Einiges über den Unterricht in der analytischen Geometrie.

Länger schon als ein Decennium, seitdem die „Unterrichts- und Prüfungsordnung der Realschulen vom 6. Oktober 1859." erschienen, hat man die Gelegenheit gehabt, über den Unterricht in der analytischen Geometrie, namentlich über die Behandlung der Kegelschnitte verschiedene neue Lehrbücher und mannigfache Abhandlungen in den Schulprogrammen kennen zu lernen. Ich glaube aber mit meiner Ansicht nicht vereinzelt dazustehen, wenn ich sage, daß zwar mancherlei, ja zuweilen recht viel Gutes dort zu finden war, doch immer nicht das, wenigstens nicht vollständig, was man gerade wünschte und suchte. Hiemit ist aber durchaus kein Tadelsvotum, gleichgültig ob berechtigt oder unberechtigt, weder gegen die Verfasser jener Lehrbücher und Abhandlungen noch gegen die Leser derselben ausgesprochen. Im Gegentheil ist es wohl nur wünschenswerth und für einen gedeihlichen Unterricht sogar erforderlich, daß jedem Lehrer bis zu einer gewissen Grenze hin freier Spielraum gelassen werde, um seiner eigenen Individualität gemäß den gegebenen Lehrstoff zu behandeln. Ich bin daher auch principiell durchaus gegen die Einführung eines mathematischen „Lehrbuches", nach welchem der Lehrer auf der Schule zu unterrichten habe. Dennoch bin ich andererseits überzeugt, bei keinem meiner Fachgenossen auf ernstlichen Widerspruch zu stoßen, wenn ich die Behauptung ausspreche, daß für Schüler, welche eben erst in das Gebiet der Wissenschaft eintreten und noch nicht so weit gefördert sind, um sich selbstständig darin zurecht finden zu können, ein „Leitfaden", und zwar nicht ein dictirter, sondern ein gedruckter, als unentbehrlich zu bezeichnen ist. In der Schule, unter unmittelbarer Einwirkung und Leitung des Lehrers soll der Schüler die Lehren der Wissenschaft in sich aufnehmen; dennoch bedarf der Anfänger auch zu Hause einer sicheren Stütze und gewisser Anhaltpunkte, um welche sich bei der Repetition die in der Schule vernommenen Sätze und Gesetze mit ihren Begründungen gleichsam wie Krystalle ansammeln und gruppiren können. Ich habe auch schon an anderem Orte meine Ansicht ausgesprochen über den Vorzug eines „Leitfadens" vor einem „Lehrbuche", namentlich, wenn letzteres, was oft der Fall ist, nicht nur als Schulbuch, sondern zugleich auch „zum Selbstunterrichte" dienen soll. Hier will ich nur hervorheben, daß ein Leitfaden in seinen späteren Abschnitten (— z. B. in der Methode der unbestimmten Coefficienten in der Berechnung der Logarithmen, der trigonometrischen Funktionen und der Zahl π, sowie in der descriptiven und analytischen Geometrie —) einem „Lehrbuche" seiner Form nach nicht nur ähnlicher werden kann, insofern ja der Schüler auf dieser Stufe nicht mehr in dem Grade wie früher der leitenden Hand des Lehrers bedarf; sondern daß ein Leitfaden, wenn derselbe bereits über die ersten Elemente hinweggeführt hat, auch wohl immer mehr sich der Form eines ausführlichen Lehrbuchs annähern muß, sobald der Schüler an neue, von den bisherigen ganz verschiedene Auffassungs- und Anschauungsweisen sich zu gewöhnen, mit ganz neuen Methoden sich vertraut zu machen hat. Immerhin wird es aber auch dann noch dem Schüler überlassen bleiben müssen, erst durch eine gewisse Selbstthätigkeit und Arbeit auf den oft nicht leicht aufzufindenden und eben deshalb im Leitfaden angedeuteten Wegen das Ziel, zu welchem dieselben hinführen sollen, wirklich zu erreichen. Wenn nun hiernach in der nachfolgenden Probe eines Leitfadens, wie ich wenigstens einen solchen beim Unterrichte in der analytischen Geometrie mir wünsche, vielleicht doch noch Manches zu ausführlich erscheinen sollte, so kann ich dem nicht vollständig widersprechen, hebe jedoch hervor, daß die Behandlung der Ellipse hier gerade als Vorbild dienen soll, wie die anderen Curven zu behandeln wären, so daß also später, namentlich bei der Hyperbel oft bloße Andeutungen dem Schüler genügen müßten. Ob zu viel oder zu wenig Eigenthümlichkeiten der Ellipse behandelt worden sind, darüber ist wohl nicht zu streiten. Ich muß bekennen, daß es mir in den letzten 7 oder 8 zweijährigen Cursen (— noch früher war der Unterricht der analytischen Geometrie in unserer Prima nicht gestattet —) niemals gelungen ist, für die Behandlung eines noch ausgedehnteren Stoffes die erforderliche Zeit zu gewinnen, da eben nur 5 Stunden wöchentlich für die gesammte Mathematik gewährt sind. Wohl aber habe ich mich öfters genöthigt gesehen, den Stoff zu beschränken und weniger durchzunehmen, als man der nachfolgenden Probe gemäß erwarten sollte; und eine solche Beschränkung des Stoffes muß dem Lehrer schon deshalb freistehen, weil ja die verschiedenen Jahrgänge der Schüler nicht immer mit gleich guten Fähigkeiten ausgerüstet sind. Gewöhnlich beginne ich den Unterricht in der analytischen Geometrie mit der Bestimmung der Lage von Punkten durch das rechtwinklige Coordinatensystem, ohne auf schiefwinklige Parallelcoordinaten und auf Polarcoordinaten näher einzugehen. Die Transformationen der Coordinaten verschiedener Systeme übergehe ich hier meistens und bringe dieselben erst am Schlusse des Cursus zu einer eingehenderen Besprechung. Im 2. Abschnitte werden außer den gewöhnlichen nothwendigen Betrachtungen über die Lage verschiedener Linien zu einander auch noch theils Sätze, welche aus der Planimetrie bekannt sind, auf analytischem Wege bewiesen, theils Constructionsaufgaben vermittelst der Geraden als geometrischen Orts gelöst (z. B. die Schwerlinien, ebenso die Höhen des Dreiecks schneiden sich in einem Punkte; die Halbirungspunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Vierecks liegen in einer Geraden; zur Construction eines Dreiecks ist gegeben die Grundlinie, die Summe aus Höhe und einem Segmente, das Verhältniß zwischen Höhe und dem andern Segmente, u. dgl.). Der dritte Abschnitt handelt von den Linien des 2. Grades, und zwar **A.** „Der Kreis.“ Daß dieser nicht n a ch der Ellipse als specieller Fall derselben behandelt wird, hat manche wichtige Gründe für sich. Der Schüler, wenn er auch den vorigen Abschnitt von der geraden Linie vollständig erfaßt hat, ist doch noch nicht so weit vorgeschritten, daß er nicht gern erst noch an einem bereits bekannten geometrischen Gebilde, und deshalb eben mit geringerer Mühe und größerem Interesse die analytische Methode weiter üben und sich mit derselben vertraut machen sollte; für solche aus der Planimetrie ihm bekannte Sätze und Aufgaben über den Kreis erhält er eine ganz neue Art der Beweisführung und Auflösung, ja er wird auch freudig überrascht durch Auffindung einzelner Eigenthümlichkeiten des Kreises, die er in der Planimetrie noch nicht kennen gelernt hat. Ist nun diese Abtheilung A. mit Sorgfalt und nicht mit Uebereilung durchgenommen, so könnte alsdann auch in der folgenden Abtheilung B. „Die Ellipse" vielleicht Manches noch weniger ausführlich behandelt werden, als es in der nachfolgenden Probe geschehen ist. Hiebei kann ich aber nicht unbemerkt lassen, daß bei aller Kürze, bei noch so gedrängter und nur andeutungsweiser Behandlung des Stoffes die so klare und übersichtliche Form und Anordnung der mathematischen Zeichensprache, die mit Vermeidung der Interpunktionszeichen jedem neuen Gedanken eine neue Zeile einräumt, keineswegs vernachlässigt werden darf, — was aber freilich hier in einem zu solchen mathematischen Abhandlungen so ungeeigneten Quartformate eines Schulprogramms, in welchem man auch noch stets auf Raumersparniß zu sehen hat, leider nicht hat berücksichtigt werden können. Die Abtheilung C. „Die Hyperbel" wird nun in ihren ersten Paragraphen so viel Uebereinstimmung mit den entsprechenden Betrachtungen der Ellipse haben, daß man sich fast allein mit der Angabe der Resultate begnügen dürfte. Es tritt aber hier der neue Begriff der Asymptoten hinzu, und es wird durch ein näheres Eingehen auf diese Linien die Abtheilung C. von ungefähr gleichem Umfange werden wie die vorhergehende über die Ellipse. Daß nun erst unter D. „Die Parabel" folgt, erscheint mir deshalb zweckmäßig, weil es hier nicht mehr wie bisher eine Mittelpunktsgleichung und somit auch nicht mehr solche, in Bezug auf Abscisse und Ordinate symmetrische und so übereinstimmende Formeln für die Eigenschaften der Curve giebt. Dennoch darf auch hier nie verabsäumt werden, die hergeleiteten Gesetze für die Parabel mit den entsprechenden für die vorigen Curven zu vergleichen. Schließlich bleibt dann noch unter E. „Die räumliche Deutung der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades mit zwei Variabeln", obgleich diese Untersuchungen theilweise schon bei den einzelnen Curven angestellt worden sind. So sehr es nun auch wünschenswerth erscheinen mag, auch einige Curven höherer Ordnung, die in der Technik eine wichtige Rolle spielen, sowie ferner wenigstens Einiges aus der analytischen Geometrie des Raumes noch in Betracht zu ziehen, so dürfte hiezu bei dem gegenwärtigen Lehrplan für Realschulen doch wohl schwerlich die erforderliche Zeit zu gewinnen sein. —

B. Die Ellipse.

§ 57. Eine Curve von der Beschaffenheit, daß die Summe aus den Entfernungen (radii vectores, **Brennstrahlen**) ihrer Punkte von zwei festen Punkten (**Brennpunkten, F und F'**) constant ist, heißt **Ellipse**. (Fig. 1.)

Die durch beide Brennpunkte gelegte Sehne A'A heißt Hauptaxe oder große Axe; ihre Endpunkte sind die Scheitel der Ellipse. Die durch die Mitte der großen Axe senkrecht gelegte Sehne B'B heißt Nebenaxe oder kleine Axe; der Schnittpunkt O beider Axen ist der Mittelpunkt der Ellipse. Die Entfernung OF = OF' eines jeden der beiden Brennpunkte vom Mittelpunkte ist die Excentricität der Ellipse. Die durch einen Brennpunkt senkrecht zur Hauptaxe gelegte Sehne G'G heißt Parameter der Ellipse.

Eine Ellipse läßt sich vermittelst eines in sich selbst zurücklaufenden, endlosen, um zwei feste Stifte F und F' geführten und durch einen Zeichenstift S stets gespannten Fadens FSF' beschreiben.

Der Kreis ist eine Ellipse, deren Excentricität gleich Null ist.

§ 58. Beschreibt man um die Brennpunkte F und F' (Fig. 2.) Kreise (Richtkreise) RR und R'R' mit der großen Axe als Radius, so muß jeder Punkt der Ellipse (P', P'', P''' u. s. w., also auch A und A', B und B') von dem einen Brennpunkte ebenso weit entfernt sein als von der Peripherie des um den anderen Brennpunkt beschriebenen Kreises.

Anm. Ueber die gerade Linie, welche man Directrix (oder auch wohl Richtlinie) nennt, siehe später am Schlusse des Abschnitts von der Parabel.

§. 59. Setzt man die große Axe A'A einer Ellipse gleich 2a, die kleine Axe B'B = 2b, die Excentricität OF = OF' = e, also F'F = 2e, und bezeichnet man die zu irgend einem Punkte der Ellipse gehörigen Brennstrahlen mit r und r', so ist nach dem Vorstehenden für jede Ellipse:

$$1)\ r + r' = 2a \qquad 2)\ BF = BF' = a \qquad 3)\ b^2 = a^2 - e^2$$

§. 60. Die Mittelpunktsgleichung, d. i. diejenige Gleichung, welche sich auf die große und kleine Axe der Ellipse als Abscissen- und Ordinatenaxe bezieht, aus den beiden gegebenen Halbaxen a und b zu bestimmen. (Fig. 3.)

Es ist für jeden Punkt $P_{(xy)}$ der Ellipse $FP + F'P = \sqrt{y^2 + (e-x)^2} + \sqrt{y^2 + (e+x)^2} = 2a$ und hieraus ergiebt sich $a^2 y^2 + (a^2 - e^2)\, x^2 = a^2 (a^2 - e^2)$

also 1) $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ oder 2) $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ oder 3) $\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$

Die Discussion dieser Gleichung ergiebt: 1) Ist in absoluter Hinsicht $x > a$, so ist y imaginär. 2) Ist $y > b$, so ist x imaginär. 3) Für $x = o$ wird $y = \pm b$. 4) Für $y = o$ wird $x = \pm a$. 5) Ist $x < a$, so gehören zu demselben 2 gleich große, aber entgegengesetzte Ordinaten. 6) Zu $y < b$ gehören 2 gleich große, entgegengesetzte Abscissen. — Die beiden Axen theilen die Ellipse in 4 congruente Stücke. — 7) Ist $b = a$, so hat man einen Kreis mit dem Radius a (S. § 43). 8) Ist $b > a$, so liegt die große Axe der Ellipse in der y Axe des Systems.

§. 61. 1) Aus der Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ folgt: $(a + x)(a - x) : y^2 = a^2 : b^2$ aber auch $(a + y)(a - y) : x^2 = b^2 : a^2$, d. h. für jedes auf der Axe errichtete

Perpendikel in der halben Ellipse verhält sich das Rechteck aus den beiden Segmenten der Axe zum Quadrat über dem Perpendikel wie die Quadrate über den Halbaxen zu einander; beim Kreise ist also jenes Rechteck gleich dem Quadrate über dem Perpendikel.

2) Für zwei beliebige Punkte $P_{(x_1 y_1)}$ und $P_{(x_2 y_2)}$ der Ellipse ergiebt sich auch:
$y_1^2 : y_2^2 = (a + x_1)(a - x_1) : (a + x_2)(a - x_2)$, ebenso $x_1^2 : x_2^2 = (b + y_1)(b - y_1)(b + y_2) \cdot (b - y_2)$

3) Beschreibt man über der großen Axe 2a einer Ellipse einen Halbkreis (Fig. 4), so hat man für diese beiden Curven:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ und } \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

und daher verhalten sich die zu einer und derselben Abscisse gehörigen Ordinaten der Ellipse und des Halbkreises wie $b : a$.

Ebenso ergiebt sich auch, wenn man über 2b einen Halbkreis beschreibt, daß für eine und dieselbe Ordinate sich die Abscissen der Ellipse und des letzteren Kreises wie $a : b$ verhalten.

§. 62. Vermittelst des Zirkels und des Lineals beliebig viele Punkte einer Ellipse zu bestimmen, wenn zwei von den drei Größen a, b und e gegeben sind.

1) Vermittelst der Richtkreise (Fig. 2); die Punkte P', P'', P''' u. s. w. sind die Spitzen von den gleichschenkligen Dreiecken $P'FR^1$, $P''FR^1$ u. s. w.

2) Da immer $r + r^1 = 2a$ (§ 59), so theile man die große Axe in 2 beliebige Stücke und schlage mit jedem dieser Stücke um jeden der beiden Brennpunkte Bogen.

3) Nach § 61, 3 und Fig. 4 muß sich für jeden Punkt Q der großen Axe Perpendikel $QP : QA'' = b : a = OB'' : OA''$ verhalten, daher $B''P$ immer parallel zur großen Axe sein.

§. 63. Aus den beiden Axen 2a und 2b der Ellipse den Parameter 2p derselben zu berechnen.

Es ist p die Ordinate für die Abscisse $x = \pm e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Aus $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ erhält man also den halben Parameter $p = \frac{b^2}{a}$ oder $a : b = b : p$, d. h. der Parameter der Ellipse ist die dritte Proportionale zur großen und kleinen Axe derselben. — Für den Kreis ist $a = b = r$, also auch $p = r$, d. h. Brennpunkt und Mittelpunkt fallen zusammen, oder $e = o$.

§. 64. Die Scheitelgleichung der Ellipse für 2a als Abscissenaxe zu bestimmen.

1) Nimmt man A^1 als Anfangspunkt und A^1A als die positive Richtung der Abscissenaxe an, so ist bei der Transformation der Coordinaten nur statt des x in der Mittelpunktsgleichung

hier $x - a$ zu setzen, also $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left\{a^2 - (x - a)^2\right\} = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$. Es war aber $\frac{b^2}{a} = p$, also $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$

2) Nimmt man den Scheitel **A** als Anfangspunkt, also AA^1 als negative x Axe, so erhält man $y^2 = -2px - \frac{p}{a}x^2$, welche Gleichung nur, wenn x negativ ist, reelle Werthe für y giebt. Für den Kreis, dessen halber Parameter **p** immer gleich **r** sein muß, wird $y^2 = 2rx - x^2$, und wenn die negative Abscissenaxe durch den Kreis geht, $y^2 = -2rx - x^2$. (Siehe §. 43.)

§. 65. Ist die Gleichung einer Curve von der Form $ay^2 + cx^2 + dy + ex + f = 0$ und haben die Glieder mit y^2 und x^2 beide das positive Vorzeichen, so ist

$$a\left(y + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(+ \frac{e}{2c}\right)^2 = \frac{cd^2 + ae^2 - 4acf}{4ac}$$

Ersetzt man nun der Kürze wegen die rechte Seite der Gleichung durch **m**, und verlegt man ferner den Anfangspunkt des Coordinatensystems in den Punkt, dessen Ordinate gleich $-\frac{d}{2a}$ und dessen Abscisse gleich $-\frac{e}{2c}$ ist, während die neuen Axen den früheren parallel bleiben, so daß also für das neue System die Ordinate $u = y + \frac{d}{2a}$ und die Abscisse $t = x + \frac{e}{2c}$ ist, so geht die vorstehende Gleichung über in die Form $au^2 + ct^2 = m$

Setzt man endlich $\frac{m}{c} = \alpha^2$ und $\frac{m}{a} = \beta^2$, so ergiebt sich durch Multiplication mit $\frac{m}{a \cdot c}$ die Gleichung $\alpha^2 u^2 + \beta^2 t^2 = \alpha^2\beta^2$, d. i. die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse in Bezug auf das neue System; die Halbaxen sind $\alpha = \sqrt{\frac{m}{c}}$ und $\beta = \sqrt{\frac{m}{a}}$

Anm. 1. Für $a = c$ gehört die Gleichung einem Kreise an (§ 44).

Anm. 2. Wird m negativ, d. h. $4acf > cd^2 + ae^2$, so hat obige Gleichung keine räumliche Bedeutung. Siehe später § 129. —

§. 66. Aus den gegebenen Coordinaten eines Punktes $P_{(x_1 y_1)}$ der Ellipse, deren Mittelpunktsgleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist, die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale für jenen gegebenen Punkt zu bestimmen.

Aehnlich wie §. 52. ergiebt sich zunächst die Gleichung der Secante, welche durch den gegebenen Punkt $P_{(x_1 y_1)}$ und durch irgend einen anderen bestimmten Punkt $P_{(x_2 y_2)}$ der Ellipse geht:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

Da aber $a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2$ und auch $a^2y_2^2 + b^2x_2^2 = a^2b^2$ folglich $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$ und daher die **Gleichung der Tangente:**

$$1)\ y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \text{ oder } 2)\ a^2y_1y + b^2x_1x = a^2b^2.$$

Wäre die Ellipse durch ihre Scheitelgleichung $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$ gegeben, so würde durch ähnliche Betrachtungen oder auch durch Transformation nach § 8 aus vorstehender Gleichung 2) sich die Tangentialgleichung ergeben: $y_1y = 2p \cdot \frac{x + x_1}{2} - \frac{p}{a} \cdot x_1x$

Aus obiger Gleichung 1) ergiebt sich ferner nach § 28 die **Gleichung der Normalen:**

$$3)\ y - y_1 = +\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$$

Setzt man nun in der Tangentialgleichung 2) die Ordinate $y = o$, so erhält man die Abscisse des Schnittpunktes T der Tangente mit der x Axe (Fig. 5.), d. i. das Stück von O bis T gleich $\frac{a^2}{x_1}$. Nach §. 51. ist aber die **Subtangente** das Stück von T bis Q und daher, mit Berücksichtigung der Vorzeichen, $TQ = -TO + OQ = x_1 - \frac{a^2}{x_1}$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich aus Gleichung 3) für den Schnittpunkt N der Normalen die Abscisse $ON = \frac{a^2 - b^2}{a^2}x_1 = \frac{e^2}{a^2} \cdot x_1$ und hieraus wieder, mit Berücksichtigung der Vorzeichen, die **Subnormale** $QN = -QO + ON = -x_1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}x_1 = -\frac{b^2}{a^2}x_1$

Vermittelst des Pythagoräischen Lehrsatzes erhält man alsdann die absolute Länge der **Tangente**

$$TP = \frac{y_1}{b^2x_1}\sqrt{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}$$

ferner die Länge der **Normalen** $PN = \frac{1}{a^2} \cdot \sqrt{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}$

Wie beim Kreise in §. 52. sind auch hier die Vorzeichen vor den Wurzelgrößen so zu wählen, daß TP und PN als **absolute Längen positiv** werden.

Dieselben Werthe erhält man auch auf trigonometrischem Wege, da nach Gleichung 1)

$$\operatorname{tang} T = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \text{ und } TP = y_1 \cdot \operatorname{cosec} T \text{ und } PN = y_1 \cdot \sec T \text{ ist.}$$

§. 67. Aus dem vorigen Paragraphen geht hervor:

1) Subtangente und Subnormale sind für positive Abscissen, d. h. für Tangenten, welche die Ellipse in der 1. und 4. Region berühren, immer negativ, dagegen für negative x immer positiv.

2) Der Werth für die Subtangente ist von b unabhängig, d. h. es haben alle über derselben Axe 2a beschriebenen Ellipsen für eine und dieselbe Abscisse auch eine und dieselbe Subtangente,

oder bei allen Ellipsen über der gemeinschaftlichen Axe 2a müssen die Tangenten für ein und dasselbe x durch einen und denselben Punkt T der Abscissenaxe gehen.

3) Der absolute Werth der Subnormalen ist immer kleiner als x, d. h. die beiden Endpunkte P und N einer Normalen liegen immer auf einer und derselben Seite von der kleinen Axe 2b.

4) Aus $OT = \frac{a^2}{x_1}$ ergiebt sich $OQ : OA = OA : OT$ und hieraus

5) $TA : TA^1 = QA : QA^1$, oder A^1 und A, Q und T sind 4 harmonische Punkte.

6) Da ferner $ON = \frac{e^2}{a^2} x_1 = \frac{e^2}{OT}$ oder OF die mittlere Proportionale zwischen ON und OT ist, so ergiebt sich hieraus

7) daß auch F^1 und F, N und T vier harmonische Punkte sind, woraus zugleich hervorgeht, daß der Winkel zwischen den beiden Brennstrahlen F^1P und FP durch die Normale PN halbirt wird, was jedoch im folgenden Paragraphen noch besonders bewiesen werden soll.

§. 68. Die beiden Brennstrahlen r und r^1 (Fig. 6.) **für irgend einen Punkt $P_{(x_1 y_1)}$ der Ellipse bilden mit der Tangente in diesem Punkte gleiche Winkel,** $\angle\, \alpha = \alpha^1$.

1) Bezeichnet man wie in §. 52. den Winkel PTX mit T, PFT mit φ und PF^1T mit φ^1, so ist $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(T - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} T - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} T \cdot \operatorname{tg} \varphi}$ und $\operatorname{tg} \alpha^1 = \operatorname{tg}(180 - T + \varphi^1) = \frac{-\operatorname{tg} T + \operatorname{tg} \varphi^1}{1 + \operatorname{tg} T \operatorname{tg} \varphi^1}$

Nun ergiebt sich aber aus den rechtwinkligen Dreiecken PQF und PQF^1, daß

$$-\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_1}{e - x_1} \text{ und } \operatorname{tg} \varphi^1 = \frac{y_1}{e + x_1}$$

ferner aus § 66, Gleichung 1) $\operatorname{tg} T = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$

Also $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-b^2 ex_1 + b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}{a^2 ey_1 - a^2 x_1 y_1 + b^2 x_1 y_1} = \frac{-b^2 e x_1 + a^2 b^2}{a^2 e y_1 - e^2 x_1 y_1} = \frac{b^2(-e x_1 + a^2)}{e y_1 (a^2 - e x_1)} = \frac{b^2}{e y_1}$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich auch $\operatorname{tg} \alpha^1 = \frac{b^2}{e y_1}$ Folglich $\angle\, \alpha = \alpha^1$

Oder 2) Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze ist

$$r = \sqrt{(e - x_1)^2 + y_1^2} = \sqrt{(e - x_1)^2 + \frac{a^2 - e^2}{a^2}(a^2 - x_1^2)}$$
$$= \sqrt{a^2 - 2ex_1 + \frac{e^2}{a^2}x_1^2} = \frac{a^2 - e x_1}{a}$$

Ebenso ergiebt sich $r^1 = \frac{a^2 + e x_1}{a}$. Da aber nach § 66 $ON = \frac{e^2}{a^2} x_1$, so ist

$NF = e - \frac{e^2}{a^2} x_1 = \frac{e}{a} \cdot \frac{a^2 - ex_1}{a} = \frac{e}{a} \cdot r$ und $NF^1 = e + \frac{e^2}{a^2} x_1 = \frac{e}{a} \cdot \frac{a^2 + ex_1}{a} = \frac{e}{a} \cdot r^1$

Also $NF : NF^1 = r : r^1 = PF : PF^1$

d. h. es ist die Normale PN die Halbirungslinie des Dreieckswinkels FPF^1, und die zur Normalen senkrechte Tangente PT halbirt daher den Nebenwinkel von PFP^1, oder $\alpha = \alpha^1$

§. 69. Durch den gegebenen Punkt $P_{(x_1 y_1)}$ der Ellipse eine Tangente an dieselbe zu legen.

1) Nach § $67,_2$ kann man über 2a als Durchmesser einen Kreis beschreiben, die Ordinate y_1 bis zu diesem hin verlängern, hier (in A″ der Fig. 5) eine Tangente an den Kreis legen und den Punkt T, in welchem diese die xAxe durchschneidet, mit $P_{(x_1 y_1)}$ verbinden.

2) Nach § 68 halbirt man den Nebenwinkel von FPF^1.

3) Auch könnte man nach § $67,_5$ für A^1, Q und A den zu Q zugeordneten vierten harmonischen Punkt T bestimmen.

4) Eine vierte Methode siehe später § 71.

§. 70. Von einem Punkte $P_{(mn)}$ außerhalb der gegebenen Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ eine Tangente an dieselbe zu legen und die Coordinaten des Berührungspunktes $P^1_{(x_1 y_1)}$ zu bestimmen. (Fig. 7.)

1) Wenn P^1 der Berührungspunkt wäre und F^1P^1 um $P^1R = P^1F$, d. h. bis zum Richtkreise RR^1 verlängert würde, so müßte nach § 68 das Stück P^1H der Tangente die Höhe in dem gleichschenkligen Dreiecke FP^1R sein, und deshalb auch PR = PF. Man hat also für den Punkt R zwei Kreise als geometrische Oerter (und daher zwei Schnittpunkte R und R^1), nämlich den Kreis um F^1 mit dem Radius $F^1R = 2a$ und den Kreis um $P_{(mn)}$ mit dem Radius PR = PF. Die Verbindungslinien des Punktes F^1 mit den beiden Schnittpunkten R und R^1 geben die Berührungspunkte P^1 und P″ der beiden möglichen von $P_{(mn)}$ zu legenden Tangenten. Die Vertauschung der beiden Punkte F und F^1 mit einander würde bei dieser Construction dasselbe Resultat geben.

Hieraus ergiebt sich auch für den Kreis noch eine andere Methode zur Bestimmung des Berührungspunktes als die bekannte in § $53,_3$ hergeleitete.

Um die Coordinaten des Berührungspunktes $P^1_{(x_1 y_1)}$ zu berechnen, hat man wieder zu berücksichtigen, daß P^1 sowohl in der Tangente als auch in der Ellipse liegt. Die Gleichung der Tangente im Berührungspunkte $(x_1 y_1)$ ist $a^2y_1y + b^2x_1x = a^2b^2$, und da der Punkt (mn) in derselben liegt, so ist auch 1) $a^2y_1n + b^2x_1n = a^2b^2$. Da ferner Punkt $(x_1 y_1)$ ein Punkt der Ellipse, so ist 2) $a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2$. Aus diesen Gleichungen 1) und 2) ergeben sich die Coordinaten des Berührungspunktes P^1:

$$x_1 = \frac{a^2}{a^2n^2 + b^2m^2}\left(b^2m \pm n\sqrt{a^2n^2 + b^2m^2 - a^2b^2}\right)$$

$$\text{und } y_1 = \frac{b^2}{a^2n^2 + b^2m^2}\left(a^2n \mp m\sqrt{a^2n^2 + b^2m^2 - a^2b^2}\right)$$

Setzt man hier $a = b = r$, so erhält man die in § 53,₁ für den Kreis berechneten Coordinaten des Berührungspunktes.

Oder 2) Man könnte auch (wie § 53,₂) in vorstehender Gleichung 1) das y_1 und das x_1 als laufende Coordinaten ansehen und würde dann als Gleichung eines geometrischen Ortes für den Berührungspunkt P′ erhalten

$$3)\ a^2ny + b^2mx = a^2b^2 \quad \text{oder} \quad \frac{n}{b^2}y + \frac{m}{a^2}x = 1$$

d. i. die Gerade, welche von der xAxe das Stück $OM = \frac{a^2}{m}$ (Fig 8) und von der yAxe das Stück $ON = \frac{b^2}{n}$ abschneidet. Die Gleichung 3) ist also die Gleichung der Berührungssehne für diejenigen beiden Tangenten, welche sich im Punkte (mn) durchschneiden; und durch Construction dieser Geraden erhält man die Berührungspunkte P′ und P″.

§. 71. 1) **Die Fußpunkte sämmtlicher, von den beiden Brennpunkten auf alle beliebigen Tangenten der Ellipse gefällten Perpendikel liegen in einem Kreise, welcher die große Axe der Ellipse zum Durchmesser hat.** (Fig. 9.)

Aus § 70,₁ ergiebt sich, daß für jede beliebige Tangente das Perpendikel $FH = HR$; und da auch $FO = OF^1 = e$, so ist immer $OH = \frac{1}{2}F^1R = a$, d. h. H liegt in dem Halbkreise über A^1A. Aehnlich für das Perpendikel F^1H^1.

2) **Das Rechteck aus den von beiden Brennpunkten auf eine und dieselbe Tangente gefällten Perpendikeln ist constant gleich dem Quadrate über der kleinen Halbaxe.**

$FH = FT \cdot \sin T$ und $F^1H^1 = F^1T \cdot \sin T$. Da aber nach § 66 $OT = \frac{a^2}{x_1}$ mithin $FT = \frac{a^2}{x_1} - e$ und $F^1T = \frac{a^2}{x_1} + e$, so hat man

$$FH \cdot F^1H^1 = \left(\frac{a^4}{x_1^2} - e^2\right) \sin^2 T = \frac{a^4 - a^2x_1^2 + b^2x_1^2}{x_1^2} \sin^2 T$$

oder auch, da sich aus der Ellipsengleichung $a^2 - x_1^2 = \frac{a^2y_1^2}{b^2}$ ergiebt,

$$FH \cdot F^1H^1 = \frac{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}{b^2 x_1^2} \cdot \sin^2 T$$

Da ferner aber nach § 66 $\operatorname{tg} T = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

so ergiebt sich $\sin^2 T = \frac{\operatorname{tg}^2 T}{1 + \operatorname{tg}^2 T} = \frac{b^4x_1^2}{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}$ und somit $FH \cdot F^1H^1 = b^2$

3) **Errichtet man in den Scheiteln der Ellipse auf der großen Axe Perpendikel bis zu einer beliebigen Tangente, so ist auch das Rechteck aus diesen beiden Perpendikeln constant gleich dem Quadrate über der kleinen Halbaxe.** (Fig. 10.)

Die Gleichung der Tangente im Punkte $(x_1 y_1)$ der Ellipse ist $a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2$. Für den Punkt dieser Tangente, dessen Abscisse $x = a$, wird daher die zugehörige Ordinate oder das Perpendikel $AK = \frac{b^2}{ay_1}(a - x_1)$. Für die Abscisse $x = -a$ wird aber die zugehörige Ordinate oder $A'K' = \frac{b^2}{ay_1}(a + x_1)$. Folglich ist $AK \cdot AK' = \frac{b^2}{y_1^2} \cdot \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2) = b^2$

Für die in den Scheiteln der kleinen Axe errichteten Perpendikel ergiebt sich ähnlich $BL \cdot B'L' = a^2$

4) **Die Sehnen PA und PA' sind parallel zu den Verbindungslinien des Mittelpunkts O mit K' und K.** (Fig. 10 und 11.)

Die Gleichung für die Verbindungslinie zweier Punkte $(x_1 y_1)$ u. $(x_2 y_2)$ ist $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$

Hieraus ergiebt sich die Gleichung der Linie AP: 1) $y = \frac{y_1}{x_1 - a}(x - a)$

Für die Linie OK' erhält man die Gleichung $y = \frac{-A'K'}{+a}(x + a)$, und da nach dem Vorigen $A'K' = \frac{b^2}{AK}$ und $AK = \frac{b^2}{ay_1}(a - x_1)$, so ergiebt sich 2) $y = \frac{y_1}{x_1 - a}(x + a)$.

Da nun in den Gleichungen 1) und 2) für die Linien AP und OK' der Coefficient bei der laufenden Abscisse x derselbe, nämlich $\frac{y_1}{x_1 - a}$ ist, so sind die beiden Linien einander parallel. —

Ebenso ließe sich zeigen, daß auch die Sehnen PB und PB' parallel zu OL und OL' sein müssen.

5) **Aus Vorstehendem ergiebt sich auch noch eine Construction der Tangente durch den Punkt $P_{(x_1 y_1)}$ der Ellipse.**

Man verlängere die Sehne AP bis zum Schnittpunkte S in der verlängerten Halbaxe OB, construire das Rechteck $A'OSK'$ und verbinde K' mit $P_{(x_1 y_1)}$.

6) **Macht man noch $OS' = AK$, so verhält sich $OS' : OB = OB : OS$, und hieraus folgt, daß S und S', B und B' vier harmonische Punkte sind.**

7) **Die vom Schnittpunkte P zweier Tangenten nach den Brennpunkten gezogenen Geraden PF und PF' halbiren den Winkel je zweier zu beiden Tangenten gehöriger Berührungs-Brennstrahlen und bilden zugleich auch mit den beiden Tangenten gleiche Winkel.** (Fig. 12.)

Nach der Construction im §. 70,1 hat man hier 3 Paare congruenter Dreiecke:

$$\triangle PP'R \cong PP'F, \qquad PP''R' \cong PP''F \qquad \text{und } PF'R \cong PF'R'$$

und hieraus ergiebt sich $\angle PF'R = \angle PF'R'$ und $\angle PFP' = R = R' = PFP''$; ferner $\angle P'PR = P'PF = \alpha$, $\angle P''PR' = P''PF = \beta$ und $\angle F'PR = F'PR'$, und es ist daher, wenn man noch $\angle FPF'$ mit γ bezeichnet, $2\alpha - \gamma = 2\beta + \gamma$ oder $\alpha - \gamma = \beta$, d. h. $\angle F'PP' = FPP''$.

§. 72. 1) **Wenn eine bestimmte Länge MN zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels YOX sich so bewegt, daß ihre Endpunkte immer in den Schenkeln des Winkels bleiben, so beschreibt irgend ein Punkt P in jener Geraden MN selbst oder in ihrer Verlängerung eine Ellipse, deren Halbaxen mit den Schenkeln des Winkels O ihrer Richtung nach zusammenfallen und gleich PN und PM sind.** (Fig. 13.)

Bezeichnet man PN mit a und PM mit b und den veränderlichen Winkel PMX mit φ, so ist $\frac{y}{b} = \sin\varphi$ und $\frac{x}{a} = \cos\varphi$. Da aber $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, so hat man $\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$, welches die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse mit den Axen 2a und 2b ist.

2) **Denkt man sich ferner noch für jeden beliebigen Punkt P dieser Ellipse das rechtwinklige Dreieck NOM zu dem Rechtecke NOMD vervollständigt, so muß immer die Gerade DP die Richtung der Normalen im Punkte P angeben.**

Die Coordinaten des Punktes D mögen ND = m und MD = — n sein, während die des entsprechenden Punktes P in der Ellipse x_1 und y_1 sind, alsdann hat man wieder $y_1 = b \cdot \sin\varphi$ und $x_1 = a \cdot \cos\varphi$, ferner $-n = (a - b)\sin\varphi$ und $m = (a - b)\cos\varphi$, also $n = -\frac{a - b}{b} \cdot y_1$ und $m = \frac{a - b}{a} \cdot x_1$. Nun ist aber die Gleichung der Geraden, welche durch die Punkte $P_{(x_1 y_1)}$ und $D_{(mn)}$ geht, $y - y_1 = \frac{y_1 - n}{x_1 - m}(x - x_1)$, und wenn man die vorstehenden Werthe von n und m substituirt: $y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$, d. i. nach § 66 die Gleichung der Normalen im Punkte $P_{(x_1 y_1)}$.

Anmerkung 1) Während das mechanische Zeichnen einer Ellipse in continuirlichem Zuge vermittelst eines Fadens (§ 57) sehr unsicher und unvollkommen ist, liefert §. 72,₁ ein bequemes Mittel, einen nicht complicirten Ellipsographen anzufertigen, durch welchen man Ellipsen mit beliebig großen Axen darstellen kann. Letzteres hat, wie Alles, seine natürlichen Grenzen; es kann ja selbst der so einfache Zirkel nicht für Kreise auf einem Quartblatt Papier und zugleich auch für die Zeichnung der Kreise auf der Schultafel geeignet sein. Das Modell eines solchen Ellipsographen, welches ich mir vor 9 bis 10 Jahren hier in Tilsit habe anfertigen lassen, giebt Ellipsen, deren große Axen zwischen 80 und 130^{mm} Länge haben, während die Längen der kleinen Axen zwischen 50 und 100^{mm} liegen. Um noch kleinere Ellipsen zeichnen zu können, müßte die Construction des Ellipsographen etwas abgeändert werden, freilich aber müßte dann auf die Herstellung des Instruments noch mehr Sorgfalt verwendet werden. Uebrigens ließe sich von einem recht geschickten Mechaniker auch wohl ein einfacher Ellipsograph herstellen, dessen Construction durch § $62,_3$, Fig. 4. begründet wäre.

Anmerkung 2) Ferner giebt § $72,_2$ noch den Grund zu einer sehr einfachen Vorrichtung, um bei der Herstellung der Lehrbogen elliptischer Gewölbe zugleich in jedem Punkte die Richtung der Normalen zu bestimmen, was für den Bau solcher Gewölbe in Betreff der Fugen zwischen den Bausteinen von der größten Wichtigkeit ist.

§. 73. Die Gleichung der Tangente im Punkte $P_{(mn)}$ einer Ellipse (Fig. 14.) ist nach § 66: $y - n = -\frac{b^2 m}{a^2 n}(x - m) = tg\ T \cdot (x - m)$. Die Gleichung irgend einer Sehne oder Secante, welche durch die Punkte $P'_{(x_1 y_1)}$ und $P''_{(x_2 y_2)}$ geht, ist nach demselben Paragraphen: $y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1)$. Wenn also Tangente und Sehne einander parallel sind, so hat man: $tg\ T = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{m}{n} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$, also $m : n = (x_1 + x_2) : (y_1 + y_2)$. Es sind aber $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ und $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ die Coordinaten des Halbirungspunkts M jener zur Tangente parallelen, aber sonst beliebigen Sehne, daher muß PM auch durch den Mittelpunkt O der Ellipse gehen, woraus dann weiter folgt: Die Verbindungslinie zwischen den Berührungspunkten zweier paralleler Tangenten geht durch den Mittelpunkt der Ellipse, d. h. sie ist ein **Durchmesser** der Ellipse und halbirt sämmtliche Sehnen, welche zu den Tangenten und daher auch zu einander parallel sind. Die Endpunkte eines Durchmessers sind seine Scheitel. — Daß jeder Durchmesser im Mittelpunkte der Ellipse halbirt ist und die Ellipse in zwei congruente Hälften theilt, geht schon aus §. 60. hervor. —

Hienach läßt sich der Mittelpunkt einer gezeichneten Ellipse bestimmen, indem man die Mitten zweier zu einander parallel gezogener Sehnen verbindet u. s. w.

§. 74. Hat ein Durchmesser zur xAxe den Neigungswinkel α, während die von ihm halbirten Sehnen die xAxe unter dem Winkel β schneiden, ist ferner der eine Scheitel des Durchmessers der Punkt $P_{(mn)}$, so hat man $tg\ \alpha = \frac{n}{m}$; und da die halbirten Sehnen parallel zur Tangente im Punkte $P_{(mn)}$ sind, so ist $tg\ \beta = -\frac{b^2 m}{a^2 n}$, mithin $tg\ \alpha \cdot tg\ \beta = -\frac{b^2}{a^2}$.

Da diese Gleichung in Bezug auf $tg\ \alpha$ und $tg\ \beta$ symmetrisch ist, so muß auch der Durchmesser der Ellipse, welcher zu den früheren halbirten Sehnen parallel ist, durch die Halbirungspunkte derjenigen Sehnen gehen, welche parallel zu dem ersten Durchmesser sind. Zwei solche Durchmesser, von denen jeder die zum anderen parallel gezogenen Sehnen halbirt oder, was dasselbe ist, zu den Tangenten in den Scheiteln des anderen Durchmessers parallel ist, heißen **zugeordnete** oder **conjugirte** Durchmesser.

Die Gleichungen zweier conjugirter Durchmesser sind also:

$$y = tg\ \alpha \cdot x \qquad \text{und } y = -\frac{b^2}{a^2 \cdot tg\ \alpha} \cdot x$$

Ist $tg\ \alpha = \alpha = o$, so muß $tg\ \beta = -\infty$ und daher $\beta = 270^\circ$ oder $= 90^\circ$ sein, d. h. die Durchmesser stehen auf einander senkrecht, sie sind die beiden Axen der Ellipse.

Beim Kreise ist $a = b$, also $-\frac{b^2}{a^2} = -1$ und $tg\ \beta = -\frac{1}{tg\ \alpha}$, d. h. (§ 27) jedes Paar conjugirter Durchmesser beim Kreise durchschneidet sich unter rechtem Winkel.

§. 75. Wenn zwei Tangenten von einem Punkte $P_{(mn)}$ ausgehen, so muß der Durchmesser DD^1, dessen Verlängerung durch $P_{(mn)}$ geht, die Berührungssehne $P'P''$ der beiden Tangenten halbiren. (Fig. 15.)

Die Gleichung des Durchmessers DD^1, dessen Verlängerung durch $P_{(mn)}$ geht, ist $y = \frac{n}{m} x$ und daher die Gleichung des ihm zugeordneten (conjugirten) Durchmessers EE^1 nach dem vorigen Paragraphen $y = -\frac{b^2 m}{a^2 n} \cdot x$. Die Gleichung der Berührungssehne ist aber nach § 70

$$\frac{n}{b^2} y + \frac{m}{a^2} x = 1 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{b^2 m}{a^2 n} x + \frac{b^2}{n}$$

welches nach § 24 die Gleichung einer Linie ist, die zu dem letzteren conjugirten Durchmesser EE^1 parallel ist, und es muß daher nach § 73 die Berührungssehne von dem ersten Durchmesser halbirt werden.

§. 76. Wenn man die Scheitel eines Durchmessers DD^1 mit irgend einem Punkte P der Ellipse verbindet, so heißen diese Verbindungslinien PD und PD^1 Supplementarsehnen. (Fig. 16.) Zieht man nun zwei Durchmesser parallel zu den beiden Sehnen PD und PD^1, so müssen die letzteren als Seiten des Dreiecks DPD^1 halbirt werden, und es sind daher zwei Durchmesser, welche zu zwei Supplementarsehnen parallel gezogen worden, immer conjugirte Durchmesser. Um also zwei conjugirte Durchmesser zu ziehen, welche sich unter einem gegebenen Winkel φ durchschneiden, schlägt man über einem beliebigen Durchmesser DD^1 einen Kreisbogen DPD^1, welcher den gegebenen Winkel φ als Peripheriewinkel umfaßt, verbindet den Schnittpunkt P mit D und mit D^1 und zieht zu PD und PD^1 parallele Durchmesser. — Nimmt man $\varphi = 90^0$, so erhält man die beiden Axen der Ellipse.

§. 77. Der eine Scheitel eines Durchmessers habe die Coordinaten x_1 und y_1, der andere Scheitel also $-x_1$ und $-y_1$. Es sind die Coordinaten x_2 und y_2 für die Scheitel des conjugirten Durchmessers zu bestimmen.

Die Gleichung des gegebenen Durchmessers ist $y = \frac{y_1}{x_1} x$ und daher die Gleichung des conjugirten Durchmessers $y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x$. Man hat daher für den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ellipse, d. h. für den Scheitel $(x_2 y_2)$ des conjugirten Durchmessers die beiden Gleichungen $y_2 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x_2$ und $y_2^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_2^2)$. Hieraus ergeben sich die gesuchten Coordinaten $x_2 = \pm \frac{a}{b} y_1$ und $y_2 = \pm \frac{b}{a} x_1$

§. 78. Die Summe aus den Quadraten zweier conjugirter Durchmesser ist constant gleich der Summe aus den Quadraten über den beiden Axen.

Sind die Coordinaten für den einen Scheitel des einen Durchmessers x_1 und y_1, so hat der Scheitel des anderen Durchmessers nach dem vorigen Paragraphen die Coordinaten $\pm \frac{a}{b} y_1$ und $\mp \frac{b}{a} x_1$, und man hat nach dem Pythagoräischen Lehrsatze für die beiden conjugirten Halbmesser a_1 und b_1:

$$a_1^2 = x_1^2 + y_1^2 \qquad \text{und } b_1^2 = \frac{a^2}{b^2} y_1^2 + \frac{b^2}{a^2} x_1^2$$

$$\text{folglich } a_1^2 + b_1^2 = \frac{a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2}{b^2} + \frac{a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2}{a^2} = \frac{a^2 b^2}{b^2} + \frac{a^2 b^2}{a^2} = a^2 + b^2$$

$$\text{oder } (2a_1)^2 + (2b_1)^2 = (2a)^2 + (2b)^2$$

§. 79. Legt man durch die Scheitel zweier conjugirter Durchmesser Tangenten an die Ellipse, so ist der Flächeninhalt des durch die Tangenten begrenzten Parallelogramms constant gleich dem Rechteck aus den beiden Axen. (Fig 17.)

Die Tangenten müssen nach § 73 den conjugirten Durchmessern DD^1 und EE^1 parallel sein und mögen sich unter dem Winkel φ schneiden. Für den vierten Theil dieses Tangenten-Parallelogramms hat man nun die Seiten a_1 und b_1 und daher $EODK = b_1 \cdot a_1 \sin \varphi = b_1 \cdot OL$. Die Höhe OL dieses Parallelogramms ist aber $= OT \cdot \sin T = \frac{a^2}{x_1} \cdot \sin T$ (§ 66). Ferner ist $\sin T = \frac{EQ^1}{b_1}$ und nach § 77 ist $EQ^1 = \frac{b}{a} x_1$. Es ergiebt sich also durch Substitution dieser Werthe $EODK = ab$, und daher das ganze Tangenten-Parallelogramm

$$GHIK = 4\, a_1 b_1 \sin \varphi = (2a) \cdot (2b)$$

Hieraus folgt auch, daß das Sehnen-Parallelogramm DED^1E^1 constant gleich $2ab$ und daß $\triangle\, ODE = \frac{1}{2} ab$, d. h. das Dreieck zwischen zwei conjugirten Halbmessern und der zugehörigen Sehne ist constant gleich dem rechtwinkligen Dreiecke, welches die beiden Halbaxen zu Katheten hat.

Zugleich ist auch für den Winkel φ zwischen zwei conjugirten Halbmessern a_1 und b_1 zu merken, daß $\sin \varphi = \frac{ab}{a_1 b_1}$

§. 80. Größe und Lage zweier gleich großer conjugirter Durchmesser zu finden.

Nach den beiden vorhergehenden Paragraphen ist $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$ und $a_1 b_1 \sin \varphi = ab$ Für $a_1 = b_1$ ergiebt sich hieraus:

$$1)\ a_1 = \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad \text{oder } (2a_1)^2 = \tfrac{1}{2} \left\{(2a)^2 + (2b)^2\right\}$$

$$\text{und } 2)\ \sin \varphi = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \quad \text{oder } \operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

Bezeichnet man nun die Winkel, unter welchen die x Axe von den beiden Durchmessern durchschnitten wird, mit α und β, so ist $\varphi = \beta - \alpha$, mithin $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\varphi}$.

Es ist aber nach § 74 $\operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}$, und vorstehend unter 2) ist

$\operatorname{tg}\varphi = \pm \frac{2ab}{a^2 - b^2}$. Daher hat man die quadratische Gleichung:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-b^2(a^2 - b^2) \mp 2ab \cdot a^2 \operatorname{tg}\alpha}{(a^2 - b^2) \cdot a^2 \operatorname{tg}\alpha \mp 2ab \cdot b^2}$, durch deren Auflösung man erhält

$$\operatorname{tg}\alpha = \mp \frac{b}{a}, \qquad \text{und alsdann } \operatorname{tg}\beta = \pm \frac{b}{a}$$

Da aber $\pm \frac{b}{a}$ die Tangente der Winkel ist, unter welchen die x Axe von den Verbindungssehnen zwischen den Scheiteln der beiden Ellipsen-Axen durchschnitten wird, so sind die gleich großen conjugirten Durchmesser der Ellipse parallel zu den Sehnen zwischen den Scheiteln der Axen; es giebt also auch für jede Ellipse (wenn dieselbe nicht gerade ein Kreis ist) nur ein Paar gleich großer conjugirter Durchmesser, und nach obiger Formel 1) ist das Quadrat über jedem derselben gleich dem arithmetischen Mittel zwischen den Quadraten über den beiden Axen der Ellipse.

§. 81. 1) Außer den beiden Axen der Ellipse giebt es kein Paar conjugirter Durchmesser, welche **senkrecht** zu einander wären, denn nach § 67,$_3$ kann für keine Tangente, welche zu einem Durchmesser (nicht Axe) parallel ist, die Normale durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen, d. h. selbst Durchmesser sein. Wenn also $\sin\varphi = \frac{ab}{a_1 b_1}$ (§ 79) seinen größten Werth 1 annehmen soll, so muß $a_1 b_1$ nicht nur dem Werthe nach gleich ab, sondern es müssen a_1 und b_1 mit a und b identisch, d. h. die halben Ellipsenaxen selbst sein. In jedem anderen Falle ist $\sin\varphi < 1$, d. h. $a_1 b_1 > ab$; und es liegen aus demselben oben angeführten Grunde § 67,$_3$ die beiden ungleichen, zu $\sin\varphi$ gehörigen Nebenwinkel, unter welchen sich zwei conjugirte Durchmesser durchschneiden, stets so, daß die **große** Axe der Ellipse durch den **kleineren** Nebenwinkel geht.

2) Da nach § 78 $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$, so ergiebt sich

$$\sin\varphi = \frac{ab}{a_1 b_1} = \frac{2ab}{a^2 + b^2 - a_1^2 - b_1^2 + 2a_1 b_1} = \frac{2ab}{a^2 + b^2 - (a_1 - b_1)^2}$$

Dieser Ausdruck wird um so kleiner, je kleiner die Differenz $(a_1 - b_1)$ wird; er erhält seinen kleinsten Werth, wenn $a_1 = b_1$ ist; d. h.: Von allen conjugirten Durchmessern der Ellipse schneiden sich die beiden gleich großen unter dem möglichst kleinsten Winkel, (resp. größten Nebenwinkel).

3) Aus vorstehendem Werthe für $\sin\varphi$ geht zugleich hervor, daß zwischen den beiden Axen der Unterschied $(2a - 2b)$ größer ist als zwischen irgend einem anderen Paare conjugirter Durchmesser; denn $(a_1 - b_1)^2 = (a^2 + b^2) - \frac{2ab}{\sin\varphi}$ ist ein Maximum, wenn $\frac{2ab}{\sin\varphi}$ möglichst klein, d. h. wenn $\sin\varphi = 1$ oder $\varphi = 90^0$ ist.

4) Ferner ist $a_1 + b_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + 2a_1 b_1} = \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\sin\varphi}}$, und dieser Ausdruck wird ein Maximum, wenn $\sin\varphi$ ein Minimum, d. h. wenn nach Obigem unter 2) $a_1 = b_1$ ist. Dagegen wird derselbe Ausdruck ein Minimum, wenn $\sin\varphi = 1$ oder $\varphi = 90^0$ ist. Von allen Paaren conjugirter Durchmesser hat das Paar **gleich großer** Durchmesser die **größte** Summe, während die Summe der beiden **Axen am kleinsten** ist.

§. 82. Die Gleichung der Ellipse in Bezug auf zwei conjugirte Durchmesser als Coordinaten-Axen herzuleiten. (Fig. 18.)

Wenn die verlängerten conjugirten Halbmesser OT und OU mit der großen Ellipsenaxe OA die Winkel α und β bilden, so hat man nach § 10 folgende Transformation vorzunehmen: $x = t\cdot\cos\alpha + u\cdot\cos\beta$ und $y = t\cdot\sin\alpha + u\cdot\sin\beta$. Die Substitution in die frühere Mittelpunktsgleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ giebt, wenn man nach u und t ordnet,

$$\left\{\begin{array}{l}(a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta)\, u^2 + (a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha)\, t^2 \\ \quad + 2\,(a^2 \sin\alpha \sin\beta + b^2 \cos\alpha \cos\beta)\, t\cdot u\end{array}\right\} = a^2b^2$$

Nun ist aber nach § 74 $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$ oder $a^2\sin\alpha\sin\beta = -b^2\cos\alpha\cos\beta$,

und es bleibt daher $(a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta)\, u^2 + (a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha)\, t^2 = a^2b^2$

Für $u = o$ wird $t = \pm a_1$, und daher 1) $a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha = \frac{a^2b^2}{a_1^2}$

Für $t = o$ ergiebt sich $u = \pm b_1$, und somit 2) $a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta = \frac{a^2b^2}{b_1^2}$.

Folglich $\frac{a^2b^2}{b_1^2}\cdot u^2 + \frac{a^2b^2}{a_1^2}\cdot t^2 = a^2b^2$ oder $a_1^2u^2 + b_1^2t^2 = a_1^2b_1^2$

$$\text{oder auch } \left(\frac{u}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{t}{a_1}\right)^2 = 1$$

welche Form mit der früheren Mittelpunktsgleichung in Bezug auf die große und kleine Axe der Ellipse als Coordinatensystem vollständig übereinstimmt. Es werden daher auch die daraus abgeleiteten Gleichungen für Tangente und Subtangente, Normale und Subnormale dieselbe Form in beiden Coordinatensystemen haben.

Aus den Gleichungen 1) und 2) ergeben sich auch die absoluten Längen zweier conjugirter Halbmesser, welche mit der x Axe die Winkel α und β bilden, nämlich

$$a_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}} \quad \text{und } b_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta}}$$

welche Werthe man auch in folgender Weise hätte finden können. Der Scheitel des einen Durchmessers ($2a_1$) hat die Coordinaten $a_1 \sin\alpha$ und $a_1 \cos\alpha$, und aus der Ellipsengleichung in Bezug auf die Axen a und b ergiebt sich daher

$$\frac{a_1^2 \sin^2\alpha}{b^2} + \frac{a_1^2 \cos^2\alpha}{a^2} = 1 \quad \text{und hieraus } a_1^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}$$

Aehnlich wäre dann der Werth von b_1^2 herzuleiten.

Wollte man den Halbmesser durch den zum conjugirten Halbmesser gehörigen Winkel ausdrücken, so würde man vermittelst der Gleichung $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$ (§ 74) und gewöhnlicher trigonometrischer Transformationen erhalten:

$$a_1^2 = \frac{a^4 \operatorname{tg}^2\beta + b^4}{a^2 \operatorname{tg}\beta + b^2} \quad \text{und } b_1^4 = \frac{a^4 \operatorname{tg}^2\alpha + b^4}{a^2 \operatorname{tg}\alpha + b^2}$$

§. 83. Die Polargleichung der Ellipse zu finden. (Fig. 19.)

1) Nimmt man den Brennpunkt F als Pol und den zunächst liegenden Scheitel A als Anfangspunkt der Winkeldrehung an, so ergeben sich für den variabeln Brennstrahl FP und den Drehungswinkel φ nach § 68,₂ die Werthe $r = a - \frac{e}{a} x_1$ und $x_1 = e + r \cdot \cos\varphi$. Ersetzt man noch das Verhältniß $\frac{e}{a}$, welches man im Gegensatze zur linearen Excentricität e die numerische Excentricität nennt, durch ε, mithin $e = a\varepsilon$, so wird $r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi}$. Da nun aber auch $b^2 = a^2 - e^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2)$ und ferner nach § 63 der halbe Parameter $p = \frac{b^2}{a}$, so erhält man auch $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi}$

2) Nimmt man dagegen den vom Pole entfernter liegenden Scheitel als Anfangspunkt der Drehung, also nach Fig. 6. F^1 als Pol und φ^1 als den variabeln Drehungswinkel, so ergiebt sich

$$r^1 = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos\varphi^1}$$

3) Wenn man O als Pol annimmt und die positive Richtung der x Axe als Polaraxe, so ist für den Leitstrahl $OP = \varrho$ und den Drehungswinkel $AOP = \omega$

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 + b^2$$

$$= \frac{e^2}{a^2} x^2 + b^2 = \frac{e^2}{a^2} \cdot \varrho^2 \cdot \cos^2\omega + b^2 = \varepsilon^2 \cdot \varrho^2 \cdot \cos^2\omega + b^2$$

Also $\varrho = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2\varphi}}$ oder auch $= \sqrt{\frac{ap}{1 - \varepsilon^2 \cdot \cos^2\omega}}$

§. 84. Den Flächeninhalt einer Ellipse zu bestimmen.

Beschreibt man über der großen Axe 2a als Durchmesser einen Kreis, so ist für jede Abscisse die Ellipsen-Ordinate $\frac{b}{a}$ mal so groß als die Ordinate des Kreises. (§ 61.) Denkt man sich nun statt der Ordinatenlinien ganz schmale, trapezartige Streifen, so kann man die Flächenräume als Summen solcher Streifen betrachten, was der Wahrheit um so näher kommt, je näher man die Ordinaten an einander gerückt denkt. Es müssen also auch die Grenzwerthe dieser Summen, das sind die Flächenräume der Ellipse und des Kreises über der großen Axe, sich wie $b : a$ verhalten, oder, wenn man den Flächeninhalt der Ellipse mit J bezeichnet, $J : a^2\pi = b : a$ oder $J = ab\pi$.

§. 85. Es möge hier auch noch, obgleich eigentlich erst in die Geometrie des Raumes hingehörig, das Volumen eines Rotations-Ellipsoids, welches durch Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer Axen entstanden ist, bestimmt werden.

Denkt man sich wieder, wie im vorigen Paragraphen über der Rotationsaxe 2a der Ellipse als Durchmesser einen Kreis gezeichnet, so müssen die zu einer und derselben Abscisse gehörigen Ordinaten der Ellipse und des Kreises bei der Rotation Kreisebenen beschreiben, die sich wie $b^2 : a^2$ verhalten. Aber analog der Betrachtungsweise im vorigen Paragraphen lassen sich auch die Volumina beider Rotationskörper als Summen aus unendlich vielen solchen unendlich dünnen Kreisscheiben betrachten, und es verhält sich daher das Volumen V des Rotations-Ellipsoids mit den Axen 2a 2b und 2b zu der Kugel mit dem Durchmesser 2a wie $b^2 : a^2$, also

$$V : \frac{4}{3}a^3\pi = b^2 : a^2 \qquad \text{oder } V = \frac{4}{3}ab^2\pi$$

Ebenso ergiebt sich das Volumen eines Rotations-Ellipsoids, das durch Rotation um die kleine Axe 2b der Ellipse entstanden ist und daher die drei Axen 2a, 2a und 2b hat, gleich $\frac{4}{3}a^2b\pi$.

§. 98. Wenn man einen geraden Kegel durch eine Ebene so durchschneidet, daß die Axe des Kegels mit der Schnittebene einen größeren Winkel bildet als mit der Seitenlinie des Kegels, so ist die Schnittcurve eine Ellipse. (Fig. 20.)

Legt man den zur gedachten Schnittebene APP' senkrechten Axenschnitt CMN des Kegels, ferner senkrecht zur Axe des Kegels irgend einen Kreisschnitt $KPK'P'$, zieht alsdann im Axenschnitte CMN die Geraden AG und $A'G'$ parallel zu dem Durchmesser KK' jenes Kreises und bezeichnet AQ mit x, PQ mit y und $A'A$ mit 2a, so ergiebt sich

$$AQ : QK = AA' : A'G' \qquad \text{oder } QK = \frac{A'G'}{2a} \cdot x$$

$$\text{ferner } A'Q : QK' = A'A : AG \qquad \text{oder } QK' = \frac{AG}{2a}\,(2a - x)$$

Im Kreise $KPK'P'$ ist aber $PQ^2 = y^2 = QK \cdot QK'$

$$\text{Folglich } y^2 = \frac{AG \cdot A'G'}{4a^2}\,(2ax - x^2) = \frac{AG \cdot A'G'}{4a} \cdot 2x - \frac{AG \cdot A'G'}{4a} \cdot \frac{x^2}{a}$$

und wenn man noch die constante Größe $\frac{AG \cdot A^1G^1}{4a} = p$ setzt, so hat man $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$, welches also (nach § 64) die Scheitelgleichung einer Ellipse mit der großen Axe $2a = A^1A$ und dem Parameter $2p = \frac{AG \cdot A^1G^1}{A^1A}$ ist.

Man kann auch den Parameter 2p durch CA^1 und durch die Winkel α und β ausdrücken, welche die Kegelaxe mit der Seitenlinie des Kegels und mit der Schnittebene A^1PP^1 bildet. Dann ergiebt sich aus $\triangle\ A^1AG$ die Proportion $AG : A^1A = \sin(\alpha + \beta) : \cos\alpha$, und aus $\triangle\ CA^1G$ erhält man $A^1G^1 = 2 \cdot CA^1 \cdot \sin\alpha$; folglich ist der Parameter

$$2p = \frac{AG \cdot A^1G^1}{A^1A} = 2 \cdot CA^1 \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

Aus $\triangle\ A^1AC$ ergiebt sich ferner A^1A oder $2a = \frac{CA^1 \cdot \sin 2\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$,

$$\text{mithin } \frac{p}{a} = \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha \cdot \sin 2\alpha} = \frac{-2 \cdot \sin(\alpha + \beta)\ \sin(\alpha - \beta)}{2 \cdot \cos^2\alpha}$$

$$= \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{2 \cdot \cos^2\alpha}$$

Es ist daher die Gleichung des Kegelschnittes, welcher die Seitenlinie des Kegels in der Entfernung CA^1 von der Spitze und die Kegelaxe unter dem Winkel β durchschneidet, während der Axenschnitt des Kegels den Winkel 2α an der Spitze hat:

$$y^2 = 2 \cdot CA^1 \cdot \operatorname{tg}\alpha\ \sin(\alpha + \beta) \cdot x - \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

Dr. J. Ellinger.

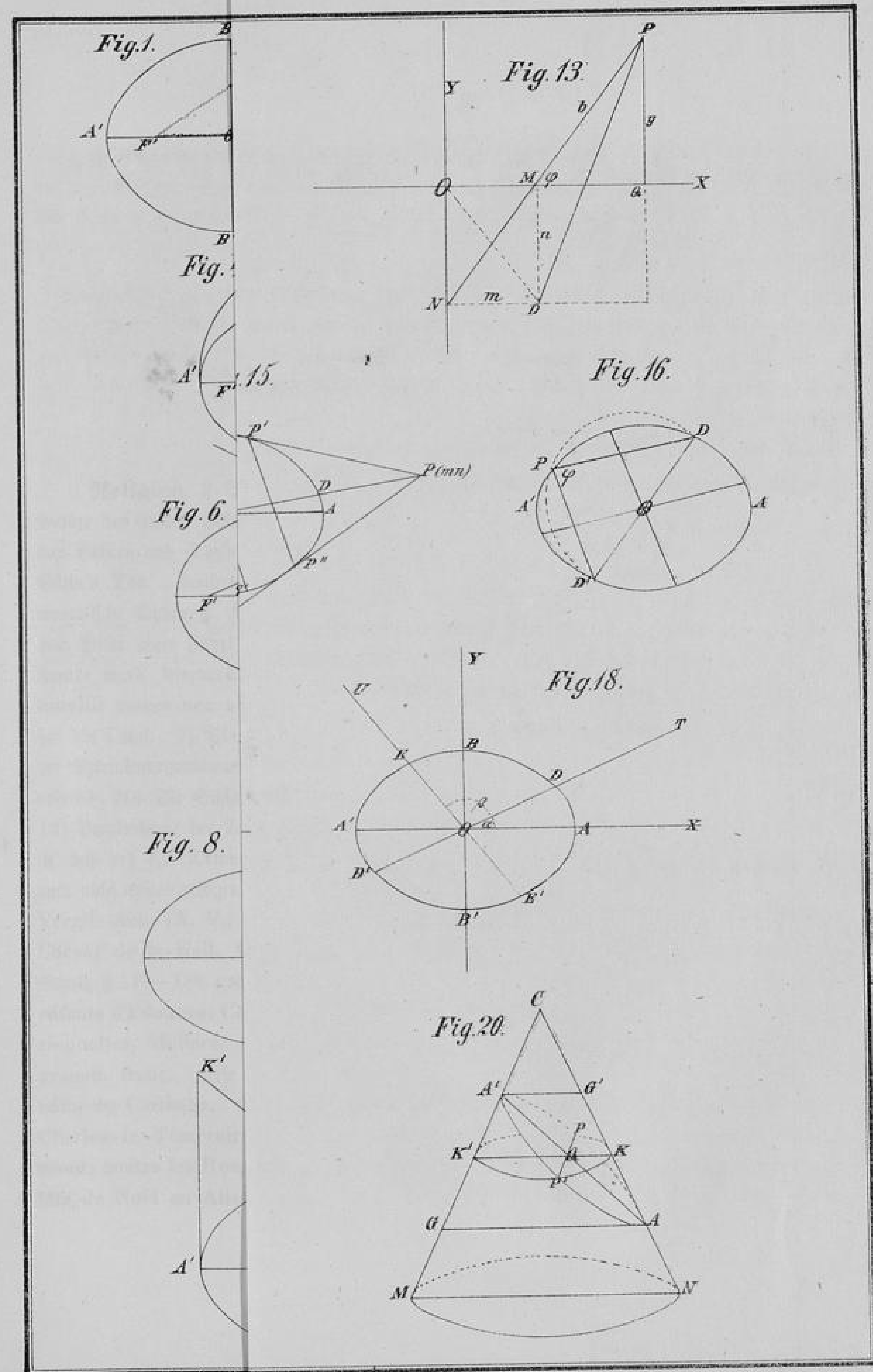
Fig. 1.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 13.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 18.
Fig. 20.

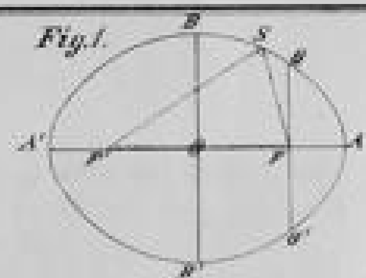
Fig. 1.

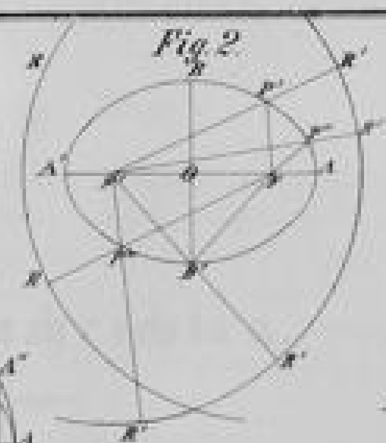
Fig. 2

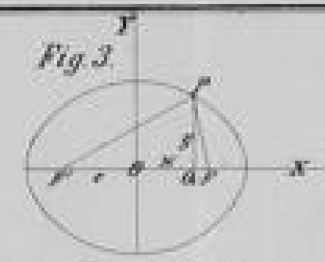
Fig. 3.

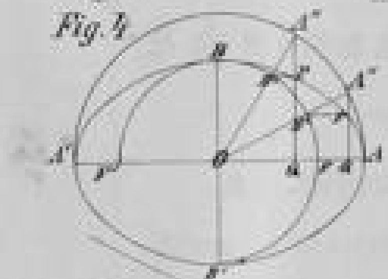
Fig. 4


Fig. 5.

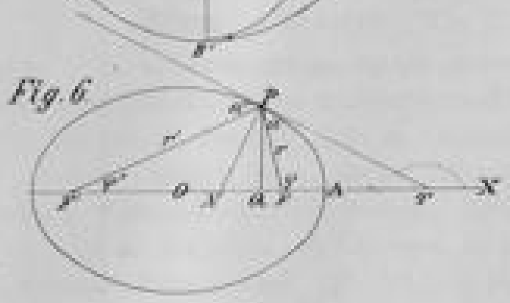
Fig. 6.

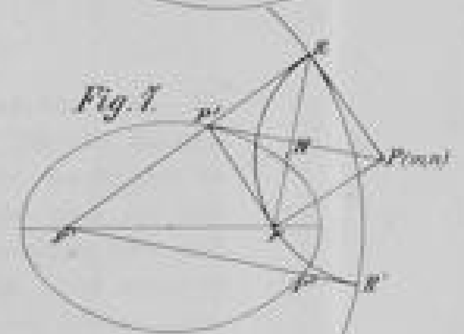
Fig. 7.

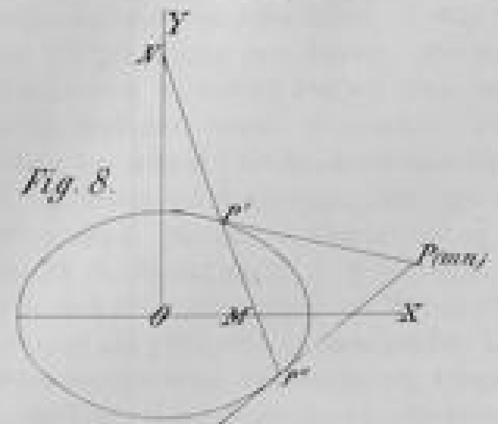
Fig. 8.

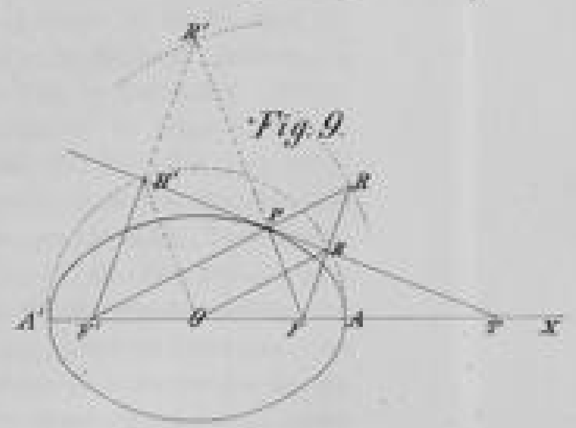
Fig. 9.

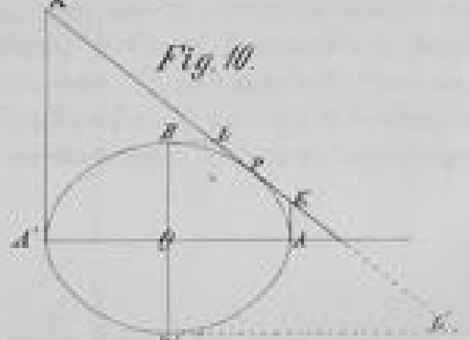
Fig. 10.

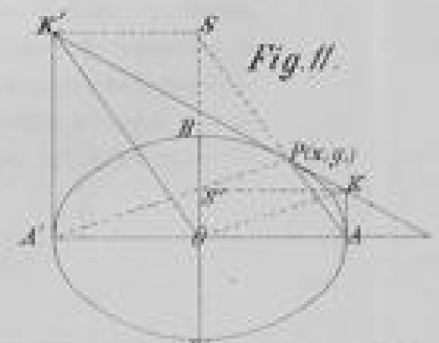
Fig. 11.

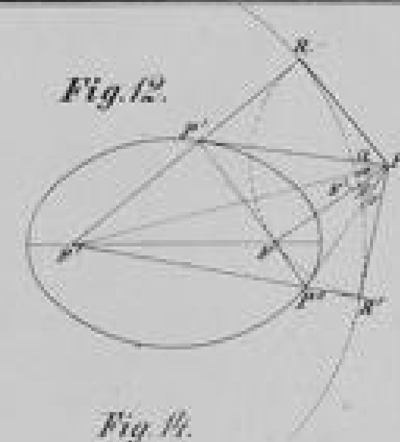
Fig. 12.

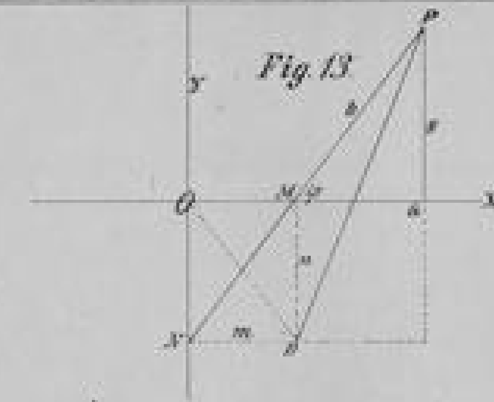
Fig. 13

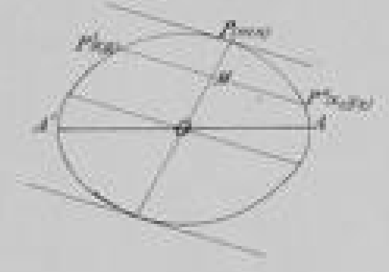
Fig. 14.


Fig. 15.


Fig. 16.

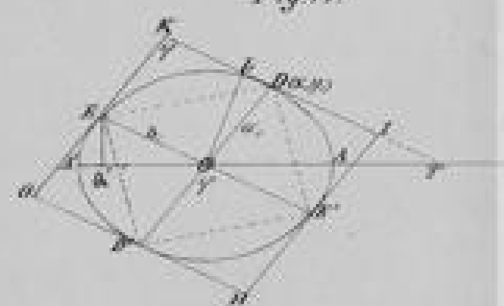
Fig. 17.

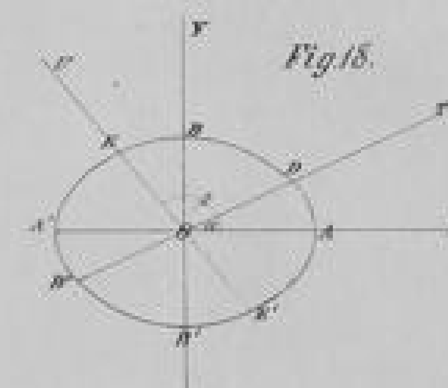
Fig. 18.


Fig. 19.

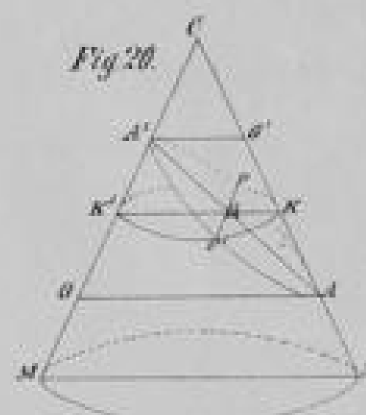
Fig. 20.