Wie lassen sich die Anregungen, die Newton in seiner Optik giebt, für den Unterricht verwerten?

Die Forderung, im physikalischen Unterricht das geschichtliche Moment auszunutzen, ist wohl allgemein anerkannt. Zwar bietet im Anfangsunterricht das Geschichtliche dem Schüler wenig Anregung, weil der physikalische Stoff an sich interessiert; aber späterhin, wenn neben der experimentellen Behandlung die mathematische Platz greift, dient es recht gut zur Belebung des Unterrichts. Freilich darf sich der Lehrer nicht auf kurze Notizen, auf bloſse Namen und Jahreszahlen beschränken. Es geschieht dies in der That, manchmal weil bei der Einrichtung des gerade zu Grunde gelegten Lehrbuches eine gröſsere Betonung der Geschichte störend in die Anordnung eingreifen würde, öfter wohl, weil die geschichtlichen Darstellungen aus der Physik vielfach Unsicherheiten und Ungenauigkeiten zeigen. Ich erinnere an das *Experimentum crucis.* Münch versteht darunter den Versuch, bei welchem sämtliche Strahlen des durch ein Prisma gewonnenen Spektrums durch ein Prisma aufgefangen werden, dessen brechende Kante auf der des ersten senkrecht steht.

In Jochmann und Hermes ist es der Versuch, bei welchem — sei es durch eine Sammellinse, sei es durch ein Prisma — die bereits durch ein Prisma gegangenen Strahlen aufgefangen werden, um zu zeigen, daſs das farbige Licht zu Weiſs sich vereinigen läſst.

In Newton's Optik ist weder der erste noch der zweite als *Experimentum crucis* bezeichnet, ja die Bezeichnung findet sich darin überhaupt nicht, wohl aber finden wir den Ausdruck in der der Royal Society im Jahre 1672 überreichten Abhandlung. Newton ist überrascht von der Länge des Sonnenspektrums und sagt: *The gradual removal of these suspicions at length led me to the Experimentum crucis, which was this:* und es folgt die Beschreibung des Versuchs, der in der Optik als Exp. VI in Buch I, Teil 1 steht, des Versuchs, durch welchen die verschiedene Brechbarkeit verschiedenfarbigen Lichtes festgestellt werden soll.

Berichtigungen, die auf intensiver Quellenforschung beruhen, findet man in neuerer Zeit ja häufig; so kann Poske's Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht (P. Z.) geradezu als Fundgrube bezeichnet werden[1]), auch in Hoffmann's Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (H. Z.) mag man nachschlagen und anderswo; aber die Angaben sind doch recht zerstreut. Ich meine, die Sorge, den Schülern etwas als geschichtlich mitzuteilen, was vielleicht einer strengeren Kritik gegenüber nicht aufrecht zu erhalten ist, sollte nicht so weit führen, auf das Geschichtliche zu verzichten, und auch den Einwand, daſs das Lehrbuch hinderlich ist, kann ich nicht gelten lassen.

---

[1]) Über *Exp. crucis,* besonders über die Entstehung des Namens, siehe Bode in P. Z. 1892. VI.

Wohl soll der Lehrer seinen Neigungen Zwang auferlegen, um der Darstellung des Lehrbuches, welches ja der Schüler halber eingeführt ist, zu folgen; aber gerade der Lehrer der Physik wird häufig in die Lage kommen, davon abzuweichen. Bezüglich der Versuche mufs er sich zunächst nach den Hilfsmitteln richten, welche in der Schulsammlung vorhanden sind. Aufserdem bieten die Lehrbücher wohl ausnahmslos eine systematische Darstellung des ganzen Gebietes, und es würde dem Unterricht und den Schülern ein schlechter Dienst erwiesen sein, wenn der Lehrer durch bis ins Einzelne gehende Verfügungen gezwungen wäre, Abschnitt für Abschnitt durchzunehmen. Diesen einander teilweise widersprechenden Forderungen kann man gerecht werden, wenn man für einzelne Gebiete auf das Werk eines Quellenschriftstellers sich stützt und unter Benutzung älterer und neuerer Arbeiten den historischen Werdegang des betreffenden physikalischen Lehrgebietes mehr, als gewöhnlich geschieht, betont. Man gewinnt dabei wenigstens für die Oberstufe einheitliche Gesichtspunkte, deren strenge Durchführung das Interesse der Schüler wach erhält und zum Vergleiche mit der Darstellung im Lehrbuche zwingt. Recht leicht ist dies ausführbar in der Lehre von den einfachen Maschinen, von der Centralbewegung, in der Hydrostatik.[1]) Aber auch gröfsere Gebiete der Physik lassen sich unter diesen Gesichtspunkten behandeln. Die Einrichtung an unserer Schule, wonach die Lehraufgabe in II[a] (Schall, Licht und Wärme) gleich in der nächsten Klasse wiederholt und erweitert wird, führte mich darauf. Die verschiedenen Hinweise auf Newton, die in der Optik gegeben werden müssen, veranlassen den Lehrer, sich mit Newtons Schrift: *Optics: or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections, and Colours of Light* bekannt zu machen, und als Frucht dieser Lektüre ist die folgende Ausarbeitung niedergeschrieben. Ich benutze gleichzeitig die Gelegenheit anzugeben, wie meiner Meinung nach der Lehrstoff für die beiden Klassen abzugrenzen ist, und manches auszuführen, was im Lehrbuche — es handelt sich um Münch — nur durch Stichworte angedeutet ist und doch nur in Specialwerken nachgelesen werden könnte.

Newton's Optik, Buch I und II.

In der Vorrede, die über die Entstehung der Schrift Aufschlufs giebt, verwahrt sich Newton dagegen, dafs frühere Arbeiten über Optik, die unter seinem Namen erschienen seien, als Ausgangspunkte für Streitfragen benutzt würden. Die Schriften seien wider seinen Willen veröffentlicht worden, und er würde, wenn er Kenntnis erhalten, die Herausgabe verhindert haben. Newton hat mit der Veröffentlichung der Optik so lange gezögert, bis er durch Versuche die Gesetze der Brechung und der Farben, sowie die Regeln für ihre Zusammensetzung sich selbst zur Genüge klargelegt hatte. Denn, so beginnt Buch I, es ist nicht meine Absicht bereits bekannte Eigenschaften des Lichts an der Hand bestimmter Hypothesen zu erklären, sondern verborgene bisher noch nicht beachtete Eigenschaften desselben einfach zu beschreiben und sie aufser durch Beschreibung durch Vernunftschlüsse und Versuche verständlich zu machen und sodann zu zeigen, welche Folgerungen sich aus ihnen ziehen lassen. Wenn nun in Hinsicht auf diese Vorrede Heller in seiner Geschichte der Physik urteilt: Diesen Vorsatz hat der Autor nun freilich nicht immer vor Augen gehabt, es ist vielmehr die konsequent durchgeführte Emissionstheorie mit ihren vielen Hilfshypothesen, die wir in diesem für die Geschichte der Optik so bedeutungsvollen Werke dargelegt finden, so ist dies nur verständlich,' wenn man den letzten Teil der Eingangsworte: „und sodann

[1]) P. Z. 1893. VI.

zu zeigen etc.", aufser Acht läfst. Heller führt diese Worte auch nicht an, und in der mir zugänglichen Ausgabe von Newton's Optik stehen sie nicht, aber doch habe ich sie hinzugefügt nach der lateinischen Übersetzung von Samuel Clarke aus dem Jahre 1706, da dieser dem Leser versichert: *hanc versionem et authoris jussu incoeptam esse et eo approbante absolutam; et quaecunque in orationis contextu, majoris perspicuitatis gratia, aliquantulum immutata sint, paucula quidem illa, sed quaecunque sint, eo omnia vel jussu authoris vel ejusdem permissu esse immutata.* Eine bereits fertige Theorie liefert Newton nicht, sondern im Verlaufe der Untersuchungen soll als Folgerung aus der Erfahrung und aus den Experimenten erst eine gewonnen werden. Newton will eine wissenschaftliche Behandlung der Optik geben, deshalb bedarf er vor allem einer bestimmten anschaulichen Erklärung dessen, was er unter einem Lichtstrahle verstehen will. Er giebt sie in der Definition 1; aber gerade deren Fassung giebt keine Berechtigung zu behaupten, dafs Newton von vornherein über die Natur des Lichtes „Bestimmtes" festgelegt habe. Licht ist ihm zunächst etwas Gegebenes, was einer Erklärung nicht bedarf, und irgend ein sichtbarer Teil des Lichtes, der geradlinig ausgebreitet erscheint, soll Strahl genannt werden. Newton hält die Definition selbst für eine recht weite (Def. II.), hat sich aber für sie entschieden, damit sie unberührt bleibt, welche Ansicht man auch über die Ausbreitung des Lichtes habe; und wenn er in Axiom VII, da wo die Entstehung des Bildes im Auge erläutert wird, von Licht spricht, welches von den verschiedenen Punkten des Objekts fliefst, so ist man wohl versucht an Emanationstheorie zu denken, aber der Ausdruck „fliefsen" ist an dieser Stelle noch ganz belanglos. Newton verfährt so, wie nach jetzt wohl überall gültigem Grundsatze im Anfangsunterrichte der Mathematik zu verfahren ist. Ebenso wie es hier nicht angebracht ist, philosophische Betrachtungen über die Dimensionen von Punkt, Linie, Fläche, Körper vorauszuschicken, so hat auch der Anfangsunterricht der Physik nur auf die Anschauung zu bauen, und für Betrachtungen über das Wesen der Kräfte, des Lichts, der Wärme und dergleichen ist auf der Schule erst verhältnismäfsig spät Gelegenheit, und auch da ist noch grofse Vorsicht geboten.

Von den drei Stufen beim Fortschreiten des Unterrichtes: 1. Feststellen der Thatsachen und Beschreibung derselben, 2. Gewinnung der Gesetze auf experimentellem Wege, 3. Erklärung der so gewonnenen Gesetze mit Hilfe einer Hypothese — gehört die dritte noch nicht nach Obersekunda. Die Auffassung, die in einem Elementarbuche der Lehre vom Lichte sich breit macht, „nebenbei die Kinder ahnen zu lassen, dafs alle Wahrnehmungen durch Bewegung verursacht werden", mag eine vereinzelte Erscheinung sein. Jedenfalls ist gegen derartige Bestrebungen energisch Front zu machen, auch wenn sie sich an reifere Schüler wenden. Die Kritik in P. Z. 1900. V. läfst sich mit geringer Abänderung auf alle derartigen Lehrbücher anwenden. Für die Erklärung der Erscheinungen der sogenannten geometrischen Optik ist die Theorie ohne Gewicht; man kann sie streichen, ohne den innern Zusammenhang zu stören, und an den wenigen Stellen, wo die Wellentheorie zu einer tieferen Anschauung führt, läfst sie sich nicht anwenden, weil die Schüler mathematisch noch nicht weit genug vorgebildet sind.

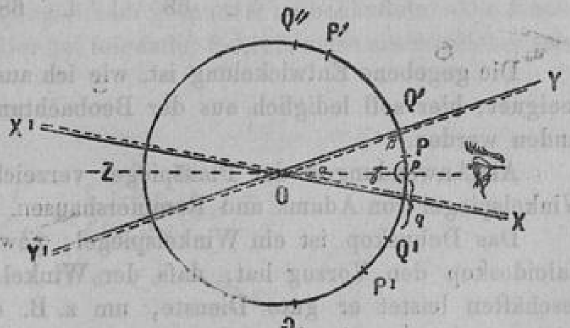
Aufser der bereits erwähnten Definition schickt Newton seinen Untersuchungen noch voraus die Erklärung dessen, was er unter Brechbarkeit der Strahlen verstehen will. Er schreibt den Strahlen eine gröfsere Brechbarkeit zu, die unter gleichen Umständen mehr vom Wege abgelenkt werden; und das Ähnliche setzt er für die Zurückwerfung fest. Für die Zurückwerfung fehlt uns im Deutschen das Hauptwort, welches der „Brechbarkeit" entsprechen würde, aber auch um eine Umschreibung brauchen wir uns nicht zu kümmern, da beide Definitionen für den Unterricht entbehrlich sind. Die Definitionen von Einfalls- und Brechungswinkel, von einfachem und zusammengesetztem Licht sind die üblichen, nur werden alle diese Erklärungen beim Unterricht erst dann eingeführt werden, wenn das Bedürfnis dazu vorliegt. Diese letzte Bemerkung gilt gleichermafsen für die 8 Sätze, die Newton als Axiome gebraucht wissen will; es sind das die Sätze, welche die Gesetze der Zurückwerfung, der Brechung, für das Zustandekommen des Bildes angeben. In diesen Axiomen und deren experimenteller Erklärung und Bestätigung ist nach Newton's Ansicht ungefähr alles enthalten, was bis zur damaligen Zeit in Optik geleistet worden ist, wenn sich auch Newton nicht verhehlt, dafs diejenigen Leser ihm leichter folgen könnten, die mit den Gesetzen bereits bekannt wären, besonders wenn sie Spiegel und Linsen zu handhaben gelernt hätten. Für den Schulunterricht kann der Weg nicht befolgt werden. Hier handelt es sich nicht um experimentelle Bestätigung, sondern um experimentelle Ableitung der Gesetze. Der Mehraufwand von Zeit, den dies beansprucht, wird reichlich aufgewogen durch den Eifer, welchen die Schüler durch die Mitarbeit, wenn sie beim Einordnen des Beobachteten das Gesetzmäfsige herauslesen, gewöhnlich an den Tag legen. Für die Spiegelung begnüge man sich nicht mit der Vergleichung von Reflexions- und Einfallswinkel, sondern man suche es auch recht anschaulich zu machen, dafs der reflektierte Strahl in der Einfallsebene bleibt. Überzeugend ist der in Münch angegebene Fernrohrversuch, nur wird er sich nicht immer anstellen lassen. Ich glaube aber, eine gründliche Beschreibung genügt. Hier ist die Gelegenheit, wo, um mit Newton zu sprechen, ein neues Axiom einzuführen ist, wo auf die Umkehrbarkeit der Strahlenwege aufmerksam gemacht werden mufs. Späterhin bei der Brechung ist die Erscheinung nicht so augenfällig, aber es ist zu betonen, dafs die Erfahrung das Gleiche lehrt, so dafs man schliefslich, die Beobachtungen bei Spiegelung und Brechung zusammenfassend, so formulieren könnte[1]): Wenn ein Strahl nach irgend welchen Reflexionen und Brechungen so auf eine Fläche fällt, dafs er senkrecht reflektiert wird, so durchläuft er genau seinen vorigen Weg, nur in umgekehrter Richtung.

Die Spiegelung ist in Newton's Optics auffällig kurz abgethan. Die Theorie des Winkelspiegels, die ich im heutigen Physikunterrichte nicht missen möchte, fehlt ganz; sie ist neueren Datums. Die Darstellung, welche unser Lehrbuch giebt, genügt jedoch nicht. Zwar beschränkt sich der Verfasser auf den Fall, dafs der Winkelabstand der Spiegel ein genauer Teil von 360° ist, aber die Behauptung, dafs die Bilder symmetrisch gruppiert im Umfange eines Kreises liegen, bedarf doch einer genaueren Erläuterung. Durch eine Figur ist der Weg angegeben, welchen die Strahlen bei einmaliger oder zweimaliger Spiegelung machen, um von dem leuchtenden Punkte zu dem Auge zu gelangen, aber auf die Stellung des Auges ist keine Rücksicht genommen. Ebenso sind die verschiedenartigen Bilder (Koppe[2] spricht von symmetrischen und kongruenten Bildern), die man beispielsweise beim Hineinsehen vom eigenen Gesicht bemerkt, nicht auseinander gehalten. Das Experiment ist also zu wenig beachtet, und auf die geometrische Darstellung ist zu viel Gewicht gelegt worden. Rein geometrisch wird man beim Winkelspiegel ebensogut wie bei einem Paar Parallelspiegel unendlich viele Bildpunkte konstruieren können, die Zahl der Bilder ist aber hier notwendig eine begrenzte, weil ein Bild, welches in der Ebene des Spiegels oder auf der Rückseite des Spiegels sich befindet, von demselben nicht mehr gespiegelt werden kann. Deshalb wird die Reihe der Bilder nach beiden Seiten hin blofs bis in den Scheitelwinkel

[1]) Czapski, Theorie der optischen Instrumente, S. 10. [2]) P. Z. 1889. III.

fortgesetzt, aber es mag nicht vergessen werden zu erwähnen, dafs bei einer Erweiterung der spiegelnden Ebenen über die Schnittlinie hinaus der Scheitelwinkel nicht innen, sondern aufsen spiegeln würde. Es ist zu betonen, dafs nicht jeder geometrisch konstruierte Bildpunkt, der in den Scheitelwinkelraum fällt, auch ein Bild liefert; denn ein geometrisch konstruierter Brennpunkt ist erst dann optisch brauchbar, wenn unter den Strahlen, welche er vertritt, sich auch solche befinden, die wirklich ins Auge gelangen; d. h. also: Die Bilder im Scheitelwinkel sind den übrigen nicht gleichwertig, weil sie nur für bestimmte Lagen des Auges sichtbar werden.

Mit Benutzung der Darstellung von Koppe kann man das Gesetz so ableiten: Die Bilder folgen zu beiden Seiten von P in der Reihenfolge 2β, 2γ, 2β ... resp. 2γ, 2β, 2γ .... Q_1 ist ein optischer Vereinigungspunkt der (von P ausgehenden) reflektierten Strahlen, die von allen Punkten des Spiegels OX in den Winkelraum α divergieren. Betrachtet man den leuchtenden Punkt als Teil einer Figur, so würde Q_1 ein symmetrisches Bild davon liefern; da nun Q_1 wieder als leuchtender Punkt für den Spiegel OY anzusehen, so entsteht in P' ein kongruentes Bild. An Q' würde sich dieselbe Gedankenreihe anknüpfen, und so hätten wir kongruente Bilder, die sich im Abstande 2α zu beiden Seiten von P anreihen und ebenso symmetrische Bilder, die sich im Abstande 2α an Q_1 anreihen. Der Bildkreis ist in beiden Richtungen nur bis OZ fortzusetzen, denn die Punkte X^1 .... Z können als Bildpunkte nur dann gebraucht werden, wenn YY^1 der reflektierende Spiegel ist, und die Punkte Z ... Y^1 nur dann, wenn XX^1 der reflektierende Spiegel ist. Der Bildkreis wird daher durch P in zwei Bogen von der Gröfse 180^0-p und 180^0+p geteilt. Die Anzahl der kongruenten Bilder, die sich an P anreihen, ist



$$1+\left[\frac{180-p}{2\alpha}\right]+\left[\frac{180+p}{2\alpha}\right],$$

wo die Klammer die gröfsten Ganzen des eingeschlossenen Bruches andeutet. Ebenso ist die Anzahl der symmetrischen Bilder, die sich an Q_1 anreihen:

$$1+\left[\frac{180-q}{2\alpha}\right]+\left[\frac{180+q}{2\alpha}\right]$$

Die Summe der beiden Ausdrücke ist die Anzahl der sämtlichen Bilder. Geht 2α in 360^0 n mal, aber nicht $n+1$ mal auf, so ist diese Summe entweder

$$2n \text{ oder } 2n+1 \text{ oder } 2n+2.$$

Geht 2α in 360^0 genau n mal auf, so ist die Anzahl der Bilder $2n$. Nun erst dürfte es einleuchten, warum Münch, der den einfachen Winkelabstand der Spiegel als $n$ten Teil von 360^0 auffafst, für gerades und ungerades n verschiedene Resultate angiebt. Einige rechnerische Anwendungen dürften angebracht sein; die Bestätigung durch das Instrument müfste folgen, wenn auch die Winkel nicht genau getroffen werden können.

1. Es sei $\alpha=34^0$, $\beta=30^0$; also $\gamma=14^0$.
Wählt man $p=13^0$, so ist $q=2\gamma-p=15^0$.

$$1+\left[\frac{180-13}{68}\right]+\left[\frac{180+13}{68}\right]=1+2+2=5$$

$$1+\left[\frac{180-15}{68}\right]+\left[\frac{180+15}{68}\right]=1+2+2=\underline{5}$$

10.

2. Es sei $\alpha=34^0$, $\beta=6^0$; also $\gamma=28^0$.
Wählt man $p=20^0$, so ist $q=36^0$.

$$1+\left[\frac{180-20}{68}\right]+\left[\frac{180+20}{68}\right]=1+2+2=5$$

$$1+\left[\frac{180-36}{68}\right]+\left[\frac{180+36}{68}\right]=1+2+3=\underline{6}$$

11.

Wählt man dagegen im letzten Falle
3. $p=25^0$; also $q=31^0$.

$$1+\left[\frac{180-25}{68}\right]+\left[\frac{180+25}{68}\right]=1+2+3=6$$

$$1+\left[\frac{180-31}{68}\right]+\left[\frac{180+31}{68}\right]=1+2+3=\underline{6}$$

12.

Die gegebene Entwickelung ist, wie ich ausdrücklich bemerken will, für II^a noch nicht geeignet; hier soll lediglich aus der Beobachtung für die einfachsten Fälle ein Gesetz gefunden werden.

Als Anwendungen der Planspiegel verzeichnet unser Lehrbuch Debuskop, Pyrgoskop, Winkelspiegel von Adams und Rommershausen.

Das Debuskop ist ein Winkelspiegel, gewöhnlich in gröſserem Format, der vor dem Kaleidoskop den Vorzug hat, daſs der Winkel abgeändert werden kann. In Tapisseriegeschäften leistet er gute Dienste, um z. B. erkennen zu lassen, wie eine angefangene Stickerei sich ausnehmen wird, wenn sie vervollständigt ist.

Das Pyrgoskop ist dasselbe Instrument, das gewöhnlich als Zauberperspektiv bezeichnet wird. In Hermann Wagner's Illustriertem Spielbuch für Knaben (Spamer's Verlag) ist es beschrieben unter dem Titel: „Die Kunst durch einen Ziegelstein zu sehen". Das Instrument besteht aus einer an jedem Ende nach derselben Richtung senkrecht aufwärts gebogenen Röhre. Die Seitenkästen können noch einmal röhrenartige Knieansätze erhalten. Dadurch daſs in den Ecken Spiegel unter einem Winkel von 45^0 angebracht sind, ist es möglich, um einen Gegenstand herum zu sehen.

Der Winkelspiegel von Adams und Rommershausen ist ein Spiegelinstrument, das im Princip bereits von G. Adams (Mitte des 18. Jahrhunderts) angegeben ist, und dem der Name Winkelspiegel überhaupt nicht zukommt. Rommershausen[1]) nennt es auch Spiegeldiopter. Von den beiden Dioptern hat das Objektivdiopter eine ziemlich breite Spalte, damit man noch mit gehöriger Helligkeit einen Absteckestab durch dieselbe sehen kann. Gegen die Visierlinie ist nun ein ebener Spiegel unter 45^0 Neigung gestellt, und wenn daher ein Strahl

[1]) Barfuſs, Handbuch der höheren und niederen Meſskunde.

darauf so fällt, dafs er mit der Visierlinie einen rechten Winkel macht, so wird er in der Richtung dieser Linie reflektiert und geht folglich durch das Okulardiopter. Hieraus ergiebt sich der Gebrauch des Instrumentes. Will man auf die Linie MQ von dem Punkte K ein Perpendikel NK fällen, so hält man das Instrument, den Spiegel nach dem Stabe M gekehrt, über die in der Richtung MQ ausgespannte Mefskette, visiert durch die Diopter A und B nach dem Stabe K und geht an der Kette so lange hin und her, bis man im Spiegel den Stab bei M und über den Spiegel weg im Diopter B den Stab bei K an einerlei Stelle sieht. Der Punkt N der Linie MQ, über welchem der Spiegel senkrecht steht, ist dann derjenige, wo das fragliche Perpendikel eintrifft.

Die ganze Vorrichtung ist in einem viereckigen, prismatischen Gehäus von 4 Pariser Zoll Länge angeordnet, worin zugleich sich noch eine ähnliche befindet, mit der man Winkel von 45° abstecken kann.

Die geringe Fntfernung der Diopter erschwert das Visieren, so dafs der Apparat durch den Spiegelsextanten (-oktanten) vollständig verdrängt ist.

Die Ableitung der Beziehung zwischen Objektsweite, Bildweite und Brennweite bei sphärischen Hohlspiegeln [1]) ist insofern mangelhaft, als in die Zeichnung mehr hineingedeutet wird, als sie ursprünglich besagt. Das Experiment giebt an, dafs parallel der Hauptachse einfallende Strahlen durch den Brennpunkt reflektiert werden, und dafs aus dem Brennpunkt kommende Strahlen nach der Reflexion parallel sind. Deshalb sind die beide Fälle $a>f$ und $a<f$ nicht nur experimentell, sondern auch geometrisch gesondert zu behandeln. Die Unterabteilungen des ersten Falles werden dem Schüler bei folgender Schreibweise anschaulicher sein.

Ist $a>2f$, so setze man $a=2f+x$.

$$\frac{1}{2f+x}+\frac{1}{a_1}=\frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{f}-\frac{1}{2f+x}=\frac{f+x}{f(2f+x)}=\frac{f+x}{f\cdot a}$$

$$a_1=\frac{f}{f+x}\cdot a \text{ d. h. } a_1<a.$$

Ist $f<a<2f$, so setze man $a=f+x$, wo $x<f$.

$$\frac{1}{f+x}+\frac{1}{a_1}=\frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{f}-\frac{1}{f+x}=\frac{x}{f\cdot a}$$

$$a_1=\frac{f}{x}\cdot a \text{ also } a_1>a.$$

Die Lage der Bilder mag aus der Figur abgelesen werden; erst in der höheren Klasse empfiehlt sich das Verfahren des Lehrbuches.

Im zweiten Falle mag die Bildweite, gerechnet gegenüber der Objektsweite in der entgegengesetzten Richtung, mit b bezeichnet werden. Man erhält:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

---

[1]) Newton kannte sie in der jetzt gebräuchlichen Form noch nicht.

Setzt man, da $a<f$, $a=f-x$, wo $x<f$, so folgt

$$\frac{1}{f-x}-\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{f-x}-\frac{1}{f}=\frac{x}{f\cdot a}$$

$$b=\frac{f}{x}\cdot a \text{ oder } b>a.$$

Jetzt erst kann in der Formel auch die Richtung berücksichtigt werden, in welcher die Entfernungen gemessen werden. Ist die Entfernung von O nach dem leuchtenden Punkte die positive, so hätte man $b=-a_1$ zu setzen.

Das giebt die folgende Zusammenstellung.

A) $a>f$ umgekehrte physische Bilder.

I. $a>2f$ liefert $a_1<a$; Bilder verkleinert.

II. $a=2f$ „ $a_1=a$

III. $a<2f$ „ $a_1>a$; Bilder vergröſsert.

B) $a<f$ aufrechte optische Bilder, vergröſsert für jeden Wert von a.

Will man endlich die beiden Fälle, welche nur durch die Erfahrung erkannt werden, der Formel anpassen, so ist, wenn parallele Strahlen auftreten, die betreffende Entfernung gleich ∞ einzusetzen; und dann gilt für divergent auffallende Strahlen allgemein:

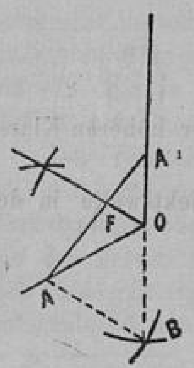
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a_1}=\frac{1}{f}$$

Für konvergent auffallende Strahlen ist neben dem Versuch eine dritte Zeichnung nötig. Wie die dadurch gewonnene Formel der allgemeinen sich unterordnet, braucht nicht erst gesagt zu werden. Man gewinnt:

$$-\frac{1}{c}+\frac{1}{a_1}=\frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{f}+\frac{1}{c} \text{ d. h. } a_1<f \text{ und gleichzeitig } a_1<c.$$

Die Formel $\frac{1}{a}+\frac{1}{a_1}=\frac{1}{f}$ eignet sich zur numerischen Berechnung einer der 3 Gröſsen, wenn 2 gegeben sind. Will man konstruktiv verfahren, so braucht man nicht immer auf die Zeichnungen zurückzugehen, durch welche die Formel gewonnen wurde. Ich gebe eine nicht gerade wenig bekannte, aber doch in die Lehrbücher wenig aufgenommene Konstruktion an: Auf dem einen Schenkel eines Winkels $O=120^0$ trage man $OA=a$ ab, auf der Halbierungslinie des Winkels $OF=f$ und verbinde A mit F durch eine Gerade. Diese schneidet den andern Schenkel des gegebenen Winkels in A_1 so, daſs $OA_1=a_1$ ist. Zum Beweise verlängere man A_1O über O hinaus, so daſs $OB=a$ wird, ziehe AB und wende den Proportionallehrsatz an.



Für II^a kann auch der Winkel $O=90^0$ zugrundegelegt werden, und in I^b schlieſst man mit $O=2a$ ab.

Bei der Herleitung des Gesetzes für sphärische Konvexspiegel begnügt sich das Lehrbuch mit der Formel, welche die Zeichnung ergiebt. Zum Erkennen der Gröſsenverhältnisse ist sie wohl geeignet, erfordert aber eine besondere Festsetzung, in welcher Richtung Objekts- resp. Bildweite positiv gemeint sind. Es empfiehlt sich, in jedem Falle für Objekt und Bild dieselbe Seite (in Beziehung auf den Spiegel) als positiv zu nehmen, damit die Übereinstimmung der Formeln bei Spiegeln und Linsen eine vollständige werde. Auch der sphärische Zerstreuungsspiegel läfst sich als Planspiegel betrachten, und liefert dann, allerdings nur bei der einen Form $\frac{1}{a}+\frac{1}{a_1}=-\frac{1}{f}$, wie der Sammelspiegel: $a=-a_1$.

Für konvergent auffallende Strahlen sind, jedenfalls wenn die Behandlung bereits in II^a durchgenommen wird, besondere Zeichnungen zu entwerfen, und die Resultate werden in die allgemeine Form übergeführt, dadurch dafs $-c=a$ gesetzt wird.

Andere Formen einer Gleichung zwischen Objekts-, Bild- und Brennweite, wenn Brennpunkt oder geometrischer Mittelpunkt als Koordinatenursprung gewählt werden, gehören in die Lehraufgabe von I^b.

Die experimentelle Ableitung des Brechungsgesetzes kann mit dem von Szymanski angegebenen Apparate geschehen. Man entwerfe eine Tabelle etwa der folgenden Art; zunächst für den Übergang aus Luft in Glas:

Einfallswinkel.	Brechungswinkel.	Ablenkung.	Einfallswinkel.	Brechungswinkel.	Ablenkung.
5^0	3^0	2^0	30^0	$17\frac{1}{2}^0$	$12\frac{1}{2}^0$
10^0	6^0	4^0	35^0	$20\frac{1}{4}^0$	$14\frac{3}{4}^0$
15^0	9^0	6^0	40^0	$22\frac{3}{4}^0$	$17\frac{1}{4}^0$
20^0	12^0	8^0	45^0	$25\frac{1}{4}^0$	$19\frac{3}{4}^0$
25^0	$14\frac{3}{4}^0$	$10\frac{1}{4}^0$	50^0	$27\frac{1}{2}^0$	$22\frac{1}{2}^0$

Die dritte Spalte ist vorläufig noch nicht auszufüllen. Ohne weiteres wiederhole man den Versuch, aber für den Übergang von Glas in Luft, und zwar wähle man dabei die in der zweiten Spalte angegebenen Winkel als Einfallswinkel. Da man die in der ersten Spalte verzeichneten Winkel jetzt als Brechungswinkel erhält, so ist die Umkehrbarkeit der Strahlenwege vor Augen geführt. Nun erst stelle man nach der Tabelle Vergleiche an. Die ersten Zeilen lassen vermuten, dafs Einfalls- und Brechungswinkel in konstantem Verhältnisse stehen. Schon Ptolemäus suchte dies festzuhalten, doch wurde dem sehr bald widersprochen. Kepler verwarf ebenfalls in seinen „Supplementen" das konstante Winkelverhältnis und stellte positive Behauptungen auf. Durch fortgesetzte Beobachtungen, besonders mit dem in seiner Dioptrik beschriebenen Apparate, hatte er gefunden, dafs das Verhältnis des Einfalls- zum Brechungswinkel aus Luft in Glas ungefähr 3 : 1 war, dafs darüber hinaus der Brechungswinkel unverhältnismäfsig gröfser wurde und um so mehr wuchs, je schiefer die Strahlen auffielen, so dafs z. B. beim gröfsten Einfallswinkel von 90^0 der Brechungswinkel nicht 30, sondern 48^0 zählte.[1]) Dies brachte ihn auf den Gedanken, das Brechungsverhältnis mit einer trigonometrischen Linie zu vergleichen, die im Anfang unmerklich, später aber um so schneller wächst, je mehr sich der zugehörige Winkel einem rechten Winkel nähert. Er wählte dazu unglücklicher Weise die Sekante und baute nun eine so gekünstelte Theorie auf, dafs er selbst ihr die Berechtigung eines Naturgesetzes nicht zuzuschreiben wagte. Erst Snellius, Professor in Leyden, gelangte zu einem richtigen Ausdruck, bekannt wird das Gesetz aber erst durch Descartes und zwar in der jetzt noch üblichen

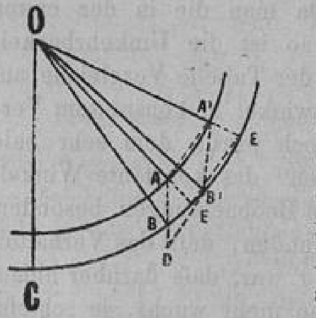
[1]) Spennrath, Die Untersuchungen über Refraktion und Dispersion des Lichtes seit Kepler. Aachen 1877.

Form $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. Die Richtigkeit der geometrischen Konstruktion von β, wenn α und n gegeben ist, mag in II[a] noch dadurch bewiesen werden, dafs die Werte von $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ durcheinander dividiert werden; in I[b] aber mittels des Sinussatzes. Der Zusatz, der im Lehrbuche direkt anschliefst, ist wohl nicht an der richtigen Stelle. Jedenfalls ist ausdrücklich zu betonen, dafs die Erfahrung es lehrt, dafs ein Lichtstrahl, der von Luft aus zwei durchsichtige Mittel durchdringt, deren Begrenzungsflächen untereinander parallele Ebenen sind, bei seinem Wiedereintritt in Luft seine ursprüngliche Richtung wiedererhält.

Endlich ist die letzte Spalte des obigen Schemas auszufüllen, und eine neue Tabelle zu fertigen, bei welcher die Brechungswinkel dieselbe arithmetische Reihe bilden wie vorher die Einfallswinkel.

Einfallswinkel.	Brechungswinkel.	Ablenkung.
5^0	$8\frac{1}{4}^0$	$3\frac{1}{4}^0$
10	$16\frac{3}{4}^0$	$6\frac{3}{4}^0$
15^0	$25\frac{1}{2}^0$	$10\frac{1}{2}^0$
20^0	$34\frac{1}{2}^0$	$14\frac{1}{2}^0$
25^0	45^0	20^0
30^0	$56\frac{1}{2}^0$	$26\frac{1}{2}^0$
35^0	73^0	38

Die letzte Spalte lehrt, dafs auch die Ablenkung zunimmt und zwar in einem um so stärkeren Verhältnisse je gröfser der zugehörige Einfallswinkel oder, was auf dasselbe hinauskommt, Brechungswinkel ist. Der anlaytische Beweis des Lehrbuchs erscheint mir auch für reifere Schüler nicht überzeugend genug; ich ziehe deshalb eine Herleitung aus der oben erwähnten Konstruktion vor. Die Radien der koncentrischen Kreise mögen sich wie $1 : n$ verhalten. Der Winkel $C\hat{O}A = \alpha$ ist dann mit dem Winkel $C\hat{O}B = \beta$ durch die Gleichung $\sin\alpha = n \sin\beta$ verbunden, wenn $AB \parallel OC$; das Entsprechende gilt für $C\hat{O}A_1 = \alpha_1$ und $C\hat{O}B_1 = \beta_1$, wenn $A_1B_1 \parallel OC$. Verlängert man OA und OA_1 bis zu den Schnittpunkten E bezw. E_1 in dem äufseren Kreise, so ist $EE_1 \parallel AA_1$, und zieht man endlich durch B_1 die Parallele zu EE_1, so schneidet diese die Verlängerung von OB in D. Aus dem Parallelogramm ist ohne weiteres abzulesen, dafs $A_1B_1 > AB$. So stimmen die Dreiecke OAB und OA_1B_1 in zwei Seiten überein, die dritten aber sind ungleich; folglich ist $A_1\hat{O}B_1 > A\hat{O}B$. Diese Winkel sind aber $\alpha_1 - \beta_1$, bezw. $\alpha - \beta$, d. h. die Ablenkungswinkel der Strahlen OA und OA_1 oder auch der Strahlen OB und OB_1. Die Ablenkung ist also um so gröfser, je gröfser der Brechungswinkel ist.



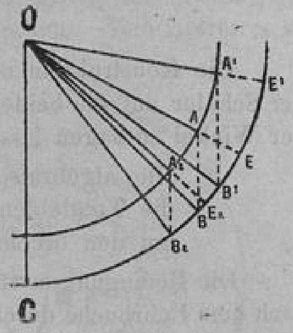
Betrachtet man OA als den gebrochenen Strahl, so tritt das Maximum δ der Ablenkung ein, wenn AB Tangente des inneren Kreises wird, wenn also

$$\cos\delta = \frac{1}{n}.$$

Bezeichnet man nach dem Vorgange des Lehrbuchs den Einfallswinkel in diesem Falle — den Grenzwinkel — mit φ, so ist $\delta = R - \varphi$, und es ergiebt sich

$$\sin\varphi = \frac{1}{n}.$$

Späterhin beim Prisma genügt die allgemeine Bestimmung über die Änderung des Ablenkungswinkels nicht. Ein genauerer Aufschlufs ist nötig, und er wird gewonnen, wenn die Frage beantwortet wird: Wie ändert sich der Ablenkungswinkel, wenn der Einfallswinkel um die gleiche Gröfse vermehrt oder vermindert wird?

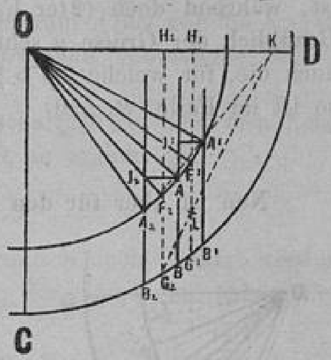


Ist $B\hat{O}A = \delta$ (die vollständige Beschreibung der Zeichnung will ich mir sparen) die Ablenkung bei dem Einfallswinkel $C\hat{O}A$;
$B_1\hat{O}A_1 = \delta_1$ bei dem Einfallswinkel $C\hat{O}A_1 = C\hat{O}A + \varepsilon$
und $B_2\hat{O}A_2 = \delta_2$ „ „ „ $C\hat{O}A_2 = C\hat{O}A - \varepsilon$,
so ist, gemessen auf dem äufseren Kreise:

$$\delta_1 - \delta = E_1B_1 - EB = \varepsilon - B_1B.$$
$$\delta - \delta_1 = EB - E_2B_2 = \varepsilon - B_2B.$$

Um die Gröfsenverhältnisse der Bogen B_1B und B_2B beurteilen zu können, verfahren wir wie in der Stereometrie bei Berechnung der Kugeloberfläche. Wir wählen ε klein, so klein, dafs Sehne und Bogen mit einander vertauscht werden können.

Die Sehne $AA_1 = AA_2$ sei mit s bezeichnet, entsprechend sei $BB_1 = s_1$ $BB_2 = s_2$. Ist F_1 die Mitte von AA_1 und G_1 die Mitte von BB_1, so ist $H_1G_2 \parallel AB$ und $H_1G_2 \perp OD$, wenn $D\hat{O}C = R$. Dasselbe gilt für H_2G_2. Bezeichnet man weiter $H_1F_1 = \varrho'$ und $H_1G_1 = \varrho_1$, $H_2F_2 = \varrho''$ und $H_1G_2 = \varrho_2$, ferner $A_1J_1 = h_1$ und $AJ_2 = h_2$, wobei $A_1\hat{J}_1A = R$ und $A\hat{J}_2A_2 = R$, so ist, weil



$$\varDelta\, AJ_1A_1 \sim OF_1H_1 \quad \text{und} \quad \varDelta\, AJ_2A_2 \sim OF_2H_2;$$
$$s \cdot \varrho' = r \cdot h' \qquad\qquad s \cdot \varrho'' = r \cdot h''$$

oder:
$$\varrho' : \varrho'' = h' : h''.$$

Auf dieselbe Weise erhält man:
$$s_1\varrho_1 : s_2\varrho_2 = h' : h''$$

oder:
$$s_1\varrho_1 : s_2\varrho_2 = \varrho' : \varrho''$$
$$\frac{s_1\varrho_1\varrho''}{s_2\varrho_2\varrho'} = 1.$$

Verlängert man nun F_2F_1 bis zum Schnitt K in OD und verbindet man K mit G_2 durch eine Gerade, welche F_1G in L schneiden möge, so:
$$\varrho'' : \varrho' = \varrho_2 : (\varrho_1 - LG_1)$$
$$\frac{(\varrho_1 - LG_1)\,\varrho''}{\varrho_2\varrho'} = 1 \text{ oder } \frac{\varrho_1\varrho''}{\varrho_2\varrho_1} > 1$$

So ergiebt sich endlich $\frac{s_1}{s_2} < 1$ oder $s_1 < s_2$.

Hieraus schliefst man $B_1B < B_2B$; also:
$$\delta_1 - \delta = \delta - \delta_2.$$

Zu demselben Ergebnis kommt man, wenn man $B\hat{O}B_2 = B\hat{O}B_1$ wählt, so dafs man das Gesetz allgemein so aussprechen könnte: Vergröfsert oder vermindert man den Brechungswinkel um dieselbe Gröfse, so ist die Änderung der Ablenkung bei der Vergröfserung gröfser als bei der Verminderung.

Wenn das Prisma zum ersten Male im Unterrichte behandelt wird, empfiehlt es sich nicht, von vornherein die drei Fälle zu unterscheiden, welche durch die Winkel β, d. h. durch die Lage des durchgehenden Strahls gegenüber den Einfallsloten charakterisiert sind. Man nehme nur den ersten Fall und leite die drei Gleichungen ab:

$$\sin \alpha_1 = n \sin \beta_1$$
$$\beta_1 + \beta_2 = \gamma$$
$$\sin \alpha_2 = n \sin \beta_2$$

Die Konstruktion ist zu üben. Durch Zahlenbeispiele lenke man die Aufmerksamkeit der Schüler auf die beiden andern Fälle, so dafs man schliefslich mit Rücksicht auf die Lage der Winkel so sagen lassen kann:

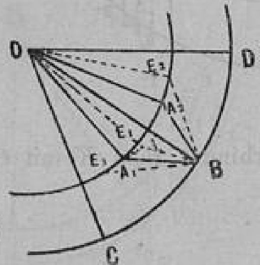
> Die algebraische Summe der Winkel β ist gleich dem brechenden Winkel, und die Totalablenkung ist gleich der algebraischen Summe der Winkel α vermindert um den brechenden Winkel.

Die Bedingungen für den Durchgang eines Lichtstrahls durch das Prisma können ganz nach dem Lehrbuche durchgenommen werden; nur mufs beim zweiten Absatze des betreffenden Abschnittes (der übrigens in II^a wegbleiben kann) betont werden, dafs man den Durchgang des Lichtstrahls in seiner Abhängigkeit vom Einfallswinkel α_1 darstellen will. Auch bei dem Abschnitte „Minimum der Ablenkung" ist kaum etwas zu ändern. Auf die eine Frage mufs man sich freilich gefafst machen. Wie kommt es, dafs das Minimum der Ablenkung $2\alpha - \gamma$ ist, während doch (2ter Fall) $\alpha' - \gamma$ und (3ter Fall) $\alpha_1 - \alpha_2 - \gamma$ kleiner zu sein scheinen? Bezüglich der Gröfse γ scheiden die Prismen aus, deren brechender Winkel $\geqq 2\gamma$ ist, aber auch die, für welche $2\varphi > \gamma > \varphi$. Denn β_1 kann nicht gleich γ werden. Ist aber $\gamma \leqq \varphi$, so ist im Falle: $\beta_2 = 0$

$$\sin \alpha' = n \sin \gamma = 2n \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

Nun ist aber für den Fall des Minimums:

$$\sin \alpha = n \sin \frac{\gamma}{2} \text{ also}$$



$$\sin 2\alpha = 2n \sin \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}; \text{ d. h. } \alpha' > 2\alpha.$$

Liegen β_1 und β_2 auf verschiedenen Seiten des durchgehenden Strahles, und ist $\beta_1 = \gamma + x$, so ist absolut genommen $\beta_2 = x$. Winkel α_1 ist also gröfser als α' und zwar ist der Überschufs gröfser als α_2. $\alpha_1 - \alpha_2 > \alpha'$; um so mehr $\alpha_1 - \alpha_2 > 2\alpha$.

Im Anschlufs an die obige Konstruktion läfst sich das Minimum der Ablenkung recht übersichtlich darstellen. Ist $B\hat{O}C = B\hat{O}D = \frac{\gamma}{2}$, $BA_2 \parallel OC$ und $BA_1 \parallel OD$, so ist $A_1\hat{O}A_2$ das Minimum der Ablenkung. Denn

$$A_2\hat{O}B = A_1\hat{O}B = \alpha - \frac{\gamma}{2}; \text{ daher } A_1\hat{O}A_2 = 2\alpha - \gamma.$$

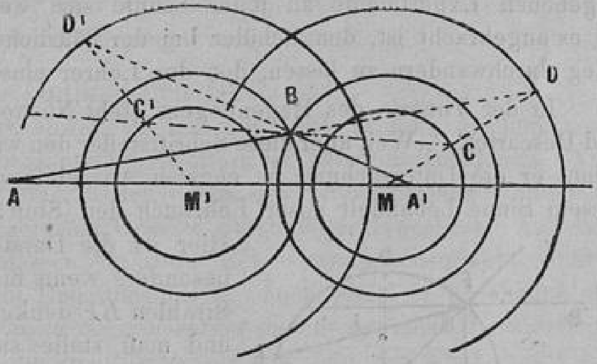
Ist weiter $A_2\hat{B}E_2 = A_1\hat{B}E_1$, so ist $E_1\hat{B}E_2 = \gamma$ und die Totalablenkung ist E_1OE_2. Es ist nachzuweisen, dafs $E_1\hat{O}E_2 > A_1\hat{O}A_2$. Trägt man den Winkel A_2BE_2 nach A_1BE_3, so ist $A_1E_3 = A_2E_2$. Die Sehne A_1E_3 möge EB in J schneiden, so verhält sich:

$$E_3B : JB = A_1E_3 : A_1J.$$

Es ist also $A_1E_3 > A_1J$ und da $A_1J > A_1E_1$, so ist auch A_1E_3 oder, was ihm gleich ist, $A_2E_2 > A_1E_1$. Daher:

$$E_1\hat{O}E_2 > A_1\hat{O}A_2$$

Die Herleitung der Gleichung zwischen Objekts-, Bild- und Brennweite bei sphärischen Linsen ist in II^a kaum möglich, weil in der Regel die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks noch nicht begonnen hat. Experimentelle Vergleiche zwischen Spiegeln und Linsen lassen die Anwendung der entsprechenden Gleichungen anschaulich genug erscheinen; die Werte für die reziproken Brennweiten müssen jedoch gegeben werden. Wir betreten so notgedrungen den Weg, welchen Newton in der Einleitung zu seiner Optik einschlägt. In I^b ist das Versäumte nachzuholen. Die Konstruktionen werden wohl immer umständlich sein. Recht elegant ist die von Weierstrafs [1]), welche den Angaben in Schellbachs darstellender Optik angepafst ist. $MB = r$ stellt den Radius einer Glaskugel vor, deren Brechungsexponent $= n$ ist. Der Radius des inneren Kreises ist $MC = \frac{r}{n}$ und der des äufseren



$MD = n \cdot r$. Fällt nun von dem leuchtenden Punkte A ein Lichtstrahl ABD auf die Kugel, und man verbindet M mit D, so ist BC der in die Kugel eintretende gebrochene Strahl. Es ist nämlich $MB : MC = MD : MD = n : 1$

Da der Winkel M den Dreiecken BMC und BMD gemeinschaftlich ist, sind also diese Dreiecke ähnlich. Es ist $M\hat{C}B = M\hat{B}D = \alpha$, und da $M\hat{B}C = \beta$, so ergiebt sich

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{MB}{MC} = n.$$

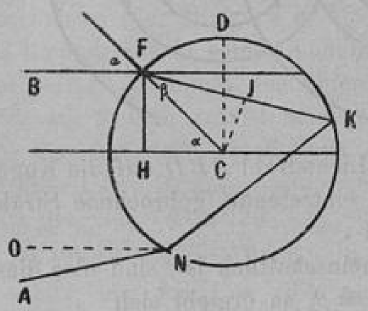
Die Figur habe ich erweitert, um zu zeigen, wie die Konstruktion auch benutzt werden kann, um den vollständigen Gang eines Lichtstrahls zu zeichnen, der durch eine sphärische Konvexlinse (Dicke unendlich klein) abgelenkt wird.

Konnte der Schulunterricht Newton kaum folgen, so lange dieser seine Axiome bespricht, so ist er dagegen von nun ab in dem experimentellen Teile seiner Optik ein treuer Führer. Newton schliefst aus der ungleichen Ablenkung verschiedener Farben durch Prismen auf die verschiedene Brechbarkeit des verschiedenfarbigen Lichtes und auf die Zusammensetzung des weifsen Lichtes aus verschiedenen Farben. Die Art [2]) der Auffindung dieses epochemachenden Faktums durch Newton ist ein Muster induktiver Forschung und die von ihm gegebene Darstellung seiner Untersuchungen ist eines der lesenswertesten Dokumente der älteren Physik. Daran reiht sich — es gehört dies allerdings erst in die Aufgabe der I^b — die selbst von den späteren Gegnern als mustergültig anerkannte Beschreibung der Farbenerscheinungen dünner Blättchen. Was die Darstellung auszeichnet, ist die strenge Auseinanderhaltung dessen, was aus der Beobachtung, aus dem Experimente und aus der schematischen Zeichnung gewonnen wird. Auch im Lehrbuche von Münch wird häufig so verfahren, und jedenfalls wird es dem Lehrer leicht, sich so einzurichten. Eine konsequente Durchführung dieser Art bietet das physikalische Unterrichtswerk von Börner, wo die einzelnen

[1]) P. Z. II. Heft 3. [2]) Czapski, Theorie der optischen Instrumente. Leonhard, Der Umschwung in den Anschauungen über das Wesen der Lichterscheinungen.

Abschnitte hervorgehoben sind als Begriffsbestimmung, Erfahrung, Versuch, Gesetz, Beweis, Hypothese etc. Die Freiheit in der Verteilung des Lehrstoffs ist dadurch freilich erschwert, und mit dem Lehrbuche ist auch die Methode vorgeschrieben, aber eine Methode, die mir so naturgemäfs erscheint, dafs der Physiklehrer einen Zwang bei Anwendung derselben kaum empfinden wird, und dafs das genannte Unterrichtswerk ein äufserst verdienstliches Werk ist, weil es immer auf die Methode hindrängt. Etwas anderes ist es, ob die angegebenen Experimente an jeder Schule sich werden durchführen lassen, etwas anderes, ob es angebracht ist, den Schüler bei der häuslichen Wiederholung immer wieder denselben Weg durchwandern zu lassen, den der Lehrer einschlug, um die Erkenntnis zu vermitteln.

In der Theorie des Regenbogens steht Newton ganz auf den Schultern von de Dominis und Descartes. „Weil aber diese Schriftsteller den wahren Ursprung der Farben nicht kannten", spinnt er die Untersuchung im engsten Anschlufs an seine Farbenlehre weiter aus. Und in diesem Sinne behandelt unser Lehrbuch den Stoff; die Rechnung aber ist für II^{a} zu hoch.



Hier ist die Darstellung von Descartes recht einleuchtend, besonders wenn man sie nach Newton ergänzt.[1] Zu den Strahlen BF denke man sich durch C die Parallelen gezogen, und man stelle sich vor, der Punkt F bewege sich von diesen weg nach D zu. Dann wird das Verhältnis $\frac{FH}{DC}$ d. i. $\sin\alpha$ immer gröfser werden. Für gegebene Werte von α läfst sich β berechnen und darnach $\delta = 4\beta - 2\alpha$. Für $n = \frac{250}{187}$

$\sin\alpha$	δ	$\sin\alpha$	δ
0,1	5° 40′	0,6	32° 56′
0,2	11° 19′	0,7	37° 26′
0,3	17° 56′	0,8	40° 44′
0,4	22° 30′	0,9	40° 57′
0,5	27° 52′	1,0	13° 40′

Das Maximum des Winkels δ liegt ungefähr bei 41°; um dasselbe genau zu bestimmen, wird die Tabelle im Bereiche $\sin\alpha = 0{,}8 \ldots 1{,}0$ vervollständigt.

$\sin\alpha$	δ	$\sin\alpha$	δ	$\sin\alpha$	δ	$\sin\alpha$	δ
0,80	40° 44′	0,85	41° 30′	0,90	40° 57′	0,95	37° 32′
0,81	40° 58′	0,86	41° 30′	0,91	40° 36′	0,96	36° 06′
0,82	41° 10′	0,87	41° 28′	0,92	40° 05′	0,97	34° 12′
0,83	41° 20′	0,88	41° 22′	0,93	39° 26′	0,98	31° 31′
0,84	41° 26′	0,89	41° 12′	0,94	38° 38′	0,99	27° 19′

Aus der Tabelle folgt zweierlei: erstens dafs für Winkel von $40\frac{3}{4}{}^{\circ} \ldots 41\frac{1}{2}{}^{\circ}$ nach einer Reflexion und zwei Brechungen sehr viel mehr Strahlen gesehen werden können, als

[1]) P. Z. 1900. Heft I.

unter irgend einem kleineren Winkel, und dafs unter gröfserem Winkel überhaupt kein Strahl mehr auftritt, und zweitens, dafs δ im Maximum $42^{\circ}\,30'$ ist.

Die Fortsetzung kann ganz nach Anleitung des Lehrbuches geschehen. — Bei der Durchnahme in I[b] kann ich mich zur Darstellung nach Pernter[1]) nicht entschliefsen, wenn gleich eine Zeichnung, die den Verlauf einer Anzahl parallel auffallender Strahlen verfolgt, recht nützlich ist. Über Bau und Wirkungsweise der Instrumente giebt das Lehrbuch genügend Anleitung und auch Anregung zu Vergleichungen. Berechnung der Vergröfserung, des Gesichtsfeldes etc. ist dem zweiten Jahrgange vorbehalten.

Newton's Optik, Buch III.

Damit wäre die Lehraufgabe der II[a], soweit sie sich auf Optik bezieht, erschöpft; wie die Behandlung der Aufgabe in I[b] zu ergänzen und zu erweitern ist, habe ich angedeutet. Aber nun ist auch der Anfang zu machen mit der dritten Stufe des physikalischen Unterrichts, mit der Erklärung der experimentell gewonnenen Gesetze durch eine Hypothese. Auf diese Aufgabe will sich zwar Newton nicht einlassen; er stützt sich — wenigstens glaubt er es — weder auf die Wellenlehre, noch auf die Emissionstheorie, noch stellt er überhaupt eine Theorie auf und[2]) *he shall sometimes, to avoid circumlocution and to represent it conveniently, speak of it as if he assumed it and propounded it to be believed.* In der That, prüft man Newton's Ausdrucksweise genauer, so mufs man zugeben, dafs er selbst bei Besprechung der Farben dünner Platten — also bei dem, was gewöhnlich Theorie der Anwandlungen[3]) (fits) genannt wird — noch auf dem Boden der Thatsachen bleibt, wenn er sagt, dafs der Lichtstrahl abwechselnd leichter zurückgeworfen oder leichter gebrochen würde. Wenn er aber klar machen will, wie dieser Wechsel geschehen kann, so liefert er eben eine Theorie. Bei dieser Gelegenheit (und so noch öfter) wird auf die Möglichkeit hingewiesen, die Erscheinung durch Vibrationen der Korpuskeln zu erklären, die sich durch den Äther wellenartig ausbreiten; recht häufig kommen Vergleiche mit den Schallwellen, aber gerade diese machen ihn der Wellentheorie des Lichtes abgeneigt. Newton kann sich die Ätherwellen nicht anders als als Longitudinalwellen vorstellen, aber dem widersprechen seine Untersuchungen über die Doppelbrechung. *If*[4]) *the particles of the ether be supposed to vibrate in the direction of the ray itself, it seems inconceivable, that such a ray could bear a different relation to the different parts of the surrounding space; every thing in fact, would be similar on all sides of the ray, above and below, on the right hand and on the left.* Ein Fortschritt, nicht nur Negation, ist aber doch in der Newton'schen Erklärung des Lichtstrahls zu finden. Während der Strahl bei Cartesius noch als die Spur eines geradlinig bewegten Teilchens aufgefafst wird, besitzt er nach Newton eine regelmäfsige, periodische Struktur, und durch die Gröfse der Periode oder das Intervall der „Anwandlungen" wird die Farbe des Lichtstrahls charakterisiert. Es bedurfte[5]) nur einer angemessenen Interpretation, um von dieser Form des Lichtstrahls zur Wellenbewegung überzugehen.

Die Art und Weise, wie Newton sich die Thatsachen der Lichterscheinungen zurechtlegt, ist mehr als eine Umschreibung, und stellt man sich die verschiedenen Erklärungen zusammen, so könnte man recht wohl von einer Theorie sprechen; nur soll man nicht Newton als starren Verfechter der Emissionstheorie hinstellen. Besonders die Fragen *(Queries)* des III. Buches legen von den Zweifeln eines gequälten Geistes deutlich Zeugnis ab.

[1]) P. Z. 1899. Heft VI. [2]) Aus Cornu's Rede am Stokes-Jubiläum; von Cornu veröffentlicht in Nature 1899 July 27. [3]) Newton's Optics B. II. prop. XII. [4]) Spennrath. [5]) P. Z. XII. Heft VI.

Q. 12. Erregen nicht die Lichtstrahlen, die auf den Hintergrund des Auges fallen, Vibrationen in der Netzhaut?

Q. 13. Erregen nicht die verschiedenen Arten von Strahlen Vibrationen von verschiedener Länge, welche, gemäfs ihrer Länge, die Empfindung verschiedener Farben verursachen, ganz in der Weise wie die Luftwellen ihrer Länge entsprechend die Empfindung verschiedener Töne hervorrufen? Und rufen insbesondere nicht die brechbarsten Strahlen die kürzesten Vibrationen hervor und dadurch die Erscheinung des tiefsten Violett, und die am wenigsten brechbaren die längsten und damit die Erscheinung des tiefsten Rot? — Besonders wichtig für die Beurteilung ist die 18. Frage, die ich deshalb wenigstens teilweise nach dem Wortlaute citieren will:

Wärme breitet sich durch das Vacuum durch Schwingungen eines Mittels aus, welches noch viel feiner ist, als Luft; denn wenn diese ausgezogen ist, bleibt es im Vacuum zurück. *Is not this medium the same with that medium, by which light is refracted and reflected, and by whose vibrations light communicates heat to bodies and is put into fits of easy reflection and easy transmission? ... And is not this medium exceedingly more rare and subtile than the air and exceedingly more elastic and active? and doth it not readily pervade all bodies? and is it not (by its elastic force) expanded through all the heavens?*

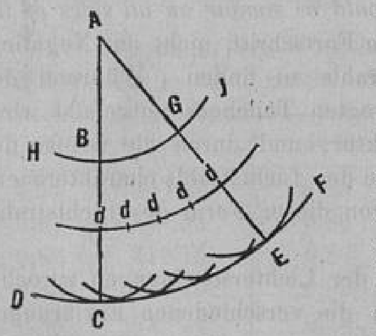
Aber bei weiterer Überlegung stockt Newton doch und kommt schliefslich zur Frage 28: Sind nicht alle Hypothesen irrig, bei welchen Licht vorausgesetzt ist als in Druck oder Bewegung bestehend, die durch ein flüssiges Medium sich fortpflanzen?

Warum dieses plötzliche Anhalten? Newton sieht die Möglichkeit der geradlinigen Fortpflanzung des Lichts, wenn diese in Wellenform geschehen soll, nicht ein. So ist das III. Buch der Ausdruck des Leidens eines mächtigen Genius, der vom Zweifel gequält, bald von den verlockenden Eingebungen seiner Einbildungskraft fortgerissen, bald durch die gebieterischen Forderungen der Logik davon zurückgerufen wird. *It is a drama: the everlasting struggle between love and duty; and duty won.*

Wohl kannte Newton die Theorie von Huygens, aber man prüfe selbst, ob ihm die Ausführungen über die geradlinige Fortpflanzung genügen konnten.

Huygens, *Traité de la lumière Chap. I pag. 19.*

Wir bemerken zuerst, dafs jeder Teil einer Welle sich so ausbreiten mufs, dafs seine äufsersten Punkte immer zwischen denselben geraden Linien liegen, die vom leuchtenden Punkte ausgehen. So wird sich der Teil *BG* einer Welle, die den leuchtenden Punkt *A* zum Mittelpunkt hat, in dem Bogen *CE* ausbreiten, begrenzt von den Geraden *ABC* und *AGE*. Denn obgleich die Teilwellen, welche von den Teilen des Raumes *ACE* ihren Ursprung nehmen, sich auch aufserhalb dieses Raumes ausdehnen, so laufen sie doch nie gleichzeitig zusammen, um eine Hauptwelle zu bilden, aufser genau im Kreise *CE*, welcher ihre gemeinschaftliche Tangente ist. Deshalb breitet sich Licht nur in geraden Linien aus, so dafs es ein Objekt nur dann beleuchten kann, wenn der Weg zwischen ihm und der Quelle geradlinig offen steht. Es sei beispielsweise *BG* eine von undurchsichtigen Körpern *BH, GJ* begrenzte Öffnung. Die vom Punkte *A* ausgehende Luftwelle wird immer von den Geraden *AC, AE*



[1]) P. Z. XII und Nature 1899.

begrenzt sein, weil die Teile der Teilwellen, welche sich aufserhalb des Raumes ACE ausbreiten, zu schwach sind, um dort Licht zu erzeugen.[1])

Erst viel später, durch Fresnel, wurde es vollkommen klar: Licht breitet sich in geraden Linien aus, weil die Lichtwellen aufserordentlich klein sind. Der Schall im Gegensatz hierzu breitet sich auch seitlich aus, weil die Länge der Schallwellen verhältnismäfsig recht grofs ist, *Thus*[2]) *vanished the terrible objection which had so much tormented the mind of great Newton.*

Schon zu Descartes Zeiten[3]) wurde gegen das Brechungsgesetz, eben weil es aus mechanischen Gründen hergeleitet wurde, geltend gemacht, dafs es gegen alle Erfahrung sei, dafs ein Körper, der einmal seine Geschwindigkeit geändert habe, dieselbe ohne äufsere Ursache wieder annähme, wenn er in den früheren Zustand zurückgelange. Ein Lichtstrahl aber, welcher aus Luft durch ein brechendes Mittel mit parallelen ebenen Grenzflächen hindurch wieder in Luft gelangt, hat nach dem Austritt dieselbe Geschwindigkeit wie vor dem Eintritte. Newton's Erklärung mit der Wechselwirkung zwischen Lichtteilchen und Körperteilchen mag des historischen Interesses halber noch erwähnt werden; nötig aber ist die Herleitung eines handlichen Ausdrucks für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle. Bei Münch ist dieselbe zwar recht kurz, aber was als Begründung angegeben wird: „denn der Übergang aus einer Richtung in alle Richtungen in einer Ebene und der ganz gleiche Übergang aus einer durch die Molekül-Reihe gelegten Ebene in alle durch dieselbe denkbaren Ebenen geschieht durch Multiplikation mit 2π“ kann schwerlich als Begründung gelten. Ich nehme deshalb, indem ich mich dem Lehrbuche möglichst anbequeme, die folgende Herleitung:

Der schwingende Punkt durchläuft (Münch I. B, 30) mit seiner veränderlichen Geschwindigkeit seine Bahn AB in derselben Zeit, in welcher ein Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit V den Halbkreis über AB durchlaufen würde, wenn diese Geschwindigkeit gleich derjenigen wäre, die der oscillierende Punkt in C hat. Bedeutet k' die Kraft, die in der Einheit der Entfernung wirkt, m die Masse des Teilchens, so ist

$$V = r\sqrt{\frac{k'}{m}}.$$

Bedeutet aber k die Kraft, die in der Einheit der Entfernung auf die Einheit der Masse wirkt, so ist: $k' = mk$, also: $V = r\sqrt{k}$

Nun ist $2\pi r = V.T$, wenn T die Schwingungszeit des Teilchens ist. In derselben Zeit, in welcher das Teilchen seine Schwingung vollendet, schreitet die Welle fort um die Wellenlänge l, und ist c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, so ist

$$l = c \cdot T;\ c = \frac{l}{T} = \frac{lV}{2\pi r},$$

und es folgt:

$$c = \frac{l\sqrt{k}}{2\pi}$$

---

[1]) *Car bien que les ondes particulières, produites par les particules que comprend l'espace CAE, se repandent aussi hors de cet espace, toutesfois elles ne concourent point en mesme instant, à composer ensemble une onde qui termine le mouvement, que précisément dans la circonference CE, qui est leur tangente commune. .... Car si, par exemple, il y avoit une ouverture BG, bornée par des corps opaques BH, GJ, l'onde de lumière qui sort du point A sera tousjours terminée par les droites AC, AE, comme il vient d'estre demonstré: les parties des ondes particulières, qui s'étendent hors de l'espace ACE, estant trop foibles pour y produire de la lumière.*
[2]) Nature. [3]) Spennrath.

Um für die wirkende Kraft einen Ausdruck zu gewinnen, welcher für die Beobachtung zugänglicher ist, beachten wir die Entfernung eines Teilchens von der Gleichgewichtslage. $CD = y = r \cos\varphi$.

Um in die Lage D zu kommen, möge das Teilchen t Sekunden in Bewegung sein. Dann verhält sich:

$$\varphi : 4R = t : T;\ \varphi = \frac{4R \cdot t}{T}$$

$$y = r \cos 4R \cdot \frac{t}{T}$$

Liegt ein Teilchen in der Entfernung a vom Anfangspunkte der Bewegung, so erreicht ihn diese Bewegung $\frac{a}{c}$ Sekunden später, also ist der Punkt t Sekunden nach Anfang der Bewegung des ersten nur $t - \frac{a}{c}$ Sekunden in Bewegung gewesen.

$$y = r \cos 4R \cdot \frac{t - \frac{a}{c}}{T}$$

$$y = r \cos 4R\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{l}\right),\ \text{denn}\ c \cdot T = l.$$

Als Maſs für die wirkende Kraft führen wir die vertikal auf L wirkende Kraft e' ein, mit welcher die Moleküle gegen ihre Gleichgewichtslage hingetrieben werden, wenn ihre Verschiebung gegeneinander ihrem ursprünglichen Abstande gleich geworden ist. Wir sind berechtigt, anzunehmen, daſs das Teilchen, dessen Entfernung y von der Gleichgewichtslage beträgt, ausschlieſslich von beiden benachbarten Teilchen, deren Entfernungen y_1 und y_2 sind, beeinfluſst wird. Die Kraft, mit welcher es auf die Gleichgewichtslage zustrebt, wird nun sein: $f = [(y_2 - y) - (y - y_1)]\,\frac{e'}{x}$, wobei x die ursprüngliche Entfernung bedeutet.

$$y = r \cos 4R\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{l}\right)$$

$$y_1 = r \cos 4R\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{l} + \frac{x}{l}\right)$$

$$y_2 = r \cos 4R\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{l} - \frac{x}{l}\right)$$

$$\frac{y_2 - y}{r} = \cos 4R\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{l} - \frac{x}{l}\right) - \cos 4R\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{l}\right)$$

$$\frac{y_2 - y}{r} = +\ 2 \sin 4R\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{l} - \frac{x}{2l}\right) \cdot \sin 4R\,\frac{x}{2l}$$

$$\frac{y - y_1}{r} = 2 \sin 4R\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{l} + \frac{x}{2l}\right) \sin 4R \cdot \frac{x}{2l}$$

$$\frac{y_2 - y}{r} - \frac{y - y_1}{r} = 2 \sin 4R\,\frac{x}{2l}\left[\sin 4R\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{l} - \frac{x}{2l}\right) - \sin 4R\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{l} + \frac{x}{2l}\right)\right]$$

$$= -\ 4 \sin 4R\,\frac{x}{2l} \sin 4R\,\frac{x}{2l} \cos 4R\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{l}\right).$$

Bei sehr kleinen Winkeln kann der Sinus des Winkels mit dem zugehörigen Bogen des Einheitskreises vertauscht werden. Heiſst der Bogen b, so ist

$$4R \cdot \frac{x}{2l} : 4R = b : 2\pi; \quad b = \frac{\pi x}{l}. \quad \text{So folgt:}$$

$$(y_2 - y) - (y - y_1) = -4\,\frac{\pi^2 x^2}{l^2}\,y.$$

Absolut genommen ist also die in der Entfernung y wirkende Kraft:

$$f = \frac{4\pi^2 x}{l^2}\,ye'$$

Die in der Entfernung 1 wirkende Kraft k' ist also:

$$k' = \frac{4\pi^2 xe'}{l^2} \quad \text{und} \quad k = \frac{4\pi^2 xe'}{ml^2}.$$

Der Abstand x zweier Teilchen ist nun $\frac{l}{n}$, wenn in der Länge l sich n Teilchen befinden, und demnach ist:

$$k = \frac{4\pi^2 le'}{(mn)\,l^2}. \quad \text{Dies giebt:}$$

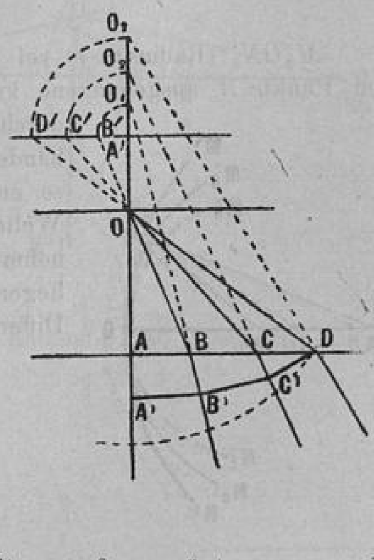
$$c = \frac{l\sqrt{\frac{4\pi^2 le'}{(mn)l^2}}}{2\pi}\sqrt{\frac{le'}{mn}}$$

mn ist die Masse der Punktreihe. Beim Querschnitt q ist $mn = q \cdot d \cdot l$, und so findet man:

$$c = \sqrt{\frac{e'}{q \cdot d}}$$

d ist die Masse in der Volumeneinheit. Nennt man endlich die Kraft, welche wirkt, wenn die Volumeneinheit auf das doppelte Längenmafs ausgedehnt wird, e, so ist $e = \frac{e'}{q}$, und man gewinnt:

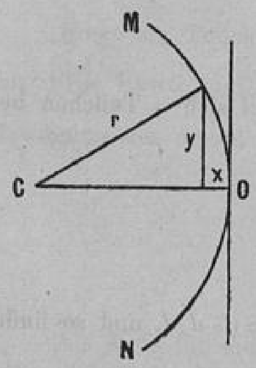
$$c = \sqrt{\frac{e}{d}}.$$



Reflexions- und Brechungsgesetz mögen nach Anleitung des Lehrbuches unter Benutzung des Huygens'schen Princips abgeleitet werden; und zwar zunächst in der von Huygens selbst angegebenen Weise für Strahlenbündel von unendlich dünnem Querschnitt. Ein angenähertes Bild der Hauptwelle nach der Brechung gewinnt man durch nebenstehende Konstruktion. Die von O ausgehenden Strahlen treffen die Ebene in A, B, C, D etc., und zwar sollen unter AB, BC, CD nur kleine Entfernungen gemeint sein. Ist nun $L' \parallel L \parallel AD$ und zwar $AO : AA' = 1 : n$, so ist $BO : BB' = CO : CC'$ etc. $= 1 : n$. Nach Konstruktion ist $OB' = OO_1$, $OC' : OO_2$, $OD' = OO_3$; und die Entfernungen AA_1, BB_1, CC_1 seien so klein, dafs mit Rücksicht auf die Kleinheit der Entfernungen AB, BC, CD angenommen werden mufs, dafs $AA_1 \parallel BB_1$ ferner $BB_1 \parallel CC_1$. Dann würde $DC_1B_1A_1$ ein ungefähres Bild eines Teiles der Wellenfläche liefern. Da OA senkrecht auf der Brechungsebene steht, also als Symmetrieachse gelten mufs, genügt es, wenn die Zeichnung nur in einer durch OA gelegten Ebene ausgeführt wird.

Für die reflektierte Welle ist eine ähnliche Konstruktion überflüssig, da die Ableitung, die das Lehrbuch für divergierende Strahlen giebt, recht brauchbar ist.

Auf gekrümmte Spiegel und auf Linsen wird beim Schulunterrichte diese Betrachtung in der Regel nicht ausgedehnt, und doch sind die geometrischen Ableitungen deshalb ungenügend, weil der Nachweis fehlt, dafs die Strahlen mit gleicher Phase im Bildpunkte zusammentreffen. Das von Walter König [1]) angegebene Verfahren läfst sich recht gut für die Schule verwerten.



Hilfssatz: Es sei MN ein Stück eines Kreises (C, r), eine Centrale OC wird als Abscissensachse gewählt und als Ordinatenachse das Lot auf OC in C. Für einen Punkt P der Peripherie gilt dann:

$$x = r\left(1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}\right)$$

Beschränkt man sich auf Punkte in der Nähe von O, nimmt man also y sehr klein gegen r, so ist bei erster Annäherung:

$$x = r\left(1 - \left[1 - \frac{y^2}{2r}\right]\right) = \frac{y^2}{2r}.$$

Umkehrung: Findet zwischen den Koordinaten eines Punktes P, der dem Koordinatenursprung benachbart ist, und einer Konstanten r, der gegenüber y sehr klein ist, die Beziehung statt:

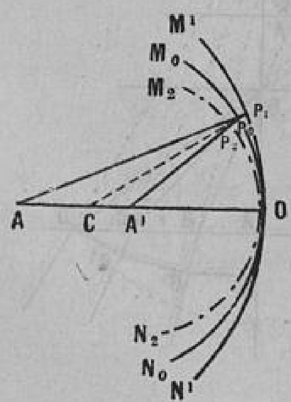
$$x = \pm \frac{y^2}{2r},$$

so ist P ein Punkt der Peripherie eines Kreises vom Radius r, der die Ordinatenachse im Koordinatenursprung berührt, und dessen Mittelpunkt bez. auf der positiven oder negativen Abscissenachse liegt.

I. Spiegelung.

a) Konkavspiegel.

M_0ON_0 (Radius $= r$) sei der sphärische Spiegel, M_1ON_1 bedeute die vom leuchtenden Punkte A ausgegangene kugelförmige Welle in der Lage, die sie beim Durchgange durch den Punkt O haben würde, wenn der Spiegel nicht vorhanden wäre. Beschreibt man um P_0 mit P_0P_1 einen Kreis, so enthält derselbe einen Punkt P_2, welcher der reflektierten Welle angehört. Für Punkte in der Nähe von O darf man annehmen, dafs die Punkte $P_2P_0P_1$ in einer Parallelen zur Achse liegen, dafs also die Radien der Elementarwellen gleich den Differenzen der Abcissen sind.



$$x_2 - x_0 = x_0 - x_1$$
$$x_2 = 2x_0 - x_1$$
$$x_2 = 2\frac{y^2}{2r} - \frac{y^2}{2a} = \frac{y^2}{2a_1}, \text{ wo}$$
$$\frac{2}{2r} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a_1}.$$

[1]) P. Z. VIII.

P_2 ist also Punkt einer Kugelfläche, deren Radius sich bestimmt aus:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a}=\frac{2}{r}.$$

Das Centrum dieser Kugelfläche ist der zu A gehörige Bildpunkt A_1.

b) Konvexspiegel.

Da nur die absoluten Werte von x in Betracht kommen, ist

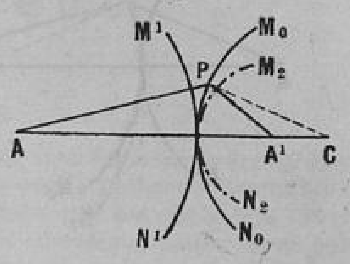
$$x_1+x_0=x_2-x_0$$

$$x_2=2x_0+x_1$$

$$x_2=\frac{2y^2}{2r}+\frac{y^2}{2a}=\frac{y^2}{2b}$$

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-\frac{2}{r}$ oder, wenn die Bildweite in demselben Sinne wie a positiv genommen wird:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a_1}=-\frac{2}{r}.$$



Zieht man es vor, die reflektierte Welle so zu zeichnen, wie sie wirklich vor dem Spiegel liegt, nachdem die einfallende Welle einen Teil des Spiegels überstrichen hat, so mufs im letzteren Falle die Konstruktion etwa wie in nebenstehender Figur ausfallen. Die Kugelflächen berühren einander nicht in O, und deshalb ist der Beweis ein wenig abzuändern. Zunächst ist

$x_2+x_0=x_1-x_0$ oder

$x_2=x_1-2x_0$ und hierin, wie bisher: $x_0=\frac{y^2}{2r}$. Bezeichnet man $OB=c$, so ist

$$a^2=y^2+(a-c+x_1)^2;$$

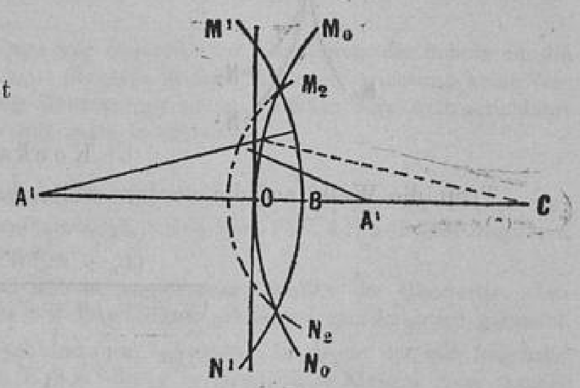
also bei erster Annäherung

$$a^2=y^2+a^2+2a\,(x_1-c)$$

$$x_1-c=-\frac{y^2}{2a} \text{ oder } x_1=c-\frac{y^2}{2a}.$$

$$x_2=c-\frac{y^2}{2a}-\frac{2y^2}{2r}$$

$$c-x_2=\frac{y^2}{2a}+\frac{2y^2}{2r}$$



Fafst man nun P_2 auf als Punkt eines Kreises vom Radius b, so bestimmt sich b aus:

$$b^2=y^2+(b-c+x_2)^2$$

$c-x_2=\frac{y^2}{2b}$. Dies liefert

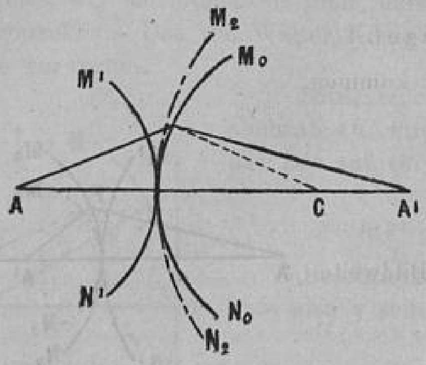
$$\frac{y^2}{2b}=\frac{y^2}{2a}+\frac{2y^1}{2r} \text{ oder } \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-\frac{2}{r}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a_1}=-\frac{2}{r}.$$

II. Brechung.

Die Radien der Elementarwellen der ins Innere des zweiten Mediums eindringenden Welle müssen dem Brechungsverhältnis entsprechend verändert werden.

a) Konvexlinsen.



Trifft die Welle auf die vordere Seite der Linse so ist

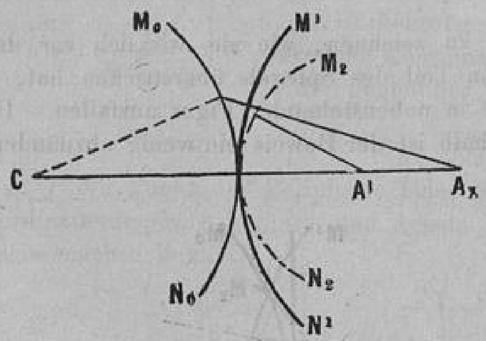
$$(x_0 - x_2)\, n = x_0 + x_1.$$

Trifft sie auf die hintere Seite der bikonvexen Linse:

$$(x'_0 + x_2)\, n = x'_2 + x'_0 \quad (x'_1 = x_2).$$

Daher:

$$(x_0 + x'_0)\, n = x_0 + x'_0 + x_1 + x'_2$$
$$(x_0 + x'_0)\,(n - 1) = x_1 + x'_2$$
$$(n - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}.$$



Ist die Linse plankonvex, so ist x'_0 also $\frac{1}{r_2} = 0$.

Ist die Linse konkav-konvex:

$$(-x'_0 + x_2)\, n = x'_2 - x'_0. \quad \text{Dazu}$$
$$\frac{(x_0 - x_2)\, n = x_0 + x_1}{(x_0 - x'_0)\,(n - 1) = x_1 + x'_2} \quad \text{oder:}$$
$$(n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}.$$

b) Konkavlinsen.

Trifft die Welle auf die vordere Seite der Bikonkavlinse, so ist:

$$(x_0 - x_2)\, n = x_0 - x_1. \quad \text{Wegen der hinteren Seite:}$$
$$\frac{(x'_0 + x_2)\, n = x'_2 + x'_0}{(x_0 + x'_0)\, n = x_0 + x'_0 + x'_2 - x_1} \quad \text{d. h.}$$
$$-(n - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{oder, wenn auch die Richtung}$$

angedeutet wird:

$$-(n - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}.$$

Ist die Linse plankonkav, so wird x'_0 also auch $\frac{1}{r_2} = 0$.

Ist die Linse konvex-konkav, so erhält man:

$$(x_0 - x_2)\, n = x_0 + x_1$$
$$\frac{(x'_0 - x_2)\, n = x'_2 + x'_0}{(x'_0 - x_0)\,(n - 1) = x'_2 - x_1} \quad \text{d. h.}$$
$$-(n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}.$$

Prof. Dr. Ott.