integration und Bestimmung der Constanten findet:

$$\vartheta'^2 K = 2 \, (D + T M \cos\chi) \, (\cos\vartheta - \cos\vartheta_0) - 2T M \sin\chi \, (\sin\vartheta - \sin\vartheta_0).$$

Durch nochmalige Integration wird:

$$\frac{t}{\sqrt{K}} + C = \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{2 \, (D + T M \cos\chi) \, (\cos\vartheta - \cos\vartheta_0) - 2 \, T M \sin\chi \, (\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)}}$$

Der Kürze wegen setze man

$$D + T\,M\cos\chi = a,\quad T\,M\sin\chi = b,\ \text{also:}$$

$$\frac{t}{\sqrt{K}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\vartheta}{\sqrt{a(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0) - b(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)}}$$

Um die angedeutete Integration wirklich ausführen zu können, werde ferner gesetzt:

$$\vartheta = \varphi - \text{arc. tg}\,\frac{b}{a}$$

$$\vartheta_0 = \varphi_0 - \text{arc. tg}\,\frac{b}{a}$$

$$d\vartheta = d\varphi$$

$$\cos\vartheta = \cos\varphi\cos\text{arc. tg}\,\frac{b}{a} + \sin\varphi\sin\text{arc tg}\,\frac{b}{a}$$

$$\sin\vartheta = \sin\varphi\cos\text{arc tg}\,\frac{b}{a} - \cos\varphi\sin\text{arc tg}\,\frac{b}{a}.$$

Bedenkt man ausserdem, dass ist:

$$\cos\text{arc tg}\,\frac{b}{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\text{arc tg}\,\frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

so ergiebt sich:

$$a\cos\vartheta - b\sin\vartheta = \cos\varphi\,\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sin\varphi\,\frac{a\,b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \sin\varphi\,\frac{a\,b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \cos\varphi\,\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$a\cos\vartheta - b\sin\vartheta = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos\varphi$$

Auf analoge Weise findet sich

$$a\cos\vartheta_0 - b\sin\vartheta_0 = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos\varphi_0$$

und es wird demnach durch Einführung der betreffenden Werthe sein:

$$\frac{t}{\sqrt{K}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}$$

Da nur sehr kleine Schwingungsbogen angenommen worden sind, so kann mit Vernachlässigung der höheren Potenzen gesetzt werden

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

$$\cos\varphi_0 = 1 - \frac{\varphi_0^{\,2}}{2}$$

und man erhält

$$\frac{t}{\sqrt{K}} + C = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}\,(\varphi_0^{\,2} - \varphi^2)}}$$

$$\frac{t}{\sqrt{K}} + C = \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+b^2}}\int\frac{d\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2}}.$$

$$\frac{t}{\sqrt{K}} + C = \frac{1}{\sqrt[4]{a^2 + b^2}} \text{ arc sin } \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)$$

$$\varphi_0 \sin \left[\frac{t \sqrt[4]{a^2 + b^2}}{\sqrt{K}} + C\right] = \varphi.$$

Werden nun wiederum die Werthe für φ und φ_0 durch ϑ und ϑ_0 ausgedrückt, so ist:

$$\left[\vartheta_0 + \text{arc tg}\left(\frac{b}{a}\right)\right] \sin\left(\frac{t \sqrt[4]{a^2+b^2}}{\sqrt{K}} + C\right) = \vartheta + \text{arc tg}\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Für $t = o$ und $\vartheta = \vartheta_0$ findet sich $\sin C = 1$, $C = \frac{\pi}{2}$, also:

$$\left[\vartheta_0 + \text{arc tg}\left(\frac{b}{a}\right)\right] \cos\left(\frac{t \sqrt[4]{a^2+b^2}}{\sqrt{K}}\right) = \vartheta + \text{arc tg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\text{VI, } \left[\vartheta_0 + \text{arc tg}\left(\frac{T M \sin\chi}{D + T M \cos\chi}\right)\right] \cos\left(\frac{t}{\sqrt{K}} \sqrt[4]{D^2 + 2 D T M \cos\chi + T^2 M^2}\right) = \vartheta + \text{arctg}\left(\frac{T M \sin\chi}{D + T M \cos\chi}\right)$$

Hieraus ersieht man, dass ϑ immer wieder gleich ϑ_0 wird, so oft

$$\frac{t}{\sqrt{K}} \sqrt[4]{D^2 + 2 D\, T M \cos\chi + T^2 M^2} = m\,\pi$$

ist, wo m alle ganzen Zahlen von Eins an bedeutet. Als Zeitdauer einer doppelten Schwingung erhält man:

$$t_1 = \frac{\pi \sqrt{K}}{\sqrt[4]{D^2 + 2 D\, T M \cos\chi + T^2 M^2}}$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von der Grösse der Elongation ϑ_0 d. h. die Schwingungen sind isochron.

Ein spezieller Fall des Problems ist es, wenn der magnetische Meridian mit der Richtung AA_1 zusammenfällt, d. h. wenn $\chi = o$ gesetzt wird. Alsdann geht die Endgleichung VI. über in:

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{K}} \sqrt{D + T M}\right)$$

und bezeichnet man für diesen Fall die Schwingungsdauer mit τ so ist:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{K}{D + T M}}$$

Von besonderer Wichtigkeit ist es den Werth von T M angeben zu können. Die Gleichung für τ giebt:

$$T M + D = \frac{\pi^2 K}{\tau^2}$$

$$T M = \frac{\pi^2 K}{\tau^2} - D$$

Da τ selbst immer durch direkte Beobachtungen gefunden werden kann, so sind in den Ausdrücken für T M + D und T M nur K und D unbekannt. Der Werth von D lässt sich aber leicht berechnen, wenn man einen gleich schweren, gleichgeformten unmagnetischen Stab in ganz derselben Aufhängungsweise sehr kleine Schwingungen machen lässt und wiederum die Bewegung längs der z-Axe vernachlässigt. Unter diesen Voraussetzungen findet sich aus der Gleichung III. des ersten Abschnitts

$$\tfrac{1}{2}\, \vartheta'^2\, K = D\, (\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)$$

$$\int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\vartheta_0{}^2 - \vartheta^2}} = t \sqrt{\frac{D}{K}} + C$$

$$\text{arc. sin} \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right) = t \sqrt{\frac{D}{K}} + C$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos t \sqrt{\frac{D}{K}}$$

Bedenkt man wiederum, dass für $\vartheta = \vartheta_0$ wird $t \sqrt{\frac{D}{K}} = \pi$ und bezeichnet die dazu ererforderliche Zeit mit τ_1 so ist:

$$\tau_1 = \pi \sqrt{\frac{K}{D}}$$

$$D = \frac{\pi^2\, K}{\tau_1{}^2} \quad .$$

Die Grösse τ_1 ist directen Beobachtungen zu entnehmen. Es erübrigt nun noch das Trägheitsmoment K zu bestimmen. Zu diesem Zwecke belaste man den schwingenden Magnetstab mit einem unmagnetischen Körper von bekanntem Trägheitsmomente K_0 ganz gleichförmig. Dann ist:

$$T\, M = \frac{\pi^2\, K}{\tau^2} - D$$

$$T\, M = \frac{\pi^2}{\tau_0{}^2}\, (K + K_0) - D_0 \;,$$

wo τ_0 die neue Schwingungsdauer, D_0 die an Stelle von D tretende Constante ist, welche sich in ähnlicher Weise wie D berechnen lässt als:

$$D_0 = \frac{\pi^2\, (K + K_0)}{\tau_2{}^2} \;.$$

Substituirt man die Werthe für die D und D_0 und setzt die beiden für T M gefundenen Ausdrücke gleich, so erhält man:

$$K = \frac{K_0\, \tau^2\, \tau_1{}^2\, (\tau_2{}^2 - \tau_0{}^2)}{\tau_0{}^2 \tau_1{}^2 \tau_2{}^2 - \tau^2 \tau_0{}^2 \tau_2{}^2 - \tau^2 \tau_1{}^2 \tau_2{}^2 + \tau^2 \tau_0{}^2 \tau_1{}^2}$$

III.

Es bleibt schliesslich der Fall zu untersuchen, in dem ausser der Erde noch ein beständiger festliegender Magnetstab auf den beweglichen Magneten einwirkt. Der Einfachheit wegen lasse man den magnetischen Meridian mit der Richtung AA_1 zusammenfallen. Zu den bis jetzt betrachteten Kräftepaaren tritt in diesem Falle abermals ein neues hinzu, welcher gefunden werden kann mit Hülfe des Potentials der beiden Magnetstäbe in Bezug auf einander. Setzt man nämlich voraus, dass für die neue Ruhelage die magnetischen Axen beider Magnete sich in einer und derselben Horizontalebene befinden mögen, alsdann ist das fragliche Potential $- \Sigma \frac{e e_1}{\varrho}$. e und e_1 bezeichnen zwei magnetische Molecüle in dem einen und andern Magneten, ϱ die Entfernung der beiden Molecüle von einander. Das Gesammtpotential aber ist:

$$V = (T M + D) \cos\vartheta - \Sigma \frac{e e_1}{\varrho}$$

Es sei ferner R die Entfernung der transponirten Schwerpunkte beider Magnete, gegen welche die Dimensionen der Magnete sehr klein angenommen werden mögen. M_1 sei das magnetische Moment des festliegenden Stabes, ψ der Winkel den R mit der ξ-Axe bildet. Bezeichnet man endlich mit X und Y die Coordinanten des Punktes, in dem sich das Molecül e des beweglichen Magneten, mit X_1 und Y_1 die Coordinaten des Punktes, in dem sich das Molecül e_1 des festen Magneten befindet so ist:

$$\varrho^2 = (X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2$$

Um dem Ausdrucke für ϱ eine für die folgende Rechnung brauchbare Form zu geben, muss man zwei neue rechtwinklige Coordinatensysteme einführen, deren x-Axen die magnetischen Axen der beiden Magnete, und deren Coordinatenanfänge die transponirten Schwerpunkte sind. Die x-Axe des neuen Systems, welches sich auf den beweglichen Magnetstab bezieht, bildet alsdann mit der ξ-Axe den veränderlichen Winkel ϑ. Der unveränderliche Winkel, den die x-Axe des zweiten neuen Coordinatensystems mit der ξ-Axe bildet möge ϑ_1 heissen. Man hat somit:

$$X = x \cos\vartheta - y \sin\vartheta$$
$$Y = x \sin\vartheta + y \cos\vartheta$$
$$X_1 = x_1 \cos\vartheta_1 - y_1 \sin\vartheta_1 + R \cos\psi$$
$$Y_1 = x_1 \sin\vartheta_1 + y_1 \cos\vartheta_1 + R \sin\psi$$

Durch die Substituirung dieser Werthe erhält man:

$$\varrho^2 = R^2 + 2R\,[x_1 \cos(\psi - \vartheta_1) + y_1 \sin(\psi - \vartheta_1) - x \cos(\psi - \vartheta) - y \sin(\psi - \vartheta)]$$
$$+ x_1^2 + x^2 + y_1^2 + y^2 - 2xx_1 \cos(\vartheta - \vartheta_1) - 2x\,y_1 \sin(\vartheta - \vartheta_1) + 2x_1\,y \sin(\vartheta - \vartheta_1)$$
$$- 2yy_1 \cos(\vartheta - \vartheta_1).$$

Der Kürze wegen bezeichne man den Coefficienten von 2 R mit n und addire und subtrahire auf der rechten Seite der obigen Gleichung n^2. So wird

$$\varrho^2 = (R + n)^2 + l^2,$$

wenn gesetzt ist

$$l = x_1 \sin(\psi - \vartheta_1) - y_1 \cos(\psi - \vartheta_1) - x \sin(\psi - \vartheta) + y \cos(\psi - \vartheta)$$

Die beiden Werthe n und l enthalten die Grösse R nicht und man hat nun:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{(R+n)\sqrt{1 + \left(\frac{l}{R+n}\right)^2}}$$

Vermittelst der binomishen Entwickelung findet sich:

$$\left[1 + \left(\frac{l}{R+n}\right)^2\right]^{-1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{l}{R+n}\right)^2 + \frac{1.\,3}{2.\,4}\left(\frac{l}{R+n}\right)^4 \ldots.$$

und mit Vernachlässigung der Potenzen vom 4. und höherem Grade:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R+n} - \frac{1}{2}\,\frac{l^2}{(R+n)^3}$$

Auf gleiche Weise erhält man:

$$\frac{1}{R+n} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{n}{R}\right)^{-1} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{n}{R} + \frac{n^2}{R^2} - \frac{n^3}{R^3} \ldots\ldots\right)$$

$$\frac{1}{(R+n)^3} = \frac{1}{R^3}\left(1+\frac{n}{R}\right)^{-3} = \frac{1}{R^3}\left(1-3\frac{n}{R} + \frac{4.\,3}{1.\,2}\,\frac{n^2}{R^2}\ \ldots\ldots\right)$$

Durch Substituirung dieser Werthe wird endlich:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} - \frac{n}{R^2} + \frac{n^2 - {}^1\!/_2\, l^2}{R^3} - \frac{n^3 - {}^3\!/_2\, l^2 n}{R^4},$$

wovon auch noch das letzte Glied unberücksichtigt gelassen werden kann Dieser Ausdruck für $\frac{1}{\varrho}$ ist zu multipliciren mit ee_1 und die Summation auszudehnen über beide Magnete. Bedenkt man dabei, dass R constant ist, und dass sowohl $\Sigma\, e$ wie $\Sigma\, e_1$ für sich allein gleich Null ist, dass ferner $\Sigma\, ex = M$ $\Sigma\, e_1\, x_1 = M_1$ während $\Sigma\, ey = o$ und $\Sigma\, e_1\, y_1 = o$ ist, da die x-Axen der beiden zuletzt eingeführten Coordinatensysteme mit den magnetischen Axen zusammenfallen, so ergiebt sich sofort:

$$\frac{1}{R}\,\Sigma\, e\, e_1 = o$$

$$\frac{1}{R^2}\,\Sigma\, n\, ee_1 = o$$

$$\Sigma\, n^2\, e\, e_1 = -\,2M\, M_1\, \cos(\psi - \vartheta_1)\cos(\psi - \vartheta)$$

$$\Sigma\, l^2\, e\, e_1 = -\,2M\, M_1\, \sin(\psi - \vartheta_1)\sin(\psi - \vartheta)$$

Demnach wird:

$$\frac{\Sigma\, e\, e_1}{\varrho} = -\frac{M\, M_1}{R^3}\left[2\cos(\psi-\vartheta_1)\cos(\psi-\vartheta) - \sin(\psi-\vartheta_1)\sin(\psi-\vartheta)\right].$$

Beer giebt in seiner Einleitung zur Electrostatik und Lehre vom Magnetismus den Werth des Potentials an als:

$$W = \frac{M\, M_1}{R^3}\left[\cos\triangle - 3\cos\delta\cos\delta_1\right],$$

wo $\triangle$ der Winkel ist, den die beiden magnetischen Axen mit einander bilden, δ und δ_1 die Winkel, welche die magnetischen Axen mit R bilden. Dieser Ausdruck stimmt vollständig mit dem obengefundenen Potential überein, denn da $\triangle = \delta - \delta_1$ ist, folgt:

$$W = -\frac{M\, M_1}{R^3}\left[2\cos\delta\cos\delta_1 - \sin\delta\sin\delta_1\right],$$

was wegen $\delta = \psi - \vartheta$ und $\delta_1 = \psi - \vartheta_1$ identisch ist mit dem Werthe für $\Sigma\,\frac{ee_1}{\varrho}$.

Das Gesammtpotential hat nun die Form:

$$V = (T\, M + D)\cos\vartheta + \frac{M\, M_1}{R^3}\left[2\cos(\psi-\vartheta)\cos(\psi-\vartheta_1) - \sin(\psi-\vartheta)\sin(\psi-\vartheta_1)\right],$$

woraus sich die horizontale Coponente durch partielle Differentiation nach ϑ findet:

$$\frac{d\, V}{d\, \vartheta} = -\,(T\, M + D)\sin\vartheta + \frac{M\, M_1}{R^3}\left[2\sin(\psi-\vartheta)\cos(\psi-\vartheta_1) + \cos(\psi-\vartheta)\sin(\psi-\vartheta_1)\right].$$

Soll Ruhe sein, so muss $\frac{d\, V}{d\, \vartheta} = o$ sein, d. i.:

$$(T\, M + D)\sin\vartheta = \frac{M\, M_1}{R^3}\left[2\sin(\psi-\vartheta)\cos(\psi-\vartheta_1) + \cos(\psi-\vartheta)\sin(\psi-\vartheta_1)\right].$$

Man begnüge sich mit der Betrachtung der Ruhelage und forme die letzte Gleichung um in folgende:

$$\sin\vartheta\ \left\{TM + D + \frac{MM_1}{R^3}\left[2\cos\psi\cos(\psi-\vartheta_1) - \sin\psi\sin(\psi-\vartheta_1)\right]\right\} = \frac{MM_1}{R^3}\cos\vartheta$$

$$\times\ [2\sin\psi\cos(\psi-\vartheta_1) + \cos\psi\sin(\psi-\vartheta_1)] \text{ oder:}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{MM_1\,[2\sin\psi\cos(\psi-\vartheta_1) + \cos\psi\sin(\psi-\vartheta_1)]}{R^3(TM+D) + MM_1\,[2\cos\psi\cos(\psi-\vartheta_1) - \sin\psi\sin(\psi-\vartheta_1)]}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass wenn man einen Magneten durch einen anderen ablenkt, die Stärke des letzteren proportional ist der trigonometrischen Tangente des Ablenkungswinkels. Der Winkel ϑ ist nun für die folgende Rechnung als ein durch factische Beobachtung der Ruhelage bekannter Winkel anzusehen. Legt man den festen Magneten so, dass $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$ und $\psi = o$ wird, so ist:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{MM_1}{R^3(TM+D)}$$

$$\frac{R^3\operatorname{tg}\vartheta\, TM}{TM+D} = \frac{M_1}{T}$$

Man kennt jetzt die Werthe von $TM + D$, TM, $\frac{M_1}{T}$, D und K, und in Folge dessen auch, wenn man den zweiten Magnetstab in ganz derselben Weise oscilliren lässt, $TM_1 + D_1$, TM_1 D_1 und K_1. Der Kürze wegen setze man $TM = n$, $TM_1 = r$, $\frac{M_1}{T} = p$ und findet

$$T = \sqrt{\frac{r}{p}}$$

als Mass der horizontalen Componente des tellurischen Magnetismus,

$$M = n\sqrt{\frac{p}{r}} \quad \text{und } M_1 = \sqrt{rp}$$

als magnetische Momente der beiden Magnetstäbe.

Der Ausdruk für T soll nun schliesslich noch auf eine übersichtlichere Form gebracht werden. Es war:

$$n = \frac{\pi^2 K}{\tau^2} - D \text{ und } D = \frac{\pi^2 K}{\tau_1^{\,2}} \text{ also:}$$

$$n = TM = \pi^2 K\left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau_1^{\,2}}\right)$$

und dem analog ist:

$$r = \frac{\pi^2 K_1}{\sigma^2} - D_1,\ D_1 = \frac{\pi^2 K_1}{\sigma_1^{\,2}} \text{ d. h.}$$

$$r = TM_1 = \pi^2 K_1\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma_1^{\,2}}\right)$$

$$p = \frac{R^3\, TM\operatorname{tg}\vartheta}{TM+D} = R^3\operatorname{tg}\vartheta\left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^{\,2}}\right)$$

$$T = \sqrt{\frac{r}{p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 K_1\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma_1^{\,2}}\right)}{R^3\operatorname{tg}\vartheta\left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^{\,2}}\right)}}$$

$$T = \frac{\pi\,\tau_1}{\sigma.\ \sigma_1}\sqrt{\frac{K_1(\sigma_1^{\,2} - \sigma^2)}{R^3\operatorname{tg}\vartheta\,(\tau_1^{\,2} - \tau^2)}}.$$

Nimmt man ausserdem die Magnete als vollkommen gleich an, so vereinfacht sich T noch wesentlich, indem für $D = D_1$, $\tau = \sigma$, $\tau_1 = \sigma_1$ und $K = K_1$ wird, und man demnach erhält:

$$T = \frac{\pi}{\tau} \sqrt{\frac{K}{R^3 \operatorname{tg} \vartheta}}$$

eine Formel, welche genau übereinstimmt mit der von **Müller** in seinem Lehrbuche der Physik (Bd. II. pag. 66) angeführten.