Über die Lösung von Gleichungen durch bestimmte Integrale.

Vom Oberlehrer Dr. Franz Gauger.

Dr. J. D. G. Jacobi, Professor der Mathematik zu Königsberg, hat im zweiten Bande des Crelleschen Journales 1827 eine von Parseval — Mémoires des savans étrangers Band I 1806 — angefangene Untersuchung über die Darstellung der Wurzeln einer Gleichung durch bestimmte Integrale wieder aufgenommen und vervollständigt, doch setzt er dabei die Reellität der Koefficienten des Gleichungspolynoms voraus. Es blieb daher noch die Frage offen, wie diese Integrale sich gestalten würden, wenn die Koefficienten komplexe Werte annehmen. Eine darauf bezügliche Untersuchung wurde für das Jahr 1881/82 von der Universität Greifswald als Preisaufgabe gestellt. Die von Dr. Richert eingelieferte Lösung — veröffentlicht durch die Inaugural-Dissertation: „Über die Verallgemeinerung des Jacobischen Ausdruckes der Wurzeln einer Gleichung durch bestimmte Integrale“ Greifswald 1882 — hat nun zwar eine Verallgemeinerung gebracht, doch wurde von der philosophischen Fakultät darauf hingewiesen, dass die in obiger Arbeit gewählte Lösungsart nicht die einfachste sei. Neben das ursprüngliche Polynom $f(z) = X + iY$ hat nämlich der Verfasser das konjugierte Polynom $f_1(z) = X - iY$ gesetzt und durch Kombination beider die Lösung ausgeführt. Die Rechnung hat hierdurch an Übersichtlichkeit verloren, auch enthalten die Resultate neben Grössen, die von $f(z)$ herrühren, noch ebensoviele, die von der Hülfsfunktion $f_1(z)$ herstammen.

Zwar hatte sich der Verfasser „vorbehalten“, bei Gelegenheit auf diesen Gegenstand zurückzukommen, da mir jedoch nicht bekannt ist, dass dies bisher geschehen sei, so gebe ich in dem Folgenden die einfachere Lösung. Ich schliesse mich dabei im Wesentlichen der Richertschen Bezeichnungsweise an.

I.

Die Gleichung

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots c_n = 0. \tag{1.}$$

kann n von einander verschiedene Wurzeln

$$z_1, z_2, \dots z_n$$

haben, sodass

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \tag{2.}$$

ist.

Setzen wir mit Jacobi die Koefficienten c als reell voraus, so können die n Wurzeln entweder auch reell sein, oder wenn einige von ihnen komplex sein sollten, so müssen auch die konjugiert komplexen Grössen als Wurzeln in die Gleichung eingehen. Nunmehr seien die Koefficienten c komplex, so lässt sich über die Art der Wurzeln nichts spezielles mehr aussagen.

Wir stellen uns

$$z = x + i\,y = r\,(\cos \rho + i \sin \rho) = r\,e^{i\rho} \qquad \textbf{3.}$$

in üblicher Weise als Punkt in einer (x y) Ebene vor und

$$f(z) = X + i\,Y = R\,(\cos \zeta + i \sin \zeta) = R\,e^{i\zeta} \qquad \textbf{4.}$$

als entsprechenden Punkt in einer anderen (XY) Ebene. Für die Wurzelwerte gelte:

$$z_\lambda = x_\lambda + i\,y_\lambda = r_\lambda\,(\cos \rho_\lambda + i \sin \rho_\lambda) = r_\lambda\,e^{i\rho_\lambda} \qquad \textbf{5.}$$

worin λ die Werte von $1 \ldots\ldots n$ annehmen kann. Durch den grösseren Index sei hier zugleich der grössere Mod der Wurzel angedeutet, also

$$r_1 < r_2 < r_3 \ldots\ldots < r_p < r_{p+1} \ldots\ldots < r_n .$$

Wir schlagen um den Koordinatenanfang in der (xy) Ebene zwei konzentrische Kreise mit den Radien Mod z_p und Mod z_{p+1}. In diesem Kreisringe denken wir z variabel, schliessen es jedoch von den Peripherieen aus, d. h. also

$$r_p < r < r_{p+1}$$

Da sich f(z) als Produkt darstellt, so liegt es nahe den lg f(z) zu untersuchen. Innerhalb des Ringgebietes ist f(z) endlich, stetig und eindeutig und auch von 0 verschieden, also auch lg f(z), wenn man den Zweig wählt, für den lg 1 = 0 ist. Wir suchen nun lg f(z) in eine Potenzreihe zu entwickeln. Es ist

$$f(z) = (z - z_1) \ldots\ldots (z - z_p) \cdot (z - z_{p+1}) \ldots\ldots (z - z_n) \qquad \textbf{6.}$$

$$= z^p\left(1 - \frac{z_1}{z}\right)\left(1 - \frac{z_2}{z}\right) \ldots \left(1 - \frac{z_p}{z}\right)\left(-1\right)^{n-p} z_{p+1} \cdot z_{p+2} \ldots z_n \left(1 - \frac{z}{z_{p+1}}\right)$$
$$\left(1 - \frac{z}{z_{p+2}}\right) \ldots \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \qquad \textbf{7.}$$

$$\lg f(z) - \lg z^p = \lg\left[(-1)^{n-p} z_{p+1} \cdot z_{p+2} \cdots z_n\right] + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \lg\left(1 - \frac{z_\lambda}{z}\right) + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n} \lg\left(1 - \frac{z}{z_\lambda}\right)$$

Hierin können wir nun für die lg Reihen einführen, da durch obige Umformung die Konvergenz der Reihen gesichert ist. Man sieht, dass bis zum Index p die Entwickelungen nach negativen Exponenten, darüber hinaus nach positiven Exponenten von z fortschreiten werden.

Da $\lg(1 - \xi) = -\left(\frac{\xi}{1} + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} + \ldots\right)$ für Mod $\xi < 1$, so ist

$$\lg f(z) - \lg z^p = \lg\left[(-1)^{n-p} z_{p+1} \cdot z_{p+2} \cdots z_n\right] - \frac{1}{z} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} z_\lambda - \frac{1}{2z^2} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} z_\lambda^2 - \ldots\ldots$$
$$- z \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n} \frac{1}{z_\lambda} - \frac{z^2}{2} \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n} \frac{1}{z_\lambda^2} - \ldots\ldots$$

Um in den Koefficienten der z die reellen und imaginären Teile zu kennzeichnen, setze man

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=p} z_\lambda^q = \mathop{\Xi_q}\limits_{\lambda=1}^{\lambda=p} + i \mathop{H_q}\limits_{\lambda=1}^{\lambda=p} \text{ und} \\ \sum\limits_{\lambda=p+1}^{\lambda=n} \frac{1}{z_\lambda^q} = \mathop{\Xi'_q}\limits_{\lambda=p+1}^{\lambda=n} + i \mathop{H'_q}\limits_{\lambda=p+1}^{\lambda=n} \end{array}\right| \quad 8.$$

so ist

$$\lg f(z) - \lg z^p = \lg\left[(-1)^{n-p} z_{p+1} \cdot z_{p+2} \cdot \ldots \cdot z_n\right] - \frac{1}{z}\left(\mathop{\Xi_1}\limits_1^p + i \mathop{H_1}\limits_1^p\right) - \frac{1}{2z^2}\left(\mathop{\Xi_2}\limits_1^p + i \mathop{H_2}\limits_1^p\right) \cdots$$

$$9. \qquad - z\left(\mathop{\Xi'_1}\limits_{p+1}^n + i \mathop{H'_1}\limits_{p+1}^n\right) - \frac{z^2}{2}\left(\mathop{\Xi'_2}\limits_{p+1}^n + i \mathop{H'_2}\limits_{p+1}^n\right) \cdots$$

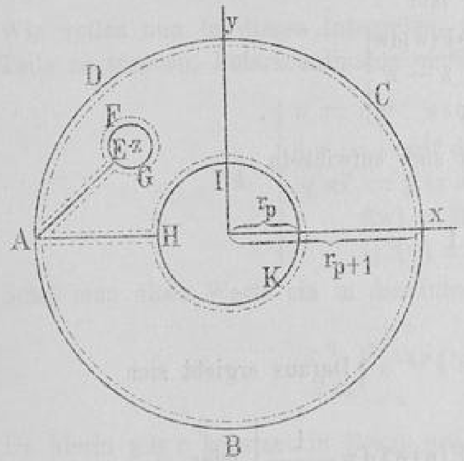
II.

Wir setzen jetzt zur Abkürzung

$$\lg f(z) - \lg z^p = F(z)$$

und suchen F(z) auf eine zweite Weise in eine Potenzreihe zu entwickeln. Diese Funktion ist ebenfalls innerhalb des vorher festgesetzten Kreisringes synektisch. Wir untersuchen das Integral:

$$\int \frac{F(w)}{w - z} dw$$



w sei variabel innerhalb des Kreisringes, dann hat die Funktion unter dem Integralzeichen einen Ausnahmepunkt für w = z. Als Integrationskurve wollen wir eine geschlossene Kurve festsetzen, innerhalb deren die Funktion unter dem Integralzeichen endlich, stetig und eindeutig bleibt. Zu dem Zwecke schlagen wir um den Ausnahmepunkt einen Kreis mit dem Radius t und schliessen ihn von dem Integrationsgebiete aus. Ferner schlagen wir von dem äusseren Grenzkreise des Ringgebietes eine grade Brücke zum inneren Grenzkreise, sowie eine zweite vom äusseren Grenzkreise zu dem Kreise um den Punkt w = z (siehe die Figur). Alsdann integriren wir, wie die Figur andeutet, über eine geschlossene Kurve zusammengesetzt aus Kreisen und graden Linien, welche den Grenzkreisen und Brücken benachbart sind. Cauchy's Fundamentaltheorem von den analytischen Funktionen ergiebt dann die Gleichung:

$$J(ABCDA) + J(AE) + J(EFGE) + J(EA) + J(AH) + J(HJKH) + J(HA) = 0$$

Die Integrale hin und zurück über die Brücken sind gleich, aber von entgegengesetzten Vorzeichen, fallen also aus. Es bleibt J(ABCDA) + J(EFGE) + J(HJKH) = 0.

Als positive Integrationsrichtung sei die im entgegengesetzten Sinne der Drehung des Uhrzeigers festgesetzt. Also ist

$$\int_{r_{p+1}} \frac{F(w)dw}{w-z} + \int_{t} \frac{F(w)dw}{z-w} + \int_{r_p} \frac{F(w)dw}{z-w} = 0 \text{ oder}$$

$$\int_{t} \frac{F(w)dw}{w-z} = \int_{r_{p+1}} \frac{F(w)dw}{w-z} + \int_{r_p} \frac{F(w)dw}{z-w}$$

Wir untersuchen zuerst das linke Integral, wir setzen

$$w - z = t\,e^{i\theta}$$

so ist $\quad dw = i\,t\,e^{i\theta}\,d\theta \quad$ also ergiebt sich

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{F(z+te^{i\theta})\,ite^{i\theta}\,d\theta}{te^{i\theta}} = i\int_{-\pi}^{+\pi} F(z+te^{i\theta})\,d\theta$$

$$= i\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(z+te^{i\theta}) - F(z)\right]d\theta + i\int_{-\pi}^{+\pi} F(z)\,d\theta$$

Jetzt lassen wir den Radius t unendlich klein werden, so ergiebt sich wegen der Stetigkeit der Funktion F als Integralwert

$2\pi i\,F(z)$. Daher ist:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{r_{p+1}} \frac{F(w)dw}{w-z} + \int_{r_p} \frac{F(w)dw}{z-w}\right\}$$

Im ersten Integrale rechts ist Mod w > Mod z, also lässt sich entwickeln

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{z^q}{w^{q+1}}$$

Im zweiten Integrale ist Mod z > Mod w, also

$$\frac{1}{z-w} = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{w^q}{z^{q+1}}$$ Daraus ergiebt sich

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{q=0}^{q=\infty} \int_{r_{p+1}} \frac{F(w)dw}{w^{q+1}}\, z^q + \sum_{q=0}^{q=\infty} \int_{r_p} F(w)\,w^q\,dw\,\frac{1}{z^{q+1}}\right\} \text{ oder}$$

$$F(z) = \sum_{q=0}^{q=\infty} a_q z^q + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{b_q}{z^q} \qquad \textbf{10.}$$ wo

$$a_q = \frac{1}{2\pi i}\int_{r_{p+1}} \frac{F(w)\,dw}{w^{q+1}} \text{ und } b_q = \frac{1}{2\pi i}\int_{r_p} F(w)w^{q-1}\,dw$$

Dieses ganz allgemeine Theorem rührt von Laurent her — Briot et Bouquet, Theorie des fonctions doublement périodiques No. 30 — und ist von Briot und Bouquet an der bezeichneten Stelle in etwas anderer Weise wie hier entwickelt worden. Es besagt, dass wenn F(w) innerhalb eines Kreisringes synektisch ist und z innerhalb desselben Ringes liegt, sich F(z) in eine Potenzreihe entwickeln lässt, welche nach steigenden und fallenden Potenzen von z fortschreitet.

III.

Die beiden in 9. und 10. entwickelten Potenzreihen sind für das vorgeschriebene Ringgebiet unbedingt konvergent und stetig und müssen für alle zulässigen Werte von z übereinstimmen, daraus folgt, dass die Koefficienten gleich hohen Potenzen dieselben sein müssen, also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{r_p} w^{q-1}(\lg f(w) - \lg w^p)\, dw = -\frac{1}{q}\left(\overset{p}{\underset{1}{\Xi}}{}_q + i\,\overset{p}{\underset{1}{H}}{}_q\right) \qquad \textbf{11.}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{r_{p+1}} \frac{\lg f(w) - \lg w^p}{w^{q+1}}\, dw = -\frac{1}{q}\left(\overset{n}{\underset{p+1}{\Xi'}}{}_q + i\,\overset{n}{\underset{p+1}{H'}}{}_q\right) \qquad \textbf{12.}$$

Für den Fall $q = o$ ergiebt die Vergleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{r_{p+1}} \frac{\lg f(w) - \lg w^p}{w}\, dw = \lg\left[(-1)^{n-p} z_{p+1} \cdot z_{p+2} \cdots z_n\right] \qquad \textbf{13.}$$

Wir wollen nun in diesen Integralen, um auch auf der linken Seite die reellen und imaginären Teile zu trennen, Polarkoordinaten einführen. Dann ist zu setzen:

$$\textbf{14.}\quad \left\{\begin{array}{ll} w = r e^{i\rho} \text{ wo } r_p < r < r_{p+1} & \text{also} \\ dw = i r e^{i\rho} d\rho & \text{und} \\ \lg w^p = p \lg w = p \lg r + i p \rho & \text{Ferner ist} \\ \quad f(w) = R e^{i\zeta} & \text{also} \\ \quad \lg f(w) = \lg R + i \zeta & \end{array}\right.$$

Setzt man diese Werte ein in das Integral der Gleichung 11., so verwandelt sich dasselbe in

$$\frac{r^q}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{iq\rho}\left(\lg R - p \lg r + i(\zeta - p\rho)\right) d\rho$$

Da hierin $p \lg r$ konstant in Bezug auf ρ ist und

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{iq\rho}\, d\rho = \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos p\rho + i \sin q\rho)\, d\rho = 0 \text{ für } q > 0$$

ist, so fällt das zweite Glied aus und Gleichung 11. nimmt die Form an:

$$\frac{r^q}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\lg R \cos q\rho - (\zeta - p\rho)\sin q\rho + i\left[(\zeta - p\rho)\cos q\rho + \lg R \sin q\rho\right]\right\} d\rho$$

$$= -\frac{1}{q}\left(\overset{p}{\underset{1}{\Xi}}{}_q + i\,\overset{p}{\underset{1}{H}}{}_q\right)$$

Komplexe Grössen können aber nur gleich sein, wenn ihre reellen und imaginären Teile übereinstimmen, also muss sein:

$$\left.\begin{aligned} \overset{p}{\underset{1}{\Xi}}{}_q &= -\frac{q r^q}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{\lg R \cos q\rho - (\zeta - p\rho)\sin q\rho\}\,d\rho \\ \overset{p}{\underset{1}{H}}{}_q &= -\frac{q r^q}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{(\zeta - p\rho)\cos q\rho + \lg R \sin q\rho\}\,d\rho \end{aligned}\right\} \quad \textbf{15.}$$

In diesen Formeln lassen sich noch zwei Integrale ausführen. Wir erhalten durch partielle Integration:

$$\int \rho \sin q\rho\, d\rho = -\frac{\rho \cos q\rho}{q} + \frac{1}{q}\int \cos q\rho\, d\rho$$

$$= -\frac{\rho\cos q\rho}{q} + \frac{\sin q\rho}{q^2} \qquad \text{Also ist}$$

16. $\int_{-\pi}^{+\pi} \rho \sin q\rho\, d\rho = \pm\frac{2\pi}{q}$, wo das obere Zeichen gilt, wenn q ungrade, das untere Zeichen, wenn q grade ist.

In derselben Weise ergiebt sich partiell integriert:

$$\int \rho \cos q\rho\, d\rho = \frac{\rho \sin q\rho}{q} - \frac{1}{q}\int \sin q\rho\, d\rho$$

$$= \frac{\rho \sin q\rho}{q} + \frac{\cos q\rho}{q^2}$$

Führt man auch hier die Grenzen ein, so erhält man für beliebiges q

17. $\int_{-\pi}^{+\pi} \rho \cos q\rho\, d\rho = 0.$ Nunmehr ist

$$\left.\begin{aligned} \overset{p}{\underset{1}{\Xi}}{}_q &= \mp\frac{p\,q}{n} r^q - \frac{q r^q}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{\lg R \cos q\rho - \zeta \sin q\rho\}\,d\rho \quad \textbf{18.} \\ \overset{p}{\underset{1}{H}}{}_q &= \qquad\qquad - \frac{q r^q}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{\zeta \cos q\rho + \lg R \sin q\rho\}\,d\rho \quad \textbf{19.} \end{aligned}\right\} \; r_p < r < r_{p+1}$$

Das Integral der Gleichung 12. verwandelt sich durch die Werte 14. in

$$\frac{1}{2\pi r^q}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\lg R - p\lg r + i(\zeta - p\rho)}{e^{iq\rho}}\,d\rho$$

Hierin ist wieder $p \lg r$ konstant in Bezug auf ρ und

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-iq\rho} = \int_{-\pi}^{+\pi}(\cos q\rho - i \sin q\rho)\,d\rho = 0 \text{ für } q > 0.$$

Also nimmt die Gleichung 12. die Form an:

$$\frac{1}{2\pi r^{q}}\int_{-\pi}^{+\pi}\Big\{\lg R\cos q\rho+(\zeta-p\rho)\sin q\rho+i\left[(\zeta-p\rho)\cos q\rho-\lg R\sin q\rho\right]\Big\}\,d\rho=$$
$$-\frac{1}{q}\left(\overset{n}{\underset{p+1}{\Xi'_q}}+i\,\overset{n}{\underset{p+1}{H'_q}}\right)$$

Die Vergleichung der reellen und imaginären Teile ergiebt:

$$\left.\begin{aligned}\overset{n}{\underset{p+1}{\Xi'_q}}&=-\frac{q}{2\pi r^{q}}\int_{-\pi}^{+\pi}\Big\{\lg R\cos q\rho+(\zeta-p\rho)\sin q\rho\Big\}\,d\rho\\ \overset{n}{\underset{p+1}{H'_q}}&=-\frac{q}{2\pi r^{q}}\int_{-\pi}^{+\pi}\Big\{(\zeta-p\rho)\cos q\rho-\lg R\sin q\rho\Big\}\,d\rho\end{aligned}\right|\quad \textbf{20.}$$

Also mit Berücksichtigung der Integrale 16. und 17.

$$\left.\begin{aligned}\overset{n}{\underset{p+1}{\Xi'_q}}&=\pm\frac{p\,q}{n r^{q}}-\frac{q}{2\pi r^{q}}\int_{-\pi}^{+\pi}\Big\{\lg R\cos q\rho+\zeta\sin q\rho\Big\}\,d\rho\\ \overset{n}{\underset{p+1}{H'_q}}&=\phantom{\pm\frac{p\,q}{n r^{q}}}-\frac{q}{2\pi r^{q}}\int_{-\pi}^{+\pi}\Big\{\zeta\cos q\rho-\lg R\sin q\rho\Big\}\,d\rho\end{aligned}\right|\quad\begin{aligned}&\textbf{21.}\\ &r_p<r<r_{p+1}\\ &\textbf{22.}\end{aligned}$$

Nun muss noch eine entsprechende Rechnung für die Gleichung 13. durchgeführt werden. Das Integral aus 13. ergiebt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Big\{\lg R-p\lg r+i(\zeta-p\rho)\Big\}\,d\rho$$

Das zweite Glied fällt diesmal nicht aus, da

$$\int_{-\pi}^{+\pi}d\rho=2\pi,$$

dagegen verschwindet das letzte Glied, da

$$\int\rho\,d\rho=\frac{\rho^2}{2}\quad\text{also}\quad\int_{-\pi}^{+\pi}\rho\,d\rho=0.$$

Da nun nach 5.

$$z_{p+1}\,z_{p+2}\ldots z_n=r_{p+1}\,r_{p+2}\ldots r_n\,e^{\,i(\rho_{p+1}+\rho_{p+2}+\ldots\rho_n)}$$

so ergiebt sich

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Big\{\lg R+i\zeta\Big\}\,d\rho=p\lg r+\lg\left[(-1)^{n-p}r_{p+1}r_{p+2}\ldots r_n\right]+i\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n}\rho_\lambda$$

Sei $z_{p+1}\,z_{p+2}\ldots z_n=g+i\,h$ **23.**

so ist $\displaystyle\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n}\rho_\lambda=\operatorname{arc\,tg}\frac{h}{g}$

Nach Vergleichung der reellen und imaginären Teile ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \, d\rho &= 2\pi \lg\left[(-1)^{n-p} r^p r_{p+1} \cdot r_{p+2} \ldots r_n\right] \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \, d\rho &= 2\pi \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{g}\end{aligned}\right\} r_p < r < r_{p+1} \qquad 24.$$

IV.

Um Formeln zu erlangen, welche für Punkte z innerhalb des kleinsten und ausserhalb des grössten Wurzelkreises Geltung haben, kann man die schon erhaltenen spezialisieren. Wir legen p bestimmtere Zahlenwerte bei.

Erster Fall: $0 < r < r_1$. Aus der Gleichung 6. ersieht man, dass in diesem Falle nur $p = 0$ gesetzt zu werden braucht. Die lg der Faktoren in 7. lassen sich dann nur nach Potenzen von z mit positiven Exponenten entwickeln. Die Koefficienten der Potenzen mit negativen Exponenten in 9. müssen der Null gleich sein, also

$$\overset{p}{\underset{1}{\Xi}}{}_q + i \overset{p}{\underset{1}{H}}{}_q = 0 \text{ d. h. } \overset{0}{\underset{1}{\Xi}}{}_q = 0 \text{ und } \overset{0}{\underset{1}{H}}{}_q = 0$$

Dies ist nur möglich, wie man aus 18. und 19. sehen kann, wenn

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \cos q\rho \, d\rho = \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \sin q\rho \, d\rho \text{ und}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \cos q\rho \, d\rho = -\int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \sin q\rho \, d\rho \text{ ist.}$$

Dann ergiebt sich aus 21. und 22.

$$\left.\begin{aligned}\overset{n}{\underset{1}{\Xi'}}{}_q &= -\frac{q}{\pi r^q}\int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \cos q\rho \, d\rho = -\frac{q}{\pi r^q}\int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \sin q\rho \, d\rho \quad 25. \\ \overset{n}{\underset{1}{H'}}{}_q &= -\frac{q}{\pi r^q}\int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \cos q\rho \, d\rho = +\frac{q}{\pi r^q}\int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \sin q\rho \, d\rho \quad 26.\end{aligned}\right\} 0 < r < r_1$$

Die Integrale 24. verwandeln sich in folgende:

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \, d\rho &= 2\pi \lg\left[(-1)^n r_1 \cdot r_2 \ldots r_n\right] \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \, d\rho &= 2\pi \operatorname{arc\,tg} \frac{b_n}{a_n}\end{aligned}\right\} 0 < r < r_1 \qquad 27.$$

In Bezug auf diese letzte Gleichung ist zu bemerken: Wir hatten $z_{p+1} \cdot z_{p+2} \ldots z_n = g + i h$ gesetzt. Für $p = 0$ enthält aber das Produkt auf der linken Seite sämtliche Wurzelwerte, ist also gleich dem absoluten Gliede $c_n = a_n + i b_n$ der Gleichung 1.

V.

Zweiter Fall: $r_n < r < \infty$. Die Gleichung 6. zeigt, dass man für diesen Fall $p = n$ zu setzen hat. Die lg der Faktoren in 7. lassen sich dann nur nach Potenzen von z mit negativen Exponenten entwickeln, also müssen die Koefficienten der Potenzen mit positiven Exponenten verschwinden. Aus 9. ergiebt sich

$$\overset{n}{\underset{p+1}{\Xi'_q}} + i \overset{n}{\underset{p+1}{H'_q}} = 0 \text{ d. h. } \overset{n}{\underset{n+1}{\Xi'_q}} = \overset{n}{\underset{n+1}{H'_q}} = 0$$

Dies ist nur möglich, wie aus 20. ersichtlich, wenn

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \cos q\rho \, d\rho = -\int_{-\pi}^{+\pi} (\zeta - n\rho) \sin q\rho \, d\rho \text{ und}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (\zeta - n\rho) \cos q\rho \, d\rho = \int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \sin q\rho \, d\rho$$

Dann folgt aus 15. unter Berücksichtigung der Integrale 16 und 17:

$$\left.\begin{aligned} \overset{n}{\underset{1}{\Xi_q}} &= -\frac{q\, r^q}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \cos q\rho \, d\rho = \mp 2 r^q + \frac{q\, r^q}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \sin q\rho \, d\rho & \mathbf{28.} \\ \overset{n}{\underset{1}{H_q}} &= -\frac{q\, r^q}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \cos q\rho \, d\rho = -\frac{q\, r^q}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \sin q\rho \, d\rho & \mathbf{29.} \end{aligned}\right\} r_n < r < \infty$$

Die Integrale 24. verwandeln sich in

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \, d\rho &= 2 n \pi \lg r \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \, d\rho &= 0 \end{aligned}\right\} r_n < r < \infty \qquad \mathbf{30.}$$

VI.

Wir haben nun schliesslich zu zeigen, wie die Wurzeln der Gleichung 1. durch unsere Integrale ausdrückbar sind. Dazu setzen wir mit Jacobi an:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} z_\lambda^q = z_1^q + z_2^q + \dots z_{p-1}^q + z_p^q = \overset{p}{\underset{1}{\Xi_q}} + i \overset{p}{\underset{1}{H_q}}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p-1} z_\lambda^q = z_1^q + z_2^q + \dots z_{p-1}^q = \overset{p-1}{\underset{1}{\Xi_q}} + i \overset{p-1}{\underset{1}{H_q}}$$

Diese Gleichungen von einander subtrahiert ergeben:

$$z_p^q = \overset{p}{\underset{1}{\Xi_q}} - \overset{p-1}{\underset{1}{\Xi_q}} + i \left(\overset{p}{\underset{1}{H_q}} - \overset{p-1}{\underset{1}{H_q}} \right) \qquad \mathbf{31.}$$

Genau auf dieselbe Weise erhält man

$$\frac{1}{z_p{}^q} = \overset{n}{\underset{p}{\Xi'_q}} - \overset{n}{\underset{p+1}{\Xi'_q}} + i \left(\overset{n}{\underset{p}{H'_q}} - \overset{n}{\underset{p+1}{H'_q}} \right) \qquad \textbf{32.}$$

Die Werte der Ξ und H sind zu entnehmen aus den Formeln 18. 19. 21. 22. 25. 26. 28. 29. Von speziellen Integralen haben wir gefunden 24. 27. und 30.

Die Jacobischen Resultate sind aus den unsrigen auf sehr einfache Weise wieder zu erhalten. Wenn die Koefficienten c_λ in Gleichung 1. reell sind, so können erstens die Wurzelwerte z_λ sämtlich reell sein, dann sieht man aus Gleichung 8. müssen die Werte H sofort verschwinden. Zweitens, wenn einige Wurzelwerte konjugiert komplex sind, so kommen in den Gleichungen 8. Werte vor wie

$$(x + i\,y)^q + (x - iy)^q \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{(x + i\,y)^q} + \frac{1}{(x - i\,y)^q} = \frac{(x - i\,y)^q + (x + i\,y)^q}{(x^2 + y^2)^q}$$

Entwickelt man diese Grössen nach dem binomischen Lehrsatze, so ist ersichtlich, dass die imaginären Teile sich wegheben müssen. Also auch für diesen Fall müssen die Gleichungen 8. reell sein, d. h. die Werte H verschwinden.

Für reelle Koefficienten c_λ der Gleichung 1. fallen also die Formeln 19. 22. 26. 29. aus und die Gleichungen 18. 21. 25. 28. stimmen in der That mit den Jacobischen Resultaten überein, wenn man darin, was aus 4. folgt, R ersetzt durch $\sqrt{X^2 + Y^2}$ sowie ζ durch $\operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X}$.