Anwendung des Parallelogramms der Bewegungen auf Untersuchung einer Curve.

§ 1.

Wenn sich um den in der Peripherie des Kreises um c gelegenen Punkt a (Fig. I. II. III.) eine Linie als Radiusvector dreht und man in jeder Lage auf demselben von dem Durchschnittspunkte mit dem Kreise ein constantes Stück d e abschneidet, so beschreibt der Endpunkt e eine geschlossene Curve, die offenbar auf beiden Seiten des Durchmessers a b symmetrisch werden muß. So lange der Winkel $b\,a\,d < 1\,R$ oder wenn er $> 3\,R$, liegt das constante Stück d e ganz außerhalb des Kreises, wenn dagegen $b\,a\,d > 1\,R$ und $< 3\,R$, wird dasselbe wenigstens theilweise in den Kreis hineinfallen. Wenn die constante Linie $e\,d > a\,b$ angenommen wird (Fig. I.), muß e immer außerhalb des Kreises bleiben, ist dagegen $d\,e < a\,b$ angenommen (Fig. III.), so muß es 2 Stellungen des Radiusvectors geben, in welchen e mit a zusammenfällt, und zwischen welchen der Punkt e sich innerhalb des Kreises bewegt, so daß also die Curve b durch a in den Kreis ein- und ebendaselbst wieder aus ihm heraustretend innerhalb eine Schleife bildet. Wenn das constante Stück $d\,e = a\,b$ angenommen wird (Fig. III.), so hat, wie leicht erhellet, die Curve nur den Punkt a mit dem Kreise gemein (für $b\,a\,d = 2\,R$), liegt aber sonst ganz außerhalb desselben.

§ 2. Tangente und Normale.

Um die Tangente an den Punkt e der Curve zu ziehen, bestimme man die Richtung, in welcher sich derselbe bei Drehung des Radiusvectors bewegt. Das Maaß der Geschwindigkeit ist ganz willkürlich; es ist aber vortheilhaft und erleichtert die Untersuchung, wenn wir die Drehung des Radiusvectors gleichmäßig vor sich gehen lassen und die Drehungsgeschwindigkeit eines jeden Punktes desselben seiner Entfernung von a gleichsetzen.

Da Winkel $d\,c\,b = 2\,d\,a\,b$, so wird c d sich mit zweimal größerer Winkelgeschwindigkeit bewegen, als der Radiusvector, mithin die Geschwindigkeit von d e durch die Tangente $d\,g = 2\,c\,d = a\,b$ ausgedrückt werden müssen.*) — Fällt man nun von g auf d e ein Loth g f,

*) Der Punkt d durchläuft demnach, während der Radiusvector eine Umdrehung macht, den Kreisumfang zweimal.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

so ist g f die auf dem Radiusvector senkrechte und d f die ihm parallele Componente der Bewegung d g. Offenbar ist Dreieck d f g $\cong$ d a k, so daß also (wie auch schon aus der oben gemachten Annahme über das Maaß der Drehungsgeschwindigkeit unmittelbar hervorgeht) die Drehungsgeschwindigkeit des Punktes d = d a, seine Geschwindigkeit in Richtung des Radiusvectors = a k zu setzen. Die Drehungsgeschwindigkeit des Punktes e wird nach Obigem auszudrücken sein durch das Perpendikel e h = a e; seine Geschwindigkeit in der Richtung a e muß, weil d e eine constante Größe hat, derjenigen des Punktes d gleich sein. Wir drücken sie aus durch die Verlängerung e l = a k. Nunmehr ist die Diagonale des Rechtecks e i die Gesammtbewegung des Punktes e und also die Tangente der Curve. Dreieck a e k $\cong$ e h i, daher Winkel a e k = h e i und folglich k e i = 1 R. Demnach k e die Normale. Man findet also dieselbe sehr leicht für einen beliebigen Punkt der Curve, wenn man letzteren mit dem dem Durchschnittspunkte des zugehörigen Radiusvectors mit der Kreisperipherie auf derselben gegenüberliegenden Punkte verbindet.

§ 3. Eingeschriebener Kreis.

Wenn man mit dem Radius b o = d e um b einen Kreis schlägt, so liegt derselbe ganz innerhalb der Curve und berührt dieselbe nur in den zwei Punkten w und o. Es erhellet das leicht, wenn man bedenkt, daß die Entfernung des Punktes e von b die Hypotenuse des Dreiecks d e b und also immer größer als d e ist und nur, wenn der Radiusvector in die Richtung von a b gebracht wird, = d e = b o = b w wird. Auf eine sehr einfache Weise kann die Curve auch mit Beziehung auf den zuletzt betrachteten Kreis entstanden gedacht werden. Zieht man nämlich die Tangente e n und den Radius b n, so ist offenbar e d b ein rechter Winkel, desgleichen b n e, ferner n b = e d, folglich $\triangle$ b n e $\cong$ b d e, also Fig. n b e d ein Rechteck, folglich auch n e d = 1 R. Wenn man also an den eingeschriebenen Kreis Tangenten zieht und auf dieselben von dem Punkt a aus Lothe fällt, so verbindet unsere Curve die Fußpunkte aller dieser Lothe.

§ 4. Flächenraum.

Wenn auf einer Ebene sich zwei gerade Linien bewegen, und ihre Bewegungen, so weit sie rechtwinklig auf deren Richtungen geschehen (Drehungen oder Fortrücken parallel mit sich selbst), übereinstimmen, so sind die Flächen, welche sie bestreichen, gleich, wenngleich ihre Bewegungen, so weit sie in Richtung der Linien selbst geschehen, verschieden sind. Hierbei sind jedoch doppelt oder mehrfach bestrichene Flächenstücke respektive doppelt oder mehrfach zu berechnen.*)

§ 5.

Denkt man sich eine Linie a b (Figur IV.) um den festen Punkt a bewegt und an b die Linie d b rechtwinklig befestigt, so wird der Kreisausschnitt, welchen, bei der Drehung die Linie a c, welche gleich d b ist, bestreicht, gleich dem Stücke eines kreisförmigen Ringes sein, welches zu gleicher Zeit d b bestreicht. Man kann sich nämlich die Bewegung der Linie d b zusammengesetzt denken aus einer Drehung um den beweglichen Punkt b, welche ganz gleichmäßig geschieht mit der Drehung von c a um a, und einer fortschreitenden Bewegung = der des Punktes b und in Richtung der Linie selbst. Diese letztere Bewegung kommt daher für die Flächenerzeugung nicht mit in Betracht. Obige Schlüsse bleiben offenbar richtig, wenn man sich a c und d b nicht constant denkt, sondern während der Bewegung sich die Längen beider in übereinstimmender Weise ändern läßt. Sind an

*) Das hier ausgesprochene Prinzip hat in noch allgemeinerer Weise Gültigkeit.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Linie a b 2 Linien von constanter oder übereinstimmend sich ändernder Länge befestigt, so erhellet gleichfalls, daß die von denselben bestrichenen Flächenräume gleich sein müssen.

§ 6.

Ein Theil des von der hier behandelten Curve umschlossenen Flächenraumes wird von dem eingeschriebenen Kreise eingenommen und bleiben außerhalb desselben noch zwei sichelförmige Flächenstücke übrig. Es läßt sich nun mit Hülfe des in § 4 aufgestellten Prinzips und der § 5 bereits davon gemachten Anwendung leicht zeigen, daß eine jede dieser Sicheln gleich dem Kreise um c ist. Die Kreistangente c n ist immer = der Sehne b d; denkt man sich nun beide Linien rechtwinklig an den Radius b n befestigt und denselben von o bis w herumgedreht, so bestreicht die Tangente die eine Sichel und die Sehne den Kreis um c vollständig und es müssen daher nach § 5 diese beiden Flächen einander gleich sein. Hieraus folgt, daß der Flächenraum der ganzen Curve gleich ist dem Kreise um b + dem doppelten Kreise um c.

Für den Fall, daß die Curve eine Schleife bildet, wird der von derselben umschlossene Flächenraum doppelt bestrichen. Man kann aber leicht denselben apart angeben. In der Stellung der Kreistangente a k′ (Fig. II) und der dazu gehörigen des Radiusvectors a d′ beginnt die erstere die Bestreichung die über w a belegene Hälfte der Schleife, zugleich aber auch des von zwei graden Linien und einem Kreisbogen begrenzten Stückes a k′ und hat dieselbe vollendet, wenn der Radiusvector in die Lage b a übergegangen ist. Diese Gesammtfläche wird also gleich dem von der Sehne b d′ während derselben Zeit bestrichenen Kreisabschnitte b k d′ sein. Durch Abzug des Flächeninhalts des Stückes w a k′ findet man den Inhalt der halben Schleife.

§ 7. Krümmungskreis und Evolute.

Es läßt sich unschwer beweisen, daß der Krümmungsmittelpunkt einer Curve zusammenfällt mit demjenigen Punkte der Normale, um welchen sie sich bei Fortbewegung des zugehörigen Punktes auf der Curve dreht. Der Drehungspunkt einer Linie kann aber gefunden werden, wenn man nur die gegen dieselbe lothrechte Componente der Bewegung zweier Punkte kennt. Wenn man nämlich die Endpunkte der die gedachten Bewegungscomponenten darstellenden Linien verbindet, so wird diese Verbindungslinie die in Rede stehende sich drehende Linie in ihrem Drehungspunkte schneiden.

Hat man nun die Tangente einer Curve durch das Parallelogramm der Bewegungen bestimmt, so kennt man damit schon die Bewegung eines Punktes der Normale. Indem man aber die Richtung der Normale aus dem Bildungsgesetze der Curve abgeleitet hat, hat man damit zugleich die Kenntniß der Lage und des Gesetzes der Fortbewegung wenigstens eines andern Punktes erlangt.

Es war nun oben bereits nachgewiesen, daß die Normale durch den d auf der Kreisperipherie gegenüberliegenden Punkt k gehen müsse. Nun ist allerdings die Bewegung des Durchschnittspunktes der Normale mit dem Kreise nicht identisch mit der eines auf der Normale festen Punktes. Weil es aber hier nur auf die gegen die Normale senkrechte Bewegungscomponente ankommt, so darf man die Bewegung des Durchschnittspunktes für die Bewegung eines auf der Normale festen Punktes selbst nehmen; denn offenbar kann ein auf einer Linie beweglicher Punkt zwar in Richtung dieser Linie eine unabhängige Bewegung haben, rechtwinklig auf die Linie dagegen muß er ganz deren Bewegung mitmachen.

Nach dem oben angenommenen Maaße der Bewegung ist die Bewegung des Punktes k auszudrücken durch die dem Kreisdurchmesser gleiche Linie k m (Figur I.). Die Kathede k v ist nun die gegen k e rechtwinklige Componente gedachter Bewegung des Punktes k. Der Durchschnittspunkt r der Verbindungslinie v i mit k e wird daher der Mittelpunkt des Krümmungskreises sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dreieck m v k $\backsim$ k p d, folglich v k gleich k p; k e war gleich e i, so daß sich also verhält e r zu k r wie k e zu k p; das heißt: der Krümmungsmittelpunkt theilt die Normale im Verhältnisse der ganzen Normale zu dem innerhalb des Kreises liegenden Stücke derselben.

Da somit für jeden Punkt der Curve der Krümmungsradius gefunden werden kann, so ist hiermit zugleich die Möglichkeit gegeben, beliebig viele Punkte der Evolute aufzufinden.

Besonders wichtig ist es, zu untersuchen, ob der Krümmungshalbmesser an irgend einer Stelle unendlich groß werden könne. Dieses könnte nur der Fall sein, wenn k v = e i oder = e k wäre und beide Linien auf dieselbe Seite der Normale fielen. Da k p = k v, so kann selbstverständlich dieser Fall nur dann eintreten, wenn der Punkt k zwischen p und e fällt, was wiederum nur dann der Fall sein wird, wenn Winkel b a d zwischen 1 R und 3 R liegt, also etwa in einer Stellung, wie sie Fig. **VI.** anschaulich macht. Die Untersuchung, wenn e k = k p werden muß, kommt auf Eines hinaus mit der Aufgabe, eine gegebene Linie = e d in den Kreis um c so als Secante einzutragen, daß eine von ihrem Endpunkte außerhalb des Kreises durch den auf der Peripherie dem andern Endpunkte gegenüberliegenden Punkt gezogene Secante halb außer- halb innerhalb des Kreises fällt.

Man findet das als Sehne einzutragende Stück leicht folgendermaßen. Man zeichne zwei sich von außen berührende Kreise = dem um c und ziehe zu dem einen vom Berührungspunkte K aus (Fig. V.) den Durchmesser K D, nehme die Linie e d in den Zirkel und schlage von D aus einen Kreis, der den zweiten Kreis in E schneidet. Nunmehr werden die beiden Theile der von E aus durch K gezogenen Secante E K und K P einander gleich sein. Wenn man also (Fig. **VI.**) eine Linie = A D von a aus in den Kreis einträgt, so hat man die Stellung des Radiusvectors gefunden, bei welcher der Krümmungshalbmesser unendlich wird, denn jetzt muß e k = k p also auch e i = k v, demnach i v parallel e k sein.

Die Lösung der Aufgabe (Fig. V.) wird offenbar unmöglich, wenn E D kleiner als der Durchmesser D K, oder größer als das Doppelte desselben ist. In beiden Fällen hat also die Curve keine Wendepunkte ihrer Krümmung. Der erste dieser Fälle tritt ein, wenn die Curve wie in Fig. **II.** eine Schleife bildet.

Es giebt offenbar zwei auf beiden Seiten der Linie a b symmetrische Stellungen des Radiusvectors, bei welchen der Krümmungshalbmesser unendlich wird, a d und a d′ (Fig. **VI.**). Befindet sich der Radiusvector zwischen beiden Stellungen, so wird natürlich k v größer als e i und es fällt der Krümmungsmittelpunkt außerhalb der Curve, so daß hier eine concave Stelle entsteht. Eine solche kann nach Obigem nicht entstehen, wenn e d größer genommen wird als 2 a b.

§ 8.

Für den Fall, daß e d = a b (Fig. **III.**) gewährt die nähere Betrachtung der Evolute ein besonderes Interesse. Hier ist k d = d e; weil aber d p ein Loth auf k e, so ist k p = p e. Weil aber allgemein k e : k p = e r : r k, so muß k r immer gleich $\frac{1}{3}$ k e sein. Zieht man mit d e die Parallele r x, so ist k x = $\frac{1}{3}$ k d und x r = $\frac{1}{3}$ d e also eine constante Größe. Ferner, weil Dreieck c x y $\backsim$ a d c und demgemäß gleichschenklig, c x aber = $\frac{1}{3}$ c k, so ist auch c y immer gleich dem dritten Theile des Radius des Kreises um c. Ein um c geschlagener dreifach kleinerer Kreis als der bereits vorhandene wird daher immer durch x und y gehen. Wir sehen also, daß die Evolute ganz nach demselben Gesetz gebildet wird, als die Hauptcurve. Der Punkt y entspricht dem Punkte a, der Punkt x dem Punkte d, die constante Länge x r der constanten Linie d e. Die Evolute ist daher ihrer Evolvente ähnlich, nur dreimal kleiner und hat die umgekehrte Lage.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 9. Verallgemeinerung der bisherigen Betrachtungen.

Die bisher betrachtete Curve, so wie Fig. **I.** dieselbe darstellt, ist ein spezieller Fall der verkürzten, so wie sie in Fig. **II.** erscheint, einer verlängerten Epiciploide; in dem Falle aber, welchen Fig. **III.** anschaulich macht, geht die Curve über in die Cardioide.

Es wird genügen, den Beweis für den zuerst erwähnten Fall zu führen. Wenn (Fig. **IX.**) der um f mit dem Radius f h beschriebene Kreis auf dem ihm gleichen Kreise um c fortrollt und e ein auf ersterem befestigter Punkt ist, so wird, wenn der Kreis um f von n bis p gerollt ist und in der Anfangsstellung f i mit dem gemeinschaftlichen Durchmesser beider Kreise zusammen fiel, Winkel $e f h = p c n$ sein. Wird nun um c mit dem Radius f e ein Kreis beschrieben und e mit a, c mit dem Durchschnittspunkte d verbunden, so ist offenbar Winkel $d c g = e f h$, folglich Viereck c d e f ein Parallelogramm, folglich $d e = c f$. Es behält also d e beim Fortrollen des Kreises immer dieselbe Länge, so daß wir also hier auf das in § 1 angegebene Bildungsgesetz zurückgekommen sind.

Wir wollen nun im Folgenden eine Construction angeben, vermittels welcher man ganz allgemein Tangente und Krümmungskreis einer jeden Curve finden kann, welche durch einen an einer beliebigen Curve befestigten Punkt beschrieben wird, die auf einer andern ebenfalls beliebigen Curve fortrollt, unter der Voraussetzung jedoch, daß man im Stande ist, Tangente und Krümmungskreis der letztgenannten beiden Curven zu construiren.

§ 10.

Wenn der in Fig. **X.** dargestellte Kreis auf der beliebigen Curve k a fortrollend das zwischen den bezeichneten Punkten liegende Stück derselben zurückgelegt hat, so ist der von seinem Mittelpunkte beschriebene Weg ein Stück m c der mit k a in einer dem Radius gleichen Entfernung parallelen Curve. Zwei zwischen denselben Normalen liegende Stücke paralleler Curven unterscheiden sich aber immer um die Länge eines Kreisbogens, welchen ein dem Winkel zwischen den Normalen gleicher Centriwinkel von einem Kreise abschneiden würde, dessen Radius gleich der Entfernung der parallelen Curven von einander wäre. Es ist also, wenn die Curve nach dem Kreise zu als convex gedacht wird (für den Fall der Concavität würde sich der Beweis ähnlich führen lassen), m c um den Bogen eines Centriwinkels = k q a des rollenden Kreises größer als k a. Um einen gleichen Bogen würde aber ein Punkt der Peripherie sich um c gedreht haben, wenn der Kreis auf der Curve f o r t g e r u t s c h t wäre. Da er nun aber g e r o l l t ist, so kommt hinzu noch eine Drehung um einen Bogen a n, welcher gleich k a ist. Rechnet man beide Drehungen zusammen, so ergiebt sich, daß die peripherische Bewegung des Punktes n um c gleich dem vom Mittelpunkte zurückgelegten Wege m c ist. Sei nun c d die Geschwindigkeit von c, so muß die Drehungsgeschwindigkeit von n durch eine gleiche, die von e aber durch eine Linie so groß als c e ausgedrückt werden. Die Gesammtbewegung von e ist also zusammenzusetzen aus e f, welches gleich und parallel c d, und aus g f, welches gleich und senkrecht auf c e ist. Beide Bewegungen erzeugen zusammen die eine e g, welche Linie daher die Tangente der Rollcurve ist. Dreieck $e f g$ ist aber $\backsimeq a c e$, folglich Winkel $a e c = e g f$ und also, weil f g senkrecht auf c e, auch e g senkrecht auf a e, so daß letztere Linie also die Normale der Curve darstellt. Dieselbe muß demnach immer durch den Berührungspunkt des Kreises mit der Curve, auf welcher er rollt, gehen. Die Verbindungslinie des Berührungspunktes mit dem Kreismittelpunkte fällt offenbar immer in eine grade Linie mit der Normale b a. Ist nun b der Mittelpunkt des Krümmungskreises der Curve im Punkte a, so wird in dem dargestellten Momente c b sich um b drehen, so daß also, wenn die Bewegung von c durch c d ausgedrückt wird, die Linie a h die des Punktes a darstellt. Die gegen a e senkrechte Componente der Bewegung a h ist a i, und es ist daher, wenn man g mit i verbindet, der Durchschnittspunkt r dieser Linie mit der Normale der Krümmungsmittelpunkt der Rollcurve. Es ist leicht zu sehen, daß Tangente und Krümmungs-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

kreis für den dargestellten Moment dieselben sein würden, wenn der Kreis statt auf der Curve k a auf deren Krümmungskreise für Punkt a rollte. Ganz eben so läßt sich beweisen, daß, wenn eine beliebige Curve auf einer andern rollt, Tangente und Krümmungskreis der Rollkurve für einen bestimmten Punkt dieselben bleiben würden, wenn man statt der beiden Curven ihre Krümmungskreise für den Punkt ihrer Berührung auf einander rollen ließe. Die angegebene Construction findet also, falls man im Stande ist die betreffenden Krümmungskreise zu construiren, eine allgemeinere Anwendung auf Rollcurven überhaupt.

Eine weitere Ausführung dieser Betrachtungen, sowie Anwendung auf bestimmte Curven und namentlich auf Bestimmung von Flächenräumen und Bogenlängen mußte sich der Verfasser versagen, da derselbe die Abfassung einer wissenschaftlichen Abhandlung für das dießjährige Programm an Stelle eines plötzlich erkrankten Collegen nur kurze Zeit vorher, ehe dieselbe in Druck gegeben werden mußte, übernahm und bei sehr bedeutenden Amtsgeschäften nur hie und da eine Stunde darauf verwenden konnte. Es mögen daher die hier gegebenen allgemeinen Andeutungen genügen. Die Betrachtung soll sich deswegen im Folgenden wieder der anfänglich behandelten Curve zuwenden. Dieselbe läßt sich, ausgenommen den Fall, wenn sie in eine Cardioide übergeht, nicht rectificiren, auch nicht in eine Kreislinie, wohl aber in einen Ellipsenbogen verwandeln. Hierzu ist jedoch eine Vorbetrachtung über die Ellipse nothwendig.

§ 11. Ellipse.

Wenn die beiden Linien X Y und Q Z (Fig. VII.) einander in A rechtwinklig schneiden, und die Linie C B sich so bewegt, daß B immer auf X Y und C immer auf Q Z bleibt, so beschreibt jeder Punkt der Linie C B oder ihrer Verlängerung eine Ellipse, deren großer und kleiner Halbmesser gleich den Entfernungen dieses Punktes von B und C wird, und die daher für den Mittelpunkt D in einen Kreis übergeht. Da Winkel D A C immer = D C A, so werden die Linien C B und A D ihre Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit ändern. Es sei nun Linie D F = A D die Bewegung des Punktes D. Die mit D verbundene Linie E D wird diese Bewegung mit machen müssen, außerdem aber mit derselben Winkelgeschwindigkeit, wie D A um A, sich um D drehen. Die Drehung muß dem angenommenen Geschwindigkeitsmaaße zufolge durch das Loth E G = E D ausgedrückt werden. Die Bewegung E setzt sich also zusammen aus E G und G H, welches letztere gleich und parallel D F ist. E H ist nunmehr Tangente an die Ellipse und drückt zugleich die Geschwindigkeit des Punktes E aus. Verlängert man A D über D hinaus um sich selbst und verbindet den Endpunkt der Verlängerung K mit E, so ist das entstehende Dreieck E D K $\cong$ E H G und E K die Normale. Letztere Linie kann, da sie = E H ist, auch als Maaß der Geschwindigkeit von E gebraucht werden. Es mag hier, obwohl es für das Folgende nicht unbedingt nothwendig ist, noch in aller Kürze die Construction des Krümmungsradius angegeben werden.

Die Normale geht nach Obigem immer durch den Punkt K. Da aber A K doppelt so lang ist als A D, so bewegt sich K doppelt so schnell als D. Diese Bewegung sei K L = 2 D F oder A K. Die Projection von K L auf eine von K aus lothrecht gegen die Normale gezogene Linie ist K M. Der Durchschnittspunkt R der Linie M H mit E K ist der Krümmungsmittelpunkt.

§ 12. Verwandlung eines Bogenstücks der vorher betrachteten Curve in einen Ellipsenbogen.

In Fig. VIII. sei wieder wie vorher B C eine Linie, die sich so bewegt, daß die Punkte B und C auf den Schenkeln des rechten Winkels W A C fortrücken, und es geschehe die Drehung der Linie A D gleichmäßig um A. Nun wird, wenn man wie oben die Geschwindigkeit von D = A D an-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tafel I.

Fig. I.

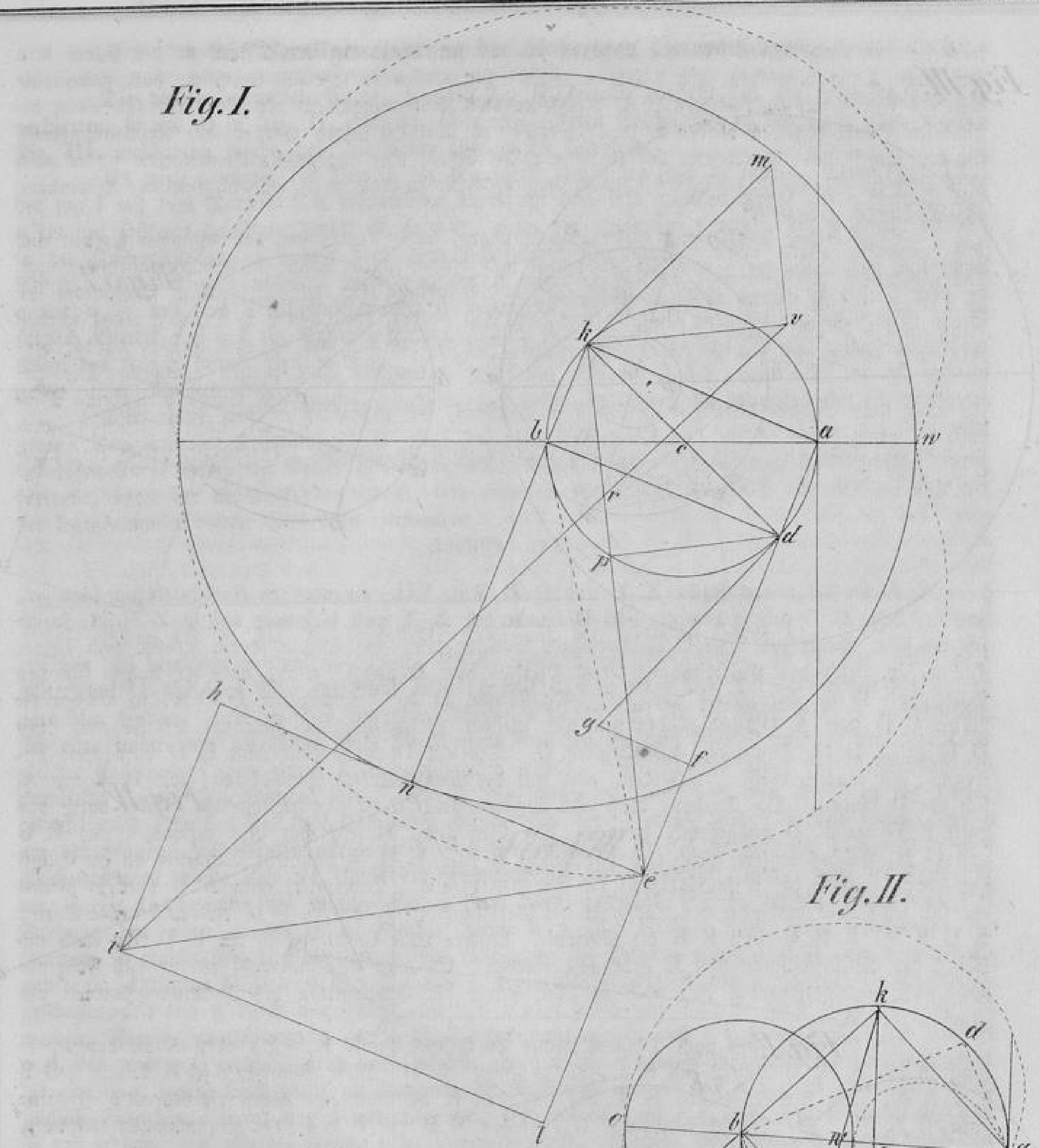
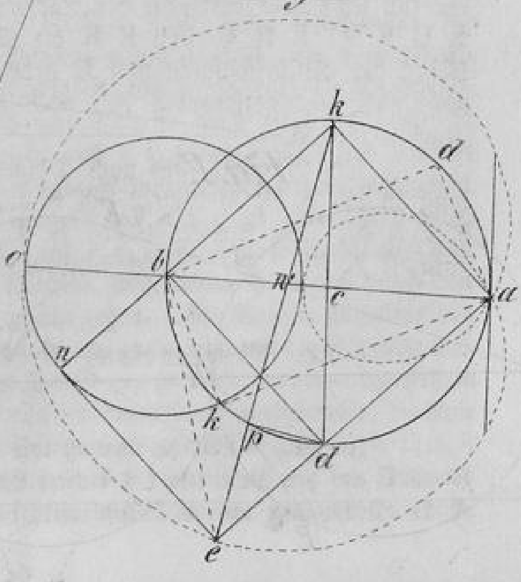


Fig. II.



Tafel II.

Fig. III.

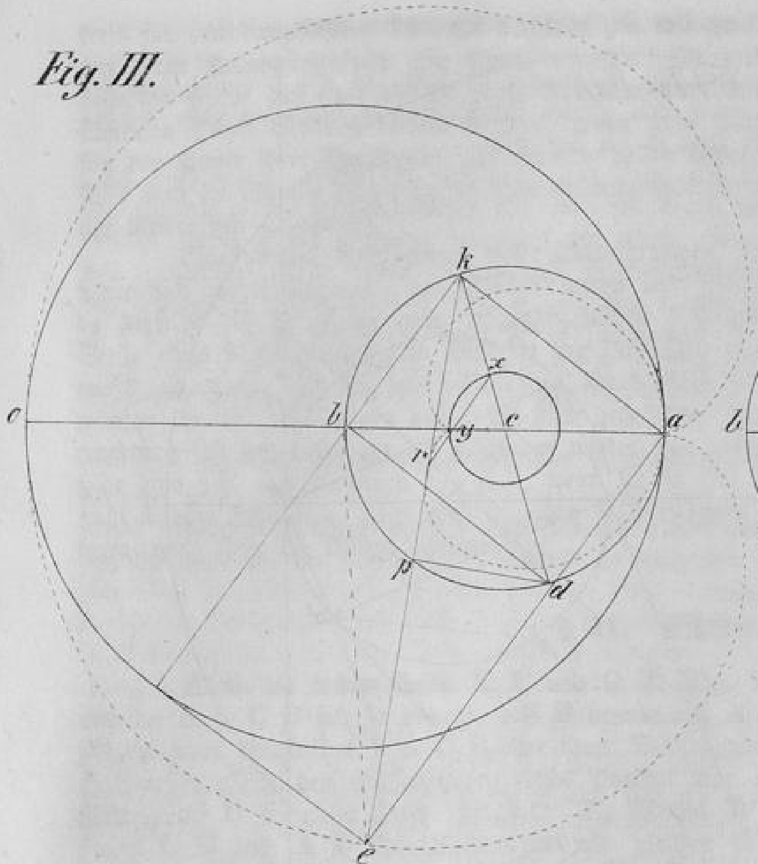


Fig. VI.

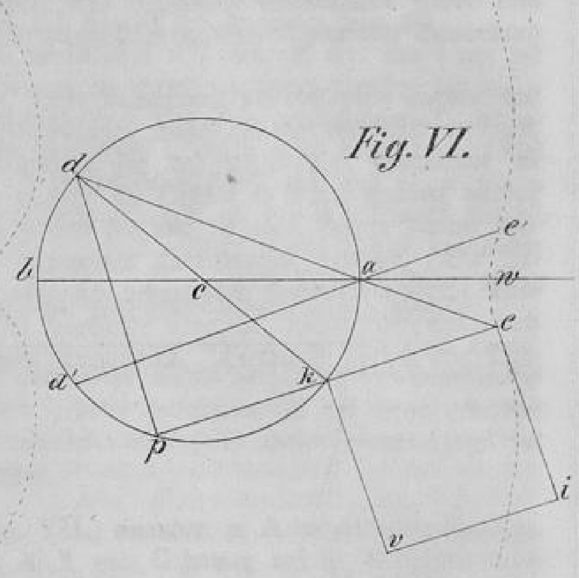


Fig. IV.

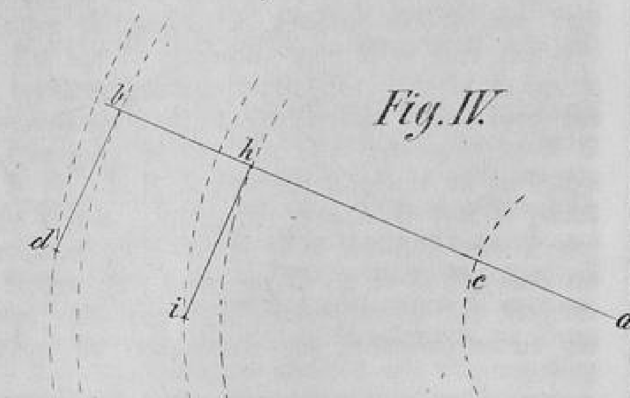
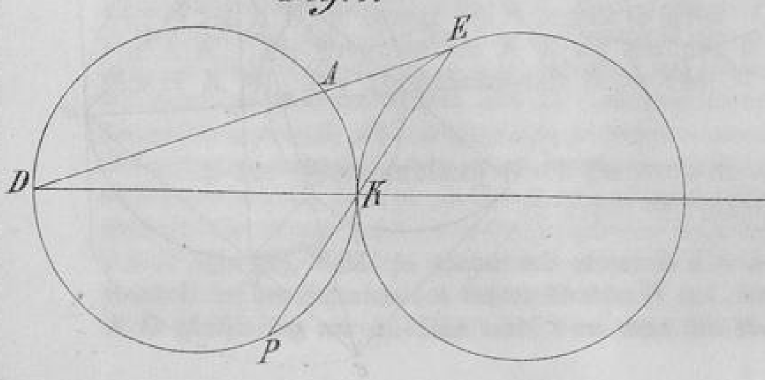


Fig. V.



Tafel III.

Fig. VII.

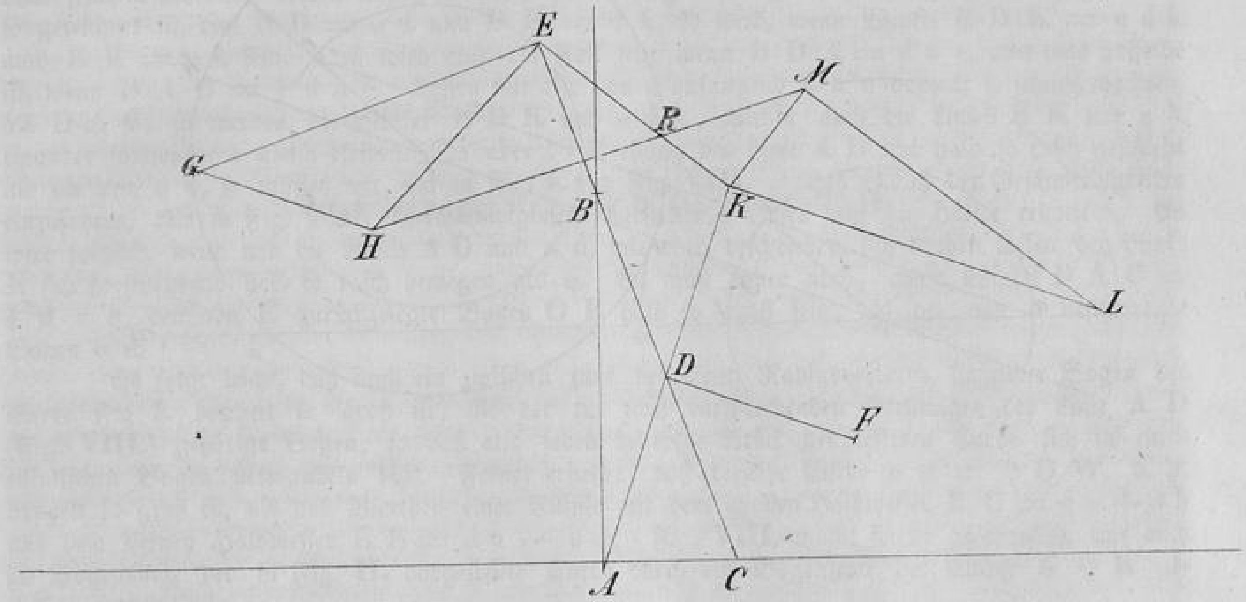
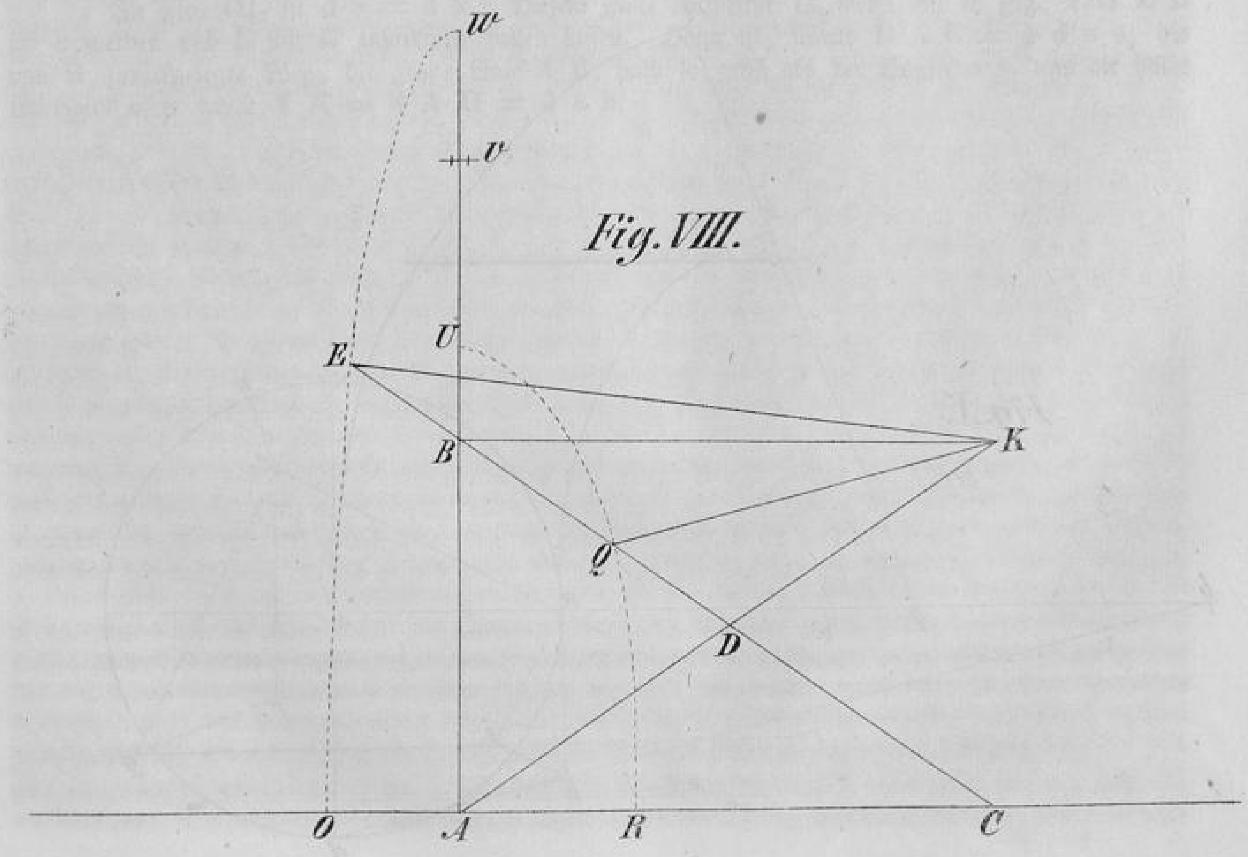


Fig. VIII.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tafel IV.

Fig. IX.

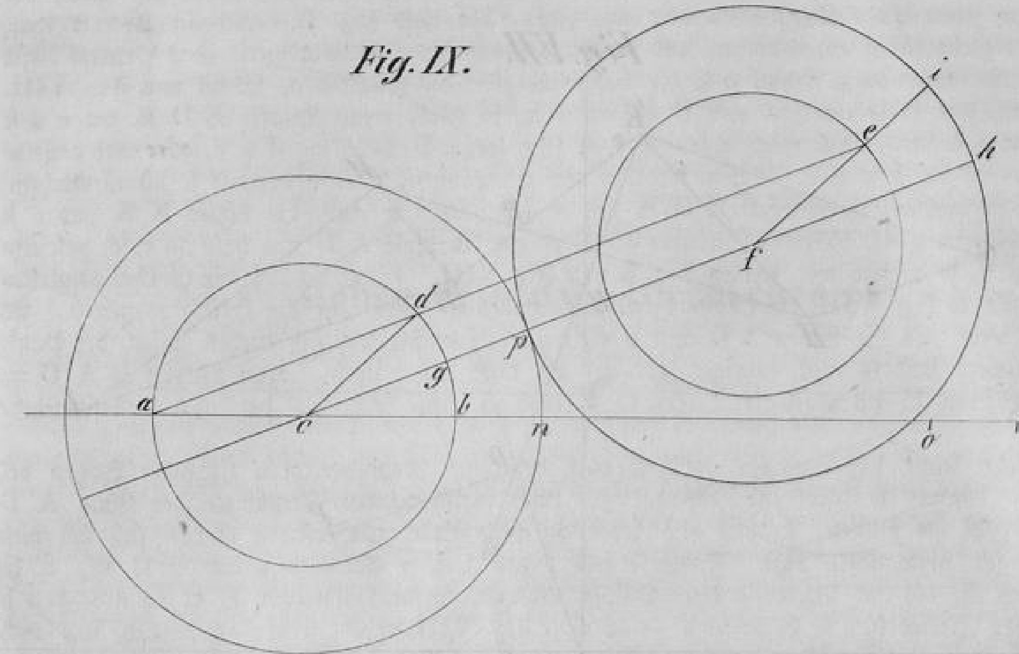
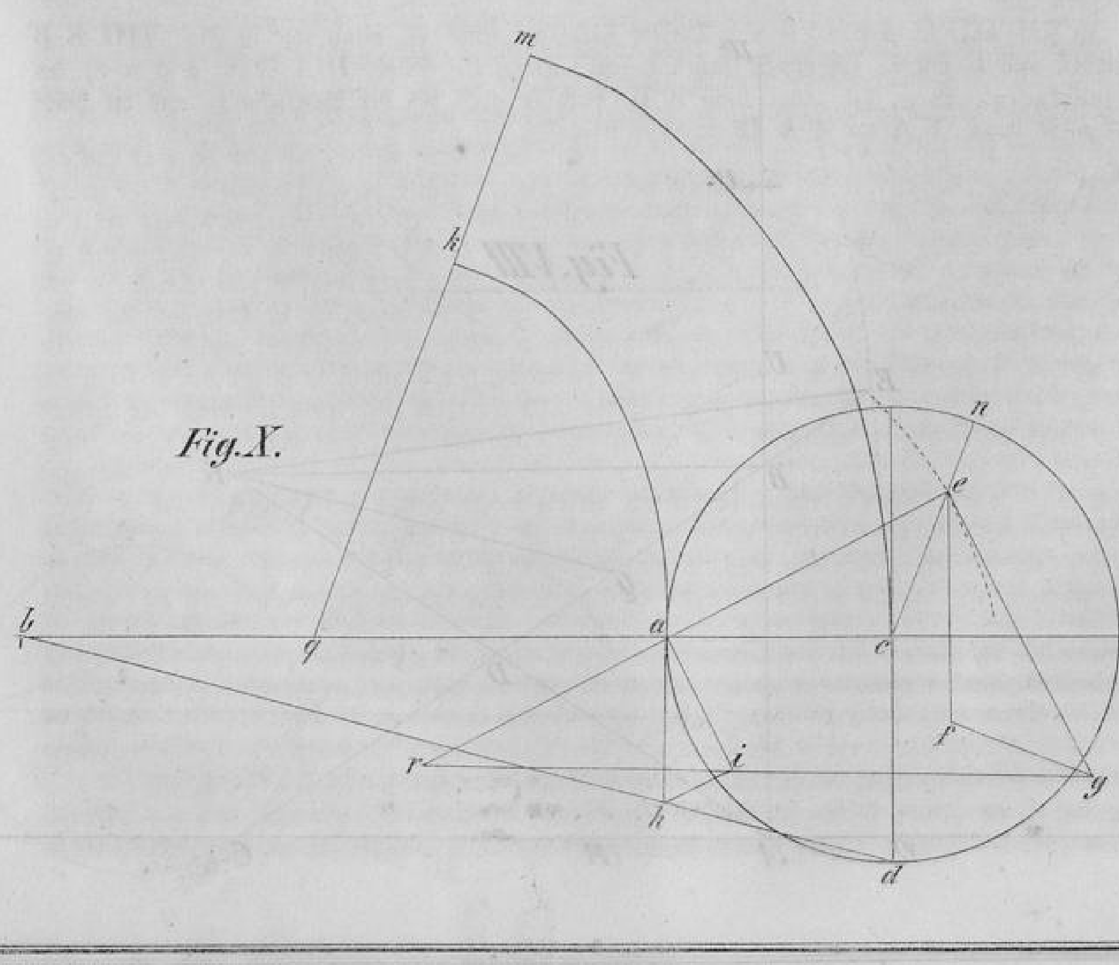


Fig. X.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nimmt, die Geschwindigkeit des den elliptischen Bogen O W beschreibenden Punktes E, gleich der Linie E K zu setzen sein. Vergleichen wir nun Fig. VIII. mit Fig. I. Auch in letzterer war, wenn a d sich gleichmäßig um a drehte, und man als Maaß der Geschwindigkeit eines Punktes dieser Linie seine Entfernung von a nahm, e k die Geschwindigkeit des Punktes e. Wenn nun Fig. VIII. so gezeichnet ist, daß $ED = ed$ und $DK = dk$, so wird, wenn Winkel $EDK = edk$ auch $EK = ek$ sein. Das wird aber der Fall sein, wenn $BDA = dac$, oder was dasselbe ist, wenn $DAC = \frac{1}{2}\, dac$. Lassen wir also von o anfangend d a c doppelt so schnell wachsen, als D A C, so werden die Winkel E D K und e d k, mithin auch die Linien E K und e k einander fortwährend gleich bleiben. Da aber die Drehung der Linie A D nur halb so rasch geschieht als die von a d, so müssen wir, um in Fig. I. und Fig. VIII. gleiches Maaß der Geschwindigkeiten einzuführen, alle in Fig. VIII. Geschwindigkeiten darstellende Linien auf die Hälfte reduciren. Es wird folglich, wenn wir die Linien A D und a d, wie oben beschrieben, sich drehen lassen, der Punkt E sich fortwährend halb so rasch bewegen als e. Es muß daher auch, wenn Winkel $DAC = \frac{1}{2}\, dac$, der von E zurückgelegte Bogen O E halb so groß sein, als der von e beschriebene Bogen o e.

Es folgt leicht, daß auch ein zwischen zwei beliebigen Radiusvectoren liegender Bogen der Curve Fig I. doppelt so groß ist, als der zu zwei entsprechenden Stellungen der Linie A D (Fig. VIII.) gehörige Bogen, so daß also jedes beliebige Stück der ersteren Curve sich in einen elliptischen Bogen verwandeln läßt. Ferner erhellet, daß dieselbe Curve $ow = 2\,OW$, d. h. doppelt so groß ist, als das Viertheil einer Ellipse mit dem großen Halbmesser $EC = de + ab$ und dem kleinen Halbmesser $EB = de - ab$. Fig. VIII. macht ferner anschaulich, wie auch die Bogenlänge der in Fig. II. dargestellte Curve durch ein Bogenstück der Ellipse U Q R gemessen werden kann.

In Fig. III. ist $de = dk$. Diesem Falle entspricht es, wenn wir in Fig. VIII. $EB = o$ werden und E mit B zusammen fallen lassen. Dann ist, sobald $DAC = \frac{1}{2}\, dac$, der von B zurückgelegte Weg, die grade Linie A B, halb so groß als der Bogen o c, und die halbe Cardioide $ow = 2\,VA = 4\,AD = 4\,ab$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf