Der

Anfangsunterricht in der Planimetrie.

Das Pensum der Quarta und Untertertia.

Von

H. Scheidemantel.

Der Anfangsunterricht in der Planimetrie am Gymnasium.

Die neuen Lehrpläne weisen der Mathematik in den Klassen Quarta bis Untersekunda der Gymnasien ein größeres Pensum zu, ohne die Stundenzahl zu vermehren. Von den Lehrern dieses Faches wird, um der erweiterten Aufgabe gerecht zu werden, „eine planmäßige Sichtung des Lehrstoffes und Ausscheidung alles nicht unbedingt Notwendigen" gefordert. Diese Forderung wird noch dringender, wenn die Vorschrift, daß „ein Teil der bisherigen schriftlichen Hausarbeit in die Schule zu verlegen ist" (S. 65,3) auch für das mathematische Fach durchgeführt werden soll. Ohne erhebliche Schwierigkeit dürfte sich die Sichtung in der Arithmetik durchführen lassen, da man schwierigere Aufgaben und Rechnungsarten ohne Beeinträchtigung des Zusammenhanges im Ausbaue des Systems ausscheiden kann. Weniger günstig liegt die Sache in der Geometrie. Die methodischen Bemerkungen geben zwar für die Sichtung den Gesichtspunkt an die Hand, daß „nur die für das System nötigen unentbehrlichen Sätze" einzuprägen, „alles Andere als Übungsstoff" zu behandeln ist, indessen dürfte wenigstens für den Anfangsunterricht in der Planimetrie an den Gymnasien dieser Gesichtspunkt schon von jeher im Großen und Ganzen maßgebend gewesen sein, wie auch aus den dem Verfasser bekannten Lehrbüchern und Leitfäden hervorgeht. Eine weitere Sichtung verspricht daher nur geringe Ausbeute, wenn nicht durch Herausnahme von Bausteinen der ganze Bau an Festigkeit verlieren soll. Aus dem Lehrbuche von Kambly z. B., welches am hiesigen Gymnasium eingeführt und auch sonst weit verbreitet ist, findet der Verfasser als schlechthin entbehrlich aus dem Pensum der Quarta und Untertertia nur folgende vier Paragraphen heraus: § 19 (liegt im Begriffe des gestreckten Winkels), § 31, 32, 81. An Vereinfachungen und Erleichterungen würde der Verfasser sonst noch vorschlagen: § 22 ist leicht direkt zu beweisen. § 43 ist nur Hülfssatz zu § 67, welcher einfacher bewiesen werden kann. In derselben Beziehung steht § 46 zu 47 und mit § 46 fällt auch seine Umkehrung § 48; § 80, 2 kann diesen Hülfssatz entbehren. Der Beweis zu § 80, 3 ist zu bemängeln, weil nicht entschieden wird, welche Senkrechte die größere ist. Gegen den Beweis von § 87 ist einzuwenden, daß er nur einen besonderen Fall behandelt. (Der allgemeine Fall läßt sich allerdings leicht auf den besonderen zurückführen.) Auch die Verallgemeinerung des 4. Kongruenzsatzes § 58 ist wünschenswert; z. B. würde sonst die folgende Umkehrung des § 46: „Wenn in einem Dreiecke eine Winkelhalbierende auch die Gegenseite halbiert, so ist das Dreieck gleichschenklig" nicht bewiesen werden können.

Das vorstehende Resultat der Sichtung dürfte den Gewinn von nur wenigen Lehrstunden bedeuten und mit den meisten anderen Lehrbüchern der Planimetrie wird man ähnliche Erfahrungen machen. Hiermit ergiebt sich die Notwendigkeit, rascher fortzuschreiten, was nicht ohne Bedenken ist, da die Gefahr eines Zurückbleibens der schwächeren Schüler vorliegt, besonders im Anfangsunterrichte (IV und IIIb). Der Fachlehrer der Planimetrie muß also suchen, den Stoff in solcher Form darzubieten, daß auch die schwächsten Schüler ohne erhebliche Schwierigkeiten folgen können, für ihn dürften in erster Linie die Worte der Lehrpläne (S. 69, 3 Abs. II) geschrieben sein: „An die Lehrer tritt die Pflicht heran, diesen Abschluß (in

Untersekunda) durch zweckmäßige Methode von unten herauf vorzubereiten. . . ." Vor Allem gilt dies für den Anfangsunterricht in Quarta und Untertertia, da die schädlichen Folgen einer ungenügenden Grundlage für das gedeihliche Fortschreiten der Schüler und ihre Lust am Lernen sich in keinem Fache so fühlbar machen, als eben in der Planimetrie.

Vorstehende Erwägungen haben den Anstoß zur Aufstellung des folgenden Lehrplanes der Planimetrie für Quarta und Untertertia gegeben, der Verfasser hat sich bei der Auswahl und Gruppierung des Stoffes hauptsächlich von folgenden Grundsätzen leiten lassen.

Die Planimetrie führt den Schüler zum ersten Male in ein rein abstraktes Gebiet; um diesen Schritt zu erleichtern, ist thunlichst an vorhandenes konkretes Wissen und Können anzuknüpfen. Als geeignete Anknüpfungspunkte bieten sich vor Allem: a) Das Zeichnen und b) das Rechnen (der Zahlbegriff).

a) Es ist daher zu fordern, daß im Zeichenunterrichte der Quinta geometrisches Zeichnen (Übungen mit Lineal und Zirkel) getrieben wird, um so mehr, als der früher für diese Klasse vorgeschriebene propädeutische Unterricht in der Geometrie in die neuen Lehrpläne keine Aufnahme gefunden hat. Im eigentlichen planimetrischen Unterrichte sind, wenigstens für die beiden unteren Klassen, die zur Anschauung dienenden Figuren von sämtlichen Schülern — nach Anleitung des Lehrers — selbst zu zeichnen. Man erreicht dadurch schon den Vorteil, daß die ganze Klasse zur Beteiligung herangezogen wird und der Unterricht nicht so leicht in einen Dialog zwischen dem Lehrer und dem Schüler der gerade „dran ist" ausartet. Wichtiger ist noch, daß der Schüler mit der selbstentworfenen Figur völlig vertraut ist, während er sich in die ihm fertig vorgelegte Figur der Figurentafel erst hineinfinden muß, wobei leicht falsche Anschauungen entstehen. Überhaupt hält es der Verfasser für besser, auf dieser Stufe das Lehrbuch während des eigentlichen Unterrichtes gar nicht zu benutzen, sondern es nur als Leitfaden für die häuslichen Repetitionen zu betrachten.

b) Der Unterricht ist so zu erteilen, daß das Ziel: „Ausmessung der Figuren" immer im Auge behalten wird. Ist dem Schüler erst klar geworden, daß er mit den Raumgrößen rechnen kann, wie mit Zahlen, so ist für ihn ein großer Teil der Schwierigkeit weggefallen. Daher hat der Verfasser gleich an den Anfang des Pensums je einen Paragraphen über Addition und Subtraktion von Strecken und Winkeln eingeschaltet, eine Übung, die sich auch für den später beginnenden Unterricht in der Arithmetik fruchtbar machen läßt: z. B. könnte der Gegensatz von positiv und negativ schon hier erläutert werden. Bei den Konstruktionsaufgaben empfiehlt es sich, die Bestimmungsstücke öfters, im Anfange sogar in der Regel, in Zahlen (cm, Grad) zu geben.

Im Uebrigen ist es das Bestreben des Verfassers gewesen, aus dem Anfangspensum Schwierigkeiten möglichst zu beseitigen oder zu mildern. Die Parallelentheorie, die nach der Erfahrung des Verfassers dem Anfänger mehr Schwierigkeiten bereitet, als die Dreieckslehre, ist daher in das Pensum der Untertertia verschoben worden. In dem ganzen Abschnitte von der Kongruenz der Dreiecke kommen in der Regel die Sätze von den Parallelen nur einmal zur Anwendung, nämlich entweder bei dem Satze vom Außenwinkel oder von der Summe der Winkel eines Dreiecks. Der im § 9 gegebene Beweis, welcher nur auf der Erklärung des Winkels als Drehungsgröße beruht, wird auch einem mäßig begabten Quartaner anschaulich sein. Dafür ergiebt sich dann umgekehrt (§ 33) aus dem Satze vom Außenwinkel eine ungezwungene Ableitung des Begriffes „parallel", und die Lehre von den Parallelen erhält ihre systematisch richtige Stellung, als Einleitung zu der Lehre von den Parallelogrammen. Die Definition des Winkels als Drehungsgröße ist nach Ansicht des Verfassers die einzige, welche dem Anfänger sofort einen richtigen Begriff von der Winkelgröße giebt, wichtig ist auch hier, daß sofort mit Winkelgrößen gerechnet wird, wozu Beispiele aus dem täglichen Leben (Bewegungen der Uhrzeiger u. a.) herangezogen werden können. Bei der Erklärung: „Ein Winkel ist der Richtungsunterschied zweier von einem Punkte ausgehenden Linien" wird sich ein Teil der Schüler gar nichts denken; diejenigen, welche wirklich darüber nachdenken, werden von selbst auf die Fragen kommen: Wie entsteht ein solcher Richtungsunterschied, oder wodurch wird er gemessen? Ebenso steht es mit der Erklärung: „Wenn man aus einem Punkte zwei gerade

Linien nach verschiedenen Richtungen zieht, so entsteht ein Winkel", welche übrigens nicht einmal streng richtig ist, denn es entstehen zwei Winkel (ein konkaver und ein konvexer). Schließlich empfiehlt sich noch die Erklärung des Winkels als Drehungsgröße im Hinblicke auf die spätere Einführung in die Goniometrie. — Bei dem Kapitel der Definitionen sei noch darauf hingewiesen, daß der Verfasser dem Begriffe „gleichschenklig" eine etwas allgemeinere Bedeutung gegeben hat, sodaß die Gegensätze gleichschenklig und ungleichschenklig (in bezug auf irgend eine Basis), gleichseitig und ungleichseitig zu unterscheiden sind. Die Absicht war, einigen Sätzen eine bestimmtere Fassung zu geben; daß außerdem für den Anfänger die Nötigung, von dem gleichschenkligen Dreiecke jedesmal die Basis zu nennen, eine sehr heilsame ist, wird wohl nicht bestritten werden. Daß auf metaphysisch richtige Definitionen der graden Linie, der Ebene u. s. w. verzichtet wird, diese Begriffe vielmehr nur an geeigneten Körpermodellen verdeutlicht werden, bedarf wohl keiner besonderen Rechtfertigung.

Zu den Hauptschwierigkeiten für den Anfänger sind die indirekten Beweise zu rechnen, wie sich daraus ergiebt, daß man bei diesen am häufigsten falsche Antworten erhält. Der Verfasser hat sie daher, wo es möglich war, zu vermeiden gesucht. Wo sie indessen nicht zu umgehen sind, ist der Schüler vor Allem erst auf die Notwendigkeit des Beweises hinzuführen; es ist ihm z. B. klar zu machen, daß die Umkehrung des Satzes: „In einem Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber" zwar wahrscheinlich, indessen zunächst noch nicht zweifellos ist.

Andere Eigentümlichkeiten des folgenden Lehrplanes dürften sich aus den vorstehenden Erläuterungen von selbst rechtfertigen.

Das Pensum der Quarta und Untertertia in der Planimetrie.

A. Pensum der Quarta.

§ 1.

Die Geometrie handelt von der Ausmessung der Körper.

γῆ = Erde, μετρεῖν = messen: daher Geometrie eigentlich Erdmessung.

Ein **Körper** ist ein allseitig begrenzter Raum, seine Ausdehnung messen wir nach Länge, Breite und Höhe.

Die Grenzen eines Körpers nennen wir **Flächen**, eine Fläche messen wir nach Länge und Breite.

Als Beispiele betrachten wir die Kugel, den Würfel und die Walze (den Cylinder). Die Kugel ist von einer **krummen**, der Würfel von 6 **ebenen**, die Walze von zwei ebenen und einer krummen Fläche begrenzt. Anstatt „ebene Fläche" sagt man gewöhnlich „Ebene". Die Gesamtheit der Flächen, welche einen Körper begrenzen, nennen wir seine **Oberfläche**.

Die Grenzen der Flächen heißen **Linien**, an einer Linie messen wir die Länge. Die Würfelflächen sind von **geraden Linien** (hier auch Kanten genannt) und die Flächen der Walze von **krummen Linien** begrenzt.

Die Grenzen der Linien nennen wir **Punkte**; ein Punkt (im geometrischen Sinne) hat keine Ausdehnung.

§ 2.

Der Teil der Geometrie, welcher von der Ebene und den in derselben gezogenen Linien handelt, heißt **Planimetrie** (planum = Ebene). Man denkt sich hierbei die Ebene (z. B. die Wandtafel) nach allen Richtungen hin in das Unbegrenzte erweitert. Mehrere in der Ebene als zusammengehörig gedachte Linien bilden eine **Figur**.

§ 3.

Eine von zwei Punkten begrenzte gerade Linie heißt Strecke, ein Strahl ist nur durch einen Punkt (Anfangspunkt) begrenzt und wird nach der entgegengesetzten Richtung hin unbegrenzt gedacht, eine Gerade denkt man sich nach beiden Seiten hin unbegrenzt. Der Ausmessung können natürlich nur die Strecken unterliegen.

Von den krummen Linien ziehen wir hier nur den Kreis in Betracht.

Aufgabe: Um einen gegebenen Punkt (Mittelpunkt, Centrum) mit gegebenem Radius (Halbmesser) einen Kreis zu beschreiben. — Geschieht mit Hülfe des Zirkels.

§ 4.

Unter der Summe $a + b$ zweier gegebenen Strecken a und b versteht man die Strecke, welche man erhält, wenn man a um b verlängert.

Unter der Differenz $a - b$ zweier gegebenen Strecken a und b versteht man die Strecke, welche übrig bleibt, wenn man b von a abschneidet (mit Hülfe des Zirkels). Hierbei ist zunächst vorauszusetzen, daß $a > b$ ist.

Sind die Strecken mit einerlei Maß gemessen, so bedeuten a und b die Maßzahlen, etwa in cm.

Aufgaben: 1) Gegeben Strecke a. Man zeichne Strecke $2a$, $3a$ u. s. w. Was bedeutet $a - a$?

2) Gegeben a, b und c. Man zeichne $a + 2b$, $2a - b$ u. s. w.; $a + b - c$, $a - (b - c)$ u. s. w.

3) Wie konstruiert man $a - b + c$, wenn $a < b$, aber $a + c > b$ ist?

4) Hat $a - b$ einen Sinn, wenn $a < b$ ist? (Begriff der negativen Strecke).

§ 5.

Denkt man sich (Fig. 1) den Strahl AB um den Anfangspunkt A so lange gedreht, bis er in die Lage AC kommt, so nennt man die Drehungsgröße einen Winkel, A ist der Scheitel, AB und AC sind die Schenkel des Winkels. Die Drehung soll immer im Sinne der Uhrzeiger (nach rechts) erfolgen. Gelesen wird $\sphericalangle$ BAC, sodaß der den Scheitel bezeichnende Buchstabe in der Mitte steht und die Anfangslage BA zuerst genannt wird. $\sphericalangle$ CAB würde also den Winkel bezeichnen, der entsteht, wenn man AC (im Sinne der Uhrzeiger) so lange dreht, bis er wieder mit AB zusammenfällt. Wenn man eine volle Umdrehung mit U bezeichnet, so hat man: $\sphericalangle BAC + CAB = U$.

§ 6.

Wird (Fig. 2) die Gerade CB um den Punkt A gedreht, bis AB in die Lage AD kommt, so gelangt gleichzeitig AC in die Lage AE; also ist $\sphericalangle BAD = CAE$. Ebenso auch $\sphericalangle DAC = EAB$, $\sphericalangle DAB = EAC$. Winkel, die den Scheitel gemeinsam haben und von denen die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des anderen sind, nennt man Scheitelwinkel. Über sie gilt also der Satz:

Scheitelwinkel sind einander gleich.

Dreht man die Gerade so lange, bis AB in die Lage AC kommt, so gelangt gleichzeitig AC in die Lage AB; also ist $\sphericalangle BAC = CAB$. Winkel, deren Schenkel eine Gerade bilden, heißen gestreckte Winkel, ihr Zeichen ist π; man hat also $\pi = \frac{1}{2} U$ und es gilt der Satz:

Gestreckte Winkel sind einander gleich.

Zwei Winkel heißen Nebenwinkel, wenn sie einen gestreckten ausmachen, z. B. $\sphericalangle$ CAE und EAB. Alle Winkel, die kleiner sind als π heißen hohle oder konkave, alle die größer sind als π, erhabene oder konvexe Winkel.

Unter einem rechten Winkel versteht man die Hälfte eines gestreckten, Zeichen R; man hat also $R = \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{4} U$ und den Satz:

Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Von den Schenkeln eines rechten Winkels sagt man, sie stehen auf einander senkrecht.

Der rechte Winkel wird gewöhnlich als Einheit bei der Ausmessung der Winkel benutzt. Alle hohlen Winkel, die $< R$ sind, werden spitze, alle die $> R$ sind, stumpfe Winkel genannt. In der Einheit R ausgedrückt sind also die Maßzahlen aller spitzen Winkel echte (zwischen 0 und 1) und die aller stumpfen Winkel unechte Brüche (zwischen 1 und 2). Die Einheit denkt man sich gewöhnlich in 90 gleiche Teile geteilt, ein solcher Teil heißt Grad (Zeichen ^{0}). Also $R = 90^0$, $\pi = 180^0$, $U = 360^0$; $1^0 = \frac{1}{90} R$ u. s. w.

Beschreibe den Transporteur (vergl. hierzu § 44).

Supplementwinkel. Komplementwinkel. (Überstumpfe und überspitze Winkel.)

§ 7.

Aufgabe: Einen gegebenen Winkel α an einen gegebenen Strahl AB (an eine gegebene gerade Linie) in dem Punkte A anzutragen (Begründung § 22).

Summen und Differenzen von Winkeln, ähnlich wie § 4. Aufgaben sind ebenfalls nach § 4 zu bilden; außerdem: $\sphericalangle\ 2R - \alpha$, $\sphericalangle\ 2R - (\alpha + \beta)$.

§ 8.

Zwei Gerade schneiden einander in einem Punkte. Kommt eine dritte Gerade hinzu, so schneidet diese im Allgemeinen die beiden ersten in je einem Punkte. Wenn drei Gerade sich in drei Punkten schneiden, so begrenzen sie einen Teil der Ebene vollständig; dieser wird Dreieck (Zeichen $\triangle$) genannt. Ein Dreieck ist also eine von drei Geraden vollständig begrenzte Ebene, die Schnittpunkte der Geraden heißen Ecken, die durch sie begrenzten Strecken Seiten und die von diesen eingeschlossenen Winkel innere Winkel des Dreiecks.

Eine Seite des Dreiecks wird gewöhnlich als Grundlinie oder Basis bezeichnet, die beiden anderen heißen dann Schenkel, ihre gemeinsame Ecke die Spitze des Dreiecks.

Sind die Schenkel gleich, so heißt das Dreieck gleichschenklig, sind sie ungleich, ungleichschenklig für die Basis. $\triangle$ ABC (Fig. 4) ist gleichschenklig für die Basis AB, aber ungleichschenklig für die Basen AC und BC.

Ein Dreieck, welches für jede Basis gleichschenklig ist, heißt gleichseitig, ein Dreieck, welches für jede Basis ungleichschenklig ist, heißt ungleichseitig. — Viereck. Vieleck.

§ 9.

Um die Drehungsgröße der inneren Winkel eines Dreiecks ABC zu ermitteln, denke man sich den Strahl AC um den Punkt A bis in die Lage AB gedreht, dann in seiner Richtung bis in die Lage BA' verschoben, BA' bis in die Lage BC' gedreht, BC' an den Punkt C verschoben, bis in die Lage CB' gedreht und endlich wieder an den Anfangspunkt A verschoben. Es ergiebt sich, daß die Drehungsgröße der $\sphericalangle$ CAB, A'BC' und BCA gleich π ist. Da nun $\sphericalangle$ A'BC' = ABC ist (§ 6), so hat man: $\sphericalangle$ CAB + ABC + BCA $= \pi = 2R$; in Worten:

Die Summe der inneren Winkel eines Dreiecks beträgt zwei Rechte.

Die Summe zweier Winkel eines Dreiecks ist daher kleiner als 2 R, nämlich um den dritten Winkel.

Hiernach kann ein Dreieck entweder a) drei spitze, oder b) einen rechten und zwei spitze, oder c) einen stumpfen und zwei spitze Winkel enthalten. Man teilt daher die Dreiecke nach den Winkeln ein in a) spitzwinklige, b) rechtwinklige, c) stumpfwinklige.

Aufgabe: 1. Gegegeben zwei Winkel eines Dreiecks; man soll den dritten a) durch Rechnung, b) durch Konstruktion finden (vergl. § 7).

2. Die Summe der inneren Winkel eines Vierecks zu berechnen.

§ 10.

Jeder Nebenwinkel eines inneren Winkels wird Außenwinkel des Dreiecks genannt. Der Außenwinkel CBA' (Fig. 3) ergänzt $\sphericalangle$ ABC zu 2 R, dieser ergänzt die Summe von $\sphericalangle$ BCA und CAB zu 2 R; folglich ist $\sphericalangle$ CBA' = $\sphericalangle$ BCA + CBA, in Worten:

Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe derjenigen inneren Winkel, die nicht seine Nebenwinkel sind.

Diese Winkel bezeichnet man auch als die dem Außenwinkel gegenüberliegenden inneren Winkel. Der Außenwinkel ist daher größer als einer der beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkel.

Beweise: $\sphericalangle$ A'BC = $\sphericalangle$ BAC + ACB — 4 R.

§ 11.

Aufgabe: Über der gegebenen Basis AB ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Schenkel gleich einer gegebenen Strecke s sind (Fig. 4).

Auflösung: Man beschreibe um A und B mit dem Radius s Kreisbogen; dieselben schneiden sich in C. Verbindet man nun C mit A und B, so ist $\triangle$ ABC gleichschenklig für die Basis AB.

Wie groß s mindestens sein muß, ergiebt sich aus § 13.

Denkt man sich $\triangle$ ABC so umgelegt, daß die Schenkel CA und CB ihre Lage vertauschen, so fällt, wegen der Gleichheit der Schenkel, A auf B und umgekehrt, also haben auch $\sphericalangle$ CAB und $\sphericalangle$ ABC ihre Lage vertauscht.

Ergebnis: In einem gleichschenkligen Dreiecke liegen der Basis gleiche Winkel an (sind die Basiswinkel gleich).

Oder: In einem Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

Folgerungen: 1. Im gleichseitigen Dreiecke sind alle Winkel einander gleich, also jeder $= \frac{2}{3}$ R.

2. Der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks ist ein spitzer.

3. Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß als der Basiswinkel.

Rechenaufgaben: Die übrigen Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks zu berechnen, wenn gegeben ist a) der Basiswinkel, b) der Winkel an der Spitze. a) ist auch durch Konstruktion zu lösen.

§ 12.

Aufgabe: Über der gegebenen Basis AB ein Dreieck zu zeichnen, dessen Schenkel bezüglich den gegebenen Strecken a und b gleich sind. (Fig. 5.)

Auflösung: Man beschreibe um A mit b und um B mit a Kreisbogen; dieselben schneiden sich in C u. s. w.

Ist b > a, d. i. AC > BC, so läßt sich CD = CB auf CA abschneiden. Zieht man BD, so ist $\triangle$ BCD gleichschenklig für BD, folglich $\sphericalangle$ o = p. Da ferner $\sphericalangle$ o > α ist (§ 10), so ist $\sphericalangle$ p > α und um so mehr $\sphericalangle$ ABC > α (CAB).

Ergebnis: In einem Dreiecke liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

Folgerung: Im ungleichseitigen Dreiecke haben die kleineren Seiten spitze Gegenwinkel.

§ 13.

Aufgabe: Über der gegebenen Basis AB ein Dreieck zu zeichnen, in welchem jeder der beiden Basiswinkel einem gegebenen (spitzen) Winkel α gleich ist (Fig. 4.)

Auflösung: Man trage an AB in A $\sphericalangle$ $\alpha_1 = \alpha$ und in B $\sphericalangle$ $\alpha_2 = \alpha$ an; die freien Schenkel schneiden sich in C. $\triangle$ ABC ist das gesuchte.

Weshalb muß $\sphericalangle$ α ein spitzer sein?

Im Hinblicke auf § 11 läßt sich vermuten, daß das Dreieck gleichschenklig ist für AB. In der That, wollte man annehmen es sei ungleichschenklig, z. B. $AC > BC$, so müßte nach § 12 auch $\sphericalangle\, \alpha_2 > \alpha_1$ sein, während doch $\sphericalangle\, \alpha_2 = \alpha_1$ ist.

Ergebnis: In einem Dreiecke liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Oder: Wenn in einem Dreiecke einer Seite gleiche Winkel anliegen, so ist es gleichschenklig für diese Seite.

Ein Dreieck, welches drei gleiche Winkel (je $= \frac{2}{3}$ R) hat, ist daher gleichseitig.

§ 14.

Aufgabe: Über der gegebenen Basis AB ein Dreieck zu zeichnen, in welchem die Basiswinkel bezüglich den gegebenen Winkeln α und β gleich sind (Fig. 6).

Auflösung: Man trage in A $\sphericalangle\, \alpha_1 = \alpha$ und in B $\sphericalangle\, \beta_1 = \beta$ an, die freien Schenkel schneiden sich in C. $\triangle$ ABC ist das gesuchte.

$\sphericalangle\, \alpha + \beta$ muß < 2 R sein.

Ist $\sphericalangle\, \beta > \alpha$, so läßt sich mit Rücksicht auf § 12 vermuten, daß $AC > BC$ ist. In der That, wollte man annehmen, daß $AC = BC$ wäre, so müßte auch $\sphericalangle\, \beta_1 = \alpha_1$ sein und wollte man annehmen, daß $AC < BC$ wäre, so müßte auch $\sphericalangle\, \beta_1 < \alpha$ sein; während doch $\sphericalangle\, \beta_1 > \alpha_1$ ist.

Ergebnis: In einem Dreiecke liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

§ 15.

Denkt man sich (Fig. 6) $\sphericalangle$ ABD $= \alpha_1$ von $\sphericalangle$ ABC abgeschnitten, so ist $AD = BD$ und $AC = BD + DC$. Da nun $AC > BC$ ist, so ist auch $BD + DC > BC$.

Ergebnis: In einem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte.

Der Satz läßt sich auch, unabhängig von § 14, dadurch für ein beliebiges Dreieck ABC (Fig. 6a) beweisen, daß man AC über C hinaus um $CD = CB$ verlängert und D mit B verbindet.

§ 16.

In Fig. 5 sind $\sphericalangle$ o und p spitze Winkel, somit $\sphericalangle$ BDA ein stumpfer und daher der größte im $\triangle$ ADB. Folglich ist $AB > AD$, d. i. $AC - BC$ (§ 14).

Ergebnis: In einem Dreiecke ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.

§ 17.

Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen aus einer Seite c und den beiden anliegenden Winkeln α und β (Fig. 7).

Auflösung: Man zeichne $AB = c$, trage in A $\sphericalangle\, \alpha_1 = \alpha$ und in B $\sphericalangle\, \beta_1 = \beta$ an u. s. w. (wie in § 14). Außer dem $\triangle$ ABC kann man noch ein zweites $\triangle$ ABC' aus denselben Stücken (nach unten) zeichnen. Um zu untersuchen, ob die Dreiecke etwa noch in anderen Stücken übereinstimmen, denke man sich $\triangle$ ABC' um die Seite AB so lange gedreht, bis es wieder in die Ebene fällt (um 180°). Wegen der Gleichheit der $\sphericalangle\, \alpha_2$ und α_1 kommt dann AC' in die Lage von AC und wegen der Gleichheit der $\sphericalangle\, \beta_2$ und β_1 BC' in die Lage von BC, folglich fällt C' auf C und die Dreiecke decken einander.

Ergebnis: Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, so stimmen sie auch in den übrigen Stücken überein.

Denkt man sich das zweite Dreieck in einer beliebigen anderen Lage A'' B'' C'' gezeichnet, so kann man es sich erst in die Lage ABC' verschoben denken und dann den Beweis wie oben führen. Ähnliches ist auch bei §§ 20, 22 und 25 zu bemerken.

§ 18.

Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen aus einer Seite c, dem einen anliegenden $\sphericalangle\ \alpha$ und dem gegenüberliegenden $\sphericalangle\ \gamma$.

Auflösung: Man konstruiere den 3. Dreieckswinkel (§ 7 u. 9), so ist die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt und es ergiebt sich:

Zwei Dreiecke, die in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, stimmen auch in den übrigen Stücken überein.

§ 19.

Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen aus den Seiten a und b und dem eingeschlossenen $\sphericalangle\ \gamma$ (Fig. 8).

Auflösung: Man zeichne $BC = a$, trage in C $\sphericalangle\ \gamma$ an und schneide auf dem freien Schenkel $CA = b$ ab. $\triangle$ BCA ist das gesuchte. Ebenso läßt sich $\triangle$ BCA' (nach unten) zeichnen.

§ 20.

Denkt man sich (Fig. 8) $\triangle$ BCA' um die Seite BC so lange gedreht, bis es wieder in die Ebene fällt (um 180^0), so fällt CA' mit CA zusammen, da $\sphericalangle\ \gamma_1 = \gamma$ und A' auf A, da $CA' = CA$ ist; also decken die Dreiecke einander.

Ergebnis: Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so stimmen sie auch in den übrigen Stücken überein.

§ 21.

Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen aus den Seiten a, b und c (Fig. 9).

Auflösung: Es sei $a > b > c$. Man zeichne $BC = a$, beschreibe um B mit c und um C mit b Kreise; dieselben schneiden sich in A und A'. $\triangle$ ABC oder A'BC ist das gesuchte.

Die Bedingung für die Lösbarkeit der Aufgabe ergiebt sich aus § 15 und 16.

Wenn $b = c$ ist, so nimmt die Aufgabe die Form an:

Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen aus der Basis a und dem Schenkel b (vergl. § 11).

In diesem Falle muß $b > \frac{1}{2}$ a sein.

Für $a = b = c$ hat man die Aufgabe:

Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen aus der Seite a.

§ 22.

Da die Winkel ABA' und A'CA konkave Winkel sind (§ 12, Folg.), so fällt AA' in die Flächen der Dreiecke hinein. Nun sind die Dreiecke AA'B und AA'C gleichschenklig für AA', also ist $\sphericalangle\ A_1 = A_1'$ und $\sphericalangle\ A_2 = A_2'$; folglich durch Addition $\sphericalangle\ CAB = BA'C$. Unter Anwendung von § 20 kommt man nun zu dem Ergebnis:

Dreiecke, die in den drei Seiten übereinstimmen, stimmen auch in den Winkeln überein.

§ 23.

Wendet man bei der Zeichnung des Dreiecks BCA' anstatt der Strecke b eine andere Strecke b' an (Fig. 10), so daß z. B. $b' < b$ ist, so ist $\sphericalangle\ A_1 = A_1'$, aber $\sphericalangle\ A_2 < A_2'$, daher $\sphericalangle\ CAB < BA'C$.

Legt man nun die Dreiecke mit den anderen gleichen Seiten (BA und BA') an einander, so sind 3 Fälle zu unterscheiden:

1. Fall (Fig. 10a). $\sphericalangle$ C'AC ist ein gestreckter, dann ist $\sphericalangle\ C = C'$, aber $\sphericalangle\ BAC < C'AB$, jedoch $\sphericalangle\ C'AB + BAC = 2\,R$.

2. Fall (Fig. 10b). $\sphericalangle$ C'AC ist ein konkaver, dann ist $\sphericalangle C_1 = C_1'$, aber $\sphericalangle C_2 < C_2'$, folglich $\sphericalangle C < C'$ (durch Addition).

3. Fall (Fig. 10c). $\sphericalangle$ C'AC ist ein konvexer, dann ist $\sphericalangle C_1 = C_1'$, aber $\sphericalangle C_2 < C_2'$, folglich $\sphericalangle C > C'$ (durch Subtraktion).

Ergebnis: Stimmen zwei Dreiecke nur in zwei Seiten überein, während die dritten ungleich sind, so sind im Allgemeinen die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel ungleich. Nur in einem besonderen Falle sind die den kleineren Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich und die den größeren gegenüberliegenden Winkel Supplemente.

§ 24.

Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen aus zwei Seiten a und b und dem $\sphericalangle \alpha$, welcher der Seite a gegenüber liegen soll.

Auflösung: Ich zeichne AC = b (weshalb fange ich mit b an?) und beschreibe um C mit a einen Kreis. Hinsichtlich der Lage des Punktes A in bezug auf die Kreislinie sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Fall $a > b$ (Fig. 11a). A liegt innerhalb des Kreises; trage ich also in A $\sphericalangle$ CAX $= \alpha$ an, so trifft der Strahl AX die Kreislinie für jede beliebige Größe des $\sphericalangle \alpha$ in einem Punkte B. $\triangle$ ABC ist also eindeutig bestimmt.

2. Fall $a = b$ (Fig. 11b). A liegt auf der Kreislinie, der Strahl AX schneidet diese nur, wenn $\sphericalangle \alpha < R$ ist (vergl. § 13 Anm.). Wenn $\sphericalangle \alpha = R$ ist, so berührt der Strahl AX' die Kreislinie in A; ist $\sphericalangle \alpha > R$, so schneidet Strahl AX'' rückwärts verlängert die Kreislinie in B', doch enthält $\triangle$ AB'C nicht den $\sphericalangle \alpha$, sondern $2R - \alpha$.

3. Fall $a < b$ (Fig. 11c). A liegt außerhalb des Kreises, der Strahl AX kann a) die Kreislinie in 2 Punkten B und B' schneiden, oder (AX') sie b) in einem Punkte B'' berühren, oder (AX'') c) gar keinen Punkt mit ihr gemeinsam haben. Den Forderungen der Aufgabe wird also entweder a) durch zwei von einander verschiedene Dreiecke ABC und AB'C, oder b) durch ein (rechtwinkliges) Dreieck AB''C, oder c) durch kein Dreieck entsprochen. Die Ergebnisse sind zusammen zu stellen.

Anm.: Eine Bedingung für $\sphericalangle \alpha$ ergiebt sich für Fall 3 aus § 12.

§ 25.

Denken wir uns für jeden Einzelfall des vorigen Paragraphen noch ein zweites $\triangle$ ACB_1 auf dieselbe Weise nach unten konstruiert, so ist im Allgemeinen $AB = AB_1$; denn wollte man annehmen, sie wären ungleich, so wären nach § 23 auch die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel ungleich, während doch $\sphericalangle$ CAB = B_1AC ist. Nur wenn $a < b$ ist, kann der Fall § 23,1 eintreten.

Ergebnis: Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen übereinstimmen, so stimmen sie im Allgemeinen auch in den übrigen Stücken überein. Ausgenommen ist nur der Fall, daß sie in den Gegenwinkeln der kleineren Seiten übereinstimmen und die den größeren gegenüberliegenden (schiefen) Winkel Supplemente sind.

§ 26.

Dreiecke, die in allen Seiten und Winkeln der Reihe nach übereinstimmen, heißen kongruent ($\cong$), weil man sie sich so aufeinander gelegt denken kann, daß sie sich decken. Die Ergebnisse der §§ 17, 18, 20, 22, 25 nennt man daher auch Kongruenzsätze.

Dreiecke sind demnach kongruent wenn sie übereinstimmen in:

I. einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln (§ 17, 18),

II. zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (§ 20),

III. den drei Seiten (§ 22),

IV. zwei Seiten und dem der einen gegenüberliegenden Winkel, mit Ausnahme des Falles, wo die der anderen Seite gegenüberliegenden (schiefen) Winkel Supplemente sind (§ 25).

Ein besonderer Fall von IV ist der Satz:

IVa. Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

§ 27.

Wenn man bei der Zeichnung der Dreiecke in § 21 mit einer beliebigen Seite, z. B. $AB = c$ anfängt, so kann der größeren der beiden anderen Seiten a entweder 1) ein rechter, oder 2) ein spitzer, oder 3) ein stumpfer Winkel gegenüberliegen.

Im Falle 1) (Fig. 12a) ist $\sphericalangle$ CAC′ ein gestreckter und $\triangle$ CC′B gleichschenklig für CC′. Unter Anwendung von § 22 ergiebt sich also der Satz:

Im gleichschenkligen Dreiecke fallen die aus der Spitze auf die Basis gefällte Senkrechte, die Linie, welche die Spitze mit der Mitte der Basis verbindet, die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze und die in der Mitte der Basis errichtete Senkrechte in eine Gerade zusammen.

Dieser Satz läßt verschiedene Formen zu; zur Übung sind einige aufzustellen und zu beweisen.

§ 28.

Im Falle 2) ist $\sphericalangle$ CAC′ ein konkaver und im Falle 3) ein konvexer. Die Dreiecke CC′A und CC′B sind gleichschenklig für CC′. Aus § 22 ergiebt sich $\sphericalangle$ $CAB = BAC'$ und $\sphericalangle$ $ABC = C'BA$ und außerdem für 3) noch $\sphericalangle$ $EAC = C'AE$ als Supplemente gleicher Winkel. Wendet man noch auf die Dreiecke BEC und BEC′, sowie AEC und AEC′ § 20 an, so kommt man zu dem

Ergebnis: Wenn zwei gleichschenklige Dreiecke die Basis gemeinsam haben, so halbiert die Verbindungslinie der Spitzen die Winkel an den Spitzen, die Basis und steht auf dieser senkrecht.

§ 29.

Aufgabe: Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

Auflösung: Man mache den Winkel zum Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks und errichte über der Basis noch ein zweites gleichschenkliges Dreieck. Die Verbindungslinie der Spitzen ist die gesuchte Halbierungslinie (§ 28).

Durch fortgesetztes Halbieren der Teile teilt man einen Winkel noch in 4, 8, 16, ... 2^n gleiche Teile ($n \geqq 1$).

Bleibt die Ausführung für konvexe Winkel dieselbe?

§ 30.

Aufgabe: Eine gegebene Strecke AB zu halbieren.

Auflösung: Man mache AB zur gemeinschaftlichen Basis zweier gleichschenkligen Dreiecke u. s. w. (§ 28).

Durch fortgesetztes Halbieren der Teile wird eine Strecke noch in 4, 8, 16, ... 2^n gleiche Teile geteilt ($n \geqq 1$).

§ 31.

I. Aufgabe: In einem Punkte A auf einer Geraden XY eine Senkrechte zu errichten.

Auflösung: Ich schneide von A aus die gleichen Strecken AB und AC ab und errichte über BC das gleichschenklige Dreieck BCD, so ist BD die gesuchte Senkrechte. Begründung s. § 27.

Die Aufgabe kann auch als besonderer Fall von § 29 angesehen werden.

II. Kann in A noch eine zweite Senkrechte auf XY errichtet werden?

§ 32.

I. Aufgabe: Aus einem Punkte A auf eine Gerade XY eine Senkrechte zu fällen (Fig. 13).

Auflösung: Man mache A zur Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis ein begrenzter Teil von XY ist u. s. w. (§ 28).

II. Hat man von A aus noch die Linie AE nach einem beliebigen Punkte von XY gezogen, so ist in dem △ AED ∢ E < D, daher AD < AE. Macht man DB = DC, so ist AB = AC (§ 20). Zieht man noch AF, so ist im △ AEF ∢ FEA > R, als Nebenwinkel des spitzen Winkels DEA, daher der größte im Dreiecke, folglich AF > AE.

Ergebnisse: 1. Wenn man aus einem Punkte A auf eine Gerade XY eine Senkrechte gefällt hat, so ist jede andere aus A nach XY gezogene Gerade größer als die Senkrechte und bildet mit XY schiefe Winkel; die Senkrechte liegt auf der Seite des spitzen Winkels.

2. Zwei Gerade AB und AC sind gleich, wenn ihre Fußpunkte vom Fußpunkte der Senkrechten gleichweit entfernt sind (sie liegen zur Senkrechten symmetrisch).

3. Die Geraden sind um so größer, je weiter ihr Fußpunkt von dem der Senkrechten entfernt ist.

III. Die aus der Spitze eines Dreiecks auf die Basis gefällte Senkrechte heißt Höhe. Da jede Seite als Basis gelten kann, so können in jedem Dreiecke drei Höhen unterschieden werden.

Aus II, 1 ergiebt sich, daß eine Höhe außerhalb des Dreiecks zu liegen kommt, wenn der Basis ein stumpfer, daß sie dagegen innerhalb fällt, wenn der Basis nur spitze Winkel anliegen.

B. Pensum der Untertertia.

§ 33.

Denkt man sich (Fig. 14) die Seite AB des △ ABC beliebig weit bis D verlängert, so ist nach § 10 ∢ CBD = CAB + BCA. Daher wird bei der Erzeugung des ∢ CBD der erzeugende Strahl BC im Verlaufe der Drehung in eine Lage BX kommen, so daß gerade ∢ CBX = BCA und ∢ XBD = CAB ist. Es läßt sich zeigen, daß dieser Strahl BX den Strahl AC nicht schneidet. Wollte man nämlich annehmen, sie schnitten sich in einem (wenn auch noch so weit entfernten) Punkte P, so müßte ∢ XBD, als Außenwinkel des △ ABP, größer sein als ∢ CAB (um den ∢ BPA), während doch ∢ XBD = CAB ist. Ebenso können auch die durch Verlängerung von CA und XB entstandenen Strahlen AC' und BX' sich nicht schneiden (in P'), weil sonst ∢ DBX', als Außenwinkel des △ ABP', größer wäre als ∢ BAC', während sie doch gleich sind als Supplemente gleicher Winkel.

Gerade Linien, welche einander nicht schneiden (soweit man sie auch verlängert) nennt man parallel (Zeichen ||).

Die Geraden CC' und XX' sind also einander parallel: CC' || XX'.

§ 34.

Wenn die Parallelen CC' und XX' (Fig. 15) von der Geraden DE in den Punkten A und B geschnitten werden, so entstehen im ganzen 8 Winkel, von denen einander zugeordnet werden, als

Gegenwinkel A_1 und B_1, A_2 und B_2, A_3 und B_3, A_4 und B_4,

Wechselwinkel $\underbrace{A_1 \text{ und } B_3,\ A_2 \text{ und } B_4}_{\text{innere}}$, $\underbrace{A_3 \text{ und } B_1,\ A_4 \text{ und } B_2}_{\text{äußere}}$,

entgegengesetzte Winkel $\underbrace{A_1 \text{ und } B_4,\ A_2 \text{ und } B_3}_{\text{innere}}$, $\underbrace{A_4 \text{ und } B_1,\ A_3 \text{ und } B_2}_{\text{äußere.}}$

Aus § 33 in Verbindung mit § 6 ergeben sich nun leicht die Sätze:

Wenn zwei parallele Geraden von einer dritten Geraden geschnitten werden, so sind 1. die Gegenwinkel gleich, 2. die Wechselwinkel gleich, 3. die entgegengesetzten Winkel Supplemente.

§ 35.

Jeder Strahl BY (Fig. 14), der zwischen AB und BX liegt, schneidet den Strahl AC, so daß ein $\triangle$ ABY entsteht. Der Außenwinkel YBD ist größer als $\sphericalangle$ CAB um den Winkel BYA (welcher gleich dem Winkel YBX ist). Wenn ein Strahl BZ zwischen BX und BD liegt, so ist $\sphericalangle$ ZBD $<$ CAB und daher $\sphericalangle$ DBZ' $>$ DAC', folglich schneiden sich die Strahlen AC' und BZ'.

Ähnlich wie im vorigen Paragraphen ergiebt sich nun:

Wenn zwei nicht parallele Gerade von einer dritten geschnitten werden, so sind weder die Gegenwinkel, noch die Wechselwinkel gleich, noch die entgegengesetzten Winkel Supplemente.

Besonders ist zu merken: Zwei nicht parallele Strahlen konvergieren, wenn die Summe der inneren entgegengesetzten Winkel $<$ 2 R ist und sie divergieren, wenn diese Summe $>$ 2 R ist.

Die Sätze in § 34 gelten daher nur für Parallele, und umgekehrt:

Wenn an zwei Geraden, die von einer dritten geschnitten werden, 1. die Gegenwinkel gleich, 2. die Wechselwinkel gleich, 3. die entgegengesetzten Winkel Supplemente sind, so sind die Geraden parallel.

Die Ergebnisse von § 33—35 können auch folgendermaßen ausgesprochen werden:

Wenn von den vier Voraussetzungen:

1. zwei Gerade sind parallel,
2. zwei Gerade bilden mit einer dritten gleiche Gegenwinkel,
3. zwei Gerade bilden mit einer dritten gleiche Wechselwinkel,
4. zwei Gerade bilden mit einer dritten entgegengesetzte Winkel, deren Summe = 2 R ist

eine erfüllt ist, so sind die anderen mit erfüllt.

§ 36.

Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt zu einer Geraden die Parallele zu ziehen.

Die Auflösung gründet sich auf § 35, 1 oder 2.

Beweise folgende Sätze: 1. Alle Senkrechten auf einer Geraden sind parallel. 2. Zwei Gerade, die einer dritten parallel sind, sind untereinander parallel. 3. Die Gerade, welche durch die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks der Basis parallel gezogen wird, halbiert den Außenwinkel (besonderer Fall von § 33).

§ 37.

Erklärung der Begriffe Parallelogramm, Trapez (Paralleltrapez), Antiparallelogramm (gleichschenkliges Trapez), Trapezoid.

Aufgabe: Ein Parallelogramm zu zeichnen aus zwei Seiten a und b und einem Winkel α.

Auflösung: Man bestimme 3 Ecken nach § 19 und die vierte nach § 36.

§ 38.

Aus § 34,3 ergiebt sich, daß im $\#$ ABCD (Fig. 16) $\sphericalangle A + B = 2R$ und $\sphericalangle B + C = 2R$ ist, daher ist $\sphericalangle A + B = B + C$, d. i. $\sphericalangle A = C$. Ebenso $\sphericalangle B = D$.

I. In jedem Parallelogramme sind also die gegenüberliegenden Winkel gleich.

Umgekehrt läßt sich vermuten, daß ein Viereck ABCD, dessen gegenüberliegende Winkel gleich sind, parallele Gegenseiten hat. In der That ergiebt sich, wenn man in der Gleichung $\sphericalangle A + B + C + D = 4R$ D durch B und C durch A ersetzt, $\sphericalangle 2A + 2B = 4R$, d. i. $\sphericalangle A + B = 2R$, also $AD \parallel BC$ (§ 35,3). Ebenso $AB \parallel CD$, also:

II. Wenn in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind, so sind die gegenüberliegenden Seiten parallel.

Das Parallelogramm ist also das einzige Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind.

Folgerung: Ein Parallelogramm hat entweder 4 rechte Winkel, oder 2 spitze und 2 stumpfe.

Aufgabe: Gegeben ist ein Winkel α eines Parallelogramms; man soll die übrigen berechnen oder konstruieren.

§ 39.

Denkt man sich in dem $\#$ ABCD (Fig. 17) die Diagonale AC gezogen, so ist in den Dreiecken ACB und ACD Seite $AC = AC$, $\sphericalangle A_1 = C_2$ und $\sphericalangle A_2 = C_1$ (§ 34,2); daher ist auch $AB = CD$ und $AD = BC$ (§ 17).

I. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Seiten gleich oder Parallele zwischen Parallelen sind gleich.

Folgerung: Senkrechte zwischen Parallelen sind gleich oder Parallele haben überall denselben Abstand von einander.

Umgekehrt ergiebt sich aus §§ 22 und 35,2:

II. Wenn in einem Vierecke die Gegenseiten gleich sind, so sind sie auch parallel.

Hat man auf zwei Parallelen die gleichen Strecken AB und DC abgeschnitten, so ist zu vermuten, daß auch AD parallel und gleich BC ist. In der That ergiebt sich dies aus §§ 20 und 35,2.

III. Wenn in einem Vierecke zwei Gegenseiten gleich und parallel sind, so sind es auch die andern.

Bei der Aufgabe in § 37 läßt sich die vierte Ecke auch nach § 39, II oder III bestimmen.

§ 40.

Die beiden kongruenten Dreiecke, in welche jedes Parallelogramm durch eine Diagonale geteilt wird, können für die Diagonale entweder gleichschenklig, oder ungleichschenklig sein; hiernach sind in einem Parallelogramme entweder alle 4 Seiten gleich (gleichseitige Parallelogramme), oder nur je 2 gegenüberliegende gleich, je 2 anstoßende aber ungleich (ungleichseitige Parallelogramme). Unter Berücksichtigung von § 38, Folgerung ergeben sich daher folgende Arten von Parallelogrammen:

I. Gleichseitige.

a) rechtwinklige: Quadrat. b) schiefwinklige: Rhombus (Raute).

II. Ungleichseitige.

a) rechtwinklige: Rechteck. b) schiefwinklige: Rhomboïd.

Die Aufgabe § 37 zerfällt daher in folgende vier Sonderaufgaben:

1. Ein Quadrat zu zeichnen aus der Seite a.
2. Einen Rhombus zu zeichnen aus der Seite a und dem $\sphericalangle\ \alpha$.
3. Ein Rechteck zu zeichnen aus den Seiten a und b.
4. Ein Rhomboïd zu zeichnen aus den Seiten a und b und dem $\sphericalangle\ \alpha$.

§ 41.

Zieht man in dem # ABCD (Fig. 18) die beiden Diagonalen, so wird dasselbe in vier Dreiecke geteilt, von denen jederzeit je zwei gegenüberliegende (Scheiteldreiecke) kongruent sind (§ 39, I; § 34, 2; § 17); daher ist $AE = EC$ und $BE = ED$.

I. **In jedem Parallelogramme halbieren die Diagonalen einander.**

Zwei anstoßende Dreiecke sind nur dann kongruent, wenn # ABCD gleichseitig ist (Fig. 19). Dann ist z. B. in den Dreiecken AEB und AED $\sphericalangle\ A_1 = A_2$, ferner $\sphericalangle\ BEA = AED$; diese Winkel sind Nebenwinkel, folglich rechte.

II. **In den gleichseitigen Parallelogrammen halbieren die Diagonalen die Winkel, durch die sie gehen und stehen auf einander senkrecht.**

Für die rechtwinkligen Parallelogramme (Fig. 20) bemerke man, daß $\triangle\ ABD \cong ABC$ ist (§ 20), also $AC = BD$.

III. **In den rechtwinkligen Parallelogrammen sind die Diagonalen einander gleich.**

Die sämtlichen Eigenschaften der Diagonalen eines Quadrats sind anzugeben.

Hat man ein ungleichseitiges Parallelogramm ABCD (Fig. 21), in welchem $AB > AD$ ist, so ist $\sphericalangle\ D_2 > B_1$ (§ 12) und, da $\sphericalangle\ D_2 = B_2$ ist, $\sphericalangle\ B_2 < B_1$. Ebenso $\sphericalangle\ D_2 > D_1$, $A_2 > A_1$, $C_1 > C_2$. Da nun $\sphericalangle\ BEA = C_1 + B_2$ und $\sphericalangle\ AED = C_2 + D_1 = C_2 + B_1$ ist, so ist $\sphericalangle\ BEA > AED$; daher $\sphericalangle$ BEA ein stumpfer und AED ein spitzer.

IV. (Gegensatz zu II). **In den ungleichseitigen Parallelogrammen werden die Winkel durch die Diagonalen in ungleiche Teile geteilt, der größere Teil liegt der kleineren Seite an; die Diagonalen schneiden sich unter schiefen Winkeln, der stumpfe Winkel liegt der größeren Seite gegenüber.**

Um die Diagonalen eines schiefwinkligen # ABCD, in welchem $\sphericalangle\ A < R$ und $\sphericalangle\ B > R$ ist, untereinander vergleichen zu können, ziehe man $DE \parallel AC$ bis zur Verlängerung von BA; dann ist $DE = AC$ (§ 39). Fällt man nun die Senkrechte DF auf AB, so liegt diese nach § 32, II, 1 auf der Seite des $\sphericalangle$ DAB. Da nun $EA = DC = AB$ ist, so liegt B näher als E an F, mag nun F (Fig. 22a) zwischen A und B, oder (Fig. 22b) über B hinaus zu liegen kommen. Also ist $DE > DB$ (§ 32, II, 3), folglich auch $AC > DB$.

Sollte DF mit DB zusammenfallen, so ergiebt sich die Ungleichheit $DE > DB$ noch einfacher.

V. (Gegensatz zu III). **In den schiefwinkligen Parallelogrammen sind die Diagonalen ungleich, die größere liegt dem stumpfen Winkel gegenüber.**

Als Übungsstoff Sätze über das Antiparallelogramm, kompliziertere Konstruktionen von Parallelogrammen, Trapezen, Trapezoiden. Konstruktionen von Dreiecken, bei welchen Parallelen zu ziehen sind.

§ 42.

Man denke sich aus dem Punkte C (Fig. 23) außerhalb der Linie XY nach dieser die gleich großen Strecken CA und CB (§ 32, II, 2) gezogen und CA um C so lange gedreht, bis sie mit CB zusammenfällt. Da jede Strecke, die von C aus nach einem zwischen A und B gelegenen Punkte von XY gezogen wird, kleiner als CA oder CB ist (§ 32, II, 3), so tritt Punkt A bei der Drehung aus der Geraden XY (nach unten) heraus und fällt erst in B wieder mit ihr zusammen. Auch kein durch zwei beliebige einander noch so nahe Punkte D und E begrenztes Stück der von A durchlaufenen Linie kann geradlinig sein, wie sich auf dieselbe Weise ergiebt. A durchläuft also eine krumme Linie, welche Kreisbogen genannt wird. Läßt man CA eine volle Umdrehung machen, so erhält man eine geschlossene krumme Linie, welche Kreislinie oder Peripherie heißt; die von ihr begrenzte Ebene wird Kreis genannt. C nennt man den Mittelpunkt oder das Zentrum, die erzeugende Strecke CA den Radius vector, die Verbindungsstrecke des Mittelpunktes mit einem beliebigen Punkte der Peripherie Radius oder Halbmesser.

Ferner: Durchmesser, Sehne, Sekante, Sektor oder Ausschnitt, Segment oder Abschnitt, Peripherie- und Zentriwinkel.

Ergebnisse: I. Alle Radien und daher auch alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich, denn jeder Radius ist nur eine besondere Lage des Radius vector und der Durchmesser besteht aus zwei Radien.

II. Die Kreislinie kann mit einer Geraden nicht mehr als zwei Punkte gemeinsam haben.

§ 43.

I. Zwei Kreise, die denselben Radius haben, sind kongruent, da ihre Radii vectores zur Deckung gebracht werden können.

Denkt man sich (Fig. 24) die Strecke AB um ihren Mittelpunkt C um 180^0 gedreht, so erzeugt CB das Kreissegment BDA und CA das Kreissegment AEB, die zusammen einen vollen Kreis ausmachen. Bei der völligen Gleichförmigkeit in der Bewegung der beiden Radii vectores ergiebt sich, daß jeder die Hälfte des Kreises und jeder der Punkte A und B die Hälfte der Kreislinie erzeugt hat. Also:

II. Der Durchmesser teilt den Kreis in zwei kongruente Segmente und die Peripherie in zwei gleiche (kongruente) Bogen.

Die beiden kongruenten Segmente heißen Halbkreise, die beiden gleichen Bogen Halbkreisbogen (öfters auch Halbkreise genannt).

§ 44.

Denkt man sich (Fig. 25) den Sektor ACB um den Mittelpunkt C gedreht bis in die Lage A'CB', so beschreiben wegen der Gleichförmigkeit der Bewegung die Radii vectores CB und CA kongruente Sektoren und gleichzeitig die Punkte B und A gleiche Bogen. Außerdem ist $\sphericalangle$ ACA' = BCB'. Zieht man noch die Sehnen A'A und B'B, so sind diese gleich (§ 20).

Ergebnis: Zu gleichen Bogen gehören gleiche Zentriwinkel, gleiche Sehnen, kongruente Segmente und Sektoren.

Der Satz läßt sich noch in andere Formen bringen, in welche?

Wenn daher die Kreisperipherie in beliebig viele gleiche Bogen geteilt ist und die Teilpunkte mit dem Zentrum verbunden werden, so werden die um das Zentrum herumliegenden 4 R ebenfalls in gleiche Teile geteilt. Hierauf beruht die Ausmessung der Winkel nach Graden (vergl. § 6 a. E.)

Aufgabe: Einen gegebenen Bogen zu halbieren.

Auflösung: Man halbiere den zugehörigen Zentriwinkel.

§ 45.

Im Kreise C (Fig. 26) sei Bogen AB > Bogen DE. Denkt man sich von B aus Bogen BF = Bogen DE abgeschnitten, so ist nach § 44 ∢ BCF = ECD und BF = DE. Nun ist ∢ BCA > BCF, weil F zwischen A und B liegt; folglich auch ∢ BCA > ECD.

Ferner ist ∢ FBC = CFB (§ 11), aber ∢ AFB > CFB (um AFC) und ∢ FBA > FBC (um ABC), folglich ∢ AFB > FBA und daher auch AB > BF oder DE (§ 14).

Ergebnis: Zum größeren Bogen gehört auch der größere Zentriwinkel und die größere Sehne.

Zur Übung beweise man den Satz in den Fassungen:

1. Zum größeren Zentriwinkel gehört der größere Bogen und die größere Sehne.
2. Zur größeren Sehne gehört der größere Zentriwinkel und Bogen (indirekt).

§ 46.

Satz vom Zentriwinkel und Peripheriewinkel über demselben Bogen in 3 Fällen, wie in Kambly Planimetrie § 92.

Folgerungen:

1a. Alle Peripheriewinkel auf demselben oder auf gleichen (§ 44) Bogen sind einander gleich.

1b. Zu gleichen Peripheriewinkeln gehören gleiche Bogen.

2a. Zum größeren Bogen gehört der größere Peripheriewinkel.

2b. Zum größeren Peripheriewinkel gehört der größere Bogen.

3a. Der Peripheriewinkel über dem Durchmesser (oder im Halbkreise) ist ein rechter; denn der zugehörige Zentriwinkel ist ein gestreckter.

3b. Im rechtwinkligen Dreiecke ist die nach der Mitte der Hypotenuse gezogene Transversale gleich der Hälfte der Hypotenuse (ergiebt sich auch aus § 41, III).

§ 47.

Wenn man (Fig. 27) nach den Endpunkten der Sehne AB die Radien CA und CB zieht, so ist △ ABC gleichschenklig für AB. Das Ergebnis von § 17 kann nun in folgender Form ausgesprochen werden:

Die aus dem Zentrum auf eine Sehne gefällte Senkrechte halbiert die Sehne.

Zur Übung suche man den Satz noch in folgenden Formen zu beweisen:

1. Die Linie, welche das Zentrum mit der Mitte der Sehne verbindet, steht auf dieser senkrecht.
2. Die in der Mitte einer Sehne errichtete Senkrechte trifft das Zentrum (vergl. §§ 31, II und 47, 1).

Der letzte Satz liefert ein Mittel, in einem Kreise, von welchem man nur die Peripherie kennt, den Mittelpunkt herzustellen.

Folgerung: Der Radius, der auf einer Sehne senkrecht steht, halbiert den zugehörigen Bogen.

Aufgabe: In einen gegebenen Kreis C eine Sehne einzutragen, die einer gegebenen Strecke a gleich und einer gegebenen Geraden XY parallel ist.

§ 48.

Sätze über gleiche Sehnen, wie in Kambly Planimetrie § 86.

§ 49.

Im Kreise C (Fig. 28) sei Sehne AB > DE, dann ist auch Bogen AB > DE. Man ziehe nun den Radius CF, welcher senkrecht auf AB steht (in G) und mache Bogen FD′ = FE′ = $\frac{1}{2}$ DE, dann ist Sehne D′E′ = DE (§ 44). Nun ist Bogen AD′ = BE′ (§ 47, Folg.), also ∢ D′BA = BD′E′ (§ 46, 1a), daher D′E′ ∥ AB. Da nun AB ⊥ CE ist, so steht auch D′E′ ⊥ CF (in H). Fällt man nach CK ⊥ DE, so ist CH = CK; folglich CK > CG.

Ergebnis: I. Die größere Sehne hat die kleinere Entfernung vom Zentrum.

Weiß man umgekehrt, daß CK > CG ist, so denkt man sich CH = CK auf CF abgeschnitten, wobei H zwischen G und F zu liegen kommt. Errichtet man nun in H die senkrechte Sehne D′E′, so ist D′E′ = DE (§ 48). Ferner ist Bogen AB > D′E′, also auch Sehne AB > D′E′ und daher auch Sehne AB > DE.

II. Die dem Mittelpunkte näher liegende Sehne ist die größere.

Folgerung: Der Durchmesser ist die größte Sehne, denn seine Entfernung vom Zentrum ist = 0. Daß jede nicht durch das Zentrum gehende Sehne kleiner ist als ein Durchmesser, ergiebt sich auch aus § 15.

§ 50.

Eine Sekante des Kreises C (Fig. 29) werde so verschoben, daß sie sich vom Zentrum entfernt und immer senkrecht auf dem Radius CF bleibt. Die durch die Kreislinie begrenzten Sehnen AB, DE u. s. w. werden hierbei immer kleiner (§ 49, II) und ihre Endpunkte nähern sich, da Bogen AF = BF, Bogen DF = EF u. s. w. ist, gleichförmig dem Punkte F, sodaß sie schließlich auch gleichzeitig mit F zusammenfallen werden. Diese Grenzlage der Sekante stellt die Gerade GH dar, welche also mit der Peripherie nur den einen Punkt F gemeinsam hat. Man sagt von ihr, sie berührt den Kreis oder ist eine Tangente an den Kreis und F ihr Berührungspunkt.

Ergebnis: I. Die im Endpunkte eines Radius errichtete Senkrechte ist eine Tangente.

Die Gerade XY habe mit der Peripherie des Kreises C (Fig. 30) den Punkt A gemeinsam, sodaß Radius CA schief auf XY stehe. Nach § 32, II, 2 läßt sich dann nach XY eine Linie CB ziehen, welche = CA, also ein Radius ist.

II. Eine durch den Endpunkt eines Radius gezogene Gerade, welche mit dem Radius schiefe Winkel bildet, ist eine Sekante.

Folgerungen:
1. Der nach dem Berührungspunkte gezogene Radius steht senkrecht auf der Tangente.
2. Die aus dem Zentrum auf die Tangente gefällte Senkrechte trifft den Berührungspunkt.
3. Die im Berührungspunkte auf der Tangente errichtete Senkrechte geht durch das Zentrum.

Aufgabe: In einem gegebenen Punkte A an einen gegebenen Kreis C eine Tangente zu ziehen. Die Auflösung ergiebt sich unmittelbar aus I.

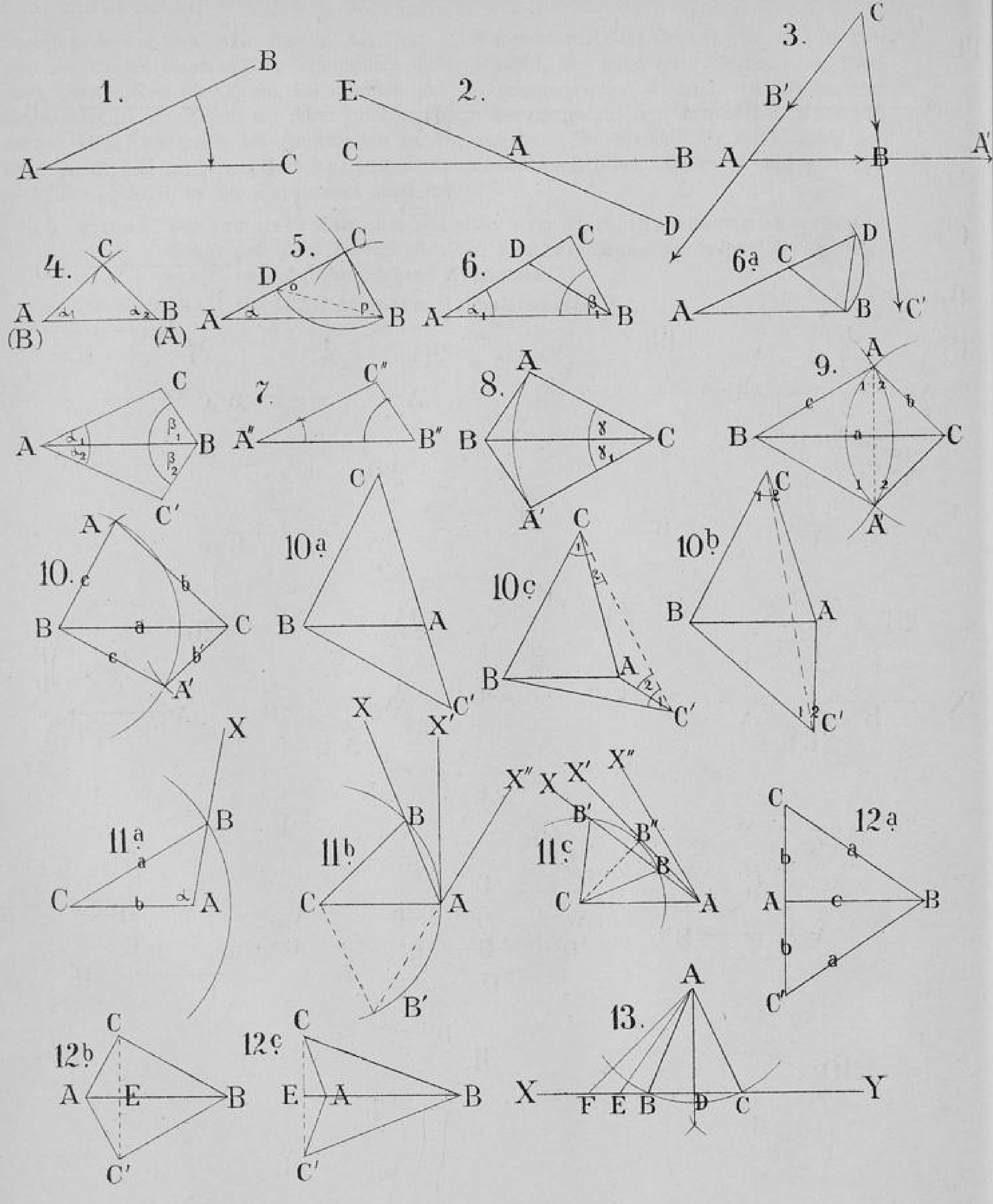
§ 51.

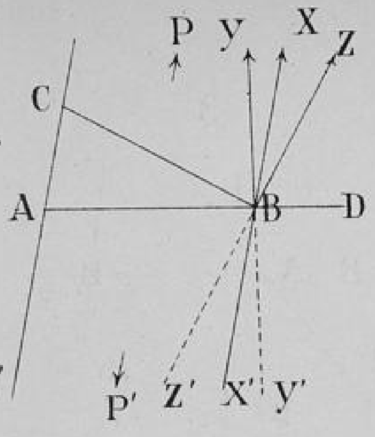
Denkt man sich einen Peripheriewinkel um seinen Scheitel A gedreht, so bleibt die Größe des zugehörigen Bogens unverändert (§ 46, 1b). Bei der Drehung kann der Peripheriewinkel in eine solche

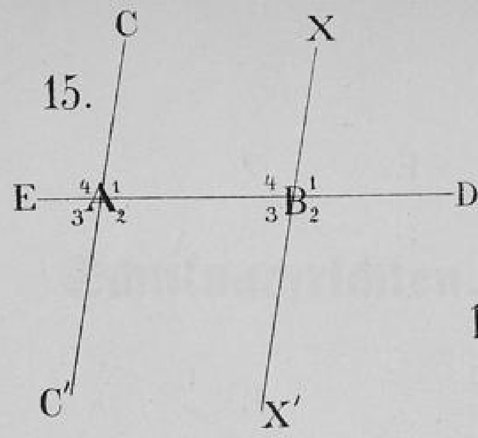
Lage kommen, daß einer seiner Schenkel AG (Fig. 31) Tangente wird. Es fragt sich, ob auch für diese Lage des Winkels Bogen AB die ursprüngliche Größe beibehält, oder mit anderen Worten, ob ∢ BAG gleich jedem anderen über Bogen AB stehenden und im entgegengesetzten Abschnitte (AEB) liegenden Peripheriewinkel ist. Anstatt mit einem dieser unzähligen Peripheriewinkel kann man aber ∢ BAG auch mit ∢ DCA, der Hälfte des Zentriwinkels BCA, vergleichen. Die Gleichheit der Winkel BAG und DCA ergiebt sich nun daraus, daß beide dasselbe Komplement CAD haben. Ebenso ist auch ∢ G'AB $= ACD' = \frac{1}{2}$ ACB, da ihre Supplemente gleich sind.

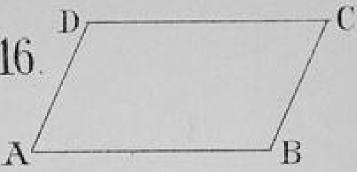
Ergebnis: Der von einer Tangente mit einer vom Berührungspunkte ausgehenden Sehne gebildete Winkel ist gleich dem zur Sehne gehörigen Peripheriewinkel im entgegengesetzten Abschnitte.

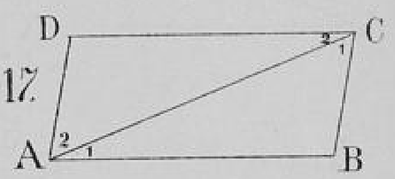
Die Winkel BAG und G'AB nennt man Abschnittswinkel.

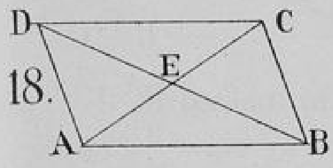

1.
2.
3.
4.
5.
6.
6a.
7.
8.
9.
10.
10a.
10c.
10b.
11a.
11b.
11c.
12a.
12b.
12c.
13.

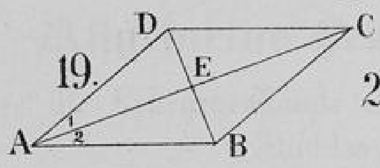
14.


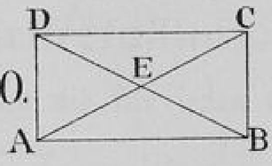
15.


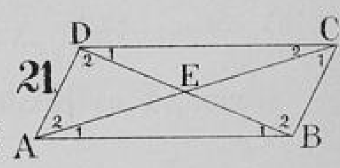
16.


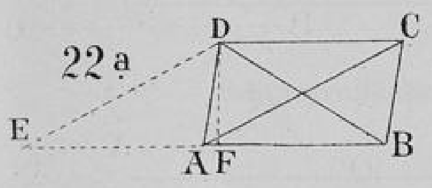
17.


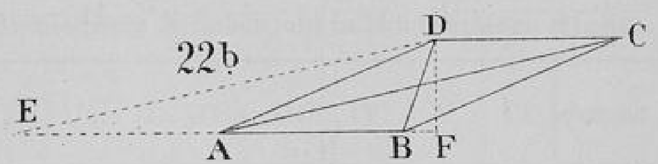
18.


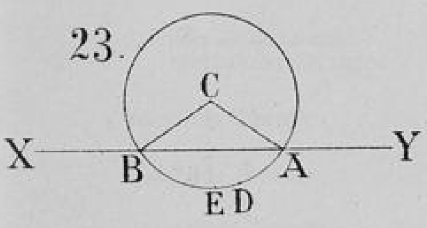
19.


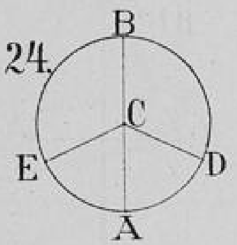
20.


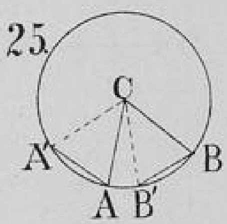
21.


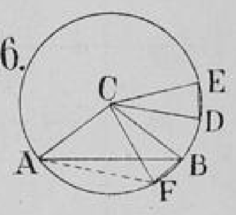
22 a


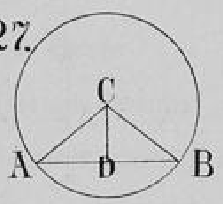
22 b


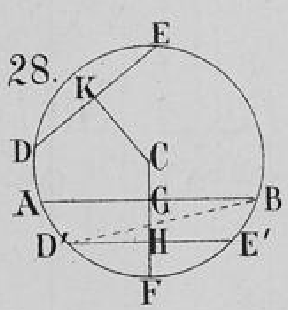
23.


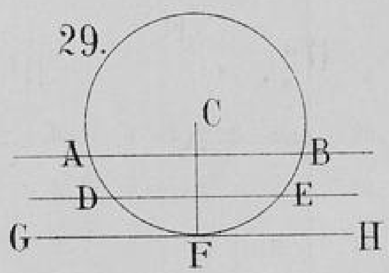
24.


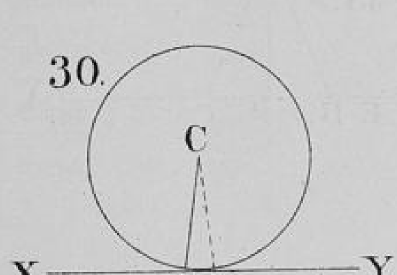
25.


26.


27.


28.


29.


30.


31.