Quadratur
der parallelen Oberfläche der Elasticitätsoberfläche.

Einleitung.

Zwei Oberflächen sind und heißen parallel, wenn sämmtliche Normalen der einen auch Normalen der anderen sind.

Man erhält die Punkte der parallelen Oberfläche einer Oberfläche, wenn man von der letzteren aus auf allen ihren Normalen, sei es nach außen, sei es nach innen, um ein konstantes Stück weiter geht. Nenne ich also diese konstante Linie λ und nenne ich die geradlinigen, rechtwinkligen Koordinaten der gegebenen Oberfläche x, y, z und die Richtungsdeterminanten irgend einer Normale derselben $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, so sind

$$\xi = x + \lambda \cos \alpha$$
$$\eta = y + \lambda \cos \beta$$
$$\zeta = z + \lambda \cos \gamma,$$ worin λ positiv oder negativ sein kann, die Koordinaten der parallelen Oberfläche der gegebenen. Beweis:

Es ist
$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \lambda^2,$$
folglich
$$(\xi - x)(d\xi - dx) + (\eta - y)(d\eta - dy) + (\zeta - z)(d\zeta - dz) = o$$

Da aber dx, dy, dz den Richtungsdeterminanten des Flächenelementes der gegebenen Oberfläche, welches ich immer do nennen will, und $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ nach der Definition den Richtungsdeterminanten der Normale des Elementes do proportional sind, so ist, weil die Normale auf do senkrecht steht:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = o,$$ folglich ist auch
$$(\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta + (\zeta - z)\,dz = o$$

d. h.: Die Richtung, deren drei Determinanten $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ sind, welche mit $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ proportional sind, steht auf dem Flächenelemente $d\omega$ der zweiten Oberfläche, dessen

Richtungsdeterminanten mit $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ proportional sind, senkrecht, ist also die Normale dieses Elementes, was zu beweisen war; denn daraus folgt, daß die zweite Oberfläche der gegebenen parallel ist.

Ist daher
$f(x, y, z) = 0$ die Gleichung der gegebenen Oberfläche, so ist die Gleichung ihrer parallelen Oberfläche

$$f(x + \lambda \cos \alpha,\ y + \lambda \cos \beta,\ z + \lambda \cos \gamma) = 0,$$

oder, wenn wir für $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ die bekannten Ausdrücke einsetzen:

$$\cos \alpha = \pm \frac{f'(x)}{\sqrt{\left((f'(x))^2 + (f'(y))^2 + (f'(z))^2 \right)}}$$

$$\cos \beta = \pm \frac{f'(y)}{\sqrt{\left((f'(x))^2 + (f'(y))^2 + (f'(z))^2 \right)}}$$

$$\cos \gamma = \mp \frac{f'(z)}{\sqrt{\left((f'(x))^2 + (f'(y))^2 + (f'(z))^2 \right)}},$$

$$f \left\{ x \pm \lambda \frac{f'(x)}{\sqrt{\left((f'(x))^2 + (f'(y))^2 + (f'(z))^2 \right)}}, \ldots \right\} = 0$$

Ableitung einer Formel für das Flächenelement ($d\omega$) der parallelen Oberfläche.

Die Quelle für die höchst elegante Formel, die ich jetzt abzuleiten im Begriffe bin, vermag ich nicht anzugeben. Mitgetheilt wurde sie von Herrn Prof. Richelot in dem mathematischen Seminar zu Königsberg.

Denken wir uns auf der gegebenen Oberfläche einen Punkt p und die beiden durch p gehenden, auf einander senkrecht stehenden Prinzipalschnitte. Wenn wir dann von p aus, sowohl in dem einen, als auch in dem anderen Hauptschnitte auf der Oberfläche um ein unendlich kleines Stück bis q_1 resp. q_2 weiter gehen und in p, q_1, q_2 die Normalen konstruiren, welche wir resp. ρ, ρ_1, ρ_2 nennen wollen, so schneiden ρ_1 und ρ_2 zwar beide die Normale ρ, aber in verschiedenen Punkten. Schneidet nun ρ_1 von ρ das Stück ρ^1, ρ_2 von ρ das Stück ρ'' ab, so ist:
$\rho_1 = \rho^1$ der Krümmungsradius des einen Hauptschnittes im Punkte p,

$\rho_2 = \rho''$ derjenige des anderen Hauptschnittes im Punkte p, oder, wie man sich auszudrücken beliebt, es sind ρ_1 und ρ_2 die beiden Hauptkrümmungsradien der Oberfläche im Punkte p.

Wenn man nun ρ, ρ_1, ρ_2 um die Konstante λ verlängert, so sind, wie wir bewiesen haben,

$$\rho + \lambda,\ \rho_1 + \lambda,\ \rho_2 + \lambda$$

Normalen der parallelen Oberfläche, und daher ist es offenbar, daß

$\rho_1 + \lambda$ und $\rho_2 + \lambda$ die beiden Hauptkrümmungsradien der parallen Oberfläche in demjenigen Punkte P sind, welcher dem Punkte p der gegebenen Oberfläche entspricht.

Bedeutet nun $d\Omega$ das Oberflächenelement derjenigen Kugel, auf welche man die Krümmung der gegebenen Oberfläche bezieht, so ist bekanntlich die nach Gauß so benannte mensura curvaturae der gegebenen Oberfläche

$$\frac{d\Omega}{do} = \frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2},$$

mithin ist die mensura curvaturae der parallelen Oberfläche

$$\frac{d\Omega}{d\omega} = \frac{1}{(\rho_1 + \lambda)\,(\rho_2 + \lambda)}.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{do} &= \frac{(\rho_1 + \lambda)\,(\rho_2 + \lambda)}{\rho_1 \cdot \rho_2} \\ &= \left(1 + \frac{\lambda}{\rho_1}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\rho_2}\right) \\ &= 1 + \lambda\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + \lambda^2\,\frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2}\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}d\omega &= do + \lambda\, do\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + \lambda^2\,\frac{do}{\rho_1 \cdot \rho_2} \\ &= do + \lambda\, do\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + \lambda^2\, d\Omega.\end{aligned}$$

Es besteht also die Quadraturformel der parallelen Oberfläche einer gegebenen Fläche aus drei wesentlich verschiedenen Theilen, die resp. der 0^{ten}, 1^{sten} und 2^{ten} Potenz von λ proportional sind. Der erste Theil der Formel ist die Quadratur der gegebenen Fläche. Der zweite Theil läßt sich als das Potential derselben Oberfläche in Bezug auf einen um die Einheit entfernten Punkt ansehen, wenn die Oberfläche mit Masse belegt gedacht wird, deren Dichte $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ ist. Der dritte Theil endlich ist die curvatura integra, also, wenn die Quadratur über die ganze Oberfläche ausgedehnt wird, gleich $4\,\pi$.

Wie viel komplizirter die Quadratur der parallelen Oberfläche einer gegebenen Fläche, als die der letzteren selbst ist, geht aus der Formel für $d\omega$ wohl klar hervor.

Setze ich für do und für $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ die bekannten Formeln in geradlinigen, rechtwinkligen Koordinaten:

$$do = dx\, dy \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)}$$

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)^{3/2}},$$

so wird:

$$d\omega = dx\, dy\, \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)$$

$$+ \lambda\, dx\, dy\, \frac{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$+ \lambda^2\, d\Omega$$

Anwendung der abgeleiteten Formel auf die Elasticitätsoberfläche. Bestimmung des Oberflächenelementes und des größten und kleinsten Krümmungsradius derselben.

Die Gleichung der Elasticitätsoberfläche sei in der Form

$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = r^4$ gegeben, worin $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist,

so ist:

$$2a^2xdx + 2b^2ydy + 2c^2zdz - 2r^2(2xdx + 2ydy + 2zdz) = o,$$

folglich:

$$1)\quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}\left(\frac{2r^2 - a^2}{2r^2 - c^2}\right)$$

$$2)\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}\left(\frac{2r^2 - b^2}{2r^2 - c^2}\right)$$

$$3)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{z}\left(\frac{2r^2 - a^2}{2r^2 - c^2}\right) - \frac{x^2}{z^3}\left(\frac{2r^2 - a^2}{2r^2 - c^2}\right)^2 - \frac{4x^2}{z}\left(\frac{(a^2 - c^2)^2}{(2r^2 - c^2)^3}\right)$$

$$4)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{z}\left(\frac{2r^2 - b^2}{2r^2 - c^2}\right) - \frac{y^2}{z^3}\left(\frac{2r^2 - b^2}{2r^2 - c^2}\right)^2 - \frac{4y^2}{z}\left(\frac{(b^2 - c^2)^2}{(2r^2 - c^2)^3}\right)$$

$$5)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{xy}{z^3}\left(\frac{2r^2 - a^2}{2r^2 - c^2}\right)\left(\frac{2r^2 - b^2}{2r^2 - c^2}\right) - \frac{4xy}{z}\left(\frac{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}{(2r^2 - c^2)^3}\right)$$

Demnach ist:

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{x^2(2r^2 - a^2)^2 + y^2(2r^2 - b^2)^2}{z^2(2r^2 - c^2)^2}$$

$$= \frac{x^2(2r^2 - a^2)^2 + y^2(2r^2 - b^2)^2 + z^2(2r^2 - c^2)^2}{z^2(2r^2 - c^2)^2}$$

$$= \frac{4r^4(x^2 + y^2 + z^2) - 4r^2(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) + a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2}{z^2(2r^2 - c^2)^2}$$

$$= \frac{a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2}{z^2(2r^2 - c^2)^2}$$

Demnach ist die Formel für die Quadratur der Elasticitätsoberfläche selbst:

$$\iint do = \iint \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)}\, dx\, dy$$

$$(1) \qquad = \iint \frac{\sqrt{(a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2)}}{z(2r^2 - c^2)}\, dx\, dy$$

Dies Integral, als das erste Glied der gesuchten Quadratur, will ich nun kurz ausführen. Zwar ist der Werth desselben ein alt bekannter, doch ist die Ableitung desselben an dieser Stelle deshalb zweckmäßig, weil ich sämmtliche Formeln, auf die man jetzt geführt wird, auch bei meinen späteren Integrationen brauche, ich sie also jedenfalls irgend einmal hätte ableiten müssen.

Führe ich zunächst die gewöhnlichen Polarkoordinaten statt der bisher gebrauchten geradlinigen ein, setze also

$z = r \cos \eta$

$y = r \sin \eta \cos \vartheta$

$x = r \sin \eta \sin \vartheta$, so wird die Gleichung der Elasticitätsoberfläche:

$$r^2 = c^2\cos^2\eta + b^2\sin^2\eta\cos^2\vartheta + a^2\sin^2\eta\sin^2\vartheta$$

Ferner wird:

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = r\sin\vartheta\cos\eta + \frac{\sin\eta\sin\vartheta\sin\eta\cos\eta}{r}\left((b^2 - c^2)\cos^2\vartheta + (a^2 - c^2)\sin^2\vartheta\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} = r\cos\vartheta\sin\eta + \frac{\sin\eta\sin\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta}{r}(a^2 - b^2)\sin^2\eta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = r\cos\vartheta\cos\eta + \frac{\sin\eta\cos\vartheta\sin\eta\cos\eta}{r}\left((b^2 - c^2)\cos^2\vartheta + (a^2 - c^2)\sin^2\vartheta\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = -r\sin\vartheta\sin\eta \quad \frac{\sin\eta\cos\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta}{r}(a^2 - b^2)\sin^2\eta$$

Daher ist:

$$dx\ dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta}, & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta}, & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} d\eta\ d\vartheta$$

$$= (2r^2 - c^2) \sin\eta \cos\eta\ d\eta\ d\vartheta$$

und die Formel (1) nimmt die Gestalt an:

$$\iint \frac{r \sqrt{(c^4 \cos^2\eta + b^4 \sin^2\eta \cos^2\vartheta + a^4 \sin^2\eta \sin^2\vartheta)}}{r \cos\eta\, (2r^2 - c^2)} (2r^2 - c^2) \sin\eta \cos\eta\, d\eta\, d\vartheta =$$

$$\iint \sqrt{\left(c^4 \cos^2\eta + b^4 \sin^2\eta \cos^2\vartheta + a^4 \sin^2\eta \sin^2\vartheta\right)}\ \sin\eta\ d\eta\ d\vartheta,$$

und zwar ist, wenn die Quadratur über die ganze Oberfläche ausgedehnt werden soll,

nach η von $0 \ldots \pi$

nach ϑ von $0 \ldots 2\pi$ zu integriren, so daß die Quadratur der Elasticitätsoberfläche die Form annimmt:

$$\int_0^{\pi} \sin\eta\, d\eta \int_0^{2\pi} d\vartheta \sqrt{\left(c^4 \cos^2\eta + b^4 \sin^2\eta \cos^2\vartheta + a^4 \sin^2\eta \cos^2\eta\right)}$$

oder, da man sich die ganze Oberfläche in 8 Oktanten getheilt denken kann, und die Fläche jedes einzelnen Oktanten durch eine Integration nach η und ϑ von $0 \ldots \frac{\pi}{2}$ beherrscht wird, die Form:

$$8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\eta\, d\eta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \sqrt{\left(c^4 \cos^2\eta + b^4 \sin^2\eta \cos^2\vartheta + a^4 \sin^2\eta \cos^2\eta\right)}.$$

Um die zu integrirende Größe rational zu machen, führt Jacobi zwei neue Variable φ und ψ durch folgende Gleichungen ein:

$$\cos\eta = \frac{\frac{\cos\varphi}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi \cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\varphi \sin^2\psi}{a^4}\right)}}$$

$$\sin\eta \cos\vartheta = \frac{\frac{\sin\varphi \cos\psi}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi \cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\varphi \sin^2\psi}{a^4}\right)}}$$

$$\sin\eta \sin\vartheta = \frac{\frac{\sin\varphi \sin\psi}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi \cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\varphi \sin^2\psi}{a^4}\right)}}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \psi$$

$$\cos \eta = \frac{\frac{1}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{c^4} + \left(\frac{\cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\psi}{a^4}\right) \operatorname{tg}^2\varphi\right)}},$$

und hieraus geht hervor, daß, während

ϑ von $o \ldots . \frac{\pi}{2}$ geht, auch ψ von $o \ldots \frac{\pi}{2}$ geht,

und während

η von $o \ldots . \frac{\pi}{2}$ geht, auch φ von $o \ldots \frac{\pi}{2}$ geht.

Berücksichtigt man nun, daß

$$\partial\eta \, d\vartheta = \begin{vmatrix} \frac{\partial\eta}{\partial\varphi}, & \frac{\partial\eta}{\partial\psi} \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}, & \frac{\partial\vartheta}{\partial\psi} \end{vmatrix} d\varphi \, d\psi \text{ ist,}$$

so ergiebt sich die Formel:

$$\sin\eta \, d\eta \, d\vartheta = \frac{1}{a^2b^2c^2} \cdot \frac{\sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi \cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\varphi \sin^2\psi}{a^4}\right)^{3/2}},$$

so daß mein Integral in den neuen Variablen die Form annimmt:

$$\frac{8}{a^2b^2c^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi \cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\varphi \sin^2\psi}{a^4}\right)^{3/2}}.$$

In Bezug auf ψ ist die Integration algebraisch ausführbar.

Bezeichne ich nämlich der Kürze wegen

$$\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi \cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\varphi \sin^2\psi}{a^4} \text{ durch } \Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^4},$$

so ist:

$$\frac{8}{a^2b^2c^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{\left(\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^4}\right)^2} = - \frac{8}{a^2b^2c^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\partial}{\partial\zeta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \zeta}\right]_{\zeta = o},$$

welches Zeichen bedeuten soll, daß, nachdem man nach ζ, einer von φ und ψ unabhängigen, übrigens willkührlichen Größe differenzirt hat, $\zeta = o$ zu setzen ist.

Es ist also zunächst das Integral zu bestimmen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^4} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{a^4} + \zeta}$$

$$=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{N\cos^2\psi + M\sin^2\psi} \text{ worin } N = \frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{b^4} + \zeta,$$

$$M = \frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{a^4} + \zeta$$

ist.

Setze ich $\sqrt{\left(\frac{M}{N}\right)}$ tg $\psi = t$, so wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{N\cos^2\psi + M\sin^2\psi} = \frac{1}{\sqrt{(MN)}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(M \,.\, N)}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left\{\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{a^4} + \zeta\right\}\left\{\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{b^4} + \zeta\right\}}}$$

Daher ist

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(MN)}}\right)_{\zeta=0} = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2\,\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{a^4+b^4}}{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{a^4}\right)^{3/2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{b^4}\right)^{3/2}}.$$

Es bleibt jetzt noch die Bestimmung des Werthes des folgenden Integrals übrig:

$$\frac{2\pi}{a^2b^2c^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(2\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{a^4+b^4}\right)\sin\varphi\, d\varphi}{\left\{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{a^4}\right)\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{b^4}\right)\right\}^{3/2}}.$$

Dies Integral ist ein elliptisches.

In Bezug auf die Reihenfolge von a, b, c ihrer Größe nach setze ich hiermit fest, daß

$c > b > a$ oder $\frac{1}{c} \angle \frac{1}{b} \angle \frac{1}{a}$ sein soll.

Alsdann bringe ich das Integral auf die Form:

$$\frac{2\pi}{a^2b^2c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(2\,\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{a^4+b^4}\right)\sin\varphi\; d\varphi}{\left\{\left(\frac{1}{a^4} - \left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{c^4}\right)\cos^2\varphi\right)\left(\frac{1}{b^4} - \left(\frac{1}{b^4} - \frac{1}{c^4}\right)\cos^2\varphi\right)\right\}^{3/2}}$$

$$=$$

$$\frac{2\pi}{a^2b^2c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^6b^6\,\frac{\left(2\,\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{a^4+b^4}\right)\sin\varphi\; d\varphi}{\left(1 - \frac{\frac{1}{a^4} - \frac{1}{c^4}}{\frac{1}{a^4}}\cos^2\varphi\right)^{3/2}\left(1 - \frac{\frac{1}{b^4} - \frac{1}{c^4}}{\frac{1}{b^4}}\cos^2\varphi\right)^{3/2}}.$$

Setze ich nun

$$\frac{\frac{1}{a^4} - \frac{1}{c^4}}{\frac{1}{a^4}}\cos^2\varphi = \sin^2 \mathrm{am}\ u,$$

$$\frac{\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{b^4}} \cdot \frac{\frac{1}{b^4} - \frac{1}{c^4}}{\frac{1}{a^4} - \frac{1}{c^4}} = \frac{c^4 - b^4}{c^4 - a^4} = \varkappa^2,$$

woraus hervorgeht, daß $\varkappa^2$ ein positiver, echter Bruch ist, so erhalte ich:

$$1 - \frac{\frac{1}{a^4} - \frac{1}{c^4}}{\frac{1}{a^4}}\cos^2\varphi = \cos^2 \mathrm{am}\ u$$

$$1 - \frac{\frac{1}{b^4} - \frac{1}{c^4}}{\frac{1}{b^4}}\cos^2\varphi = \Delta^2 \mathrm{am}\ u$$

$$\sin\varphi\; d\varphi = -\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a^4} - \frac{1}{c^4}}\right)}\ \cos \mathrm{am}\ u\ \Delta \mathrm{am}\ u\ du.$$

Es ist ferner:

$$\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{a^4} = \frac{1}{a^4}\cos^2 \mathrm{am}\ u$$

$$\frac{\cos^2\varphi}{c^4} + \frac{\sin^2\varphi}{b^4} = \frac{1}{b^4}\,\Delta^2\mathrm{am}\,u,\ \text{und}$$

daher wird das Integral, wenn ich

$$\frac{\frac{1}{a^4} - \frac{1}{c^4}}{\frac{1}{a^4}} = \sin^2\mathrm{am}\,\omega \ \text{setze, gleich dem folgenden:}$$

$$\frac{2\pi\, a^4 b^4}{c^2} \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a^4} - \frac{1}{c^4}}\right)} \int_0^\omega \frac{\frac{1}{a^4}\cos^2\mathrm{am}\,u + \frac{1}{b^4}\Delta^2\mathrm{am}\,u}{\cos^2\mathrm{am}\,u + \Delta^2\mathrm{am}\,u}\,du$$

$$=$$

$$2\pi\,\frac{a^4 b^4}{c^2} \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a^4} - \frac{1}{c^4}}\right)} \left\{ \frac{1}{a^4}\int_0^\omega \frac{du}{\Delta^2\mathrm{am}\,u} + \frac{1}{b^4}\int_0^\omega \frac{du}{\cos^2\mathrm{am}\,u} \right\}.$$

Nun ist:

$$\varkappa^2\,\frac{\partial\,\frac{\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\mathrm{am}\,u}}{\partial u} = \Delta^2\mathrm{am}\,u - \frac{\varkappa_1^{\,2}}{\Delta^2\mathrm{am}\,u},$$

wenn $\varkappa_1^{\,2} = 1 - \varkappa^2$ ist, und daher

$$\int_0^\omega \frac{du}{\Delta^2\mathrm{am}\,u} = \frac{1}{\varkappa_1^{\,2}}\int_0^\omega \Delta^2\mathrm{am}\,u\,du - \frac{\varkappa^2}{\varkappa_1^{\,2}}\cdot\frac{\sin\mathrm{am}\,\omega\cos\mathrm{am}\,\omega}{\Delta\mathrm{am}\,\omega},$$

und es ist

$$\frac{\partial\,\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}}{\partial u} = \frac{\varkappa_1^{\,2}}{\cos^2\mathrm{am}\,u} + \Delta^2\mathrm{am}\,u - \varkappa_1^{\,2},$$

und daher:

$$\int_0^\omega \frac{du}{\cos^2\mathrm{am}\,u} = -\frac{1}{\varkappa_1^{\,2}}\int_0^\omega \Delta^2\mathrm{am}\,u\,du + \int_0^\omega du + \frac{1}{\varkappa_1^{\,2}}\,\frac{\sin\mathrm{am}\,\omega\,\Delta\mathrm{am}\,\omega}{\cos\mathrm{am}\,\omega}.$$

Führt man nun die Jacobischen Transzendenten E (u) und F (u) ein, setzt also

$$\int_0^\omega \Delta^2\mathrm{am}\,u\,du = E\,(\omega)$$

$$\int_0^\omega du = F\,(\omega),$$ so ist der gesuchte Werth unseres Integrals:

$$\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{c^4}}\right)}\left\{-\frac{b^4}{c^2}\cdot\frac{\varkappa^2}{\varkappa_1^2}\cdot\frac{\sin am\,\omega\cos am\,\omega}{\Delta am\,\omega}+\frac{a^4}{c^2}\cdot\frac{1}{\varkappa_1^2}\cdot\frac{\sin am\,\omega\,\Delta am\,\omega}{\cos am\,\omega}+\frac{a^4}{c^2}\cdot F(\omega)-\frac{a^4-b^4}{c^2}\cdot\frac{1}{\varkappa_1^2}\cdot E(\omega)\right\}.$$

Nun ist aber $\varkappa^2=\dfrac{c^4-b^4}{c^4-a^4}$,

$$\sin^2 am\,\omega=\frac{c^4-a^4}{c^4},$$

$$\cos^2 am\,\omega=\frac{a^4}{c^4},$$

$\Delta^2 am\,\omega=\dfrac{b^4}{c^4}$, und daher nimmt das letztgefundene Resultat die Form an:

$$\frac{2\pi c^2}{\sin am\,\omega}\left\{-\frac{\varkappa^2}{\varkappa_1^2}\sin am\,\omega\cos am\,\omega\,\Delta am\,\omega+\frac{1}{\varkappa_1^2}\sin am\,\omega\cos am\,\omega\,\Delta am\,\omega+\cos^2 am\,\omega\,F(\omega)+\varkappa_1^2\sin^2 am\,\omega\,\frac{E(\omega)}{\varkappa_1^2}\right\}$$

$$=$$

$$\frac{2\pi c^2}{\sin am\,\omega}\left(\sin am\,\omega\cos am\,\omega\,\Delta am\,\omega+\cos^2 am\,\omega\,F(\omega)+\sin^2 am\,\omega\,E(\omega)\right)$$

$$=$$

$$2\pi\left\{\frac{\cos^2 am\,\omega\,F(\omega)+\sin^2 am\,\omega\,E(\omega)}{\sin am\,\omega}\,c^2+\frac{a^2b^2}{c^2}\right\}.$$

Das also ist der Werth der Quadratur der Elastizitätsoberfläche und zugleich das erste Glied der Quadratur ihrer parallelen Oberfläche. Die Form des gefundenen Resultates ist die von Jacobi an der angeführten Stelle im Crelleschen Journale mitgetheilte.

Ermittelung des Werthes des zweiten Gliedes der Quadratur der parallelen Oberfläche.

Mit Rücksicht auf die für die Elastizitätsoberfläche im Anfange des vorigen Abschnittes abgeleiteten Formeln wird der zu bildende Ausdruck:

$$\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$=$$

$$-\left[1+\frac{x^2}{z^2}\left(\frac{2r^2-a^2}{2r^2-c^2}\right)^2\right]\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{2r^2-b^2}{2r^2-c^2}+\frac{y^2}{z^3}\left(\frac{2r^2-b^2}{2r^2-c^2}\right)^2+\frac{4y^2}{z}\,\frac{(b^2-c^2)^2}{(2r^2-c^2)^3}\right]$$

$$-\left[1+\frac{y^2}{z^2}\left(\frac{2r^2-b^2}{2r^2-c^2}\right)^2\right]\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{2r^2-a^2}{2r^2-c^2}+\frac{x^2}{z^3}\left(\frac{2r^2-a^2}{2r^2-c^2}\right)^2+\frac{4x^2}{z}\,\frac{(a^2-c^2)^2}{(2r^2-c^2)^3}\right]$$

$$+ \frac{2xy}{z^2} \frac{(2r^2 - a^2)(2r^2 - b^2)}{(2r^2 - c^2)^2} \left[\frac{xy}{z^2} \frac{(2r^2 - a^2)(2r^2 - b^2)}{(2r^2 - c^2)^2} + \frac{4xy}{z} \frac{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}{(2r^2 - c^2)^3} \right]$$

$$=$$

$$- \frac{1}{z} \frac{(2r^2 - a^2) + (2r^2 - b^2)}{2r^2 - c^2} - \frac{y^2(2r^2 - b^2)^2 + x^2(2r^2 - a^2)^2}{z^3(2r^2 - c^2)^2}$$

$$- \frac{[x^2(2r^2 - a^2) + y^2(2r^2 - b^2)](2r^2 - a^2)(2r^2 - b^2)}{z^3(2r^2 - c^2)^3} - 4 \frac{x^2(a^2 - c^2)^2 + y^2(b^2 - c^2)^2}{z(2r^2 - c^2)^3}$$

$$- 4 \frac{x^2y^2}{z^3(2r^2 - c^2)^5} \Big((a^2 - c^2)^2 (2r^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 (2r^2 - a^2)^2 \Big)$$

$$+ 8 \frac{x^2y^2}{z^3(2r^2 - c^2)^5} (a^2 - c^2)(b^2 - c^2)(2r^2 - a^2)(2r^2 - b^2).$$

In diesem Ausdrucke reduziren sich zunächst die beiden letzten Glieder folgendermaßen:

Ziehe ich den gemeinsamen Faktor $- 4 \frac{x^2y^2}{z^3(2r^2 - c^2)^5}$ heraus, so werden sie:

$$- 4 \frac{x^2y^2}{z^3(2r^2 - c^2)^5} \Big\{ (a^2 - c^2)^2(2r^2 - b^2)^2 - 2(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)(2r^2 - b^2)(2r^2 - a^2) + (b^2 - c^2)^2(2r^2 - a^2)^2 \Big\}$$

$$= - 4 \frac{x^2y^2}{z^3(2r^2 - c^2)^5} \Big((a^2 - c^2)(2r^2 - b^2) - (b^2 - c^2)(2r^2 - a^2) \Big)^2$$

$$= - 4 \frac{x^2y^2 (a^2 - b^2)^2}{z^2(2r^2 - c^2)^3}.$$

Dieses Glied fassen wir mit dem drittletzten des ganzen Ausdrucks zusammen und erhalten dadurch:

$$- 4 \frac{x^2y^2(a^2 - b^2)^2 + x^2z^2(a^2 - c^2)^2 + y^2z^2(b^2 - c^2)^2}{z^3(2r^2 - c^2)^3},$$

also im Ganzen:

$$(2) \quad \begin{aligned} & - \frac{1}{z} \cdot \frac{(2r^2 - a^2) + (2r^2 - b^2)}{2r^2 - c^2} - \frac{y^2(2r^2 - b^2)^2 + x^2(2r^2 - a^2)^2}{z^3(2r^2 - c^2)^2} \\ & - \frac{[x^2(2r^2 - a^2) + y^2(2r^2 - b^2)](2r^2 - a^2)(2r^2 - b^2)}{z^3(2r^2 - c^2)^3} \\ & - 4 \frac{x^2y^2(a^2 - b^2)^2 + x^2z^2(a^2 - c^2)^2 + y^2z^2(b^2 - c^2)^2}{z^3(2r^2 - c^2)^3} \end{aligned}$$

Aus der Gleichung der Elastizitätsoberfläche $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = r^4$ folgen nun aber sofort zwei neue Gleichungen, welche zur ferneren Reduktion ungemein brauchbar sind. Diese Gleichungen lauten:

$$x^2(2r^2 - a^2) + y^2(2r^2 - b^2) + z^2(2r^2 - c^2) = r^4$$

$$x^2(2r^2 - a^2)^2 + y^2(2r^2 - b^2)^2 + z^2(2r^2 - c^2)^2 = a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2 = r_1{}^4,$$

so daß also $r_1{}^4$ den Ausdruck $a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2$ bedeutet.

Nun wird:

$$-4\,\frac{x^2y^2(a^2-b^2)^2+x^2z^2(a^2-c^2)^2+y^2z^2(b^2-c^2)^2}{z^3(2r^2-c^2)^3}$$

$$=-\frac{2}{z^3(2r^2-c^2)^3}\left\{\begin{array}{l} \ x^2[x^2(a^2-a^2)^2+y^2(a^2-b^2)^2+z^2(a^2-c^2)^2] \\ +\ y^2[x^2(b^2-a^2)^2+y^2(b^2-b^2)^2+z^2(b^2-c^2)^2] \\ +\ z^2[x^2(c^2-a^2)^2+y^2(c^2-b^2)^2+z^2(c^2-c^2)^2] \end{array}\right\}$$

$$=-\frac{2}{z^3(2r^2-c^2)^3}\left\{\begin{array}{l} \ x^2(a^4r^2-2a^2r^4+r_1^4) \\ +\ y^2(b^4r^2-2b^2r^4+r_1^4) \\ +\ z^2(c^4r^2-2c^2r^4+r_1^4) \end{array}\right\}$$

$$=-\frac{2\,.\,2r^2(r_1^4-r^6)}{z^3(2r^2-c^2)^3}.$$

Es ist ferner:

$$x^2(2r^2-a^2)+y^2(2r^2-b^2)=r^4-z^2(2r^2-c^2)$$

$$x^2(2r^2-a^2)^2+y^2(2r^2-b^2)^2=r_1^4-z^2(2r^2-c^2)^2,$$

und mit Rücksicht hierauf wird nun endlich der Ausdruck (2), wenn ich allen Gliedern den gemeinsamen Nenner $z^3(2r^2-c^2)^3$ gebe, gleich:

$$\frac{1}{z^3(2r^2-c^2)^3}\left\{\begin{array}{l} -\ 2\,.\,2r^2(r_1^4-r^6)-z^2(2r^2-c^2)\Big((2r^2-a^2)+(2r^2-b^2)\Big) \\ -\ \Big(r_1^4-z^2(2r^2-c^2)^2\Big)(2r^2-c^2) \\ -\ \Big(r^4-z^2(2r^2-c^2)\Big)(2r^2-a^2)(2r^2-b^2) \end{array}\right\}$$

$$(3)\quad=\frac{-r_1^4(6r^2-c^2)+2r^6(a^2+b^2)-a^2b^2r^4+z^2(2r^2-c^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)}{z^3(2r^2-c^2)^3}$$

Durch eine nochmalige Reduktion des letzten Gliedes läßt sich dieser Ausdruck nun endlich auf eine oder vielmehr auf zwei sehr einfache Formen bringen. Addirt man nämlich zu dem letzten Gliede die beiden identisch verschwindenden Glieder

$$y^2(2r^2-b^2)(b^2-b^2)(a^2-b^4)\ \text{und}\ x^2(2r^2-a^2)(a^2-a^2)(b^2-a^2),$$

so wird es:

$$\begin{array}{l} \ z^2(2r^2-c^2)\Big(a^2b^2-(a^2+b^2)c^2+c^4\Big) \\ +\ y^2(2r^2-b^2)\Big(a^2b^2-(a^2+b^2)b^2+b^4\Big) \\ +\ x^2(2r^2-a^2)\Big(a^2b^2-(a^2+b^2)a^2+a^4\Big) \end{array}$$

$$=$$

$$a^2b^2r^4-2r^6(a^2+b^2)+2r^2r_1^4+(a^2+b^2)\,r_1^4-(c^6z^2+b^6y^2+a^6x^2).$$

Setze ich diesen Werth in die Formel (3) ein, so wird sie:

$$(4_a) \qquad \frac{-r_1^4(4r^2 - a^2 - b^2 - c^2) - \Sigma c^6 z^2}{z^3(2r^2 - c^2)^3},$$

ein Resultat, das gegenüber der komplicirten Anfangsformel durch seine Einfachheit überrascht.

Daß $\Sigma c^6 z^2$ ein Symbol für $c^6 z^2 + b^6 y^2 + a^6 x^2$ ist, brauche ich wohl kaum noch zu bemerken.

Die zweite einfache Endformel für (3) entspringt aus einer etwas abgeänderten Reduktion des letzten Gliedes in (3):

Dasselbe ist wieder, ähnlich wie vorhin, gleich:

$$z^2(2r^2 - c^2)(b^2 - c^2)(a^2 - c^2) + y^2(2r^2 - c^2)(b^2 - b^2)(a^2 - b^2)$$
$$+ x^2(2r^2 - c^2)(a^2 - a^2)(b^2 - a^2)$$
$$=$$
$$z^2(2r^2 - c^2)(a^2b^2 - (a^2 + b^2)c^2 + c^4)$$
$$+ y^2(2r^2 - c^2)(a^2b^2 - (a^2 + b^2)b^2 + b^4)$$
$$+ x^2(2r^2 - c^2)(a^2b^2 - (a^2 + b^2)a^2 + a^4)$$
$$=$$
$$2r^4a^2b^2 - a^2b^2c^2r^2 - 2r^6(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)c^2r^4 + 2r^2r_1^4 - c^2r_1^4.$$

Führt man diesen Ausdruck in (3) ein, so erhält man:

$$\frac{-4r^2 \cdot r_1^4 + (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)r^4 - a^2b^2c^2r^2}{z^3(2r^2 - c^2)^3}$$
$$=$$
$$(4_b) \qquad \frac{r^2(r^2 \Sigma a^2b^2 - 4r_1^4 - a^2b^2c^2)}{z^3(2r^2 - c^2)^3}$$

Σa^2b^2 ist ein Symbol für $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$.

Zu beweisen, daß die beiden Resultate (4_a) und (4_b) identisch sind, ist nicht schwer.

Man hat zu dem Ende nur zu zeigen, daß

$$(a^2 + b^2 + c^2)r_1^4 - \Sigma c^6 z^2 = \Sigma a^2b^2 \cdot r^4 - a^2b^2c^2r^2 \text{ ist.}$$

Da $r_1^4 = \Sigma c^4 z^2$, und $r^4 = \Sigma c^2 z^2$ ist, so ist:

$$(a^2 + b^2 + c^2)r_1^4 - \Sigma c^6 z^2 = a^2(b^4y^2 - c^4z^2) - b^2(a^4x^2 + c^4z^2) + c^2(a^4x^2 + b^4y^2),$$

und es ist:

$$\Sigma a^2b^2 \cdot r^4 - a^2b^2c^2r^2 = a^2(b^4y^2 + c^4z^2) + b^2(a^4x^2 - c^4z^2) + c^2(a^4x^2 + b^4y^2)$$
$$+ a^2b^2c^2r^2 - a^2b^2c^2r^2,$$

mithin ist in der That identisch:

$$(a^2 + b^2 + c^2)r_1^4 - \Sigma c^6 z^2 = \Sigma a^2b^2 \cdot r^4 - a^2b^2c^2r^2.$$

Wir haben also gefunden:

$$\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

$$=$$

$$\frac{r_1^{\,4}(a^2+b^2+c^2-4r^2)-\Sigma\, c^6z^2}{z^3(2r^2-c^2)^3}$$

$$=$$

$$\frac{r^2\,(r^2\,\Sigma a^2b^2-4r_1^{\,4}-a^2b^2c^2)}{z^3\,(2r^2-c^2)^3}$$

Da nun

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{r_1^4}{z^2(2r^2-c^2)^2}$$ ist, so ist:

$$\frac{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$=$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2-4r^2-\frac{1}{r_1^{\,4}}\,\Sigma c^6z^2}{z\,(2r^2-c^2)}=\frac{-4r^2+\left(\frac{r}{r_1}\right)^4\Sigma\, a^2b^2-\frac{r^2}{r_1^4}\,a^2b^2c^2}{z\,(2r^2-c^2)}$$

Daher ist das zweite Glied der Quadratur der parallelen Oberfläche der Elastizitätsoberfläche, abgesehen von dem Faktor λ, gleich dem Integral:

$$\iint\frac{a^2+b^2+c^2-4r^2-\frac{1}{r_1^{\,4}}\,\Sigma\, c^6z^2}{z\,(2r^2-c^2)}\,dx\;dy$$

$$=$$

$$\iint\frac{-4r^2+\left(\frac{r}{r_1}\right)^4\Sigma\, a^2b^2-\frac{r^2}{r_1^{\,4}}\,a^2b^2c^2}{z\,(2r^2-c^2)}\,dx\;dy,$$

so daß uns zur vollständigen Lösung unserer Aufgabe nichts übrig bleibt, als die Bestimmung des einen oder des anderen dieser beiden Integrale, von denen wir bewiesen haben, daß sie identisch sind.

Da in dem ersten der beiden Integrale drei wesentlich verschiedene Größen: $r,^2 r_1^{\,4}, \Sigma c^6 z^2$, in dem zweiten aber nur die beiden Größen r^2 und $r_1^{\,4}$ vorkommen, so wird man schon a priori dazu veranlaßt werden, die ferneren Operationen an das zweite Integral anzuknüpfen, was sich auch in dem weiteren Verlaufe der Untersuchungen von selbst rechtfertigt.

Die letzten Integrationen.

Setzt man wieder, wie früher:

$$z = r \cos\eta$$
$$y = r \sin\eta \cos\vartheta$$
$$x = r \sin\eta \sin\vartheta,$$

woraus

$$dx\, dy = (2r^2 - c^2) \sin\eta \cos\eta \, d\eta \, d\vartheta$$

folgt, so wird, da

$$\begin{aligned} r^2 &= c^2\cos^2\eta + b^2\sin^2\eta \cos^2\vartheta + a^2\sin^2\eta \sin^2\vartheta \\ &= \Sigma c^2\cos^2\eta \quad , \\ r_1{}^4 &= c^4z^2 + b^4y^2 + a^4x^2 \\ &= r^2(c^4\cos^2\eta + b^4\sin^2\eta \cos^2\vartheta + a^4\sin\eta \sin^2\vartheta) \\ &= r^2\, \Sigma c^4\cos^2\eta \end{aligned}$$

ist, das zu bestimmende Integral gleich:

$$\int\!\!\int \left\{ -4 - \frac{a^2b^2c^2}{(\Sigma c^2\cos^2\eta)(\Sigma c^4\cos^2\eta)} + \frac{\Sigma a^2b^2}{\Sigma c^4\cos^2\eta} \right\} \sqrt{(\Sigma c^2\cos^2\eta)} \sin\eta \, d\eta \, d\vartheta.$$

Die Grenzen sind, wenn die ganze Oberfläche beherrscht werden soll,

für η : o und π

für ϑ : o und 2π, wofür ich wieder die Grenzen o und $\frac{\pi}{2}$ einführen kann, wenn ich dem Integral den Faktor 8 gebe.

Um die zu integrirende Größe rational zu machen, setze man:

$$\cos\eta = \frac{\frac{\cos\varphi}{c}}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^2} + \frac{\sin^2\varphi \cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\varphi \sin^2\psi}{a^2}\right)}}$$

$$= \frac{\frac{\cos\varphi}{c}}{\sqrt{\left(\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)}},$$

$$\sin\eta \cos\vartheta = \frac{\frac{\sin\varphi \cos\psi}{b}}{\sqrt{\left(\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)}}$$

$$\sin\eta \sin\vartheta = \frac{\frac{\sin\varphi \sin\psi}{a}}{\sqrt{\left(\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{a^2}\right)}},$$ so folgt daraus, indem wir die früher abgeleiteten Formeln zu Rathe ziehen,

$$\sin\eta\, d\eta\, d\vartheta = \frac{1}{abc}\,\frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)^{3/2}}.$$

Die Grenzen in Bezug auf φ und ψ sind dieselben, wie diejenigen nach η und ϑ, nämlich für beide Variable o und $\frac{\pi}{2}$, und daher ist am letzten Ende das Integral zu bestimmen:

$$\frac{8}{abc}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{-4-\frac{a^2b^2c^2\left(\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)^2}{\Sigma c^2\cos^2\varphi}+\frac{\Sigma a^2b^2\;\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^2}}{\Sigma c^2\cos^2\varphi}\right\}\cdot\frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)^2},$$

welches in folgende drei Integrale zerfällt:

$$\mathrm{I} - 8\,abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\Sigma\,(c^2\cos^2\varphi)},$$

$$\mathrm{II} - \frac{32}{abc}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)^2}$$

$$\mathrm{III}\ \frac{8\,\Sigma a^2b^2}{abc}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{(\Sigma c^2\cos^2\varphi)\left(\Sigma\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)}.$$

Das erste dieser drei Integrale ist uns seiner Form nach bekannt. Die algebraische Integration nach ψ liefert, wie wir wissen:

$$-4\pi\,abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\{(c^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)\,(c^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi)\}}}$$

$$=$$

$$-4\pi\,abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\{(b^2-(b^2-c^2)\cos^2\varphi)\,(a^2-(a^2-c^2)\cos^2\varphi)\}}}$$

Erinnere ich mich nun daran, daß $c > b > a$ ist, so setze ich

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}\cos^2\varphi = \sin\mathrm{am}\,(u,\mu),\ \text{wenn}\ \mu = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}\ \text{ist}.$$

Definire ich ferner υ durch die Gleichung $\frac{a^2-c^2}{a^2} = \sin^2\mathrm{am}\,\upsilon$, so wird mein Integral gleich:

$$-4\pi c\int_0^{\upsilon}\sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2-c^2}\right)}\,\frac{\cos\mathrm{am}\,u\ \Delta\mathrm{am}\,u\ du}{\cos\mathrm{am}\,u\ \Delta\mathrm{am}\,u}$$

$$= -\,4\pi c \sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2 - c^2}\right)}\; F(\nu, \mu) = -\,4\pi c\, \frac{F(\nu, \mu)}{\sin\mathrm{am}(\nu, \mu)}.$$

Das zweite Integral ist:

$$-\,\frac{32}{abc}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\frac{\cos^2\varphi}{c^2} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{a^2}\right)^2},$$

ein Integral, das wir auch schon kennen. Seinen Werth erhalten wir nämlich aus der Quadratur der Elastizitätsoberfläche selbst, wenn wir in der Formel für jene statt des Faktors 2 den Faktor $-\,8$ und statt c^2, b^2, a^2 resp. c, b, a setzen. Dann erhalten wir:

$$-\,\frac{8\pi c}{\sin\mathrm{am}(u, \nu)}\left\{\sin\mathrm{am}(u, \nu)\cos\mathrm{am}\, u\, \Delta\mathrm{am}\, u + \cos^2\mathrm{am}\, u\, F(u) + \sin^2\mathrm{am}\, u\, E(u)\right\}$$

$$=$$

$$-\,8\pi\left\{\frac{\cos^2\mathrm{am}\, u\, F(u) + \sin^2\mathrm{am}\, u\, E(u)}{\sin\mathrm{am}\, u}\, c + \frac{ab}{c}\right\},$$

und es ist u definirt durch die Gleichung $\sin^2\mathrm{am}\, u = \frac{c^2 - a^2}{c^2}$, während der Modul

$$\nu^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2} \text{ ist.}$$

Offenbar aber ist es jetzt, wie sehr es für unseren eigentlichen Zweck von Nutzen gewesen ist, die Quadratur der Elastizitätsoberfläche selbst detaillirt ausgeführt zu haben.

Das dritte noch zu ermittelnde Integral ist:

$$\frac{8\,\Sigma a^2b^2}{abc}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\Sigma\, c^2\cos^2\varphi\right)\left(\Sigma\, \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)}.$$

Es ist leicht einzusehen, daß

$$\left(\Sigma\, c^2\cos^2\varphi\right)\left(\Sigma\, \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right) = 1 \text{ ist.}$$

Beweis:

Die Gleichung der Elastizitätsoberfläche ist in den Polarkoordinaten η, ϑ gleich:

$$r^2 = \Sigma\, \frac{1}{c^2\cos^2\eta},$$

mithin hat sie in den Variablen φ und ψ die Form:

$$r^2 = \Sigma\, \frac{\cos^2\varphi}{c^2}.$$

Nun ist aber $\Sigma\, c^2\cos^2\varphi = \rho^2$ die Gleichung desjenigen Ellipsoids, dessen Radien Vektoren, die reziproken Werthe der Radien Vektoren der Elastizitätsoberfläche sind, folglich ist:

$$\left(\Sigma\, c^2\cos^2\varphi\right)\left(\Sigma\, \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right) = \rho^2 \,.\, r^2 = \frac{1}{r^2}\, r^2 = 1.$$

Zweiter Beweis mittelst der Transformation der Koordinaten:

Ich setze: $$\sqrt{\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)} \cos\varphi = \frac{\cos\eta'}{c}$$

$$\sqrt{\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)} \sin\varphi \cos\psi = \frac{\sin\eta' \cos\vartheta'}{b}$$

$$\sqrt{\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)} \sin\varphi \sin\psi = \frac{\sin\eta' \sin\vartheta'}{a},$$

eine Substitution, die ihre volle Berechtigung hat, weil sie φ und ψ durch η' und ϑ' und umgekehrt η' und ϑ' eindeutig durch φ und ψ ausdrückt, indem ich festsetze, daß die Quadratwurzel stets das Zeichen $+$ haben soll.

Es folgt sofort:

$$\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2} = \Sigma \frac{\cos^2\eta'}{c^2}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \vartheta'$$

$$\cos\varphi = \frac{\dfrac{\cos\eta'}{c}}{\sqrt{\left(\Sigma \dfrac{\cos^2\eta'}{c^2}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left\{1 + \left(\dfrac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \dfrac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right) c^2 \operatorname{tg}^2\eta'\right\}}}$$

$$\sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\eta'} = \frac{c^2 \dfrac{\sin\eta'}{\cos^3\eta'} \left(\dfrac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \dfrac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right)}{\left(1 + \left(\dfrac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \dfrac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right) c^2 \operatorname{tg}^2\eta'\right)^{3/2}},$$

$$\sin\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta'} = \frac{c^2 \operatorname{tg}^2\eta' \sin\vartheta' \cos\vartheta' \left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)}{\left(1 + \left(\dfrac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \dfrac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right) c^2 \operatorname{tg}^2\eta'\right)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta'} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta'} = \frac{b}{a} \frac{\cos^2\psi}{\cos^2\vartheta'}.$$

Daher ist:

$$\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi = \sin\varphi \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta'}, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial\vartheta'} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta'}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial\vartheta'} \end{vmatrix} d\eta'\, d\vartheta' = \begin{vmatrix} \sin\varphi\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta'}, & \sin\varphi\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vartheta'} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta'}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial\vartheta'} \end{vmatrix} d\eta'\, d\vartheta'$$

$$= \frac{\sin\eta'\, d\eta'\, d\vartheta'\, \dfrac{b}{a}\, c^2\, \dfrac{\cos^2\psi}{\cos^3\eta'\cos^2\vartheta'} \left(\dfrac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \dfrac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right)}{\left(1 + \left(\dfrac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \dfrac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right) c^2 tg^2\eta'\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{b}{ac} \sin\eta'\, d\eta'\, d\vartheta' \left(\frac{\dfrac{\cos^2\psi}{\cos^2\vartheta'} \left(\dfrac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \dfrac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right)}{\left(\Sigma \dfrac{\cos^2\eta'}{c^2}\right)^{3/2}} \right).$$

Es ist aber:

$$\frac{\cos^2\psi}{\cos^2\vartheta'} \left(\frac{\cos^2\vartheta'}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta'}{a^2}\right) = \frac{\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\cos^2\psi}{a^2}\, tg^2\vartheta'$$

$$= \frac{1}{b^2}\left(\cos^2\psi + \sin^2\psi\right) = \frac{1}{b^2},$$

und daher wird:

$$\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi = \frac{1}{abc} \cdot \frac{\sin\eta'\, d\eta'\, d\vartheta'}{\left(\Sigma \dfrac{\cos^2\eta'}{c^2}\right)^{3/2}},$$ folglich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\!\!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\Sigma\, c^2\cos^2\varphi\right)\left(\Sigma \dfrac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\!\!\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\eta'\, d\eta'\, d\vartheta'.}{abc\left(\Sigma \dfrac{\cos^2\eta'}{c^2}\right)^{3/2}},$$

indem die Grenzen in Bezug auf η' und ϑ' dieselben wie diejenigen in Bezug auf φ und ψ sind.

Um die zu integrirende Größe rational zu machen, bediene ich mich der von uns nun schon mehrfach angewandten Substitutionen:

$$\cos\eta' = \frac{c\cos\varphi'}{\sqrt{(\Sigma c^2\cos^2\varphi')}}$$

$$\sin\eta'\cos\vartheta' = \frac{b\sin\varphi'\cos\psi'}{\sqrt{(\Sigma c^2\cos^2\varphi')}}$$

$$\sin\eta'\cos\vartheta' = \frac{a\sin\varphi'\sin\psi'}{\sqrt{(\Sigma c^2\cos^2\varphi')}},$$ woraus folgt:

$$\frac{1}{\Sigma \frac{\cos^2\eta'}{c^2}} = \Sigma\, c^2\cos^2\varphi',$$

$$\sin\eta'\, d\eta'\, d\vartheta' = abc\, \frac{\sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi'}{(\Sigma\, c^2\cos^2\varphi')^{3/2}}.$$

Da ferner die Grenzen in Bezug auf φ' und ψ' dieselben wie diejenigen in Bezug auf η' und ϑ' sind, so ergiebt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\eta'\, d\eta'\, d\vartheta'}{abc\left(\Sigma \frac{\cos^2\eta'}{c^2}\right)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi',$$

also:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\Sigma\, c^2\cos^2\varphi\right)\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi'$$

$$= \frac{\pi}{2},\ \text{q. e. d.}$$

Daher ist:

$$8\, \frac{\Sigma a^2b^2}{abc} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\left(\Sigma\, c^2\cos^2\varphi\right)\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)} = 3 \,.\, \Sigma a^2b^2 \,.\, \frac{4}{3}\, \frac{\pi}{abc}.$$

Wir sind am Ziele, denn wir haben gefunden:

$$\frac{8}{abc} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\Sigma a^2b^2}{\left(\Sigma c^2\cos^2\varphi\right)\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)} - \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma c^2\cos^2\varphi} - \frac{4}{\left(\Sigma \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)^2} \right\} \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi$$

$$=$$

$$3\,\Sigma a^2b^2 \,.\, \frac{4}{3} \,.\, \frac{\pi}{abc} - 4\pi c\, \frac{F(\upsilon,\mu)}{\sin\mathrm{am}\,(\upsilon,\mu)} - 8\pi \left[\frac{\cos^2\mathrm{am}\,(u,\nu)\, F(u,\nu) + \sin^2\mathrm{am}\,(u,\nu)\, E(u,\nu)}{\sin\mathrm{am}\,(u,\nu)}\, c + \frac{ab}{c}\right].$$

Resultat.

Das Resultat, zu dem wir gelangt sind, ist, in Formeln ausgedrückt, dieses: Die Quadratur der ganzen parallelen Oberfläche einer Elastizitätsoberfläche, deren Gleichung

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 \text{ ist,}$$

ist gleich:

$$2\pi \left[\frac{\cos^2\mathrm{am}\,(\omega,\varkappa)\, F(\omega,\varkappa) + \sin^2\mathrm{am}\,(\omega,\varkappa)\, E(\omega,\varkappa)}{\sin\mathrm{am}\,(\omega,\varkappa)}\, c^2 + \frac{a^2b^2}{c^2}\right]$$

$$+ \lambda . \begin{cases} - 4 . 2\pi \left[\dfrac{\cos^2 \mathrm{am}\,(\mathrm{u}, \nu)\, \mathrm{F}(\mathrm{u}, \nu) + \sin^2 \mathrm{am}\,(\mathrm{u}, \nu)\, \mathrm{E}(\mathrm{u}, \nu)}{\mathrm{sinam}\,(\mathrm{u}, \nu)} \mathrm{c} + \dfrac{\mathrm{ab}}{\mathrm{c}} \right] \\ - 4 . \pi \mathrm{c} \dfrac{\mathrm{F}(\upsilon, \mu)}{\mathrm{sinam}\,(\upsilon, \mu)} \\ + 3\, \Sigma \mathrm{a}^2 \mathrm{b}^2 . \dfrac{4}{3} \dfrac{\pi}{\mathrm{abc}} \end{cases}$$

$$+ \lambda^2 . 4\pi ,$$

und es ist:

$$\sin^2 \mathrm{am}\, \omega = \frac{\mathrm{c}^4 - \mathrm{a}^4}{\mathrm{c}^4}, \ \varkappa^2 = \frac{\mathrm{c}^4 - \mathrm{b}^4}{\mathrm{c}^4 - \mathrm{a}^4};$$

$$\sin^2 \mathrm{am}\, \mathrm{u} = \frac{\mathrm{c}^2 - \mathrm{a}^2}{\mathrm{c}^2}, \ \nu^2 = \frac{\mathrm{c}^2 - \mathrm{b}^2}{\mathrm{c}^2 - \mathrm{a}^2};$$

$$\sin^2 \mathrm{am}\, \upsilon = \frac{\mathrm{a}^2 - \mathrm{c}^2}{\mathrm{a}^2}, \ \mu^2 = \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2} . \frac{\mathrm{b}^2 - \mathrm{c}^2}{\mathrm{a}^2 - \mathrm{c}^2} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{c}^2} - \dfrac{1}{\mathrm{b}^2}}{\dfrac{1}{\mathrm{c}^2} - \dfrac{1}{\mathrm{a}^2}},$$

während die Reihenfolge der Größen c, b, a folgende ist:

$$\mathrm{c} > \mathrm{b} > \mathrm{a}.$$

Deutung des Resultats.

Es haben die Glieder, aus denen unsere Quadratur besteht, auch einzeln eine schöne geometrische Bedeutung:

Das erste Glied, das in λ^0 multiplizirt ist, ist die Quadratur der gegebenen Elastizitätsoberfläche selbst.

Das zweite Glied ist die vierfache Quadratur einer zweiten Elastizitätsoberfläche, deren Axen die Quadratwurzeln der respektiven Axen der gegebenen sind.

Das dritte Glied ist das Potential eines Ellipsoids in Bezug auf seinen Mittelpunkt; desjenigen Ellipsoids nämlich, dessen Punkte zu denjenigen der gegebenen Elastizitätsoberfläche konjugirt sind in Bezug auf eine Kugel, die um den Mittelpunkt der Elastizitätsoberfläche mit dem Radius 1 beschrieben ist.

Das vierte Glied ist der Rauminhalt dieses Ellipsoids, multiplizirt mit 3 ($\mathrm{a}^2\mathrm{b}^2 + \mathrm{a}^2\mathrm{c}^2 + \mathrm{b}^2\mathrm{c}^2$).

Das fünfte Glied, das in λ^2 multiplizirt ist, ist die curvatura integra d. h. die Oberfläche einer Kugel, deren Radius 1 ist.

λ aber bedeutet die auf irgend einer Normale gemessene Entfernung der gegebenen Elastizitätsoberfläche von ihrer parallelen Oberfläche.

Im Zusammenhange und in Worten wird daher unser Resultat folgendermaßen lauten:

Die Quadratur der parallelen Oberfläche einer Elastizitätsoberfläche

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

besteht aus drei Gliedern, die, wenn λ die Entfernung beider Oberflächen von einander ist, resp. mit λ^0, λ, λ^2 proportional sind. Das erste Glied ist die Quadratur der gegebenen Elastizitätsoberfläche. Das zweite Glied ist ein Aggregat von drei Gliedern, von denen das erste die Quadratur einer zweiten Elastizitätsoberfläche

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

von denen das zweite das Potential eines Ellipsoids

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1$$

in Bezug auf seinen Mittelpunkt, und von denen das dritte der Rauminhalt eben dieses Ellipsoids ist. Jedes dieser drei Glieder ist in eine Konstante multiplizirt. Das dritte Glied endlich, das in λ^2 multiplizirt ist, ist die curvatura integra.

E. Hutt.