

Versuch einer räumlichen Darstellung komplexer ebener Gebilde.

Von Dr. A. Henschel.

Die ebene Kurve

1.

$$\varphi(x, y) = 0$$

besitzt aufser der einfach unendlichen Schaar reeller Punkte, welche durch den Kurvenzug bildlich dargestellt werden, wie bekannt noch eine zweifach unendliche Schaar komplexer Punkte, die sich in der Ebene nicht darstellen lassen. Erscheint aber die Kurvengleichung 1. in komplexer Form, so besitzt die Kurve aufser einer beschränkten Anzahl reeller Punkte nur eine zweifach unendliche Schaar komplexer Punkte.

In der vorliegenden Arbeit soll nun der Versuch gemacht werden, komplexe ebene Gebilde, d. h. komplexe Punkte und komplexe ebene Kurven räumlich darzustellen. Diese räumliche Darstellung beruht auf dem Prinzip, dafs wir die Kurvenpunkte mit Hilfe eines Grundkreises auf ein ebenes System von Punktpaaren, das System von Punktpaaren mit Hilfe einer Kugel auf ein System von Raumgeraden abbilden.

Als Grundkreis, dessen wir uns nach dem oben angedeuteten Prinzip bei der Abbildung bedienen, wählen wir den Einheitskreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt liegt; seine Gleichung ist

2.

$$K^2 = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Legen wir nun durch einen beliebigen Punkt (x_1, y_1) eine Gerade

3.

$$ax + by + c = 0,$$

so schneidet diese den Grundkreis in zwei Punkten; diese beiden Kreispunkte projizieren wir vom Punkte $x = 0, y = 1$ aus auf die Abscissenachse durch die Beziehung

4.

$$\lambda = \frac{x}{1-y}; \quad x = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1}; \quad y = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}.$$

Die Koordinaten der beiden Punkte der Abscissenachse, die wir auf diese Weise durch Projektion erhalten, stehen dann mit den Konstanten der Geraden 3. in folgender Beziehung:

5.

$$ma = -(\lambda_1 + \lambda_2); \quad mb = 1 - \lambda_1 \lambda_2; \quad mc = 1 + \lambda_1 \lambda_2$$

wenn m einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet. Da die Gerade 3. durch den Punkt (x_1, y_1) gehen soll, so ergibt sich folgende Relation:

6.

$$\begin{aligned} -(\lambda_1 + \lambda_2)x_1 + (1 - \lambda_1 \lambda_2)y_1 + (1 + \lambda_1 \lambda_2) &= 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 (1 - y_1) - (\lambda_1 + \lambda_2)x_1 + (1 + y_1) &= 0. \end{aligned}$$

Diese Relation ist von den Konstanten der Geraden unabhängig, sie gilt also für jede Gerade des Büschels durch den Punkt (x_1, y_1) . Die Gleichung 6. zeigt ferner, dafs wie

1*

bekannt durch ein Geraden-Büschel auf dem Kreis, also durch Projektion auch auf der Abscissenachse eine Punkt-Involution bestimmt wird. Die beiden Doppelpunkte der Involution 6. entsprechen den beiden Strahlen des Büschels, deren Schnittpunkte mit dem Kreis in einen Punkt zusammenfallen, d. h. den Tangenten an den Kreis. Die Koordinaten dieser Doppelpunkte werden aus der Gleichung gefunden:

$$\lambda^2(1-y_1) - 2\lambda x_1 + (1+y_1) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{x_1 + K_1}{1-y_1}; \quad \lambda_2 = \frac{x_1 - K_1}{1-y_1} \quad 7.$$

$K_1 = +\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 1}$, die Potenz des Punktes in Bezug auf den Grundkreis.

Diese Doppelpunkte sind reelle Punkte, wenn x_1 und y_1 reelle Werte haben und wenn zugleich $K_1^2 > 0$, d. h. für reelle Punkte (x_1, y_1) außerhalb des Grundkreises. Die Doppelpunkte fallen in einen Punkt zusammen, wenn $K_1^2 = 0$ ist, d. h. für die Punkte des Grundkreises. Die Doppelpunkte sind imaginär, wenn x_1 und y_1 komplexe Werte annehmen, oder wenn $K_1^2 < 0$ ist, d. h. für reelle Punkte innerhalb des Grundkreises.

Bezeichnen wir nun die zu einer komplexen Zahl a konjugierte Zahl mit a' , so ist im letzteren Falle

$$\lambda_1 = \mu_1 + \nu_1 i = \frac{x_1 + K_1}{1-y_1}; \quad \lambda_1' = \mu_1 - \nu_1 i = \frac{x_1' + K_1'}{1-y_1'}$$

Daraus ergeben sich für die Koordinaten der Doppelpunkte folgende Werte:

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + K_1}{1-y_1} + \frac{x_1' + K_1'}{1-y_1'} \right); \quad \mu_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - K_1}{1-y_1} + \frac{x_1' - K_1'}{1-y_1'} \right)$$

$$\nu_1 = \frac{1}{2i} \left(\frac{x_1 + K_1}{1-y_1} - \frac{x_1' + K_1'}{1-y_1'} \right); \quad \nu_2 = \frac{1}{2i} \left(\frac{x_1 - K_1}{1-y_1} - \frac{x_1' - K_1'}{1-y_1'} \right) \quad 8.$$

$$\rho_1^2 = \mu_1^2 + \nu_1^2 = \frac{x_1 + K_1}{1-y_1} \cdot \frac{x_1' + K_1'}{1-y_1'}; \quad \rho_2^2 = \mu_2^2 + \nu_2^2 = \frac{x_1 - K_1}{1-y_1} \cdot \frac{x_1' - K_1'}{1-y_1'}$$

Um nun auch in diesem letzteren Falle für die komplexen Doppelpunkte räumliche Repräsentanten zu schaffen, erweitern wir unser ebenes rechtwinkliges Koordinatensystem zu einem räumlichen, indem wir die dritte Koordinatenachse der z senkrecht zur (xy) Ebene hinzufügen. In der so entstandenen (xz) Ebene tragen wir die Koordinaten der Doppelpunkte μ und ν in der Weise ein, daß die Achse der x dem reellen Teil μ von λ , die Achse der z dem imaginären Teil ν entspricht.

Lassen wir nun einem jeden Punkte der (xy) Ebene (x_1, y_1) die Doppelpunkte λ_1, λ_2 der Involution entsprechen, welche durch den Punkt (x_1, y_1) bestimmt ist, so werden die Punkte der (xy) Ebene auf ein System von Punktpaaren der (xz) Ebene abgebildet.

Die hauptsächlichsten Eigenschaften dieser Abbildung sind folgende:

1. Den reellen Punkten außerhalb des Grundkreises $K^2 = 0$ entsprechen Punktpaare der Abscissenachse, da $\nu = 0$ wird. Für einen Punkt der Ordinatenachse ($x_1 = 0, y_1 > 1$) ergibt sich das Punktpaar

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{y_1 + 1}{y_1 - 1}};$$

dem unendlich fernen Punkt dieser Achse entspricht das Punktpaar $\mu = \pm 1$. Für einen Punkt der Abscissenachse ($y_1 = 0, x_1 > 1$) folgt:

$$\mu = x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 1};$$

dem unendlich fernen Punkt der Abscissenachse entspricht das Punktpaar $\mu = 0; \infty$.

Eine besondere Stellung nehmen die Punkte der zur Abscissenachse parallelen Geraden $y_1 - 1 = 0$ ein; für diese folgt aus der Gleichung der Involution 6.:

$$-2\lambda x_1 + 2 = 0; \mu = \lambda = \frac{1}{x_1}$$

d. h. der eine Doppelpunkt dieser uneigentlichen Involution rückt in das Unendliche. Dem unendlich fernen Punkt dieser Geraden entspricht dann das Punktpaar $\mu = 0, \infty$; für das Projektionszentrum ($x_1 = y_1 = 1$) fallen die beiden Doppelpunkte im Unendlichen zusammen. Ist $x_1 = y_1 = \infty$, so kommt es für die Bestimmung der Lage des Punktpaares

$$\mu = \frac{\frac{x_1}{y_1} \pm \sqrt{\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2 + 1} - \frac{1}{y_1}}{\frac{1}{y_1} - 1}$$

auf das Verhältnis $\frac{x_1}{y_1}$, d. h. auf die Art der Annäherung an.

2. Jedem reellen Punkte des Kreises $K^2 = 0$ ($x_1^2 + y_1^2 - 1 = 0$) entspricht nur ein Punkt der x-Achse: $\mu = \lambda = \frac{x_1}{1 - y_1}$; die Doppelpunkte der entsprechenden (uneigentlichen) Involution fallen in diesen einen Punkt zusammen.

3. Den reellen Punkten innerhalb des Grundkreises ($x_1 < 1; y_1 < 1$), für welche K_1 rein imaginär wird, entsprechen Punktpaare, deren Elemente symmetrisch zur x-Achse liegen. Für einen Punkt der Abscissenachse ($x_1 = 0, y_1 < 1$) folgt:

$$\nu i = \pm i \sqrt{\frac{1 + y_1}{1 - y_1}},$$

die Doppelpunkte liegen also auf der z-Achse; $x_1 = y_1 = 0$ ergibt $\nu i = \lambda = \pm i$.

4. Haben die Koordinaten des Punktes (x_1, y_1) komplexe Werte, so ist auch das entsprechende Punktpaar im allgemeinen komplex. Einer der Punkte ist reell, wenn eine der folgenden Bedingungen besteht:

$$\begin{aligned} (x_1 + K_1)(1 - y_1') - (x_1' + K_1')(1 - y_1) &= 0 \text{ oder} \\ (x_1 - K_1)(1 - y_1') - (x_1' - K_1')(1 - y_1) &= 0. \end{aligned}$$

Beide Punkte sind reell, wenn zugleich

$$x_1 : x_1' = (1 - y_1) : (1 - y_1') \quad K_1 : K_1' = (1 - y_1) : (1 - y_1').$$

Diese beiden Bedingungen sind erfüllt für $x_1 = x_1'$ und $y_1 = y_1'$, d. h. nur für reelle Punkte (x_1, y_1).

Die beiden komplexen Punkte λ_1 und λ_2 können nur dann in einen komplexen Punkt zusammenfallen, wenn $K_1 = K_1' = 0$ ist, d. h. nur für die komplexen Punkte des Grundkreises $K^2 = 0$.

Diese Abbildung der Punkte der (xy) Ebene auf die Punktpaare der (xz) Ebene ist also vollkommen eindeutig; jedoch entspricht jedem reellen oder komplexen Kreispunkte nur ein Punkt der (xz) Ebene.

Ferner erweitern wir den Grundkreis $K^2 = 0$ durch Rotation um die y-Achse zur Einheitskugel, deren Gleichung ist

$$9. \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Sodann projizieren wir die Punktpaare der (xz) Ebene vom Nordpol ($x = z = 0, y = 1$)

aus auf die Einheitskugel. So erhalten wir für das Punktpaar $(\mu_1 \nu_1)$ und $(\mu_2 \nu_2)$ der (xz) Ebene die entsprechenden Kugelpunkte:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{2\mu_1}{\rho_1^2 + 1}; & Y_1 &= \frac{\rho_1^2 - 1}{\rho_1^2 + 1}; & Z_1 &= \frac{2\nu_1}{\rho_1^2 + 1} \\ X_2 &= \frac{2\mu_2}{\rho_2^2 + 1}; & Y_2 &= \frac{\rho_2^2 - 1}{\rho_2^2 + 1}; & Z_2 &= \frac{2\nu_2}{\rho_2^2 + 1}. \end{aligned} \quad 10.$$

Diese beiden Kugelpunkte, welche einem Punktpaare der (xz) Ebene entsprechen, verbinden wir durch eine Raumgerade. Wählen wir zum Anfangspunkt des Strahles die Mitte zwischen den beiden Kugelpunkten, so ergeben sich für x, y, z (die Koordinaten des Anfangspunktes) und ξ, η, ζ (die entsprechenden Richtungscosinus) folgende Werte:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_1'}{N^2}; & \xi &= -\frac{y_1 K_1' + y_1' K_1}{N \cdot \sqrt{2K_1 K_1'}} \\ y &= \frac{y_1 + y_1'}{N^2}; & \eta &= \frac{x_1 K_1' + x_1' K_1}{N \cdot \sqrt{2K_1 K_1'}} \\ z &= \frac{1}{i} \frac{x_1' y_1 - x_1 y_1'}{N^2}; & \zeta &= \frac{1}{i} \frac{K_1 - K_1'}{N \cdot \sqrt{2K_1 K_1'}} \\ N^2 &= K_1 \cdot K_1' + x_1 x_1' + y_1 y_1' + 1. \end{aligned} \quad 11.$$

Somit entspricht nach 8. jedem Punkt der (xy) Ebene ein Punktpaar der (xz) Ebene, jedem Punktpaar nach 11. wieder eine Raumgerade. Wir haben also die vierfach unendliche Schaar der reellen und komplexen Punkte der (xy) Ebene abgebildet auf eine vierfach unendliche Schaar von Raumgeraden.

Es erübrigt noch, die Ausnahmestellen in der Beziehung 11. zwischen den Raumgeraden und den Punkten der (xy) Ebene zu untersuchen.

Die Größe N^2 , welche in den Relationen 11. im Nenner auftritt, ist als Summe der Produkte konjugierter Größen stets von Null verschieden und stets positiv größer als 1. Den reellen Punkten der (xy) Ebene außerhalb des Grundkreises entsprechen Gerade in der (xy) Ebene. (In diesem Falle ist die entsprechende Gerade die Polare des Punktes (x_1, y_1) in Bezug auf den Grundkreis.) Den reellen Punkten innerhalb des Grundkreises ($K_1 = -K_1'$) entsprechen Gerade, welche der z -Achse parallel sind; dem Koordinatenanfangspunkt ($x_1 = y_1 = 0$) entspricht die z -Achse selbst. — Komplexen Punkten der (xy) Ebene entsprechen Gerade, welche nicht in der (xy) Ebene liegen und nicht der z -Achse parallel sind.

Eine Ausnahmestellung nehmen bei dieser Beziehung zwischen Punkten und Geraden wieder die Punkte des Grundkreises ein ($K_1 = K_1' = 0$); für solche Punkte erscheinen die Ausdrücke der Richtungscosinus in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; die Koordinaten des Anfangspunktes des Strahles genügen der Bedingung 9., dieser Punkt liegt also auf der Kugel. Wir hatten früher gesehen, daß für einen Kreispunkt die beiden Punkte des entsprechenden Punktpaares zusammenfallen; wir erhalten also zur Bestimmung der Raumgeraden nur einen Kugelpunkt, die Gerade wird Tangente an die Kugel, ihre Richtung ist jedoch unbestimmt; die Ausdrücke für die Richtungscosinus nehmen nur dann einen bestimmten Grenzwert an, wenn wir uns dem Kreispunkte auf bestimmte Art nähern. So entspricht z. B. einem reellen Kreispunkte eine Kugeltangente in der (xy) Ebene, wenn wir uns dem Punkte von außen nähern, dagegen eine Kugeltangente parallel der z -Achse, wenn wir uns

von innen nähern. Wir ersehen somit, daß einem Kreispunkte nicht eine Raumgerade, sondern eine Tangentialebene an die Kugel entspricht.

Unsere Abbildung der vierfach unendlichen Mannigfaltigkeit von Punkten in der (xy) Ebene auf eine vierfach unendliche Mannigfaltigkeit von Raumgeraden ist also vollkommen eindeutig mit alleiniger Ausnahme der Kreispunkte $K^2 = 0$. Die Abbildung ist aber nicht eindeutig, da umgekehrt nur den Kugel-Sekanten und -Tangenten Punkte der (xy) Ebene entsprechen.

Betrachten wir nun die zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Punkten, welche der Bedingung 1. $\varphi(x, y) = 0$ genügen (φ eine komplexe Funktion der komplexen Veränderlichen x und y), so werden diese abgebildet auf eine zweifach unendliche Schaar von Raumgeraden. Diese Schaar von Geraden ist ein geradliniges Strahlensystem, wie sie von Herrn Kummer („Theorie der geradlinigen Strahlensysteme“, Crelle, Bd. 57, S. 189 ff.) allgemein behandelt worden sind. Unser Strahlensystem ist aber nur ein spezieller Fall des allgemeinen geradlinigen Strahlensystems, da es sich nur aus solchen Strahlen zusammensetzt, deren senkrechte Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt kleiner oder gleich 1 ist.

Es wird nun weiter unsere Aufgabe sein, das gefundene Strahlensystem, welches sämtliche Punkte der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ darstellt, in seinen Eigenschaften zu untersuchen. Wir werden uns bei dieser Untersuchung der Resultate bedienen, welche Herr Kummer in der oben erwähnten Abhandlung: „Theorie der geradlinigen Strahlensysteme“ gefunden hat.

Die einzelnen Strahlen des Systems sind nach 11. durch folgende Relationen bestimmt:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_1'}{N^2} & \xi &= -\frac{y_1 K_1' + y_1' K_1}{N\sqrt{2K_1 K_1'}} \\ y &= \frac{y_1 + y_1'}{N^2} & \eta &= \frac{x_1 K_1' + x_1' K_1}{N\sqrt{2K_1 K_1'}} \\ z &= \frac{1}{i} \frac{x_1' y_1 - x_1 y_1'}{N^2} & \zeta &= \frac{1}{i} \frac{K_1 - K_1'}{N\sqrt{2K_1 K_1'}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, y_1) &= 0 \\ \varphi'(x_1', y_1') &= 0. \end{aligned}$$

Wir bedienen uns weiter für die Bezeichnung der ersten partiellen Differentialquotienten der Bezeichnungsweise nach Gauß:

$$\begin{aligned} dx &= a dx_1 + a' dx_1' & d\xi &= \alpha dx_1 + \alpha' dx_1' \\ dy &= b dx_1 + b' dx_1' & d\eta &= \beta dx_1 + \beta' dx_1' \\ dz &= c dx_1 + c' dx_1' & d\zeta &= \gamma dx_1 + \gamma' dx_1' \end{aligned}$$

Ferner setzen wir zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= E & a\alpha + b\beta + c\gamma &= e \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= F & a'\alpha + b'\beta + c'\gamma &= f \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= G & a\alpha' + b\beta' + c\gamma' &= f' \\ EG - F^2 &= A^2 & a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' &= g \end{aligned}$$

Für die partiellen Differentialquotienten von φ führen wir folgende Bezeichnungsweise ein:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \varphi_1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \varphi_2; \quad \varphi_3 = -(x_1 \varphi_1 + y_1 \varphi_2)$$

und es bezeichne wieder φ_1' den zu φ_1 konjugierten Wert.

Dann erhalten wir für unser Strahlensystem folgendes Formelsystem:

$$\begin{aligned}
 \varphi_2 K_1 N^4 \cdot a &= -K_1' N^2 \varphi_2 + (y_1 K_1' + y_1' K_1) (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3) \\
 \varphi_2 K_1 N^4 \cdot b &= +K_1' N^2 \varphi_1 - (x_1 K_1' + x_1' K_1) (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3) \\
 i \varphi_2 K_1 N^4 \cdot c &= -K_1' N^2 \varphi_3 + (K_1 - K_1') (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3) \\
 M \cdot \alpha &= N^2 [\varphi_3 (x_1 K_1' + x_1' K_1) - \varphi_1 (K_1 - K_1')] + K_1 (x_1 + x_1') (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3) \\
 M \cdot \beta &= N^2 [\varphi_3 (y_1 K_1' + y_1' K_1) - \varphi_2 (K_1 - K_1')] + K_1 (y_1 + y_1') (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3) \\
 i M \cdot \gamma &= N^2 [\varphi_2 (x_1 K_1' + x_1' K_1) - \varphi_1 (y_1 K_1' + y_1' K_1)] + K_1 (x_1 y_1' - x_1' y_1) (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3) \\
 M &= 2 \varphi_2 K_1^2 \cdot \sqrt{2 K_1 K_1'} N^3
 \end{aligned} \tag{12}$$

$a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ sind die entsprechenden konjugierten Werte von $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$.
Hieraus ergeben sich weiter folgende Werte:

$$\begin{aligned}
 4 \varphi_2^2 K_1^4 N^4 \cdot E &= N^4 (\varphi_3^2 - \varphi_2^2 - \varphi_1^2) - K_1^2 (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3)^2 \\
 4 \varphi_2 \varphi_2' K_1^2 K_1'^2 N^4 \cdot F &= N^4 (\varphi_3 \varphi_3' + \varphi_2 \varphi_2' + \varphi_1 \varphi_1') \\
 &\quad - (N^2 + K_1 K_1') (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3) (x_1 \varphi_1' + y_1 \varphi_2' - \varphi_3') \\
 4 \varphi_2'^2 K_1'^4 N^4 \cdot G &= N^4 (\varphi_3'^2 - \varphi_2'^2 - \varphi_1'^2) - K_1'^2 (x_1 \varphi_1' + y_1 \varphi_2' - \varphi_3')^2 \\
 8 \varphi_2^2 \varphi_2'^2 K_1^3 K_1'^3 N^6 \cdot A^2 &= -Q^2 \\
 M \cdot \varphi_2^2 K_1^2 \cdot e &= K_1' (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3) \cdot P \\
 M \cdot \varphi_2 \varphi_2' K_1 K_1' \cdot f &= N^2 Q + K_1 (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3) \cdot P' \\
 M \cdot \varphi_2 \varphi_2' K_1 K_1' \cdot f' &= N^2 Q + K_1' (x_1 \varphi_1' + y_1 \varphi_2' - \varphi_3') \cdot P \\
 M \cdot \varphi_2'^2 K_1'^2 \cdot g &= K_1 (x_1 \varphi_1' + y_1 \varphi_2' - \varphi_3') \cdot P' \\
 M &= 2 \sqrt{2 K_1 K_1'} N^5.
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 P &= (y_1 + y_1') \varphi_1 - (x_1 + x_1') \varphi_2 - (x_1' y_1 - x_1 y_1') \varphi_3 \\
 P' &= (y_1 + y_1') \varphi_1' - (x_1 + x_1') \varphi_2' - (x_1 y_1' - x_1' y_1) \varphi_3' \\
 Q &= (y_1 K_1' + y_1' K_1) (\varphi_1 \varphi_3' + \varphi_1' \varphi_3) - (x_1 K_1' + x_1' K_1) (\varphi_2 \varphi_3' + \varphi_2' \varphi_3) \\
 &\quad + (K_1 - K_1') (\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2).
 \end{aligned}$$

Wir wollen zunächst untersuchen, ob es auf jedem Strahle reelle Brennpunkte giebt, d. h. solche Punkte, in welchen der Strahl von einem unendlich benachbarten geschnitten wird. Wir können dabei zugleich die Frage entscheiden, ob sich die Strahlen des Systems so anordnen lassen, daß sie als Tangenten einer Fläche erscheinen, ob sie eine Fläche umhüllen, innerhalb deren kein Strahl des Systems verläuft.

Setzen wir $\frac{dx_1}{dx_1'} = t$, so ergibt sich als Bedingung für den Schnitt zweier unendlich benachbarten Strahlen (siehe Kummer a. a. O.):

$$\begin{aligned}
 (f' + gt) (E + Ft) - (e + ft) (F + Gt) &= 0 \\
 t^2 (gF - fG) + t (gE + (f' - f) F - eG) + (f'E - eF) &= 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 gF - fG &= \frac{4N^8 K_1^4 Q}{\varphi_2 \varphi_2'^3} (\varphi_3'^2 - \varphi_2'^2 - \varphi_1'^2) \\
 gE + (f' - f) F - eG &= 0 \\
 f'E - eF &= \frac{4N^8 K_1'^4 Q}{\varphi_2^3 \varphi_2'} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2).
 \end{aligned} \tag{14 a}$$

Unter Berücksichtigung dieser Werte ergeben sich für t aus der quadratischen Gleichung 14. die beiden Lösungen:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= + \sqrt{K_1'^2 \varphi_2' \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2}} \\
 \tau_2 &= - \sqrt{K_1^2 \varphi_2 \sqrt{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 - \varphi_3'^2}}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Setzen wir nun $x_1 = u + iv$; $dx_1 = du + idv$, so geht die Bedingung 15.:
 $t = \frac{du + idv}{du - idv} = \pm \frac{m + in}{m - in}$ in folgende über: $\frac{du}{dv} = \pm \frac{m}{n}$.

Das Verhältnis der Zunahme des reellen und imaginären Teiles von x_1 , $\frac{du}{dv}$, hat also einen reellen Wert; es giebt für jeden Strahl des Systems zwei unendlich benachbarte Strahlen, welche ihn schneiden, es giebt auf jedem Strahle zwei Brennpunkte.

Gilt für einen Punkt der Kurve die Relation:

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2 = 0 \quad (\text{also auch } \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 - \varphi_3'^2 = 0),$$

so ist die Bedingung 14. sofort erfüllt; der Strahl, welcher einem solchen Kurvenpunkte entspricht, wird von jeder unendlich benachbarten Geraden geschnitten.

Ist für einen Kurvenpunkt $K_1 = K_1' = 0$ (Schnittpunkte der Kurve mit dem Grundkreis), so haben in diesem Falle, wie wir oben sahen, die Größen ξ, η, ζ nur dann einen bestimmten Wert, wenn wir uns dem Punkte in bestimmter Weise nähern; dann nehmen auch die Ausdrücke 15. einen bestimmten Wert an.

Wenn in einem Kurvenpunkte der partielle Differentialquotient φ_2 verschwindet (die Kurve ist parallel der Ordinatenachse), so ergeben sich für τ_1 und τ_2 folgende Werte, wenn an jener Stelle $\varphi_1 \geq 0$ ist:

$$15. a. \quad \begin{aligned} \tau_1 &= + \left\{ \frac{K_1'^2 \varphi_1'}{K_1^2 \varphi_1} \cdot \sqrt{\frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2}{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 - \varphi_3'^2}} \right. \\ \tau_2 &= - \left. \left\{ \frac{K_1'^2 \varphi_1'}{K_1^2 \varphi_1} \cdot \sqrt{\frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2}{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 - \varphi_3'^2}} \right. \right. \end{aligned}$$

Da die Gleichung 14. den Faktor Q enthält, so erfordert der Fall $Q = 0$ eine besondere Betrachtung. Die Bedingungsgleichung für den Schnitt zweier unendlich benachbarten Strahlen erscheint dann in folgender Form:

$$16. \quad [\xi(\beta c - b\gamma) + \eta(\gamma a - c\alpha) + \zeta(\alpha b - a\beta)] + t[\xi(\beta c' + \beta'c - b'\gamma - b\gamma') + \eta(\gamma a' + \gamma'a - c'\alpha - c\alpha') + \zeta(\alpha b' + \alpha'b - a'\beta - a\beta')] + t^2[\xi(\beta'c' - b'\gamma') + \eta(\gamma'a' - c'\alpha') + \zeta(\alpha'b' - \beta'a')] = 0.$$

Hieraus ergeben sich wieder unter Beachtung der Relationen 12. die beiden Werte für t:

$$16. a. \quad \begin{aligned} \tau_1 &= + \left\{ \frac{K_1'^2 \varphi_2'}{K_1^2 \varphi_2} \cdot \sqrt{\frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2}{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 - \varphi_3'^2}} \right. \\ &= + \left\{ \frac{K_1' \varphi_2' (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3)}{K_1 \varphi_2 (x_1 \varphi_1' + y_1 \varphi_2' - \varphi_3')} \right. \\ \tau_2 &= - \left. \left\{ \frac{K_1'^2 \varphi_2'}{K_1^2 \varphi_2} \cdot \sqrt{\frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2}{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 - \varphi_3'^2}} \right. \right. \\ &= - \left. \left\{ \frac{K_1' \varphi_2' (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3)}{K_1 \varphi_2 (x_1 \varphi_1' + y_1 \varphi_2' - \varphi_3')} \right. \right. \end{aligned}$$

Die Entfernungen der Brennpunkte vom Anfangspunkte des Strahles ergeben sich aus folgenden Formeln:

$$17. \quad \begin{aligned} \sigma_1 \mathcal{A}^2 &= (f'F - eG) + \tau_1 (gF - fG) \\ \sigma_2 \mathcal{A}^2 &= (f'F - eG) + \tau_2 (gF - fG) \end{aligned}$$

$$18. \quad \begin{aligned} \sigma_1 \cdot QN &= \sqrt{2K_1 K_1'} \cdot [N^2(\varphi_1 \varphi_1' + \varphi_2 \varphi_2' + \varphi_3 \varphi_3') \\ &\quad - (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3)(x_1 \varphi_1' + y_1 \varphi_2' - \varphi_3') - N^2 R] \end{aligned}$$

$$18. \quad \begin{aligned} \sigma_2 \cdot QN &= \sqrt{2K_1 K_1'} \cdot [N^2(\varphi_1 \varphi_1' + \varphi_2 \varphi_2' + \varphi_3 \varphi_3') \\ &\quad - (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3)(x_1 \varphi_1' + y_1 \varphi_2' - \varphi_3') + N^2 R] \end{aligned}$$

$$R^2 = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2)(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 - \varphi_3'^2).$$

Hieraus berechnen sich die Koordinaten der Brennpunkte X, Y, Z in folgender Weise:

$$19. \quad \begin{aligned} QX &= K_1 \varphi_2' (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3) + K_1' \varphi_2 (x_1 \varphi_1' + y_1 \varphi_2' - \varphi_3') \\ &\quad - (y_1 K_1' + y_1' K_1) [\varphi_1 \varphi_1' + \varphi_2 \varphi_2' + \varphi_3 \varphi_3' \mp R] \\ QY &= -K_1 \varphi_1' (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3) - K_1' \varphi_1 (x_1 \varphi_1' + y_1 \varphi_2' - \varphi_3') \\ &\quad + (x_1 K_1' + x_1' K_1) [\varphi_1 \varphi_1' + \varphi_2 \varphi_2' + \varphi_3 \varphi_3' \mp R] \\ QiZ &= K_1 \varphi_3' (x_1' \varphi_1 + y_1' \varphi_2 - \varphi_3) - K_1' \varphi_3 (x_1 \varphi_1' + y_1 \varphi_2' - \varphi_3') \\ &\quad + (K_1 - K_1') [\varphi_1 \varphi_1' + \varphi_2 \varphi_2' + \varphi_3 \varphi_3' \mp R]. \end{aligned}$$

Auch in diesen Formeln ist der Fall $Q = 0$ besonders zu betrachten. Es ergibt sich, daß in diesem Falle der eine Brennpunkt des Strahles im Unendlichen liegt; der zweite Brennpunkt liegt in dem gewählten Anfangspunkte des Strahls:

$$X \cdot N^2 = x_1 + x_1'; \quad Y \cdot N^2 = y_1 + y_1'; \quad iZ \cdot N^2 = x_1' y_1 - x_1 y_1'. \quad 19 \text{ a.}$$

Beispiele.

Kreis.

Es sei $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$, wo r eine komplexe GröÙe bedeute (ein zum Grundkreise konzentrischer Kreis mit dem Radius r). Für diese Kurve ist:

$$\varphi_1 = 2x_1; \quad \varphi_2 = 2y_1; \quad \varphi_3 = -2r^2.$$

$$Q = 4(x_1' y_1 - x_1 y_1') \cdot \sqrt{(r^2 - 1)(r'^2 - 1)} \cdot (\sqrt{r'^2 - 1} - \sqrt{r^2 - 1})$$

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2 = -4r^2(r^2 - 1)$$

$$X_1 = \frac{r' y_1 - r y_1'}{x_1' y_1 - x_1 y_1'} R_1; \quad Y_1 = -\frac{r' x_1 - r x_1'}{x_1' y_1 - x_1 y_1'} R_1; \quad Z_1 = \frac{1}{i} \frac{r r' - x_1 x_1' - y_1 y_1'}{x_1' y_1 - x_1 y_1'}$$

$$R_1 = \frac{i + r r' - \sqrt{(r^2 - 1)(r'^2 - 1)}}{r + r'}$$

$$X_2 = -\frac{r' y_1 + r y_1'}{x_1' y_1 - x_1 y_1'} \cdot \frac{R_2}{i}; \quad Y_2 = \frac{r' x_1 + r x_1'}{x_1' y_1 - x_1 y_1'} \cdot \frac{R_2}{i}; \quad Z_2 = \frac{1}{i} \cdot \frac{r r' + x_1 x_1' + y_1 y_1'}{x_1' y_1 - x_1 y_1'}$$

$$R_2 = i \cdot \frac{1 - r r' - \sqrt{(r^2 - 1)(r'^2 - 1)}}{r - r'}$$

Führen wir hier Polarkoordinaten ein, indem wir setzen:

$$x_1 = r \cos(\varphi + i\chi); \quad y_1 = r \sin(\varphi + i\chi),$$

so folgt:

$$X_1 = + \frac{\sin \varphi}{\cos i\chi} R_1; \quad Y_1 = + \frac{\cos \varphi}{\cos i\chi} R_1; \quad Z_1 = \frac{1}{i} \operatorname{tg} i\chi.$$

$$X_2 = - \frac{\sin \varphi}{\sin i\chi} \cdot \frac{R_2}{i}; \quad Y_2 = + \frac{\cos \varphi}{\sin i\chi} \cdot \frac{R_2}{i}; \quad Z_2 = \frac{1}{i} \operatorname{cot} i\chi.$$

Wir haben somit die Koordinaten der umhüllten Oberflächen durch die Parameter φ und χ ausgedrückt; eliminieren wir die Parameter, so erhalten wir folgende Gleichungen der Oberflächen:

$$\Phi_1 = \frac{X_1^2}{R_1^2} + \frac{Y_1^2}{R_1^2} + Z_1^2 - 1 = 0 \quad \text{und} \quad 20 \text{ a.}$$

$$\Phi_2 = -\frac{X_2^2}{R_2^2} - \frac{Y_2^2}{R_2^2} + Z_2^2 - 1 = 0. \quad 20 \text{ b.}$$

Φ_1 ist also ein Rotations-Ellipsoid mit den Achsen $R_1, R_1, 1$, welches die Einheitskugel in den Punkten $x = y = 0, z = \pm 1$ berührt. Φ_2 ist ein zweischaliges Rotations-Hyperboloid mit den Achsen $R_2, R_2, 1$, welches ebenfalls die Einheitskugel in den Punkten $x = y = 0, z = \pm 1$ berührt.

Von besonderem Interesse sind die Strahlen, welche den Schnittpunkten der Kurve mit dem Grundkreise, den unendlich fernen Kreispunkten, entsprechen. Für diese Punkte ist $\varphi = 0, \chi = \pm \infty; \operatorname{tg} i\chi = \pm i$. Daraus folgt:

$$X_1 = 0; \quad Y_1 = 0; \quad Z_1 = \pm 1$$

$$X_2 = 0; \quad Y_2 = 0; \quad Z_2 = \pm 1.$$

Den unendlich fernen Kreispunkten entsprechen also die beiden gemeinschaftlichen Tangential-ebenen an die Flächen Φ_1 und Φ_2 in den beiden Berührungspunkten $x = y = 0, z = \pm 1$.

Die Ausdrücke für R_1 und R_2 zeigen, daß eine besondere Betrachtung nötig ist, wenn $r + r' = 0$, d. h. r rein imaginär, und wenn $r - r' = 0$, d. h. r rein reell ist.

I.
$$x^2 + y^2 + r^2 = 0 \cdot (r \text{ reell})$$

$$Q = 8i (x_1 y_1' - x_1' y_1) (r^2 + 1) \cdot \sqrt{r^2 + 1}.$$

Es ergibt sich:

$$X_1 = 0; Y_1 = 0; Z_1 = -\frac{1}{i} \operatorname{tg} i\chi.$$

21.
$$X_2 = -ir \frac{\sin \varphi}{\sin i\chi}; Y_2 = ir \frac{\cos \varphi}{\sin i\chi}; Z_2 = \frac{1}{i} \operatorname{cot} i\chi.$$

$$\Phi_2 = -\frac{X_2^2}{r^2} - \frac{Y_2^2}{r^2} + Z_2^2 - 1 = 0.$$

Die Fläche Φ_1 (das Ellipsoid) erscheint hier als das Stück der z -Achse innerhalb der Einheitskugel; Φ_2 ist die Gleichung eines zweimanteligen Rotations-Hyperboloides mit den Achsen $r, r, 1$.

II.
$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \text{ (} r \text{ reell).}$$

Wir haben hier wieder zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $r > 1$ oder $r < 1$ ist.

1. $r > 1$. Da hier $Q = 0$ ist, so müssen wir die Gleichung 19a. anwenden, die zweite Fläche ist die unendlich ferne Ebene:

$$N^2 = x_1 x_1' + y_1 y_1' + r^2 = 2r^2 \cos^2 i\chi.$$

$$X = \frac{x_1 + x_1'}{N^2} = \frac{\cos \varphi}{r \cos i\chi}; Y = \frac{y_1 + y_1'}{N^2} = \frac{\sin \varphi}{r \cos i\chi}; Z = \frac{1}{i} \operatorname{tg} i\chi.$$

Hieraus folgt als Gleichung der Fläche:

22.
$$\Phi = r^2 X^2 + r^2 Y^2 + Z^2 - 1 = 0.$$

Das Rotations-Ellipsoid hat die Achsen $\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, 1$.

Für sämtliche Strahlen des Systems, welche diese Fläche umhüllen, ist $\zeta = 0$; die Strahlen sind also der (xy) Ebene parallel.

2. $r < 1$.

$$Q = 8i (1 - r^2) \cdot \sqrt{1 - r^2} (x_1 y_1' - x_1' y_1)$$

$$X_1 = \frac{y_1 - y_1'}{x_1' y_1 - x_1 y_1'} = \frac{\cos \varphi}{r \cos i\chi}; Y_1 = \frac{x_1' - x_1}{x_1' y_1 - x_1 y_1'} = \frac{\sin \varphi}{r \cos i\chi}$$

$$Z_1 = \frac{1}{i} \frac{r^2 - x_1 x_1' - y_1 y_1'}{x_1' y_1 - x_1 y_1'} = \frac{1}{i} \operatorname{tg} i\chi.$$

$$X_2 = 0; Y_2 = 0; Z_2 = \frac{1}{i} \frac{r^2 + x_1 x_1' + y_1 y_1'}{x_1 y_1' - x_1' y_1} = -\frac{1}{i} \operatorname{cot} i\chi.$$

23.
$$\Phi_1 = r^2 X_1^2 + r^2 Y_1^2 + Z_1^2 - 1 = 0.$$

Einem zum Grundkreis konzentrischen Kreise mit einem Radius $r < 1$ entspricht also ebenfalls ein Rotations-Ellipsoid mit den Achsen $\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, 1$. Die Fläche Φ_2 (das Hyperboloid) wird hier zur z -Achse, und zwar ist $Z_2 > 1$ oder $Z_2 < -1$.

Kegelschnitt.

Die zu untersuchende Kurve sei ein Kegelschnitt mit Mittelpunkt, welcher den Grundkreis in den Endpunkten eines Durchmessers berührt; als Berührungspunkte wählen wir die Punkte $x = \pm 1; y = 0$.

$$\varphi(x, y) = b^2 x^2 + y^2 - b^2 = 0; \quad (b \text{ komplex})$$

$$x_1 = \cos(\varphi + i\chi); \quad y_1 = b \sin(\varphi + i\chi)$$

$$Q = -4 \cdot \sqrt{(b^2 - 1)(b'^2 - 1)} [b \sqrt{b'^2 - 1} + b' \sqrt{b^2 - 1}] \cdot (x_1 + x_1') y_1 y_1'$$

$$X_1 = \frac{bb'(x_1 x_1' + 1) - y_1 y_1'}{bb'(x_1 + x_1')} = \frac{\cos \varphi}{\cos i\chi}$$

$$Y_1 = \frac{bx_1 y_1' + b'x_1' y_1}{bb'(x_1 + x_1')} \cdot R_1 = R_1 \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos i\chi}$$

$$Z_1 = \frac{1}{i} \cdot \frac{b'y_1 - by_1'}{bb'(x_1 + x_1')} \cdot R_1 = \frac{1}{i} \cdot R_1 \operatorname{tg} i\chi$$

$$R_1 = \frac{1 + bb' - \sqrt{(b^2 - 1)(b'^2 - 1)}}{b + b'}$$

$$X_2 = \frac{bb'(x_1 x_1' + 1) + y_1 y_1'}{bb'(x_1 + x_1')} = \frac{\cos i\chi}{\cos \varphi}$$

$$Y_2 = \frac{b'y_1 x_1' - by_1' x_1}{bb'(x_1 + x_1')} \cdot R_2 = \frac{R_2 \sin i\chi}{i \cos \varphi}$$

$$Z_2 = -\frac{b'y_1 + by_1'}{bb'(x_1 + x_1')} \cdot R_2 = -R_2 \operatorname{tg} \varphi$$

$$R_2 = i \cdot \frac{bb' - 1 - \sqrt{(b^2 - 1)(b'^2 - 1)}}{b' - b}$$

$$\Phi_1 = X_1^2 + \frac{Y_1^2}{R_1^2} + \frac{Z_1^2}{R_1^2} - 1 = 0 \quad 24a.$$

$$\Phi_2 = X_2^2 - \frac{Y_2^2}{R_2^2} - \frac{Z_2^2}{R_2^2} - 1 = 0. \quad 24b.$$

Φ_1 ist ein Rotations-Ellipsoid mit den Achsen 1, R_1 , R_1 ; Φ_2 ist ein zweischaliges Rotations-Hyperboloid mit den Achsen 1, R_2 , R_2 . Beide Flächen berühren sich in den Punkten $y = z = 0, x = \pm 1$; an jenen Stellen haben sie die gemeinschaftlichen Berührungsebenen $X \mp 1 = 0$; in diesen Ebenen liegen die Strahlen des Systems, welche den Berührungspunkten von Kurve und Grundkreis entsprechen.

Eine besondere Betrachtung erfordern die beiden Fälle: $b + b' = 0$ (b rein imaginär) und $b - b' = 0$ (b rein reell).

$$1. \text{ } b \text{ rein reell: } R_1 = \frac{1}{b}; \quad R_2 = i \frac{\sqrt{b'^2 - 1} - \sqrt{b^2 - 1}}{b \sqrt{b'^2 - 1} + b' \sqrt{b^2 - 1}} = 0$$

$$\Phi_1 = X_1^2 + Y_1^2 b^2 + Z_1^2 b^2 - 1 = 0 \quad 25.$$

$$\Phi_2.) \quad X_2 = \frac{\cos i\chi}{\cos \varphi}; \quad Y_2 = 0; \quad Z_2 = 0.$$

Die Strahlen des Systems, welche einer reellen Ellipse entsprechen, schneiden sämtlich die x -Achse außerhalb des Grundkreises ($X_2 < -1$ oder $X_2 > +1$) und umhüllen das Rotations-Ellipsoid Φ_1 (25.).

$$2. \text{ } b \text{ rein imaginär: } \quad b^2 x^2 - y^2 - b^2 = 0.$$

Durch eine besondere Untersuchung finden wir:

26. $\Phi_1.) \quad X_1 = \frac{\cos \varphi}{\cos i \chi}; \quad Y_1 = 0; \quad Z_1 = 0.$

$$\Phi_2 = X_2^2 - b^2 Y_2^2 - b^2 Z_2^2 - 1 = 0.$$

Die Strahlen, welche einer reellen Hyperbel entsprechen, schneiden die x-Achse innerhalb des Grundkreises ($-1 < X_1 < +1$) und umhüllen ein Rotations-Hyperboloid.

Hyperbel.

$$x \cdot y \mp \frac{1}{2} = 0.$$

$$Q = \pm \frac{1}{4x_1^2 x_1'^2} (x_1 + x_1') (2x_1 x_1' + 1) (2x_1^2 - 1) (2x_1'^2 - 1)$$

$$X_1 = \frac{x_1 + x_1'}{2x_1 x_1' + 1} \quad X_2 = \frac{1}{x_1 + x_1'}$$

$$Y_1 = \pm \frac{x_1 + x_1'}{2x_1 x_1' + 1} \quad Y_2 = \pm \frac{2x_1 x_1'}{x_1 + x_1'}$$

$$Z_1 = 0 \quad Z_2 = \pm \frac{1}{i} \frac{x_1 - x_1'}{x_1 + x_1'}$$

Hieraus ergeben sich die beiden Flächen:

27. $\Phi_1.) \quad X_1 = \pm Y_1; \quad Z_1 = 0$

$$\Phi_2 = \pm 2X_2 Y_2 - Z_2^2 - 1 = 0.$$

Wir ersehen somit, daß sämtliche Strahlen des Systems durch die in der (xy) Ebene liegende Gerade $x \mp y = 0$ gehen und daß sie ein hyperbolisches Paraboloid umhüllen.

Die Fläche Φ_2 schneidet die (xy) Ebene in der Hyperbel $xy \mp \frac{1}{2} = 0$.

Komplexe Parabel.

$$y^2 \mp 2ix = 0$$

$$Q = \mp (y_1 + y_1') (y_1 y_1' + 2) (y_1^2 - 2) (y_1'^2 - 2)$$

$$X_1 = 0 \quad X_2 = \pm i \frac{y_1 - y_1'}{y_1 + y_1'}$$

$$Y_1 = \frac{y_1 + y_1'}{y_1 y_1' + 2} \quad Y_2 = \frac{y_1 y_1'}{y_1 + y_1'}$$

$$Z_1 = \pm \frac{y_1 + y_1'}{y_1 y_1' + 2} \quad Z_2 = \pm \frac{2}{y_1 + y_1'}$$

Eliminieren wir aus diesen Ausdrücken die Parameter y_1 und y_1' , so erhalten wir folgende Flächengleichungen:

28. $\Phi_1.) \quad X_1 = 0; \quad Y_1 = \pm Z_1$

$$\Phi_2 = \pm 2Y_2 Z_2 - X_2^2 - 1 = 0.$$

Sämtliche Strahlen des Strahlensystems gehen also durch die in der (yz) Ebene verlaufende Gerade $y - z = 0$; die Strahlen umhüllen das hyperbolische Paraboloid Φ_2 ; diese Fläche schneidet die (xy) Ebene in keinem reellen Punkte.

Die der zweiten Kurve entsprechenden Strahlen gehen durch die Gerade $y + z = 0$ und umhüllen das hyperbolische Paraboloid $-2YZ - X^2 - 1 = 0$.

Gerade.

Ist die Gleichung einer imaginären Geraden in der Form gegeben
 $x \cos(\alpha + \beta i) + y \sin(\alpha + \beta i) - (p_1 + \pi_1 i) = 0,$

so können wir diese stets durch die reelle Koordinatenverschiebung: $x_1 = x + \frac{\pi_1 i}{\sin \alpha \sin \beta i},$
 $y_1 = y$ auf die Form bringen

$$G = x_1 \cos(\alpha + \beta i) + y_1 \sin(\alpha + \beta i) - p = 0$$

$$p = p_1 + \pi_1 i \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta i.$$

$$Q = 2 \cos \beta i \left\{ \begin{aligned} & \frac{K_1}{\sin(\alpha - \beta i)} [p x_1' \cos \beta i - p^2 \cos \alpha - \sin \beta i \sin(\alpha - \beta i)] \\ & + \frac{K_1'}{\sin(\alpha + \beta i)} [p x_1 \cos \beta i - p^2 \cos \alpha + \sin \beta i \sin(\alpha + \beta i)] \end{aligned} \right\}$$

Es ergibt sich

$$Z_1 = \frac{1}{i} \operatorname{tg} \beta i; X_1 \cos \alpha + Y_1 \sin \alpha - \frac{p}{\cos \beta i} = 0. \quad 29a.$$

$$X_2 - \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta i}{p} = 2 \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta i \cdot \sin \beta i}{p \cdot Q} \cdot \frac{M_1}{i}$$

$$Y_2 - \frac{\sin \alpha \cos \beta i}{p} = 2 \frac{\sin \alpha \cos \beta i \sin \beta i}{p \cdot Q} \cdot \frac{M_1}{i} \quad 29b.$$

$$Z_2 = 2 \frac{\cos \beta i}{Q} \cdot M_1.$$

$$\frac{M_1}{i} = \frac{K_1}{\sin(\alpha - \beta i)} (x_1' p \sin \beta i - p^2 \sin \alpha + \cos \beta i \cdot \sin(\alpha - \beta i))$$

$$+ \frac{K_1'}{\sin(\alpha + \beta i)} (x_1 p \sin \beta i + p^2 \sin \alpha - \cos \beta i \sin(\alpha + \beta i))$$

29a. bedeutet eine Gerade, welche in der zur (xy) Ebene parallelen Ebene $z = \frac{1}{i} \operatorname{tg} \beta i$ verläuft.

29b. bedeutet ebenfalls eine Gerade, deren Richtungscosinus sind:

$$\frac{i \cos \alpha \sin \beta i}{\sqrt{p^2 - \sin^2 \beta i}}; \frac{i \sin \alpha \sin \beta i}{\sqrt{p^2 - \sin^2 \beta i}}; \frac{p}{\sqrt{p^2 - \sin^2 \beta i}}.$$

Die Gerade 29b. schneidet die (xy) Ebene im Punkte $\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta i}{p}, \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta i}{p}.$

Die Gerade G hat den einen reellen Punkt $x = \frac{p \cos \alpha}{\cos \beta i}; y = \frac{p \sin \alpha}{\cos \beta i};$ die Polare dieses Punktes in Bezug auf den Grundkreis ist

$$x p \cos \alpha + y p \sin \alpha - \cos \beta i = 0. \quad 30.$$

Diese Gerade enthält den Punkt $\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta i}{p}, \frac{\sin \alpha \cos \beta i}{p};$ also schneidet die Gerade 29b. die Gerade 30; die Gerade 29a. ist dieser Polare parallel.

Der Geraden G entspricht also ein Strahlensystem, dessen sämtliche Strahlen durch die beiden Geraden 29a. und 29b. gehen.

Ist $p = 1$, berührt die Gerade G den Grundkreis, so ist $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2 = \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 - \varphi_3'^2 = 0$; daraus folgt, daß die beiden Brennpunkte eines jeden Strahles in einen Punkt zusammenfallen. Ferner ergibt sich:

$$31. \quad X = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta i}; \quad Y = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta i}; \quad Z = \frac{1}{i} \operatorname{tg} \beta i.$$

Also gehen sämtliche Strahlen dieses Strahlensystems durch den Punkt 31. Für diesen Punkt gilt ferner:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0;$$

der Punkt liegt also auf der Einheitskugel.

Für $p = 0$, $\beta = 0$ (eine reelle Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt) wird auch $Q = 0$. In diesem Falle liegt also der eine Brennpunkt sämtlicher Strahlen auf der unendlich fernen Geraden der (xy) Ebene. Der zweite Brennpunkt der Strahlen liegt in dem gewählten Anfangspunkte des Strahls:

$$X = \frac{x_1 + x_1'}{N^2}, \quad Y = -\frac{x_1 + x_1'}{N^2} \cot \alpha, \quad Z = 0.$$

Der Ort für diese Brennpunkte ist die Gerade

$$32. \quad Z = 0; \quad X \cos \alpha + Y \sin \alpha = 0.$$

Wir sehen zugleich aus obigen Formeln, daß sämtliche Geraden des Systems durch die in der (xy) Ebene liegende Gerade 32. hindurchgehen.

