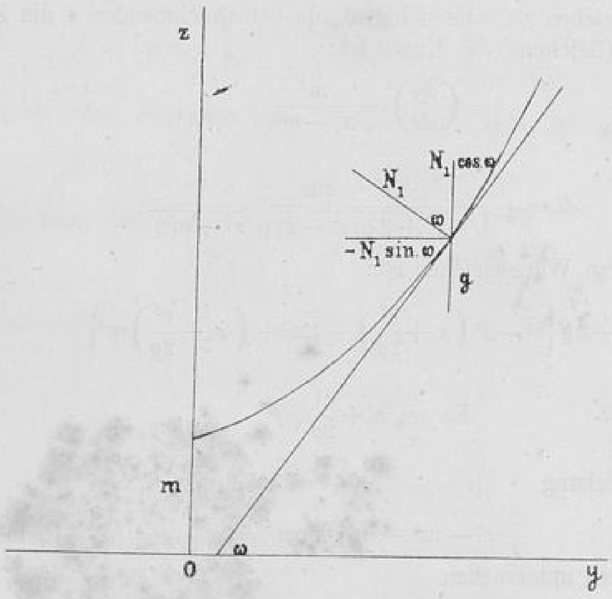
Bewegung eines Punktes auf einer gemeinen Kettenlinie.

Auf einer in einer Vertikalebene liegenden gemeinen Kettenlinie, deren Gleichung

$$y = m.\,l\left(\frac{z}{m} \pm \sqrt{\frac{z^2}{m^2} - 1}\right)$$

ist, so dass also z die vertikale und y die horizontale Axe rechtwinkliger Coordinaten ist, und m die Entfernung des Coordinatenanfangs vom tiefsten Puncte der Kettenlinie, rollt ein materieller Punct in Folge der alleinigen Wirkung der Schwere g herab. Er beginnt seine Bewegung zur Zeit Null an einer Stelle, deren $z = z_0$ ist, mit der Anfangsgeschwindigkeit c. Es soll seine Bahngeschwindigkeit v bestimmt werden, und die Zeit t welche er gebraucht, um bis z herabzurollen.



Die z Axe ist vertikal im entgegengesetzten Sinne der Schwere. Sei N_1 der von der Kurve geleistete Widerstand und ω der Winkel zwischen der Tangente an der Kurve und der positiven y Axe, so haben wir die Bewegungsgleichungen

1. $$\frac{d^2y}{dt^2} = -N_1 \sin\omega = -N_1\frac{dz}{ds}$$

2. $$\frac{d_2 z}{dt_2} = N_1 \cos\omega - g = N_1\frac{dy}{ds} - g$$

worin ds ein Bogenelement ist.

Hieraus ist:

3. $$v^2 = \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -2gz + \text{Const.}$$

Und wenn die Anfangsgeschwindigkeit c und die Anfangsordinate z_0 heissen,

4. $$v^2 - c^2 = 2g(z_0 - z)$$

Der Punct erlangt also, wie bekannt, unabhängig von der Gestalt der Kurve, dieselbe Geschwindigkeit, als wenn er von der ursprünglichen Höhe frei herabgefallen wäre. Für $c = o$ ist

4[1]. $$v^2 = 2g(z_0 - z)$$

Aus 3. ergiebt sich:

$$v = -\frac{ds}{dt} = \frac{-\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\,dz}{dt}$$

Also

5. $$t = \mp\int\sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}{c^2+2g(z_0-z)}}\,dz + \text{Const.}$$

worin wir das negative Vorzeichen zu wählen haben, da bei abnehmenden z die Zeit wächst.

Aus der gegebenen Gleichung der Kurve ist:

6. $$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \frac{m^2}{z^2 - m^2}$$

Also aus 5. und 6.

7. $$dt = -\frac{z\,dz}{\sqrt{\{c^2 + 2g(z_0 - z)\}(z^2 - m^2)}}$$

Die Grösse unter dem Wurzelzeichen ist:

$$-2g\left\{z^3 - z^2\left(z_0 + \frac{c^2}{2g}\right) - zm^2 + \left(z_0 + \frac{c^2}{2g}\right)m^2\right\}$$

Es sei $z_0 + \frac{c^2}{2g} = p$

so ist also zunächst die Gleichung

8. $$z^3 - pz^2 - m^2 z + pm^2 = 0$$

in Bezug auf ihre Wurzeln zu untersuchen.

Es sei $z=\eta+\frac{p}{3}$

so wird aus 8.

9. $$\eta^3-q\eta+r=0 \text{ wo}$$

10. $$q=\frac{p^2}{3}+m^2 \text{ und}$$

11. $$r=\frac{2}{3}pm^2-\frac{2}{27}p^3 \text{ ist}$$

Gleichung 9. hat aber folgende 3 Wurzeln, wenn

$$\mu=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2};\ \nu=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \text{ und}$$

12. $$R=\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27} \text{ gesetzt wird:}$$

$$\eta_1=\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{R}}+\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{R}}$$

$$\eta_2=\mu\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{R}}+\nu\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{R}}$$

$$\eta_3=\nu\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{R}}+\mu\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{R}}$$

Von diesen Wurzeln sind entweder zwei complex und eine reel oder alle drei reel, je nachdem

$$R \gtrless 0 \text{ oder } =0 \text{ ist.}$$

Diese Bedingung kommt darauf hinaus, ob

$$2\,p^2\,m^2-p^4-m^4 \gtrless \text{ oder}=0 \text{ ist}$$

Nennen wir die linke Seite dieser Ungleichheit L, so ist

$$\frac{dL}{dp}=4\,pm^2-4\,p^3$$

und

$$\frac{dL}{dm}=4\,p^2\,m-4\,m^3$$

Wenn L ein maximum oder ein minimum sein soll, so muss

$$\frac{dL}{dp}=0 \text{ und } \frac{dL}{dm}=0 \text{ sein, d. h. } m^2=p^2 \text{ sein.}$$

$$\text{Es wird } \frac{d^2L}{dp^2} = -2p$$

Folglich ist L ein maximum für $m^2 = p^2$ d. h. für $R = 0$; also ist L sonst immer negativ. Die 3 Wurzeln sind also stets reel und ungleich, nur für den Fall, dass $m^2 = p^2$ ist, sind 2 Wurzeln gleich.

Um den 3 Wurzeln reelle Form zu geben, setzt man bekanntlich:

13. $$\eta_1 = \varrho \sin\frac{\varphi}{3};\ \eta_2 = \varrho \sin\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right);\ \eta_3 = -\varrho \sin\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)$$

14. $$\text{wo } \varrho = 2\sqrt{\frac{q}{3}} \text{ und } \sin\varphi = \frac{4r}{\varrho^3} \text{ und } \varphi < 90^0 \text{ ist}$$

Folglich sind die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung 8:

$$z_1 = \eta_1 + \frac{p}{3} = \varrho \sin\frac{\varphi}{3} + \frac{p}{3}$$

15. $$z_2 = \eta_2 + \frac{p}{3} = \varrho \sin\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right) + \frac{p}{3}$$

$$z_3 = \eta_3 + \frac{p}{3} = -\varrho \sin\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right) + \frac{p}{3}$$

Nun muss p immer positiv sein, da z_0 und g und c^2 positive Grössen sind. Mithin ist z_1 positiv, da φ im ersten Quadranten liegt; ebenso z_2 positiv und grösser als z_1. Es würde z_3 positiv werden, wenn

$$\frac{p}{3} > \varrho \sin\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)$$

wäre.

Der kleinste Werth, den die rechte Seite dieser Ungleichung haben kann, ist der für $\varphi = 0$; dann wäre also

$$\frac{p}{3} > \varrho \sin 60^0$$

oder

$$\frac{p}{3} > \sqrt{q}$$

$$\text{oder } p^2 > 3p^2 + 9m^2$$

was nicht möglich ist.

Mithin ist z_3 negativ.

Dass 2 Wurzeln positiv und eine negativ sein musste, ergiebt sich auch schon aus den Zeichenwechseln der Gleichung 8.

Wenn $m^2 = p^2$ ist, so wird aus Gleichung 8 folgende sogenannte reciproke Gleichung:

$$z^3 - pz^2 - p^2z + p^3 = 0$$

deren Wurzeln alle drei $= p$ sind oder $= m$, und wovon zwei gleiches Vorzeichen, die dritte das entgegengesetzte hat.

Das Integral:

$$t = \int \frac{z\,dz}{\sqrt{2g\,(m-z)\,(z-m)\,(z+m)}} + \text{Const}$$

kann nur unter reeller Form erscheinen, wenn $z = m$ ist, d. h. wenn das Bewegliche sich im tiefsten Puncte der Kurve befindet. Hier wird es in Ruhe sein zur Zeit $t = 0$, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $c = 0$ ist. Sonst wird die Geschwindigkeit:

$$v^2 = c^2 + 2g\,(m - z)$$

also $v^2 = 0$ werden, wenn

$$\frac{c^2}{2g} + m = z \quad \text{ist.}$$

Wenn aber das Bewegliche ohne Anfangsgeschwindigkeit von einer Stelle herabrollte, deren Ordinate z_0 ist bis zur Ordinate $z = m$, so erlangte es nach Gleichung 4^1 die Geschwindigkeit

$$\frac{v^2}{2g} + m = z_0$$

Wenn also das Bewegliche vom tiefsten Puncte der Kurve mit derselben Anfangsgeschwindigkeit ausgeht, die es erlangt haben würde, wenn es ohne solche von z_0 bis $z = m$ herabgerollt wäre, so würde es vermöge dieser Anfangsgeschwindigkeit wieder emporsteigen bis zur Höhe $z = z_0$ wie bekannt.

Für die Zeit, welche der materielle Punct gebraucht, haben wir nun

16. $$dt = -\frac{z\,dz}{\sqrt{-2g\,(z-z_2)\,(z-z_1)\,(z+z_3)}}$$

worin z_2 z_1 und $-z_3$ die Wurzeln der Gleichung 8; $z_2\,z_1\,z_3$ positive Grössen und $z_2 > z_1 > -z_3$ sind.
Statt 16. schreiben wir

17. $$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{z\,dz}{\sqrt{(z_2-z)\,(z-z_1)\,(z+z_3)}}$$

Damit der Radicand nicht imaginär werde, muss $z < z_2$ aber $> z_1$ sein.

Um das Integral der Gleichung 14 durch Thetafunctionen auszudrücken, setzen wir nach dem Vorgange von Schellbach, Lehre von den elliptischen Integralen, vierter Abschnitt Seite 382

18. $$z_2 - z = a.\,fx^2;\quad z - z_1 = bgx^2;\quad z + z_3 = dhx^2,$$

wo also nach der Bezeichnung von Schellbach

$$fx = \frac{\Theta_1 x}{\Theta x}$$

$$gx = \frac{\Theta_2 x}{\Theta x}$$

$$hx = \frac{\Theta_3 x}{\Theta x} \;{}^{1)} \qquad \text{ist.}$$

---

[1]) Schellbach § 23.

Die Constanten a b und d bestimmen sich, indem man aus 18 erst die beiden ersten, dann die erste und dritte Gleichung addirt.

$$\frac{z_2 - z_1}{b} = \frac{a}{b} fx^2 + gx^2$$

$$\frac{z_2 + z_3}{d} = \frac{a}{d} fx^2 + hx^2.$$

Dann ist

$$g0^2 = h0^2 \, fx^2 + gx^2 \qquad [1]$$

$$h0^2 = g0^2 \, fx^2 + hx^2.$$

So dass man also setzen kann:

19. $$\frac{z_2 - z_1}{b} = g0^2; \ \frac{a}{b} = h0^2.$$

20. $$\frac{z_2 + z_3}{d} = h0^2; \ \frac{a}{d} = g0^2.$$

Und mit Hülfe der Formel

$$h0^4 = 1 + g0^4$$

wird

$$z_1 + z_3 = \frac{bd}{a}; \ z_2 + z_3 = \frac{ad}{b}; \ z_2 - z_1 = \frac{ab}{d}.$$

Also:

21. $$\begin{aligned} d &= \sqrt{(z_1 + z_3)(z_2 + z_3)} \\ b &= \sqrt{(z_1 + z_3)(z_2 - z_1)} \\ a &= \sqrt{(z_2 + z_3)(z_2 - z_1)} \end{aligned}$$

Substituirt man 18 in den Radicanden von 17 so wird:

$$\sqrt{(z_2 - z)(z - z_1)(z + z_3)} = \sqrt{(z_1 + z_3)(z_2 + z_3)(z_2 - z_1)} \, fx \, gx \, hx$$

und wenn man die erste Gleichung 18 differenzirt, so wird:

$$\begin{aligned} -\,dz &= 2a \, fx \, f'x \, dx \\ &= 2a \, \Theta 0^2 \, fx \, gx \, hx \, dx \qquad [2] \end{aligned}$$

Also:

22. $$dt = \frac{z}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{2 \, \Theta 0^2}{\sqrt{(z_1 + z_3)}} \, dx.$$

Hierin setzen wir für z seinen Werth aus 18, nämlich $z = z_2 - a fx^2$ und erhalten:

23. $$dt = \frac{2 z_2 \, \Theta 0^2}{\sqrt{2 g (z_1 + z_3)}} \, dx - \frac{2 a \, \Theta 0^2}{\sqrt{2 g (z_1 + z_3)}} \, fx^2 \, dx.$$

Aus 20 und 21 wird

$$h0^2 = \frac{z_2 + z_3}{d} = \frac{\sqrt{z_2 + z_3}}{\sqrt{z_1 + z_3}} = \frac{\Theta_3 0^2}{\Theta 0^2}.$$

---

[1] cf. Sch. § 26.
[2] cf. Sch. § 32.

23_1 also
$$\frac{\Theta 0^2}{\sqrt{z_1+z_3}} = \frac{\Theta_3 0^2}{\sqrt{z_2+z_3}}$$
Mithin:
$$dt = \frac{2z_2\, \Theta 0^2}{\sqrt{2g}\,(z_1+z_3)}\, dx - \frac{2a\, \Theta_3 0^2}{\sqrt{2g}\,(z_2+z_3)}\, fx^2\, dx$$
und
$$\Theta_3 0^2\, fx^2 = \frac{l''\Theta 0 - l''\Theta x}{\Theta_2 0^2} \quad {}^{1)}$$
folglich
$$dt = \left\{ \frac{2z_2\, \Theta 0^2}{\sqrt{2g}\,(z_1+z_3)} - \frac{2a\, l''\, \Theta 0}{\Theta_2 0^2 \sqrt{2g}\,(z_2+z_3)} + \frac{2a\, l''\, \Theta x}{\Theta_2 0^2 \sqrt{2g}\,(z_2+z_3)} \right\} dx$$
$$= \left\{ \frac{2z_2\, \Theta 0^2}{\sqrt{2g}\,(z_1+z_3)} - \frac{2\sqrt{z_2-z_1}}{\sqrt{2g}\;\Theta_2 0^2}\, l''\Theta 0 \right\} dx + \frac{2\sqrt{z_2-z_1}}{\sqrt{2g}\;\Theta_2 0^2}\, l''\Theta x\, dx.$$
Nun ist
$$\Theta_2 0^2 = \Theta 0^2 g 0^2 = \frac{\Theta 0^2 \sqrt{z_2-z_1}}{\sqrt{z_1+z_3}}.$$
23_2 also
$$\frac{\Theta 0^2}{\sqrt{z_1+z_3}} = \frac{\Theta_2 0^2}{\sqrt{z_2-z_1}}.$$
Also:

24.
$$t = \frac{2}{\sqrt{2g}} \left(\frac{z_2}{A} - A\, l''\Theta 0 \right) x + \frac{2}{\sqrt{2g}}\, A\, l'\,\Theta x$$
worin

25.
$$A = \frac{\sqrt{z_2-z_1}}{\Theta_2 0^2}$$
ist und die Zeit von dem Augenblicke an gezählt wird, in dem $z_0 = z_2$ ist; denn dann ist nach 18 $fx = 0$ also auch $x = 0$ und auch $l'\Theta x = 0$.
Zur Abkürzung setzen wir noch:

26.
$$M = \frac{2}{\sqrt{2g}} \left(\frac{z_2}{A} - A\, l''\Theta 0. \right)$$

27.
$$N = \frac{2}{\sqrt{2g}}\, A$$
so wird

28.
$$t = Mx + N\, l'\Theta x.$$
Es ist
$$l'\Theta x = \frac{d\Theta x}{\Theta x}$$
also
$$t = Mx + N\, \frac{4q \sin 2x - 8q^4 \sin 4x + 12q^9 \sin 6x - \dots}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \dots}.$$

Hierin ist die bekannte Grösse $q = e^{-\pi \frac{F^1}{F}}$ wo F^1 die von Legendre sogenannte fonction complète ist und F der Werth von F^1 ist, welcher dem complementären Modul k^1 zugehört.

---
1) cf. Sch. Seite 117.

Nach Schellbach S. 60 kann man aber q leicht auf folgende Weise berechnen:

29.
$$q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + \cdot\cdot$$
$$\lambda = \tfrac{1}{2}\, tg\, \tfrac{1}{2}\beta^2$$
$$\cos\beta = \sqrt{k^1}$$
$$k^1 = \sqrt{1-k^2} = \frac{1}{\mathrm{h}0^2}$$
$$k = \frac{g0^2}{h0^2}.$$

Es erreicht z seinen kleinsten Werth z_1 wenn $z = m$ ist, also nach der zweiten Gleichung 18 wenn $gx = 0$ d. h. wenn $\frac{\Theta_1 x}{\Theta x} = 0$ also $\Theta_2 x = 0$ ist.
Es ist
$$\Theta_2 x = 2q^{\frac{1}{4}} \cos x + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3x + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5x + \ldots$$

Dieser Ausdruck ist gleich 0 wenn $x = \frac{\pi}{2}$ ist; also erreicht z seinen kleinsten Werth zur Zeit.

30.
$$T = M\frac{\pi}{2}$$

weil $l^1\Theta\frac{\pi}{2} = 0$ ist.

Aus der ersten Gleichung 18. ist $z_2 - z = afx^2$. Es wird also z den Werth z_2 immer erlangen, so oft fx^2 denselben Werth erhält. Dies geschieht, so oft x um π wächst, weil $f(x + G\pi) = (-1)^{G} fx$ ist nach Schellbach § 23, wenn G eine ganze Zahl ist. Der materielle Punct erreicht also zum zweiten Male auf der entgegengesetzten Seite die Höhe $z = z_0$ zur Zeit $t = M\pi + Nl^1\Theta\pi = M\pi = 2T$. Ist er also ohne Anfangsgeschwindigkeit gefallen, so wird er zur Zeit $2T$ zurückfallen und wieder die tiefste Stelle erreichen zur Zeit $3T$ etc.

Dass die in Gleichung 18 vorgenommenen Substitutionen im Wesentlichen dieselben sind und dasselbe Resultat liefern, als wenn man zur Herstellung der kanonischen Form eine Substitution etwa zweiter Ordnung anwendet, wie man sie in Durège, Theorie der elliptischen Functionen, Leipzig 1861, findet, ergibt sich auf folgende Weise.

Unsre Gleichung 16 lautete:
$$dt = -\frac{zdz}{\sqrt{2g}\,\sqrt{-(z-z_2)(z-z_1)(z+z_3)}}.$$

Man kann bekanntlich die Gleichung unter dem Wurzelzeichen als vom $4^{\underline{\text{ten}}}$ Grade betrachten, deren eine Wurzel unendlich ist. Die Wurzeln sind also der Grösse nach geordnet: $+z_2 + z_1 - z_3\ \infty$

Also haben wir zu setzen: [1])

31.
$$k^2 = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_3};\ \zeta^2 = \sin^2\psi = -\frac{z - z_2}{z_2 - z_1}.$$

also

32.
$$z = (z_1 - z_2)\sin^2\psi + z_2$$

[1]) Durège § 23.

$$\frac{dz^2}{-(z-z_2)\,(z-z_1)\,(z+z_3)}=\frac{4d\zeta^2}{(z_2+z_3)\,(1-\zeta^2)\,(1-k^2\zeta^2)}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{-(z-z_2)\,(z-z_1)\,(z+z_3)}}=-\frac{2d\zeta}{\sqrt{z_2+z_3}\,\sqrt{(1-\zeta^2)\,(1-k^2\zeta^2)}}.$$

Für $\psi=0$ wird $z=z_2$ aus 31.

Also

$$t=\frac{2}{\sqrt{2g}\,\sqrt{z_2+z_3}}\int_0^{\psi}\frac{d\psi.\,\{(z_1-z_2)\sin^2\psi+z_2\}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

oder

33. $$t=P\int_0^{\psi}\frac{\sin^2\psi\,d\psi}{\Delta\psi}+Q\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}$$

worin:

34. $$P=\frac{2\,(z_1-z_2)}{\sqrt{2g\,(z_2+z_3)}};\;Q=\frac{2z_2}{\sqrt{2g\,(z_2+z_3)}}$$

$$\Delta\psi=\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}$$

Es ist

$$\sin^2\psi=\frac{1-\Delta^2\psi}{k^2}$$ [1])

also:

$$t=\frac{P}{k^2}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}-\frac{P}{k^2}\int_0^{\psi}\Delta\psi\,d\psi+Q\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}$$

$$t=S\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}-U\int_0^{\psi}\Delta\psi\,d\psi$$

worin

35. $$S=\frac{P}{k^2}+Q \text{ und } U=\frac{P}{k^2}.$$

Also $t=SF(\psi)-UE_1(\psi)$ nach der Bezeichnung von Legendre.

Setzt man

$$\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}=u$$

so ist

$$\psi=am\;u$$

$$d\psi=\Delta am.udu$$ [2])

$$\int_0^{\psi}\Delta\psi\,d\psi=\int_0^{u}\Delta^2 amudu=E(u)$$

nach der Bezeichnung von Jacobi.

Nun ist $F(\psi)=\Theta_1 0^2 x$ [3]) wo zwischen ψ und x die Relationen stattfinden:

36. $$\sin\psi=\frac{fx}{\sqrt{k}};\;\cos\psi=\frac{k^1}{k}gx;\;\Delta\psi=\frac{hx}{\sqrt{k^1}}.$$

---

[1]) Durège § 3.
[2]) Durège § 4.
[3]) Schellbach § 46.

Aus Gleichung 18 ist $z_2 - z = afx^2$

aus 32 $z_2 - z = (z_2 - z_1) \sin^2\psi$

Substituirt man in letztere für sin ψ seinen Werth aus 36 und für k seinen Werth aus 31 so wird:

$$z_2 - z = \sqrt{(z_2 + z_3)(z_2 - z_1)}\, fx^2 = afx^2$$

womit die Identität beider Substitutionen bewiesen ist.

Es ist ferner

$$E_1(\psi) = \Theta 0^2 \int_0^x hx^2\, dx \quad [1])$$

Wenn man aber die Gleichung

$$\Theta 0^2\ \Theta_3 0^2\, hx^2 = l''\Theta x - l''\Theta_2 0 \quad [2])$$

mit dx multiplicirt und von $x = 0$ bis $x = x$ integrirt, so wird

$$\Theta_3 0^2\, E_1(\psi) = l'\Theta x - x l''\Theta_2 0.$$

Also wird

$$t = x\left(\Theta_3 0^2 .\ S + \frac{U\, l''\Theta_2 0}{\Theta_3 0^2}\right) - \frac{U l'\Theta x}{\Theta_3 0^2}.$$

Es ist

$$l''\Theta_2 0 = l''\Theta 0 - \Theta_3 0^4 \quad [3])$$

also

$$t = x\left(\Theta_3 0^2\ (S - U) + \frac{U}{\Theta_3 0^2}\, l''\Theta 0\right) - \frac{U}{\Theta_3 0^2}\, l'\Theta x.$$

Substituirt man nun für

$$S - U = Q \text{ nach } 35$$

$$Q = \frac{2\, z_2}{\sqrt{2g\,(z_2 + z_3)}} \text{ nach } 34$$

$$U = \frac{P}{k^2} \text{ nach } 35$$

$$P = \frac{2\,(z_1 - z_2)}{\sqrt{2g\,(z_2 + z_3)}} \text{ nach } 34$$

$$k^2 = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_3} \text{ nach } 31$$

$$\Theta_3 0^2 = \frac{\Theta 0^2 \sqrt{z_2 + z_3}}{\sqrt{z_1 + z_3}} \text{ nach } 23_1$$

$$\Theta 0^2 = \frac{\Theta_2 0^2 \sqrt{z_1 + z_3}}{\sqrt{z_2 - z_1}} \text{ nach } 23_2$$

---

[1]) Sch. § 51 Nr. 16.
[2]) Sch. § 77 Nr. 16.
[3]) Sch. § 77 Nr. 13.

$$\left.\begin{aligned} \text{so wird } \frac{U}{\Theta_3 0^2} &= -\frac{2\sqrt{z_2 - z_1}}{\sqrt{2g}\ \Theta_2 0^2} = -N \\ \Theta_3 0^2\, Q &= \frac{2z_2}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\Theta_2 0^2}{\sqrt{z_2 - z_1}} = \frac{2z_2}{\sqrt{2g}\ A} \end{aligned}\right\} \text{nach 25 und 27.}$$

Also wie oben $t = Mx + Nl' \Theta x$.

Um nun noch zum Schluss eine Vergleichung anzustellen zwischen der Bewegung eines materiellen Punctes auf der gemeinen Kettenlinie und der eines materiellen Punctes auf einer Kreislinie, namentlich an einem numerischen Beispiele, sollen die Formeln für die Bewegung des letzteren aufgestellt werden, erstens wie sie sich finden im Durège § 23, also durch eine Substitution zweiter Ordnung, und dann soll dasselbe Integral durch Θ Functionen ausgedrückt werden nach der Methode von Schellbach.

Wir finden

$$t = -\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2g}} \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(z-a)(z+1)}} \qquad ^{1})$$

bei der Anfangsgeschwindigkeit Null.

Hierin ist $z = \cos\psi$ und $a = \cos\alpha$ und ψ die zur Zeit t stattfindende und α die grösste Ablenkung des Pendels von der Vertikallinie.

Setzt man:

$$k^2 = \frac{1-a}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\frac{1}{2}\alpha \text{ also } k = \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$z^2 = \sin^2\varphi = -\frac{x-1}{1-a} = \frac{1-\cos\psi}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}\psi}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha}$$

so wird

38. $$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

durch θ Functionen ausgedrückt [2])

39. $$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \theta_3 0^2 x.$$

Wenn das Pendel seinen tiefsten Punct erreicht, ist

40. $$t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \theta_3 0^2 \frac{\pi}{2}.$$

Nimmt man dagegen eine ähnliche Substitution vor wie in den Gleichungen 18, so hat man also zu setzen

41. $$1 - z = \delta f x^2;\quad z - a = \varepsilon g x^2;\quad z + 1 = \lambda h x^2.$$

---

[1]) cf. Durège § 23.
[2]) Sch. § 35.

Durch Addition

$$\frac{1-a}{\varepsilon} = \frac{\delta}{\varepsilon} fx^2 + gx^2$$

$$\frac{2}{\lambda} = \frac{\delta}{\lambda} fx^2 + hx^2$$

und da

$$g0^2 = h0^2\, fx^2 + gx^2$$

$$h0^2 = g0^2\, fx^2 + hx^2$$

so kann man setzen

$$\frac{1-a}{\varepsilon} = go^2;\ \frac{\delta}{\varepsilon} = \mathrm{ho}^2$$

42.

$$\frac{2}{\lambda} = h0^2;\ \frac{\delta}{\lambda} = g0^2$$

und mit Hülfe von $h0^4 = 1 + g0^4$ wird

$$a + 1 = \frac{\varepsilon\lambda}{\delta};\ 2 = \frac{\delta\lambda}{\varepsilon};\ 1 - a = \frac{\varepsilon\delta}{\lambda}$$

woraus:

43. $$\delta = \sqrt{2\,(1-a)};\ \varepsilon = \sqrt{(a+1)\,(1-a)};\ \lambda = \sqrt{2\,(a+1)}.$$

Also

$$\sqrt{(1-z)\,(z-a)\,(z+1)} = \sqrt{2\,(1-a^2)}\, fx\, gx\, hx\, dx$$

$$-\,dz = 2\delta\, fx\, f'x\, dx = 2\delta\ \theta 0^2 fx\ gx\ hx\ dx.$$

Also

$$t = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{2\theta 0^2}{\sqrt{a+1}}\ dx = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}\ \theta_3 0^2\, dx.$$

Also derselbe Ausdruck wie in 39.

Zur Vergleichung der verschiedenen Ordinaten z hat man nur in die Gleichungen 41 und 28 dieselben Werthe jedesmal von t einzusetzen.

Es ist aus 28:

$$x = \frac{t}{M} - \frac{4\,N q}{M} \frac{\sin 2x - 2q^4 \sin 4x + \ldots}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - \ldots}$$

Durch ein Näherungsverfahren berechnet man hieraus x und setzt es in 18 ein, um z zu erhalten.

Einfacher erhält man aus 39

$$x = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{t}{\theta_3 0^2}$$

und setzt dies in 41 ein, um z für das Kreispendel zu erhalten.

Numerische Beispiele.

Es soll angenommen werden:

$$c = 0;\ g = 9{,}80896^m$$

$$z_0 = 1^m \text{ also } p = 1^m;\ m = \tfrac{1}{2}^m$$

so ist

$$q = \frac{7}{12} \text{ und } r = \frac{5}{54}.$$

Nach 14 ist

$$\varrho = 2\sqrt{\frac{7}{36}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\sin\varphi = \frac{10}{\sqrt{343}}$$

$$\log 10 = 1$$
$$\log \sqrt{343} = 1{,}2676470$$
$$\log \sin\varphi = 9{,}7323530$$
$$\varphi = 32^0\,40'\,48'',7$$
$$\frac{\varphi}{3} = 10^0\,53'\,36'',2$$
$$60^0 - \frac{\varphi}{3} = 49^0\ \ 6'\,23'',8$$
$$60^0 + \frac{\varphi}{3} = 70^0\,53'\,36'',2$$

$$\log \sqrt{7} = 0{,}4225490$$
$$\log 3 = 0{,}4771213$$
$$\log \varrho = 9{,}9454277 - 10$$
$$\log \sin\frac{\varphi}{3} = 9{,}2764207 - 10$$
$$\log \eta_1 = 9{,}2218484 - 10$$
$$\eta_1 = 0{,}1666666\ldots = \frac{1}{6}$$

$$\log \sin 60^0 - \frac{\varphi}{3} = 9{,}8784810 - 10$$
$$\log \eta_2 = 9{,}8239087 - 10$$
$$\eta_2 = 0{,}666666\ldots = \frac{2}{3}$$

$$\log \sin 60^0 + \frac{\varphi}{3} = 9{,}9753910 - 10$$
$$9{,}9208187 - 10$$
$$\eta_3 = -0{,}83333\ldots = -\frac{5}{6}.$$

$$z_1 = \eta_1 + \frac{p}{3} = \frac{1}{2}$$

44. $$z_2 = \eta_2 + \frac{p}{3} = 1$$

$$z_3 = \eta_3 + \frac{p}{3} = -\frac{1}{2}$$

Jetzt soll berechnet werden, zu welcher Zeit der materielle Punct den tiefsten Punct der Kettenlinie erreicht, also die Formel:

$$T = M\frac{\pi}{2}$$

M ist nach Formel 26 zu berechnen und das darin enthaltene A nach 25.

Aus 29 ist $k = \frac{gO^2}{hO^2} = \frac{b}{d}$ aus 19 und 20; $\frac{b}{d} = \frac{\sqrt{z_2 - z_1}}{\sqrt{z_2 + z_2}}$ aus 21 und dies $= \sqrt{\frac{1}{3}}$ aus 44.

$$k^1 = \sqrt{0{,}666\ldots} \text{ weil } k^1 = \sqrt{1 - k^2}$$

$$\log \sqrt{k^1} = 9{,}9559771 - 10$$

$$\log \cos \beta = \log \sqrt{k^1} \text{ aus } 29.$$

$$\beta = 25^0\,21'\,51'',8$$

$$\frac{\beta}{2} = 12^0\,40'\,55'',9$$

$$\log tg\,\frac{\beta}{2} \doteq 9{,}3522477 - 10$$

$$2 \log tg\,\frac{\beta}{2} = 8{,}7044954 - 10$$

$$\begin{array}{rl}
\log 2 = & 0{,}3010300 \\ \hline
\log \lambda = & 8{,}4034654 - 10 \quad \text{num} = 0{,}0253201 \\
\log \lambda^5 = & 2{,}0173270 - 10 \\
\log 2 = & 0{,}3010300 \\ \hline
& 2{,}3183570 - 10 \quad \text{num} = 0{,}0000000\,2 \\
& \qquad\qquad\qquad\quad q = 0{,}0253201 \\
\log q^4 = & 3{,}6138626 - 10 \\
\log 32 = & 1{,}5051500 \qquad\quad 8q = 0{,}2025608 \\ \hline
& 5{,}1190126 - 10 \quad \text{num} = 0{,}0000131 \\
& \qquad\qquad\qquad \theta''0 = 0{,}2025477.
\end{array}$$

Denn es ist:

$$\theta x = 1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \ldots$$

$$\theta' x = 4q \sin 2x - 8q^4 \sin 4x + 12q^9 \sin 6x - \ldots$$

$$\theta'' x = 8q \cos 2x - 32q^4 \cos 4x + 72q^9 \cos 6x - \ldots$$

$$\theta''0 = 8q - 32q^4 + 72q^9 - \ldots$$

und

$$l''\theta 0 = \frac{\theta''0}{\theta 0}$$

$$\theta 0 = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots.$$

$$\begin{array}{rl}
\log 2q^4 = & 3{,}9148926 - 10 \\
\text{num} = & 0{,}00000082 \\
1 - 2q = & 0{,}9493598 \\ \hline
\theta 0 = & 0{,}9493606 \\
\log \theta''0 = & 9{,}3065279 - 10 \\
\log \Theta 0 = & 9{,}9774312 - 10 \\ \hline
\log l''\Theta 0 = & 9{,}3290967 - 10
\end{array}$$

$$A = \frac{\sqrt{z_2 - z_1}}{\Theta_2 0^2}; \; z_2 - z_1 = 0{,}5$$

$$\Theta_2 0 = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \ldots$$

$$\log q = 8{,}4034654 - 10$$
$$\log q^{\frac{1}{4}} = 9{,}6008663 - 10$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$9{,}9018963 - 10$$
$$\text{num} =$$

$$\log q^{\frac{9}{4}} = 6{,}4077971 - 10$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$6{,}7088271 - 10$$
$$\text{num} = 0{,}00051147$$
$$0{,}797799$$
$$\Theta_2 0 = 0{,}79831047$$
$$\log \Theta_2 0 = 9{,}9021718 - 10$$
$$\log \Theta_2 0^2 = 9{,}8043436 - 10$$
$$\log \sqrt{\frac{1}{2}} = 9{,}8494850 - 10$$
$$\log A = 0{,}0451414$$

$$A = 1{,}109536$$

Nun ist M nach 26 zu berechnen.

$$\log \frac{z_2}{A} = 9{,}9548586 \quad \text{da } z_2 = 1 \text{ ist.}$$

$$\log A = 0{,}0451414$$
$$\log l'' \Theta 0 = 9{,}3290967 - 10$$
$$9{,}3742381 - 10$$
$$\text{num} = 0{,}2367217$$
$$\frac{z_2}{A} = 0{,}9012756$$
$$0{,}6645539$$
$$\log = 9{,}8225303 - 10$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$0{,}1235603$$
$$\log \sqrt{2g} = 0{,}6463263$$
$$\log M = 9{,}4772340 - 10$$
$$\log \pi = 0{,}4971499$$
$$9{,}9743839 - 10$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log T = 9{,}6733539 - 10$$
$$T = \mathbf{0{,}4713613} \text{ Secunden.}$$

Für das entsprechende Kreispendel ist $z^0 = l + m$ wo l Radius des Kreises oder die Pendellänge, also $= \frac{1}{2}$ und $m = \frac{1}{2}$ ist.

Es ist für den Kreis $k^2 = \frac{1-a}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ und hier $\cos\alpha = 0$ weil $\alpha = 90^0$ ist.

Dann ist nach Durège § 52, weil

$$k = \frac{1}{2} \text{ ist, } q = 0{,}0432138.$$

Ferner ist

$$\Theta_3 0 = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots$$

$$\begin{aligned} \log q &= 8{,}6356225 - 10 \\ \log q^4 &= 4{,}5424900 - 10 \\ \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \hline & 4{,}8435200 - 10 \\ \text{num} &= 0{,}00000697. \\ 2q + 1 &= 1{,}0864276 \\ \hline \Theta_3 0 &= 1{,}0864346. \end{aligned}$$

Nach Formel 33 ist aber

$$t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}\; \Theta_3 0^2 \,\frac{\pi}{2} \text{ und } l \text{ hier } = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \log \sqrt{\frac{1}{2}} &= 9{,}8494850 - 10 \\ \log \Theta_3 0^2 &= 0{,}0720076 \\ \log \pi &= 0{,}4971499 \\ \text{dec. } \log \sqrt{g} &= 9{,}5041886 - 10 \\ \text{dec. } \log 2 &= 9{,}6989700 - 10 \\ \hline \log t_1 &= 9{,}6218011 - 10 \\ \underline{t_1 = \mathbf{0{,}4186019}} & \text{ Secunden.} \end{aligned}$$

Es soll nun noch berechnet werden, wo sich das Bewegliche nach 0,1 Secunden befindet.

Für die Kettenlinie ist:

$$t = 0{,}1$$

$$x_1 = \frac{t}{M}$$

wenn wir x_1 den ersten Annäherungswerth nennen.

$$\begin{aligned} \log t &= 9{,}0000000 - 10 \\ \text{dec. } \log M &= 0{,}5227660 \\ \hline \log x_1 &= 9{,}5227660 - 10 \end{aligned}$$

Von $\frac{360.\ \ 60.\ \ 60''}{2\pi}$ ist der

$$\begin{aligned} \log &= 5{,}3144251 \\ + \log x_1 &= 9{,}5227660 \\ \hline & 4{,}8371911 \\ \text{num} &= 68737'',08 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 19^0\ 5'\ 37'',08 \\ 2x_1 &= 38^0\ 11'\ 14'',16 \\ 4x_1 &= 76^0\ 22'\ 28'',32. \end{aligned}$$

Aus Formel 28 finden wir die zweite Annäherung

$$x_2 = \frac{t}{M} - \frac{4N}{M} \cdot \frac{q \sin 2x_1 - 2q^4 \sin 4x_1 + ..}{1 - 2q \cos 2x_1 + 2q^4 \cos 4x_1 - \ldots}$$

$$\begin{aligned}
\log \sin 2x_1 &= 9{,}7911527 - 10 \\
\log q &= 8{,}4034654 - 10 \\
\hline
\log q \sin 2x_1 &= 8{,}1946181 \\
\log \sin 4x_1 &= 9{,}9876021 - 10 \\
\log 2q^4 &= 3{,}9148916 - 10 \\
\hline
\log 2q^4 \sin 4x_1 &= 3{,}9024937 \\
q \sin 2x_1 &= 0{,}01565374 \\
2q^4 \sin 4x_1 &= 0{,}0000007989 \\
\hline
& 0{,}01565294 \\
\log &= 8{,}1945959 - 10 \\
\log N &= 9{,}6998451 - 10 \\
\log 4 &= 0{,}6020600 \\
\hline
& 8{,}4965010 - 10 \\
& 9{,}4595944 - 10 \\
\hline
& 9{,}0369066 - 10 \\
&+ 5{,}3144251 \\
\hline
& 4{,}3513317
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log \cos 2x_1 &= 9{,}8954194 - 10 \\
\log 2q &= 8{,}7044954 - 10 \\
\hline
\log 2q \cos 2x_1 &= 8{,}5999148 \\
\log \cos 4x_1 &= 9{,}3721276 - 10 \\
\log 2q^4 &= 3{,}9148916 - 10 \\
\hline
\log 2q^4 \cos 4x_1 &= 3{,}2870192 \\
1 + 2q^4 \cos 4x_1 &= 1{,}00000019 \\
2q \cos 2x_1 & 0{,}03980291 \\
\hline
& 0{,}96019728 \\
\log &= 9{,}9823604 - 10 \\
\log M &= 9{,}4772340 - 10 \\
\hline
& 9{,}4595944 - 10
\end{aligned}$$

$$\text{num} = 22455'',97.$$

$$x_2 = 12^0\, 51'\, 21'',11.$$

Durch fortgesetztes Verfahren ergiebt sich

$$\begin{aligned}
x_3 &= 14^0\, 39'\, 22'',71 \\
x_4 &= 14^0\ \ 5'\, 49'',87 \\
x_5 &= 14^0\, 18'\ \ 9'',23 \\
x_6 &= 14^0\, 14'\, 12'',19 \\
x_7 &= 14^0\, 15'\, 34''\, 88 \\
x_8 &= 14^0\, 15'\, 12'',49 \\
x &= 14^0\, 15'\, 15''
\end{aligned}$$

Dieser Werth von x ist also einzusetzen in Formel 18.

$$z = z_2 - afx^2$$

$$fx = \frac{\Theta_1 x}{\Theta x} = \frac{2q^{\frac{1}{4}} \sin x - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3x + \ldots}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - \ldots}$$

$$\begin{aligned}
2x &= 28^0\, 30'\, 30'' \\
3x &= 42^0\, 45'\, 45'' \\
4x &= 57^0\ \ 1'
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl}
\log \sin x = 9{,}3913300 - 10 & \log q^{\frac{9}{4}} = 6{,}4077971 - 10 \\
\underline{\log 2q^{\frac{1}{4}} = 9{,}9018963} - 10 & \underline{\log 2 \sin 3x = 0{,}1328749} \\
\log 2q^{\frac{1}{4}} \sin x = 9{,}2932263 - 10 & \log 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3x = 6{,}5406720 - 10 \\
\log \cos 2x = 9{,}9438642 - 10 & \log \cos 4x = 9{,}7359142 - 10 \\
\underline{\log 2q = 8{,}7044954} - 10 & \underline{\log 2q^4 = 3{,}9148916} - 10 \\
\log 2q \cos 2x = 8{,}6483596 - 10 & \log 2q^4 \cos 4x = 3{,}6508058 - 10 \\
2q^{\frac{1}{4}} \sin x = 0{,}1964384 & 1 + 2q^4 \cos 4x = 1{,}00000045 \\
\underline{2q^{\frac{9}{4}} \sin 3x = 0{,}0003473} & \underline{2q \cos 2x = 0{,}04449996} \\
0{,}1960911 & 0{,}95550049
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log \text{Zähler} = 9{,}2924578 - 10 & a = \sqrt{(z_2 + z_3)(z_2 - z_1)} \\
\underline{\log \text{Nenner} = 9{,}9802309 - 10} & = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
9{,}3122269 - 10 & \\
 & \log \sqrt{3} = 0{,}2385606 \\
\log fx^2 = 8{,}6244538 - 10 & \underline{\log 2 = 0{,}3010300} \\
\underline{\log a = 9{,}9375306} - 10 & \\
8{,}5619844 - 10 & \text{num} = 0{,}03647408
\end{array}$$

$$z = z_2 - a f x^2; \text{ weil } z_2 = 1, \text{ so ist } z = \underline{\mathbf{0{,}9635259}}.$$

Für das Kreispendel ist

$$x = \sqrt{2g} \cdot \frac{0{,}1}{\Theta_3 0^2}$$

$$\begin{array}{r}
\log \sqrt{2g} = 0{,}6463264 \\
\log 0{,}1 = 9{,}0000000 - 10 \\
\underline{\text{dec. } \log \Theta_3 0^2 = 9{,}9279924} - 10 \\
9{,}5743188 - 10 \\
\underline{5{,}3144351} \\
4{,}8887439
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{num} = 77400{,}52 & x = 21^{\circ}\, 30'\ \ 5'',2 \\
 & 2x = 43^{\circ}\ \ 0'\, 10'',4 \\
 & 3x = 64^{\circ}\, 30'\, 15'',6 \\
 & 4x = 86^{\circ}\ \ 0'\, 20'',8
\end{array}$$

Dieser Werth von x ist also in Formel 41 einzusetzen:

$$1 - z = \delta f x^2$$

$$\delta = \sqrt{2}$$

$$\begin{array}{rl}
\log \sin x = 9{,}5641032 - 10 & \log \sin 3x = 9{,}9555039 - 10 \\
\underline{\log 2q^{\frac{1}{4}} = 9{,}9599356 - 10} & \underline{\log 2q^{\frac{9}{4}} = 7{,}2311806 - 10} \\
9{,}5240388 - 10 & 7{,}1866845 - 10
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
\log \cos 2x & = & 9{,}8641071 - 10 \\
\log 2q & = & 8{,}9366525 - 10 \\ \hline
 & & 8{,}8007595 - 10 \\
2q^{\frac{1}{4}} \sin x & = & 0{,}3342250 \\
2q^{\frac{9}{4}} \sin 3x & = & 0{,}0015370 \\ \hline
 & & 0{,}3326870 \\
\log \text{Zähler} & = & 9{,}5220358 - 10 \\
\log \text{Nenner} & = & 9{,}9716442 - 10 \\ \hline
 & & 9{,}5503916 - 10 \\
\log fx^2 & = & 9{,}1007832 - 10 \\
\log \delta & = & 0{,}1505150 \\ \hline
 & & 9{,}2512982
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\log \cos 4x & = & 8{,}8427408 - 10 \\
\log 2q^4 & = & 4{,}8435200 - 10 \\ \hline
 & & 3{,}6862608 - 10 \\
1 + 2q^4 \cos 4x & = & 1{,}00000048 \\
2q \cos 2x & = & 0{,}0632062 \\ \hline
 & & 0{,}9367943 \\
 & & 1 \\
\text{num} & = & 0{,}1783603 \\ \hline
z & = & \underline{0{,}8216397.}
\end{array}
$$