Die Determinanten,

ein unentbehrliches Hilfsmittel bei Auflösung der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten und der Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, unseren Schülern über die Determinanten das zusammenzustellen, was zu wissen und zu können ich für notwendig halte. Dabei bin ich weit entfernt, die Theorie entwickeln zu wollen; nur als abkürzender Ausdruck soll die Determinante eingeführt werden zur übersichtlicheren Darstellung und zur Erleichterung der Rechnung. Aber dieses Wenige halte ich, was Realanstalten anlangt, für unumgänglich notwendig,

1. weil dadurch die Auflösung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten vom ersten Grade und die Auflösung der Gleichungen mit zwei Unbekannten vom zweiten Grade zu einem Abschlufs gebracht wird, und
2. weil dadurch eine Determination algebraischer Aufgaben ermöglicht wird.

Die Arbeit erbringt, hoffe ich, den Beweis für diese Behauptungen, und gleichzeitig mag beachtet werden, dafs die Zeit, die auf das Kennenlernen und auf die Einübung der Sätze verwandt wird, wegen der geringen Schwierigkeiten, die zu überwinden sind, eine sehr geringe ist und doch sich reichlich lohnt.

Weil die Arbeit nur das zu bieten beabsichtigt, was ich im Laufe des Unterrichts für zweckmäfsig erkannt, so ist auch die Litteratur nur wenig benutzt. Der Wortlaut der Sätze entspricht bis auf gewisse Abänderungen, welche durch eine andere Herleitung bedingt sind, dem bei O. Hesse: Die Determinanten, elementar behandelt; weiterhin haben mir vorgelegen die Programmarbeiten von Gröll und von Kroeber, endlich die bekannte Schrift von Diekmann.

Gleichungen des ersten Grades.

Bei der ersten Behandlung der linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten (in III[a] resp. II[b]) pflegt man sich zu beschränken auf die Einübung der Gleichsetzungs-, der Einsetzungs- und der Additionsmethode. Die angegebenen Wege führen im allgemeinen sicher zum Ziel, aber man erhält den Wert der einen Unbekannten erst, nachdem die sämtlichen anderen eliminiert worden sind. Direkter verfährt man (und dies würde bereits in das

Arbeitsgebiet von II[a] gehören), wenn man die Methode der unbestimmten Faktoren befolgt. Es sei vorgelegt:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3. \end{aligned}$$

Man multipliziere die Gleichungen mit λ, bez. μ und ν und addiere, ein Verfahren, das auf folgende Weise angedeutet sein mag:

$$\begin{array}{l|l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 & +\lambda \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 & +\mu \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 & +\nu \\ \hline \end{array}$$

$$x(\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3) + y(\lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3) + z(\lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3) = \lambda d_1 + \mu d_2 + \nu d_3.$$

Der Wert von x wird gefunden, wenn man λ, μ und ν so bestimmt, dafs die Koefficienten von y und z der Null gleich werden, oder der Wert von y wird gefunden, wenn man λ, μ und ν so bestimmt, dafs die Koefficienten von x und z verschwinden u. s. f. So ist z. B.

$$y = \frac{\lambda d_1 + \mu d_2 + \nu d_3}{\lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3}, \text{ wenn}$$
$$\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3 = 0$$
$$\lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3 = 0 \text{ ist.}$$

Einen der Faktoren kann man beliebig festsetzen, dadurch aber sind die beiden andern unzweideutig bestimmt, vorausgesetzt dafs die vorgelegten Gleichungen überhaupt Bestimmungsgleichungen für x, y und z sind.

Man erhält also direkt den Wert gerade derjenigen Unbekannten, auf welche es ankommt, ist aber die Unbekannte eine der n Unbekannten eines Systems von n Gleichungen, so erfordert ihre Ermittelung die Auflösung eines Systems von $n-1$ Gleichungen. Es liegt daher die Frage nahe: Sollten sich jene Faktoren λ, μ, ν u. s. w. nicht von vornherein bestimmen lassen, ohne dafs ein System von $n-1$ Gleichungen erst aufgelöst werden mufs?

Das Mittel dazu bieten die Determinanten.

A. Determinanten zweiter Ordnung.

Aus dem Systeme:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned}$$

würde nach irgend einer der angegebenen Methoden folgen:

$$x(a_1 b_2 - a_2 b_1) = c_1 b_2 - c_2 b_1.$$

Die Differenz der Produkte $a_1 b_2$ und $a_2 b_1$ nennt man eine Determinante zweiter Ordnung und bezeichnet:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Mit Benutzung dieser Schreibweise würde sich ergeben:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ und } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Einige Sätze über Determinanten 2. O. sind abzuleiten.

Man bezeichne

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta_2$$

und frage: Wie ändert sich der Wert der Determinante, wenn man die Horizontalreihen zu den entsprechenden Vertikalreihen macht und umgekehrt?

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta_2$$

I. **Eine Determinante 2. O. bleibt ungeändert, wenn man die entsprechenden Horizontal- und Vertikalreihen mit einander vertauscht.**

Hieraus folgt, dafs Sätze, die von Vertikalreihen abgeleitet werden, ohne weiteres auf Horizontalreihen übertragen werden können und umgekehrt. Was ergiebt sich aber, wenn man zwei gleichartige Reihen mit einander vertauscht?

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 b_1 - a_1 b_2 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1) = -\Delta_2$$

II. **Eine Determinante 2. O. ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man zwei gleichartige Reihen mit einander vertauscht.**

Ein überraschendes Resultat erhält man, wenn man letzteren Satz anwendet auf eine Determinante, bei welcher die Glieder der einen Reihe gleich den entsprechenden Gliedern der anderen Reihe sind. Es sei:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = E.$$

Vertauscht man die Vertikalreihen, so folgt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = -E.$$

Es wäre also $E = -E$; d. h.

$$E = 0.$$

III. **Eine Determinante 2. O. verschwindet, wenn die Glieder der einen Reihe gleich den entsprechenden Gliedern der anderen Reihe sind.**

Dasselbe gilt, wie man durch einfaches Ausrechnen sich überzeugen kann, wenn die Glieder der einen Reihe dasselbe Vielfache der Glieder der anderen Reihe sind, und die Vermutung liegt nahe, dafs hier ein allgemeiner Satz zur Anwendung kommen wird. Um diesen zu finden, multipliziere man die sämtlichen Glieder einer Reihe mit derselben Zahl k.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_2 & kb_2 \end{vmatrix} = a_1 k b_2 - k a_2 b_1 = k(a_1 b_2 - a_2 b_1) = k \cdot \Delta_2$$

IV. **Eine Determinante 2. O. wird mit einer Zahl multipliziert, indem man die sämtlichen Glieder einer Reihe mit dieser Zahl multipliziert.**

Dafs Multiplikation im allgemeinen Sinne aufzufassen ist, mag noch ausdrücklich hervorgehoben werden. Zur Vereinfachung der Rechnung wird der Satz häufig angewandt werden können; er dient zur Entfernung der Bruchform aus der Determinante und schafft durch Abscheidung gemeinschaftlicher Faktoren kleinere Zahlen in der Determinante.

Beispiel (Heis § 65, 11):

$$\begin{vmatrix} 2\frac{3}{7} & -\frac{3}{4} \\ 1\frac{3}{5} & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{35} \cdot \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 85 & 3 \\ 56 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{35} \begin{vmatrix} 85 & 3 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{43}{35}.$$

Endlich sei ein Satz hinzugefügt lediglich deshalb, weil er bei der Ausrechnung der Determinanten von aufserordentlichem Nutzen ist.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ka_1 \\ a_2 & b_2 + ka_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 \\ a_2 & ka_2 \end{vmatrix} = \Delta_2 + k \cdot 0 = \Delta_2$$

V. Eine Determinante 2. O. bleibt ungeändert, wenn man zu den Gliedern einer Reihe ein beliebiges Vielfaches der entsprechenden Glieder der anderen Reihe addiert.

Auch hier ist natürlich Multiplikation und Addition im allgemeinen Sinne zu nehmen. Der Nutzen des Satzes ist besonders augenfällig, wenn durch ihn an gewisse Stellen der Determinante 0 gebracht werden kann.*)

Beispiel (s. unter IV):

$$\begin{vmatrix} 2\frac{3}{7} & -\frac{3}{4} \\ 1\frac{3}{5} & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{35}\begin{vmatrix} 85 & 3 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{35}\begin{vmatrix} 85-3\cdot 14 & 3-3\cdot 1 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{35}\begin{vmatrix} 43 & 0 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{43}{35}.$$

B. Determinanten dritter Ordnung.

Wie der Begriff der Determinante sich erweitert, lehrt die Auflösung der Gleichungen mit 3 Unbekannten. Wir haben hier:

$$\begin{array}{l|l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & +\lambda \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & +\mu \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & +\nu \\ \hline \end{array}$$

$$x(\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3) + y(\lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3) + z(\lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3) = \lambda d_1 + \mu d_2 + \nu d_3.$$

Hieraus folgt zunächst für x

$$x = \frac{\lambda d_1 + \mu d_2 + \nu d_3}{\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3}, \text{ wenn}$$
$$\lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_3 = 0 \text{ und}$$
$$\lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3 = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen schreiben wir zunächst in der Form:

$$\frac{\lambda}{\nu} b_1 + \frac{\mu}{\nu} b_2 = -b_3$$
$$\frac{\lambda}{\nu} c_1 + \frac{\mu}{\nu} c_2 = -c_3,$$

und es ergiebt sich

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{\begin{vmatrix} -b_3 & b_2 \\ -c_3 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & -b_3 \\ c_1 & -c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}$$

Schreibt man:

$$x = \frac{\frac{\lambda}{\nu} d_1 + \frac{\mu}{\nu} d_2 + d_3}{\frac{\lambda}{\nu} a_1 + \frac{\mu}{\nu} a_2 + a_3},$$ so gewinnt man, nachdem mit $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ erweitert ist:

---

*) Bei Determinanten höherer Ordnung wächst der Vorteil aus den Sätzen, welche unsern Sätzen III, IV und V entsprechen; insbesondere leistet der letzte zur Faktorenzerlegung vortreffliche Dienste.

$$x = \frac{d_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - d_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}.$$

Aggregate, wie sie im Zähler und Nenner dieses Bruches stehen, nennt man Determinanten dritter Ordnung, und man bezeichnet z. B.

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot {}^{2}\!\Delta_1 - a_2 \cdot {}^{2}\!\Delta_2 + a_3 \cdot {}^{2}\!\Delta_3 = {}^{3}\!\Delta$$

Handelt es sich also um die Bestimmung von x, so sind die Faktoren λ, $-\mu$ und ν die Determinanten 2. O. ${}^{2}\!\Delta_1$ bez. ${}^{2}\!\Delta_2$ und ${}^{2}\!\Delta_3$, und man nennt diese in Beziehung auf ${}^{3}\!\Delta$ als Hauptdeterminante die Unterdeterminanten zu den Koefficienten von x. Ihr Bildungsgesetz wird sofort klar, wenn man bedenkt, dafs

$${}^{2}\!\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \text{ ebenso}$$

$${}^{2}\!\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ und}$$

$${}^{2}\!\Delta_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Bei sämtlichen dieser Unterdeterminanten fehlt a; aufserdem kommt in ${}^{2}\!\Delta_1$ keine Gröfse vor mit dem Index 1, in ${}^{2}\!\Delta_2$ keine mit dem Index 2 und in ${}^{2}\!\Delta_3$ keine mit dem Index 3.

Man schreibt:

$${}^{3}\!\Delta = a_1\,{}^{2}\!\Delta_1 - a_2\,{}^{2}\!\Delta_2 + a_3\,{}^{2}\!\Delta_3 = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Behält man diese Schreibweise im Auge, so würde beispielsweise ${}^{2}\!\Delta_2$ sich ablesen lassen, wenn man die Horizontal- und die Vertikalreihe unterdrückt, in welcher a_2 steht, und durch parallele Verrückung der Glieder die Lücken wieder ausfüllt.

Mit Berücksichtigung des angegebenen Schemas folgt somit

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Es ist zu untersuchen, ob die für Determinanten 2. O. abgeleiteten Sätze auch für Determinanten 3. O. gelten.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \cdot {}^{2}\!\Delta_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1$$

$$= a_1\,{}^{2}\!\Delta_1 - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\,{}^{2}\!\Delta_1 - a_2\,{}^{2}\!\Delta_2 + a_3 \cdot {}^{2}\!\Delta_3 = {}^{3}\!\Delta$$

I. Eine Determinante 3. O. bleibt ungeändert, wenn man die entsprechenden Horizontal- und Vertikalreihen mit einander vertauscht.

Zur Prüfung in Bezug auf den zweiten Lehrsatz vertauschen wir die zweite und erste Horizontalreihe von Δ_3.

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = a_2 \Delta_2\big|_2 - a_1 \Delta_2\big|_1 - a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(a_1 \Delta_2\big|_1 - a_2 \Delta_2\big|_2 + a_3 \Delta_2\big|_3\right) = -\Delta_3$$

Dasselbe erreicht man, wenn man die zweite und dritte Reihe mit einander vertauscht, und zwar ist es hier für den Beweis gleichgültig, ob man Horizontal- oder Vertikalreihen wählt.

II. Eine Determinante 3. O. ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man zwei benachbarte Reihen mit einander vertauscht.

So kann jede Reihe zur ersten Vertikalreihe gemacht werden, und man wird bald erkennen, dafs zu a_1, a_2 und a_3 immer dieselben Unterdeterminanten gehören, nämlich $\Delta_2\big|_1$ bez. $\Delta_2\big|_2$ und $\Delta_2\big|_3$; ebenso zu b_1, b_2 und b_3 immer dieselben Unterdeterminanten (sie sollen mit E_1, E_2 und E_3 bezeichnet werden); ebenso zu c_1, c_2 und c_3 (F_1 resp. F_2 und F_3).

Aufgaben: 1. Welche Bedeutung haben E_1 E_2 etc.?

2. Unter welchen Formen läfst sich Δ_3 darstellen?

3. Beweise, dafs alle die Formen schliefslich auf $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ hinauskommen.

Sind einmal die Sätze I und II als richtig erkannt, so ergeben sich die übrigen von selbst. Es gilt also:

III. Eine Determinante 3. O. hat den Wert Null, wenn die Glieder der einen Reihe gleich den entsprechenden Gliedern einer anderen Reihe sind.

Aufgaben:

4. $b_1 \Delta_2\big|_1 - b_2 \Delta_2\big|_2 + b_3 \Delta_2\big|_3 = ?$

5. $c_1 \Delta_2\big|_1 - c_2 \Delta_2\big|_2 + c_3 \Delta_2\big|_3 = ?$

6. $a_1 E_1 - a_2 E_2 + a_3 E_3 = ?$

etc.

IV. Eine Determinante 3. O. wird mit einer Zahl multipliziert, indem man die sämtlichen Glieder einer Reihe mit dieser Zahl multipliziert.

V. Eine Determinante 3. O. bleibt ungeändert, wenn man zu den Gliedern irgend einer Reihe addiert dasselbe (sonst beliebige) Vielfache der entsprechenden Glieder einer anderen Reihe.

Die Sätze IV und V dienen wesentlich zur Erleichterung bei der Berechnung gegebener Determinanten; durch Satz III aber erkennen wir, dafs, wenn bei unserem ursprünglichen Gleichungssysteme $\lambda = \Delta_2\big|_1$, $\mu = -\Delta_2\big|_2$ und $\nu = \Delta_2\big|_3$ gesetzt*) wird, die Koefficienten von

*) Bei dem Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten erscheinen die Faktoren λ, μ nicht in Determinantenform, man erkennt aber dadurch, dafs jede Zahl als Determinante 1. O. aufgefafst werden kann.

y und z verschwinden; oder dafs, wenn $\lambda = E_1$, $\mu = -E_2$ und $\nu = E_3$ gesetzt wird, die Koefficienten von x und z verschwinden, oder endlich dafs, wenn $\lambda = F_1$, $\mu = -F_2$ und $\nu = F_3$ gesetzt wird, die Koefficienten von x und y verschwinden.

Im ersten Falle haben wir:

$$x\left(a_1 \Delta^{(2)}_1 - a_2 \Delta^{(2)}_2 + a_3 \Delta^{(2)}_3\right) + y\left(b_1 \Delta^{(2)}_1 - b_2 \Delta^{(2)}_2 + b_3 \Delta^{(2)}_3\right) + z\left(c_1 \Delta^{(2)}_1 - c_2 \Delta^{(2)}_2 + c_3 \Delta^{(2)}_3\right)$$
$$= d_1 \Delta^{(2)}_1 - d_2 \Delta^{(2)}_2 + d_3 \Delta^{(2)}_3$$

d. h.: $x \Delta^{(3)} + y \cdot 0 + z \cdot 0 = d_1 \Delta^{(2)}_1 - d_2 \Delta^{(2)}_2 + d_3 \Delta^{(2)}_3$ oder:

$$x \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} . \quad ^{*)}$$

Im zweiten Falle:

$$x(a_1 E_1 - a_2 E_2 + a_3 E_3) + y(b_1 E_1 - b_2 E_2 + b_3 E_3) + z(c_1 E_1 - c_2 E_2 + c_3 E_3)$$
$$= d_1 E_1 - d_2 E_2 + d_3 E_3$$

D. h.: $x \cdot 0 + y \cdot \left(-\Delta^{(3)}\right) + z \cdot 0 = d_1 E_1 - d_2 E_2 + d_3 E_3$

$$-y \cdot \Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$y \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Im letzten Falle:

$$x(a_1 F_1 - a_2 F_2 + a_3 F_3) + y(b_1 F_1 - b_2 F_2 + b_3 F_3) + z(c_1 F_1 - c_2 F_2 + c_3 F_3)$$
$$= d_1 \cdot F_1 - d_2 F_2 + d_3 F_3 .$$

D. h.: $x \cdot o + y \cdot o + z \cdot \Delta^{(3)} = d_1 \cdot F_1 - d_2 \cdot F_2 + d_3 \cdot F_3 .$

$$z \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & b_1 \\ a_2 & d_2 & b_2 \\ a_3 & d_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} . \quad ^{**)}$$

---

*) Häufig wird ein „praktisches" Verfahren für die Ausrechnung der Determinanten 3. O. angegeben. Ich erwähne dasselbe im Unterrichte nicht, weil der Vorteil dieser mechanischen Ausrechnung, wenn überhaupt von Vorteil gesprochen werden kann, ein sehr geringer ist, und weil andererseits bei der Zurückführung der Determinanten 3. O. auf eine solche 2. O. das Endresultat sich als Produkt mehrerer Faktoren darstellt, also bei der Auswertung der Unbekannten ein deutlicher Wink zum Kürzen gegeben ist.

**) Eine elegantere Auflösung linearer Gleichungen liefert Satz IV in Verbindung mit Satz V. Diese Methode sieht sich aber wie ein Kunstgriff an und setzt voraus, dass der Begriff der Determinante selbstständig d. h. ohne Anlehnung an die Gleichungen entwickelt worden ist. Es ist z. B.

$$y . \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 y & c_1 \\ a_2 & b_2 y & c_2 \\ a_3 & b_3 y & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 y + a_1 x + c_1 z & c_1 \\ a_2 & b_2 y + a_2 x + c_2 z & c_2 \\ a_3 & b_3 y + a_3 x + c_3 z & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Beispiele: I.

Heis § 65, 101 *a*.

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=2{,}9$$
$$\frac{5}{x}-\frac{6}{y}-\frac{7}{z}=-10{,}4$$
$$-\frac{8}{x}+\frac{9}{y}+\frac{10}{z}=14{,}9$$

$$\begin{vmatrix}2&-3&4\\5&-6&-7\\-8&+9&10\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2&-1&4\\5&-2&-7\\-8&3&10\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0&-1&0\\1&-2&-15\\-2&3&22\end{vmatrix}$$

(Die mit 2 multiplizierten Glieder der zweiten Vertikalreihe sind zu den entsprechenden Gliedern der ersten, und die mit 4 multiplizierten Glieder der zweiten Vertikalreihe sind zu den entsprechenden der dritten Reihe gezählt worden)

$$=3\begin{vmatrix}1&-15\\-2&22\end{vmatrix}=-3\cdot2\cdot4.$$

$$\begin{vmatrix}2{,}9&-3&+4\\-10{,}4&-6&-7\\14{,}9&9&+10\end{vmatrix}=\frac{3}{10}\begin{vmatrix}29&-1&4\\-104&-2&-7\\149&3&+10\end{vmatrix}=\frac{3}{10}\begin{vmatrix}0&-1&0\\-162&-2&-15\\236&3&22\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{3}{10}\begin{vmatrix}162&15\\236&22\end{vmatrix}=-\frac{3\cdot2\cdot2\cdot3}{10}\begin{vmatrix}27&5\\59&11\end{vmatrix}=-\frac{3\cdot2\cdot2\cdot3\cdot2}{10}$$

$$-\frac{3\cdot2\cdot4}{x}=-\frac{3\cdot2\cdot2\cdot3\cdot2}{10}$$

$$x=\frac{10}{3}$$

$$\begin{vmatrix}2&2{,}9&4\\5&-10{,}4&-7\\-8&14{,}9&10\end{vmatrix}=\frac{1}{10}\begin{vmatrix}6&29&4\\-2&-104&-7\\+2&149&10\end{vmatrix}$$

(Zu den Gliedern der ersten Vertikalreihe sind die der dritten gezählt worden.)

$$=\frac{1}{10}\begin{vmatrix}0&-283&-17\\-2&-104&-7\\0+&45&3\end{vmatrix}=-\frac{2}{10}\begin{vmatrix}283&17\\45&3\end{vmatrix}=-\frac{2\cdot3}{10}\begin{vmatrix}283&17\\15&1\end{vmatrix}=-\frac{2\cdot3\cdot28}{10}$$

$$-\frac{3\cdot2\cdot4}{y}=-\frac{2\cdot3\cdot\overset{7}{28}}{10}$$

$$y=\frac{10}{7}.$$

$$\begin{vmatrix}2&-3&2{,}9\\5&-6&-10{,}4\\-8&+9&14{,}9\end{vmatrix}=\frac{3}{10}\begin{vmatrix}2&-1&29\\5&-2&-104\\-8&3&149\end{vmatrix}=\frac{3}{10}\begin{vmatrix}2&-1&29\\1&0&-162\\-2&0&236\end{vmatrix}$$

$$=\frac{3}{10}\begin{vmatrix}1&-162\\-2&236\end{vmatrix}=\frac{3\cdot2\cdot2}{10}\begin{vmatrix}1&-81\\-1&59\end{vmatrix}=-\frac{3\cdot2\cdot2\cdot22}{10}$$

$$-\frac{3\cdot2\cdot4}{z}=-\frac{3\cdot2\cdot2\cdot\overset{11}{22}}{10}$$

$$z=\frac{10}{11}.$$

II.

Die drei Seiten eines Dreiecks sind gegeben. Mittels des Projektionssatzes ist einer der Winkel zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcl} & c\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\gamma & = a \\ c\cdot\cos\alpha & + a\;\cos\gamma & = b \\ b\;\cos\alpha + a\cos\beta & & = c \end{array}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ sind als die Unbekannten zu betrachten.

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = -c\begin{vmatrix} c & b \\ a & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} c & b \\ 0 & a \end{vmatrix} = 2\,abc.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & c & a \\ c & 0 & b \\ b & a & c \end{vmatrix} = -c\begin{vmatrix} c & a \\ a & c \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} c & a \\ 0 & b \end{vmatrix} = c\,(a^2 - c^2 + b^2)$$

$$2\,abc\cdot\cos\gamma = c\,(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab.}$$

III.

Von einem Punkte O aus gehen drei nicht in einerlei Ebene liegende Strahlen, und die Abschnitte, welche von zwei Ebenen auf diesen hervorgerufen werden, seien bezw.

$$OA : OB : OC = \frac{a}{h} : \frac{b}{k} : \frac{c}{l}$$

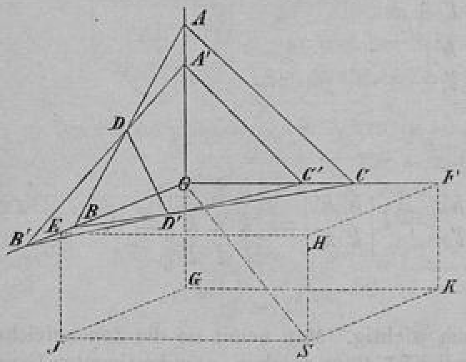
$$OA' : OB' : OC' = \frac{a}{h'} : \frac{b}{k'} : \frac{c}{l'}.$$

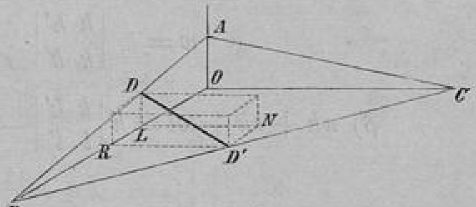
Der Schnitt der beiden Ebenen sei DD', und zu DD' denke man sich durch O die Parallele gezogen. Ist S ein Punkt derselben und OS die Diagonale eines Parallelepipedons $OEHFKGJS$, dessen Kanten OG, OE, OF in den Axen OA, OB, OC liegen, so verhält sich:

$$OG : OE : OF = u\cdot a : v\cdot b : w\cdot c.$$

α) Wie grofs ist u, v, w?

β) Wie grofs ist $uh + vk + wl$?





α) Man denke sich das Parallelepipedon mit der körperlichen Diagonale DD' gezeichnet, dessen Kanten denen des gegebenen paarweise parallel laufen. Dann würde sich (ohne Rücksicht auf das Zeichen) verhalten:

$$OG : OE : OF = LD : LR : LN.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AOB und LDB folgt:

$$LD : LB = OA : OB = \frac{a}{h} : \frac{b}{k}.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BOC und BRD' folgt:

$$RD' : RB = OC : OB = \frac{c}{l} : \frac{l}{k}.$$

Dem entsprechend findet man:

$$LD \ : LB' = \frac{a}{h'} : \frac{b}{k'} \text{ und}$$

$$RD' : RB' = \frac{c}{l'} : \frac{b}{k'}.$$

Nun ist, wie aus der Figur sich ergiebt:

$$LR = LB - RB = LB' - RB'; \text{ also:}$$

$$LD \cdot \frac{b}{k} \cdot \frac{h}{a} - RD' \cdot \frac{b}{k} \cdot \frac{l}{c} = LD \frac{b}{k'} \cdot \frac{h'}{a} - RD' \frac{b}{k'} \cdot \frac{l'}{c}.$$

$$LD : RD' = a \cdot \begin{vmatrix} l & l' \\ k & k' \end{vmatrix} : c \begin{vmatrix} h & h' \\ k & k' \end{vmatrix}$$

$$LR = LD \frac{b}{k} \cdot \frac{h}{a} - RD' \frac{b}{k} \frac{l}{c}$$

$$\frac{LR}{RD'} = \frac{LD}{RD'} \cdot \frac{b}{k} \cdot \frac{h}{a} - \frac{b}{k} \cdot \frac{l}{c}; \text{ schließlich:}$$

$$LR : RD' = b \begin{vmatrix} l & l' \\ h & h' \end{vmatrix} : c \begin{vmatrix} h & h' \\ k & k' \end{vmatrix}.$$

Da nun $RD' = LN$, so gewinnt man:

$$LD : LR : LN = a \begin{vmatrix} l & l' \\ k & k' \end{vmatrix} : b \begin{vmatrix} l & l' \\ h & h' \end{vmatrix} : c \begin{vmatrix} h & h' \\ k & k' \end{vmatrix}$$

Mit Berücksichtigung der Richtung von OG ergiebt sich daher:

$$u = -\begin{vmatrix} l & l' \\ k & k' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k' \\ l & l' \end{vmatrix}$$

$$v = \begin{vmatrix} l & l' \\ h & h' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} h & h' \\ l & l' \end{vmatrix}$$

$$w = \begin{vmatrix} h & h' \\ k & k' \end{vmatrix}.$$

$$\beta)\ uh + vk + wl = h \begin{vmatrix} k & k' \\ l & l' \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} h & h' \\ l & l' \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} h & h' \\ k & k' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h & h & h' \\ k & k & k' \\ l & l & l' \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung $uh + vk + wl = 0$ ist krystallographisch wichtig. Man nennt sie die Zonengleichung; sie drückt aus, daſs eine durch h, k, l bestimmte Fläche parallel ist einer durch u, v, w bestimmten Geraden, oder, wie man gewöhnlich sagt, in der Zone ($u\ v\ w$) liegt. Die Wichtigkeit der Gleichung erkennt man sofort, wenn man bedenkt, daſs krystallographisch eine Fläche bereits bestimmt ist, wenn man weiſs, daſs sie zweien sich schneidenden (sich kreuzenden) Geraden zugleich parallel ist, wenn sie also in zwei Zonen, deren Axen die angegebene Eigenschaft haben, zugleich liegt. Wenn eine Fläche xyz (die Bezeichnung nach Max Bauer: Lehrbuch der Mineralogie habe ich nur in Kleinigkeiten geändert) in den Zonen $(u\,v\,w)$ und $(u_1\,v_1\,w_1)$ liegt, so gelten die Gleichungen:

$$xu + yv + zw = 0$$

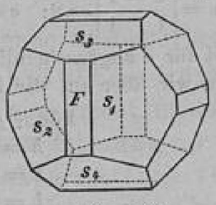
$$xu_1 + yv_1 + zw_1 = 0, \text{ und es folgt:}$$

$$x:y:z = \begin{vmatrix} -w & v \\ -w_1 & v_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & -w \\ u_1 & -w_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & v \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} v & w \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} w & u \\ w_1 & u_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & v \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}$$

Ist z. B. bei einem Pyritkrystalle das typische Pyritoeder an den Flächen $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ wohl zu erkennen, und es wird nach der Fläche F gefragt, so kommen in Betracht die Zonen $(s_1\,s_2)$ und $(s_3\,s_4)$.

Für s_1 gilt:	Für s_2 gilt:
$h = 2$	$h' = 2$
$k = 1$	$k' = -1$
$l = 0$	$l' = 0$;



also $u = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad v = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad w = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$

Für s_3 gilt:	Für s_4 gilt:
$h = 1$	$h' = 1$
$k = 0$	$k' = 0$
$l = 2$	$l' = -2$; also:

$$u_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad v_1 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = +4; \quad w_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

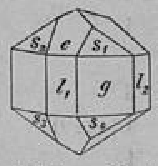
Für Fläche F ergiebt sich: $x:y:z = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

$$= 1 : 0 : 0.$$

Die Fläche F wäre also nach Naumann'scher Bezeichnung

$$\infty\, O\, \infty.$$

Ein zweites Beispiel möge ein Zinnsteinkrystall uns liefern.



Die Flächen $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ gehören zum Hauptoktaëder P; die Flächen l_1 und l_2 zur Säule 2. O., zu $\infty P \infty$.

α) Welches Zeichen kommt der Fläche g zu?

β) Welches Zeichen kommt der Fläche e zu?

α) Die Fläche g liegt in den Zonen $(s_1\,s_4)$ und $(l_1\,l_2)$.

Für s_1 gilt:	Für s_4 gilt:
$h = 1$	$h' = 1$
$k = 1$	$k' = 1$
$l = 1$	$l' = -1$; also ist:

$$u = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; \quad v = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +2; \quad w = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Für l_1 gilt:	Für l_2 gilt:
$h = 1$	$h' = 0$
$k = 0$	$k' = 1$
$l = 0$	$l' = 0$; also ist:

$$u_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad v_1 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad w_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

So ergiebt sich für die Fläche g:

$$x:y:z = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 2 : 2 : 0 = 1:1:0.$$

g ist also Säule 1. O.; ∞P.

β) Um die Fläche e zu bestimmen, benutzt man zunächst die Zone $(s_1\, s_2)$.

Für s_1 gilt:	Für s_2 gilt:
$h = +1$	$h' = 1$
$k = +1$	$k' = -1$
$l = +1$	$l' = 1$; also ist:

$$u = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad v = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad w = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Eine zweite Zone ist für e augenscheinlich nicht vorhanden; am Krystall ist der Zonenzusammenhang nicht vollständig. Nehmen wir aber an, die Basis c wäre ausgebildet, so steht die Zone $(l_1\, c)$ zu Gebote.

Für l_1 gilt:	Für c gilt:
$h = 1$	$h' = 0$
$k = 0$	$k' = 0$
$l = 0$	$l' = 1$; also ist:

$$u_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad v_1 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad w_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Für Fläche e ist somit: $x:y:z = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

$$= 2 : 0 : -2 = 1:0:1.$$

e ist $P\infty$. (Das dem Hauptoktaëder zugehörige Oktaëder 2. O.).

IV.

Bardey: XXIII, B, 31.

$$x + 2y + 3z = 15{,}4$$
$$3x + 5y + 7z = 37{,}4$$
$$5x + 8y + 11z = 59{,}4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 15{,}4 & 2 & 3 \\ 37{,}4 & 5 & 7 \\ 59{,}4 & 8 & 11 \end{vmatrix} = 2{,}2 \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 17 & 5 & 7 \\ 27 & 8 & 11 \end{vmatrix} = 2{,}2 \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 10 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$x = \frac{0}{0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 15{,}4 & 3 \\ 3 & 37{,}4 & 7 \\ 5 & 59{,}4 & 11 \end{vmatrix} = 2{,}2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 3 & 17 & 7 \\ 5 & 27 & 11 \end{vmatrix} = 2{,}2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 10 & 4 \\ 2 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$y = \frac{0}{0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 15{,}4 \\ 3 & 5 & 37{,}4 \\ 5 & 8 & 59{,}4 \end{vmatrix} = 2{,}2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 17 \\ 5 & 8 & 27 \end{vmatrix} = 2{,}2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

$$z = \frac{0}{0}$$

Dies führt uns auf das Erkennungszeichen, ob ein System linearer Gleichungen aufgelöst werden kann oder nicht.

Die Unbekannten lassen sich nicht bestimmen, wenn die aus den Koefficienten der Unbekannten gebildete Determinante, die Determinante des Systems, verschwindet. Sollen die Gleichungen zusammen bestehen, so müssen auch die Determinanten der Null gleich werden, die man erhält, wenn in der Determinante des Systems die Koefficienten der gesuchten Unbekannten durch die absoluten Glieder ersetzt werden. Denn wenn für x, y und z die Werte ∞ ausgeschlossen sind, kann ox ebenso oy und oz nur gleich Null sein. Wenn aber die Determinanten der letzten Art nicht sämtlich $= o$ sind, so würde man erhalten
$$o \neq o;$$
ein Widerspruch, der natürlich schon in dem gegebenen Systeme begründet ist.

Ist die Determinante des Systems gleich Null, so können die gegebenen Gleichungen zusammen bestehen (sie sind aber nicht unabhängig von einander), wenn die Determinanten, welche die absoluten Glieder an Stelle der Koefficienten und gesuchten Unbekannten enthalten, sämtlich verschwinden;

sie können nicht zusammen bestehen (sie widersprechen einander), wenn diese Determinanten nicht sämtlich verschwinden.

Die als Beispiel IV vorgelegten Gleichungen können danach zusammen bestehen; dasselbe tritt aber nicht ein bei folgenden Gleichungen:
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 9 \\ 2x + 4y + z &= 13 \\ x + 2y + 3z &= 14. \end{aligned}$$
Zwar ist
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0; \text{ aber}$$
$$\begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 13 & 4 & 1 \\ 14 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -13 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -13 & -4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Wenn aber gesagt ist, dass die Unbekannten sich nicht bestimmen lassen (vorausgesetzt ist, dass die Gleichungen einander nicht widersprechen), so braucht dies nicht von allen zu gelten. Ist z. B.
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 8 \\ 2x + 4y + z &= 13 \\ x + 2y + 3z &= 14, \end{aligned}$$
so sind zwar die sämtlichen Determinanten der Null gleich; aber es ist doch
$$z = 3;$$
x und y freilich haben nur der einen Bedingung zu genügen:
$$x + 2y = 5.$$

C. Determinanten n^{ter} Ordnung.

Wie bei einem Systeme von 4, 5 ... Gleichungen mit der entsprechenden Anzahl von Unbekannten zu verfahren ist, lässt sich ohne weiteres überschauen. Es erübrigt noch nachzuweisen, dass die unter I, II ..... V angeführten Sätze allgemein gelten. Man erkennt zunächst nach dem Früheren, dass die Sätze III, IV und V eines Beweises nicht mehr bedürfen, wenn die Sätze I und II bewiesen sind. Auf die hierdurch angedeutete Aufgabe beschränke ich mich. Angenommen wird, der Satz I gilt für Determinanten $n^{\underline{\text{ter}}}$ O., und zu beweisen ist, dass er dann auch gilt für Determinanten $(n+1)^{\underline{\text{ter}}}$ O.

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \dots & h_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \dots & h_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & \dots & h_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} & d_{n+1} & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} = a_1 \Delta_{n,1} - a_2 \Delta_{n,2} + a_3 \Delta_{n,3} - \dots \pm a_{n+1} \Delta_{n,n+1}$$

Die einander entsprechenden Horizontal- und Vertikalreihen sind zu vertauschen:

$$E_{n+1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n+1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & \dots & b_{n+1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ d_2 & d_3 & \dots & d_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ d_2 & d_3 & \dots & d_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} +$$

Das ist

$$E_{n+1} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 & \dots & h_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & \dots & h_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n+1} & c_{n+1} & d_{n+1} & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 & \dots & h_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 & \dots & h_3 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n+1} & c_{n+1} & d_{n+1} & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} +$$

$$E_{n+1} = a_1 \cdot \Delta_{n,1} - a_2 \left\{ b_1 \begin{vmatrix} c_3 & \dots & h_3 \\ c_4 & \dots & h_4 \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+1} & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} b_3 & d_3 & \dots & h_3 \\ b_4 & d_4 & \dots & h_4 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n+1} & d_{n+1} & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} + \dots \pm h_1 \begin{vmatrix} b_3 & \dots & g_3 \\ b_4 & \dots & g_4 \\ \vdots & & \\ b_{n+1} & \dots & g_{n+1} \end{vmatrix} \right\} +$$

$$E_{n+1} = a_1 \Delta_{n,1} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & \dots & h_1 \\ b_3 & c_3 & \dots & h_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n+1} & c_{n+1} & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & \dots & h_1 \\ b_2 & c_2 & \dots & h_2 \\ b_4 & c_4 & \dots & h_4 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n+1} & c_{n+1} & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} \mp \dots$$

Endlich:

$$E_{n+1} = a_1 \Delta_{n,1} - a_2 \Delta_{n,2} + a_3 \Delta_{n,3} - \dots \pm a_{n+1} \Delta_{n,n+1} = \Delta_{n+1}$$

Damit ist die allgemeine Gültigkeit von Satz I bewiesen.

Was die Vertauschung von zwei benachbarten Reihen anlangt, so bedarf nur die Vertauschung der ersten und zweiten Reihe einer besonderen Beachtung. In allen anderen Fällen, mag der Austausch an Horizontal- oder an Vertikalreihen vorgenommen werden, sind die Faktoren von $a_1, a_2, \dots a_{n+1}$ Determinanten $n^{\underline{\text{ter}}}$ O., die von $\Delta_{n,1}, \Delta_{n,2} \dots \Delta_{n,n+1}$ entweder direkt durch das Vorzeichen sich unterscheiden oder insofern verschieden sind, als zwei benachbarte Reihen vertauscht sind.

Handelt es sich um die Vertauschung der ersten und zweiten Vertikalreihe, so würde die Beweisführung ähnlich sich gestalten, wie bei Satz I; doch kann man sich den Beweis

$$+ c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ b_2 & b_3 & \dots & b_{n+1} \\ d_2 & d_3 & \dots & d_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} - \dots \pm h_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ b_2 & b_3 & \dots & b_{n+1} \\ d_2 & d_3 & \dots & d_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_2 & g_3 & \dots & g_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$+ c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 & \dots & h_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 & \dots & h^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & d_{n+1} & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} - \dots \mp h_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & \dots & g_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & g_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} & \dots & g_{n+1} \end{vmatrix} .$$

$$+ a_3 \cdot \left\{ b_1 \begin{vmatrix} c_2 & \dots & h_2 \\ c_4 & \dots & h_4 \\ \vdots & \dots & \\ c_{n+1} & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} b_2 & d_2 & \dots & h_2 \\ b_4 & d_4 & \dots & h_4 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n+1} & d_{n+1} & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} + \dots \pm h_1 \begin{vmatrix} b_2 & \dots & g_2 \\ b_4 & \dots & g_4 \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n+1} & \dots & g_{n+1} \end{vmatrix} \right\} - a_4 \left\{ \dots \right\} \text{ etc.}$$

erleichtern, wenn man die erste und zweite Horizontalreihe vertauscht; hier wäre zu wiederholen, was bei der Vertauschung der anderen Reihen gesagt ist.

$$F_{n+1} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \dots & h_2 \\ a_1 & b_1 & \dots & h_1 \\ a_3 & b_3 & \dots & h_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} \text{; dann ist:}$$

$$F_{n+1} = a_2 \left.\Delta_n\right|_2 - a_1 \left.\Delta_n\right|_1 + a_3 \begin{vmatrix} b_2 & \dots & h_2 \\ b_1 & \dots & h_1 \\ b_4 & \dots & h_4 \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n+1} & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_2 & \dots & h_2 \\ b_1 & \dots & h_1 \\ b_3 & \dots & h_3 \\ b_5 & \dots & h_5 \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n+1} & \dots & h_{n+1} \end{vmatrix} \pm$$

Also:

$$F_{n+1} = - a_1 \left.\Delta_n\right|_1 + a_2 \left.\Delta_n\right|_2 - a_3 \left.\Delta_n\right|_3 + a_4 \left.\Delta_n\right|_4 - \dots \mp a_{n+1} \left.\Delta_n\right|_{n+1} = - \Delta_{n+1}$$

Auch Satz II hat allgemeine Gültigkeit.

Gleichungen des zweiten Grades.

Die Behandlung der quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten bietet, von den einfachsten Fällen abgesehen, insofern Schwierigkeit, als allgemeine Regeln für die Lösung nicht gegeben werden können. Der Schüler wird so zu der Überzeugung kommen, dafs die in Rede stehenden Gleichungssysteme nur unter Anwendung von Kunstgriffen zu lösen seien. An der Hand der Beispiele wird man zwar gewisse Beobachtungen machen, die etwa auf folgende Sätze hinauslaufen: Ein System von Bestimmungsgleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten kann gelöst werden, ohne dafs die Auflösung von Gleichungen höheren Grades als des zweiten notwendig ist,

1. wenn eine der Gleichungen vom ersten Grade ist,
2. wenn beide Gleichungen vom zweiten Grade sind, aber die eine in zwei Gleichungen des ersten Grades zerfällt,
3. wenn beide Gleichungen vom zweiten Grade sind, aber durch Vereinigung der beiden eine Gleichung des zweiten Grades sich bilden läfst, die in zwei Gleichungen des ersten Grades zerfällt;

auf die Beantwortung der Fragen jedoch:

Wann läfst eine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Unbekannten in zwei lineäre Gleichungen sich zerlegen?

Wann lassen die beiden Gleichungen sich so vereinigen, dafs eine Gleichung des zweiten Grades entsteht, die in zwei lineäre Gleichungen zerfällt?

kann kaum eingegangen werden, wenn das Hilfsmittel der Determinanten nicht zu Gebote steht. Die Antwort leitet Diekmann auf verschiedene Arten ab. Nur eine Ableitung, die erste, scheint mir für Schüler der II[a] geeignet zu sein; aber auch ihr haftet meines Erachtens der Übelstand an, den die übliche Behandlung der Gleichungen mit zwei Unbekannten mit sich bringt; sie ist zu künstlich. Einfacher kommt man folgendermafsen zum Ziele.

Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Unbekannten lautet, wenn der Koefficient von $x^2 \neq 0$ ist:

$$x^2 + 2axy + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0. \quad \text{Hieraus wird:}$$

$$x^2 + 2x(ay + c) = -by^2 - 2dy - e$$

$$(\alpha) \quad (x + ay + c)^2 = y^2(a^2 - b) + 2y(ac - d) + c^2 - e \quad \text{oder:}$$

$$(\beta) \quad (x + ay + c)^2 = (a^2 - b)\left(y^2 + \frac{2y(ac - d)}{a^2 - b} + \frac{c^2 - e}{a^2 - b}\right).$$

Soll nun durch Einsetzung des Wertes von x resp. y, wie er aus der Gleichung (α) oder auch (β) folgt, in die zweite Gleichung eine Gleichung mit einer Unbekannten entstehen, aber von nicht höherem Grade als dem zweiten, so müssen die rechten Seiten der Gleichungen als Quadrate erscheinen. Man erkennt sofort, dafs die Gröfse $a^2 - b$ einer besonderen Beachtung bedarf.

Ist $a^2 - b = 0$, so ist Gleichung (α) vorzuziehen.

Die rechte Seite wird nur dann der obigen Forderung genügen, wenn gleichzeitig

$$ac - d = 0 \text{ ist.}$$

Dann wird aus (α)

$$x + ay + c = \pm\sqrt{c^2 - e}.$$

Ist dagegen $a^2 - b \neq 0$, so ist, unter Benutzung der Gleichung (β), die rechte Seite von der Form eines Quadrates, wenn

$$\frac{c^2 - e}{a^2 - b} = \left(\frac{ac - d}{a^2 - b}\right)^2 \cdot \quad \text{Hieraus wird:}$$

$$a^2c^2 - bc^2 - a^2e + be = a^2c^2 - 2acd + d^2$$

$$be - d^2 - a^2e + 2acd - bc^2 = 0.$$

Nun ist:

$$be - d^2 = \quad 1 \cdot \begin{vmatrix} b & d \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$-a(ae - cd) = -a \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$c(ad - bc) = \quad c \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

$$be - d^2 - a^2e + 2acd - bc^2 = \begin{vmatrix} 1 & a & c \\ a & b & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$$

Diese Determinante 3. O. ist also ein Erkennungszeichen für die Möglichkeit der Zerlegung einer Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten; man nennt sie deshalb Diskriminante. Nachdem man sich also überzeugt hat, dafs $a^2 \neq b$ ist, hat man obige Determinante auszurechnen. Ist der Wert derselben Null, so läfst sich die Gleichung in zwei lineäre zerfällen.

Die Voraussetzung, dafs $a^2 - b \neq 0$ und dafs gleichzeitig

$$\begin{vmatrix} 1 & a & c \\ a & b & \mathrm{d} \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

zieht nach sich:

$$(x + ay + c)^2 - (a^2 - b)\left(y + \frac{ac - d}{a^2 - b}\right)^2 = 0.$$

Ist nun $a^2 - b > 0$, so ergiebt sich:

$$x + ay + c + \sqrt{a^2 - b}\left(y + \frac{ac - d}{a^2 - b}\right) = 0 \text{ und}$$

$$x + ay + c - \sqrt{a^2 - b}\left(y + \frac{ac - d}{a^2 - b}\right) = 0.$$

Ist*) dagegen $a^2 - b < 0$, so müssen die Quadrate einzeln verschwinden; dann wäre:

$$x + ay + c = 0$$

$$y + \frac{ac - d}{a^2 - b} = 0.$$

---

*) Das Genauere ist in Anknüpfung an Beispiel III auf S. 22 entwickelt. Hier sind die Koefficienten und die Wurzeln als reelle Zahlen gedacht.

Beispiele: I.

$$1.\ x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + 16y + 7 = 0.$$
$$2.\ x^2 + 3xy - 7y = -19.$$

In der ersten Gleichung ist $a = 2$, $b = 4$, $c = 4$, $d = 8$.

$$a^2 - b = 0 \text{ und gleichzeitig:}$$
$$ac - d = 0.$$

Gleichung 1 läſst sich also in zwei lineäre Gleichungen zerlegen. Um diese zu finden, ersetzt man in den oben abgeleiteten Gleichungen die relativen Zahlen durch die absoluten. Man findet

$$\text{aus } 1: \quad x + 2y + 4 = \pm\sqrt{16 - 7}$$
$$1^a\ x + 2y + 1 = 0$$
$$1^b\ x + 2y + 7 = 0$$

Dasselbe erreicht man, indem man die Gleichung 1 nach einer der Unbekannten auflöst; und dabei würde das mechanische Einsetzen vermieden sein. Ich löse nach x auf:

$$x^2 + 2x(2y + 4) = -4y^2 - 16y - 7$$
$$x + 2y + 4 = \pm\sqrt{4y^2 + 16y + 16 - 4y^2 - 16y - 7}$$
$$x + 2y + 4 = \pm 3$$

So handelt es sich jetzt um die beiden Systeme:

3. $x + 2y + 1 = 0$	4. $x + 2y + 7 = 0$
$x^2 + 3xy - 7y = -19$	$x^2 + 3xy - 7y = -19$

Bei 3 ist einzusetzen in die zweite Gleichung:

$$x = -2y - 1. \text{ Es folgt:}$$
$$4y^2 + 4y + 1 - 6y^2 - 3y - 7y = -19$$
$$y^2 + 3y - 10 = 0$$
$$(y + 5)(y - 2) = 0$$
$$y_1 = -5$$
$$y_2 = +2$$

Diesen Werten entsprechen:

$$x_1 = +9$$
$$x_2 = -5.$$

Bei 4 ist einzusetzen in die zweite Gleichung:

$$x = -2y - 7. \text{ Es folgt:}$$
$$4y^2 + 28y + 49 - 6y^2 - 21y - 7y = -19$$
$$y^2 = 34$$
$$y_3 = +\sqrt{34}$$
$$y_4 = -\sqrt{34}$$
$$x_3 = -2\sqrt{34} - 7$$
$$x_4 = +2\sqrt{34} - 7.$$

Weitere Beispiele: Heis § 73, 46, 48, 67.

II.

$$\begin{array}{l} 1.\ \ x^2 + 8xy + 7y^2 + 4x - 2y - 5 = 0 \\ 2.\ \ 4x^2 \qquad\quad + 3y^2 + 2x \qquad\ - 354 = 0 \end{array}$$

Für die erste Gleichung ist:

$$a = 4,\ b = 7,\ c = 2,\ d = -1,\ e = -5.$$

$a^2 - b \gtrless 0$; also ist die Diskriminante auszurechnen.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & -9 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Da aufserdem $a^2 - b > 0$, so zerfällt, wie man durch Einsetzung der absoluten Werte in die allgemeine Gleichung oder durch Auflösung nach x oder y findet, die Gleichung 1 in

$$\begin{array}{l} 1^a\ \ x + 7y + 5 = 0 \\ 1^b\ \ x + \ y - 1 = 0 \end{array}$$

Damit ist die Aufgabe zurückgeführt auf die Lösung der Systeme:

$$\begin{array}{r|l} 3.\ \ x + 7y + 5 = 0 & 4.\ \ x + y - 1 = 0 \\ 4x^2 + 3y^2 + 2x - 354 = 0 & 4x^2 + 3y^2 + 2x - 354 = 0 \end{array}$$

Aus 1^a folgt:

$$x = -7y - 5$$

und dadurch wandelt Gleichung 2 sich um in:

$$199y^2 + 266y - 264 = 0$$

$$y = \frac{-133 \pm 265}{199}$$

$$y_1 = \frac{132}{199} \qquad x_1 = -9\tfrac{128}{199}$$

$$y_2 = -2 \qquad x_2 = \ \ 9$$

Aus 1^b folgt:

$$x = 1 - y$$

und es wird aus Gleichung 2: $\quad 7y^2 - 10y - 348 = 0$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{2461}}{7}$$

$$y_3 = \frac{5 + \sqrt{2461}}{7} \qquad x_3 = \frac{2 - \sqrt{2461}}{7}$$

$$y_4 = \frac{5 - \sqrt{2461}}{7} \qquad x_4 = \frac{2 + \sqrt{2461}}{7}.$$

III.

Läſst sich die folgende Gleichung in zwei lineäre Gleichungen zerlegen?

$$x^2 + 10xy + 29y^2 + 6x + 14y + 25 = 0$$

Hier ist $a = 5,\ b = 29,\ c = 3,\ d = 7,\ e = 25.$

$$a^2 - b \neq 0$$

und die Diskriminante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 29 & 7 \\ 3 & 7 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

Also gewinnt man aus der gegebenen Gleichung:

$$1^a \quad x + 5y + 3 = 0$$
$$1^b \quad y - 2 = 0.$$

1^a würde eine unendliche Anzahl von Wertepaaren liefern, die sämtlich, sollte man meinen, der gegebenen Gleichung genügen müſsten, und die richtigen Paare würden dann mittels der Gleichung 2 auszuwählen sein; aber man überzeugt sich bald, daſs von all den Wertepaaren nur eines genügt, nämlich: $y = 2$ (wie es aus 1^b folgt) und $x = -13$. Wäre zu der gegebenen Gleichung eine zweite gegeben, so müſste diese unter allen Umständen der ersten widersprechen, auſser wenn sie erfüllt wird durch:

$$y = 2 \text{ und } x = -13.$$

Was bedeutet dies?

Ich erinnere an die Bemerkung auf Seite 19. Ist bei einer Gleichung des zweiten Grades mit zwei Unbekannten und mit reellen Koefficienten die Diskriminante $= 0$ und $a^2 - b < 0$, so gewinnt man, wenn nur reelle Werte für x und y ins Auge gefaſst werden, aus der vorgelegten Gleichung zwei Gleichungen des ersten Grades, die **gemeinschaftlich** bestehen müssen.

Läſst man aber die Beschränkung für x und y fallen, so lautet die allgemeine Zerlegung:

$$x + ay + c + \sqrt{a^2 - b}\left(y + \frac{ac - d}{a^2 - b}\right) = 0 \text{ und}$$

$$x + ay + c - \sqrt{a^2 - b}\left(y + \frac{ac - d}{a^2 - b}\right) = 0;$$

eine Zerlegung, die also überhaupt gilt, wenn

$$a^2 - b \neq 0.$$

So hätten wir bei der Zerlegung einer Gleichung des zweiten Grades mit zwei Unbekannten zunächst den Ausdruck $a^2 - b$ zu prüfen. Verschwindet derselbe, so liegt die Entscheidung bei dem Aggregate $ac - d$; verschwindet derselbe nicht, so entscheidet die Diskriminante; und für das praktische Verfahren wird daran festzuhalten sein. Theoretisch gestaltet sich die Sache noch einfacher. Ist nämlich die Diskriminante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & c \\ a & b & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = c(ad - bc) - d(d - ac) - e(a^2 - b) = 0$$

und gleichzeitig $a^2 - b = 0$, so folgt auch:

$$\begin{aligned} c(ad-bc) - d(d-ac) &= 0 \\ bc^2 - 2adc + d^2 &= 0 \end{aligned}$$

oder, da $b = a^2$:

$$\begin{aligned} (ac-d)^2 &= 0 \\ ac - d &= 0. \end{aligned}$$

Der Bedingung $ac - d = 0$, die erfüllt sein muſs, wenn $a^2 - b = 0$, wird also genügt, wenn die Diskriminante gleich Null ist.

Jede Gleichung des zweiten Grades mit zwei Unbekannten läſst sich in zwei lineäre Gleichungen zerlegen, wenn ihre Diskriminante verschwindet.

Vorausgesetzt ist hierbei, daſs der Koefficient von $x^2 \gtrless 0$ ist, und daſs die Gleichung die Form erhalten hat, bei welcher x^2 mit dem Koefficienten $+1$ behaftet ist. Will man diese Form nicht herstellen, sondern zu Grunde legen:

$$Ax^2 + 2axy + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0, \quad (A \gtrless 0),$$

so wird diese Gleichung in zwei lineäre zerfallen, wenn:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a}{A} & \frac{c}{A} \\ \frac{a}{A} & \frac{b}{A} & \frac{d}{A} \\ \frac{c}{A} & \frac{d}{A} & \frac{e}{A} \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Dann wäre auch:} \begin{vmatrix} A & a & c \\ a & b & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante wird als Diskriminante obiger Gleichung bezeichnet.

Welches Erkennungszeichen bietet sich aber, wenn $A = 0$ ist?

Ist gleichzeitig $b \gtrless 0$, so lautet die Gleichung:

$$2axy + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0.$$

$$y^2 + 2y\,\frac{ax+d}{b} = \frac{-2cx-e}{b}$$

$$\left[y + \frac{ax+d}{b}\right]^2 = \frac{a^2x^2 + 2adx + d^2 - 2bcx - be}{b}$$

$$= a^2\,\frac{x^2 + 2x\,\frac{ad-bc}{a^2} + \frac{d^2-be}{a^2}}{b^2}$$

Die rechte Seite erscheint als Quadrat, wenn:

$$\left(\frac{ad+bc}{a^2}\right)^2 = \frac{d^2-be}{a^2} \text{ oder:}$$

$$-a^2e + 2aed + bc^2 = 0.$$

Fügt man hierzu $A(bc - d^2) = 0$, so ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} A & a & c \\ a & b & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Welches Erkennungszeichen bietet sich, wenn $A = 0$ und gleichzeitig $b = 0$ ist?

$$2axy + 2cx + 2dy + e = 0$$
$$x(2ay + 2c) = -2dy - e.$$

Die Zerlegung ist nur dann möglich, wenn die rechte Seite ein Vielfaches von $2ay + 2c$ ist, wenn:
$$\frac{d}{a} = \frac{e}{2c}$$

Wäre $\frac{d}{a} = \frac{e}{2c} = f$, so würde folgen:

$$x(2ay + 2c) = -2afy - 2cf$$
$$(x + f)(ay + c) = 0.$$

Aus $\frac{d}{a} = \frac{e}{2c}$ ergiebt sich: $\quad -a^2e + 2acd = 0.$

Fügt man hierzu die identischen Gleichungen:

$$A(be - d^2) = 0$$
$$-bc^2 = 0,$$ so folgt wie früher:

$$\begin{vmatrix} A & a & c \\ a & b & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Stellt man sich also irgend eine Gleichung des zweiten Grades mit zwei Unbekannten vor unter der Form:

$$Ax^2 + 2axy + b^2y + 2cx + 2dy + e = 0,$$

so zerfällt diese in zwei lineäre Gleichungen, wenn die Diskriminante verschwindet.

Um zwei quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen, hätte man nach dem bisher Gesagten unter Umständen beide Gleichungen daraufhin zu prüfen, ob sie sich zerlegen lassen. Widerstreben beide, jede für sich, der Zerlegung, so sind beide so zu vereinigen, dass die resultierende Gleichung sich zerlegen läſst.

$$\begin{array}{l|l} A_{,}\,x^2 + 2a_{,}\,xy + b_{,}\,y^2 + 2c_{,}\,x + 2d_{,}\,y + e_{,} \;= 0 & \lambda \\ A_{,,}x^2 + 2a_{,,}xy + b_{,,}y^2 + 2c_{,,}x + 2d_{,,}y + e_{,,} = 0 & +1 \end{array}$$
$$\overline{(A_{,}\lambda + A_{,,})x^2 + 2(a_{,}\lambda + a_{,,})xy + (b_{,}\lambda + b_{,,})y^2 + 2(c_{,}\lambda + c_{,,})x}$$
$$+ 2(d_{,}\lambda + d_{,,})y + e_{,}\lambda + e_{,,} = 0.$$

Diese Gleichung läſst sich zerlegen, wenn:

$$\begin{vmatrix} A_{,}\lambda + A_{,,} & a_{,}\lambda + a_{,,} & c_{,}\lambda + c_{,,} \\ a_{,}\lambda + a_{,,} & b_{,}\lambda + b_{,,} & d_{,}\lambda + d_{,,} \\ c_{,}\lambda + c_{,,} & d_{,}\lambda + d_{,,} & e_{,}\lambda + e_{,,} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung zur Bestimmung von λ wäre zwar vom dritten Grade; aber die Form, in der sie gegeben ist, ermöglicht es auch dem Schüler der II[a], zu erkennen, ob die linke Seite als Produkt von zwei (bezw. drei) Faktoren sich schreiben läſst oder nicht. Tritt das Erstere ein, so ist damit mindestens ein Wert für λ bestimmt; im anderen Fall ist die Aufgabe für die erwähnte Klasse eben nicht durchführbar.

Für λ kann auch der Wert Null sich ergeben, d. h. daſs die zweite Gleichung für sich allein in zwei lineäre Gleichungen zerfällt. Für das praktische Verfahren giebt dies den Wink, zunächst für eine (etwa die erste) Gleichung die Diskriminante zu berechnen: verschwindet diese nicht, dann bilde man gleich die Diskriminante der aus 1 und 2 kombinierten Gleichung.

Beispiel (nach Kroeber):

$$\begin{array}{l} 7x^2 + 4xy - y^2 + 2x - 4y = 0 \\ 4x^2 + 3xy - 2y^2 - x + 2y = 0 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 16 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\begin{vmatrix} 7\lambda + 4 & 2\lambda + \frac{3}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \\ 2\lambda + \frac{3}{2} & -\lambda - 2 & -2\lambda + 1 \\ \lambda - \frac{1}{2} & -2\lambda + 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7\lambda + 4 & 2\lambda + \frac{3}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \\ 16\lambda + \frac{19}{2} & 3\lambda + 1 & 0 \\ \lambda - \frac{1}{2} & -2\lambda + 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \begin{vmatrix} 16\lambda + \frac{19}{2} & 3\lambda + 1 \\ \lambda - \frac{1}{2} & -2\lambda + 1 \end{vmatrix} = -2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \begin{vmatrix} 16\lambda + \frac{19}{2} & -\left(\frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}\right) \\ \lambda - \frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(16\lambda + \frac{19}{2} + \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\lambda - \frac{1}{2} = 0 \qquad \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\lambda - \frac{1}{2} = 0 \qquad \lambda = \frac{1}{2}$$

$$35\lambda + 20 = 0 \qquad \lambda = -\frac{4}{7}.$$

Vermittels des Wertes $\lambda = \frac{1}{2}$ erhält man:

$$3x^2 + 2xy - y^2 = 0$$

$$x = -\frac{y}{3} \pm \frac{2y}{3}$$

$$1^a \quad x = \frac{y}{3}$$

$$1^b \quad x = -y$$

Mit Benutzung von 1^a wird aus der ersten Gleichung:

$$y(y-3) = 0$$

$$y_1 = 0 \qquad x_1 = 0$$

$$y_2 = 3 \qquad x_2 = 1.$$

Mit Benutzung von 1^b ergiebt sich:

$$y(y-3) = 0$$

$$y_3 = 0 \qquad x_3 = 0$$

$$y_4 = 3 \qquad x_4 = -3.$$

Vermittels des Wertes $\lambda = -\frac{4}{7}$ würde man erhalten:

$$2y^2 - xy - 6y + 3x = 0$$

$$y = \frac{x+6}{4} \pm \frac{x-6}{4}.$$

$$1^a \quad y = \frac{x}{2}.$$

$$1^b \quad y = 3.$$

Wird 1^a mit Gleichung 2 verbunden, so entsteht:

$$x^2 = 0, \text{ also:}$$

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = 0$$

$$x_2 = 0 \qquad y_2 = 0.$$

Wird 1^b mit Gleichung 2 verbunden, so entsteht:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x_3 = -3 \qquad y_3 = 3$$

$$x_4 = +1 \qquad y_4 = 3.$$

Weitere Beispiele siehe Heis § 73. 47. 49.

Dr. A. Ott.