Ueber die Nothwendigkeit, die Begriffe der Zahl und Größe in der Mathematik zu trennen.

Größe ist alles, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist; das ist die hergebrachte Erklärung der Größe, die sich auch noch in den meisten neueren Lehrbüchern der Mathematik findet und unter die man sowohl die geometrischen Größen als continuirliche, als auch die Zahlen als discrete Größen zusammenfassen zu können meint. Da aber die Mathematik oder Größenlehre die Wissenschaft ist, welche die Größen zum Gegenstand ihrer Betrachtung macht, so muß der an die Spitze dieser Wissenschaft gestellte Begriff der Größe nicht bloß auf die Abgrenzung der mathematischen Untersuchungen, sondern auch auf diese selbst von dem wesentlichsten Einflusse sein. So wird es aus der obigen Erklärung, nach der die Zahlen ebenfalls zu den Größen gehören, leicht begreiflich, wie man das Rechnen als ein Operiren mit Größen betrachten und dadurch in die ganze Arithmetik und in diejenigen Theile der Geometrie, welche es mit der Vergleichung der Raumgrößen mittelst der Zahl zu thun haben, eine solche Verwirrung der Begriffe bringen konnte, daß der harte Vorwurf ungereimter, sogar widersinniger Lehren, den man der Mathematik, obgleich sie vor allen anderen Wissenschaften der höchsten Evidenz sich rühmt, gemacht hat, keineswegs ungerecht erscheint. Hätte man aber die so wesentlich verschiedenen Begriffe der Zahl und Größe nicht durch einander geworfen, so würden solche sinnlosen Behauptungen, daß man zwei Linien mit einander multipliziren, daß man eine Linie potenziren könne, daß es Größen, die kleiner als Null sind, ja daß es sogar unmögliche Größen gebe, und ähnliche Unbegreiflichkeiten, auf die man in der Lehre von den negativen Größen, in der Flächenlehre, in der Trigonometrie und anderen Theilen der Mathematik in Menge stößt, nie in diese Wissenschaft eingedrungen sein, und selbst der seit der Erfindung der höheren Analysis geführte Streit über das eigentliche Wesen des Differentials hätte gar nicht entstehen können, wenn man die arithmetische und geometrische Bedeutung desselben gleich Anfangs scharf geschieden hätte.

Die Mathematik beschäftigte sich ursprünglich mit den Begrenzungsstücken, dem Inhalt und der Form der Raumgrößen; bald aber zeigte sich, daß man bei diesen Untersuchungen der Zahl nicht entbehren könne, und so lag es nahe, die Größe und Zahl, da sie das Objekt einer einzigen Wissenschaft bilden, als zusammengehörig zu betrachten und beide unter einen gemeinschaftlichen Begriff zu bringen. Als gemeinsames Merkmal der Größe und Zahl konnte man aber kein anderes finden, als daß beide sich größer und kleiner denken lassen, und so entstand jene Erklärung der Größe, deren Mangelhaftigkeit aber schon bei einer bloß oberflächlichen Betrachtung in die Augen springt. Denn was läßt sich nicht alles außer der Raumgröße und Zahl ebenfalls größer oder kleiner denken, und was würde daher nicht alles zur Mathematik oder Größenlehre gehören, wenn man alle Dinge, die man nach jener Erklärung zu den Größen rechnen müßte, in dieselbe hineinziehen wollte! Um nur Einiges anzuführen, so würden alle materiellen Dinge, die Wärme, das Licht, die Schwere, die Elasticität, ja selbst die Ungereimtheit und der Unsinn, insofern sie größer oder kleiner gedacht werden können, jener Erklärung gemäß als Größen erscheinen, mithin auch dem Gebiete der Mathematik anheimfallen. Wenn hiernach also das Merkmal der Vergrößerung und Verkleinerung schon deshalb sich nicht zu einer gemeinschaftlichen Definition der Zahl und Größe eignet, weil dasselbe auch noch den meisten andern Dingen und ihren Beschaffenheiten zukommt, so ist dasselbe auch gar nicht einmal als ein *wesentliches* Merkmal der Zahl zu betrachten, indem diese nur in einem sehr beschränkten Sinne der Zu- und Abnahme fähig ist. Um dieses darzuthun, ist es jedoch nöthig, zuvor auf das eigentliche Wesen der Größe und Zahl näher einzugehen, was daher zunächst im Folgenden geschehen soll.

Unter Raum verstehen wir das nach allen Seiten hin unendlich Ausgedehnte; jeder begrenzt gedachte Theil des Raums heißt ein mathematischer Körper, an dem sich die übrigen Raumgrößen (Flächen und Linien) als Begrenzungsstücke vorfinden. Jede Raumgröße ist daher, wie der Raum selbst, ausgedehnt und deshalb (wenigstens in der Vorstellung) bis ins unendliche theilbar. Diese unbedingte Theilbarkeit der Raumgröße setzt einen ununterbrochenen Zusammenhang ihrer Theile voraus, den man sich bekanntlich unter dem Begriff der Stetigkeit denkt. In dieser Stetigkeit besteht also das eigentliche Wesen der Raumgrößen, so daß, wenn der Begriff der Größe erweitert werden soll, auch nur das als solche betrachtet werden kann, bei dem sich dieses Merkmal der Stetigkeit vorfindet. Nun aber giebt es außer den Raumgrößen oder dem stetigen Nebeneinander nur noch entweder ein stetiges Nacheinander, also mit der Zeit fortschreitende Größen, oder ein stetiges Neben- und Nacheinander, d. h. im Raume mit der Zeit fortschreitende Größen oder Bewegungen. Alle Größen zerfallen demnach in *Raumgrößen* (Körper, Flächen, Linien, Winkel), *Zeitgrößen* (jede begrenzte Zeit, Werth, Druck) und *Bewegungen*, welche letzteren Raum-und Zeitgrößen zugleich sind. Fassen wir nun die diesen Größenarten gemeinsamen und zugleich wesentlichen Merkmale zusammen, so ergiebt sich folgende Erklärung: Jedes aus gleichartigen und unter sich stetig zusammenhängenden Theilen bestehende Ganze heißt eine Größe.

Um ferner den Begriff der Zahl festzustellen, ist es nöthig, alles das zu entfernen, was nicht zur Zahl selbst gehört, sondern nur durch die Dinge, welche gezählt werden, zufällig mit ihr zusammenkommt. Dann aber überzeugt man sich zunächst leicht, daß die Zahl nicht etwas außer uns Gegebenes, sondern in unserer Vorstellung Erzeugtes sei, so daß sie zwar durch die Anschauung gleichartiger Dinge, wenn wir die Menge derselben als eine bestimmte auffassen wollen, in uns zum Bewußtsein gebracht werden kann, sonst aber von diesen Dingen durchaus unabhängig ist. Es ist immer dieselbe Zahl zehn, die in mir hervorgerufen wird, gleich viel, ob ich zehn Thaler oder zehn Menschen oder zehn Bäume vor mir sehe; daher ist das Eine, was in der Zahl vervielfältigt gedacht wird, völlig bestimmungslos, es ist Eins schlechthin, nicht eine Eins oder eine Einheit, bei der sich die Vorstellung eines bestimmten Dinges nicht würde fern halten lassen. Hieraus folgt aber zweitens, daß das Eine, welches in der Zahl bestimmte Male vervielfältigt gedacht wird, in dieser Vervielfältigung keineswegs ein Ganzes bilden darf, daß es vielmehr für die Zahl ganz gleichgültig ist, und sie stets dieselbe bleibt, ob das Eine, welches sie zählt, wiederholentlich neben einander oder von einander getrennt gegeben ist. So ist es für die Zahl der Sternschnuppen, die an einem Abend beobachtet werden, ganz gleichgültig, ob dieselben zugleich, oder in längeren oder kürzeren Zeitabschnitten gesehen wurden; durch die Zahl wird bloß die Menge derselben bestimmt, ohne daß sie dadurch zu einer Gesammtvorstellung vereinigt werden. Hieraus ergiebt sich folgende Erklärung: Die Zahl ist die Vorstellung des Einen in bestimmter Wiederholung.

Aus dieser Erklärung, deren Richtigkeit Niemand wird in Abrede stellen können, folgt aber, daß der Zahl an sich noch gar keine Größe beigelegt, dieselbe also noch weniger als Größe betrachtet werden kann. Da nämlich das Eine, welches in der Zahl wiederholt gedacht wird, gänzlich unbestimmt bleibt, so ist jede Zahl auch solange inhaltsleer, als nicht die Vorstellung einer bestimmten Einheit zu ihr hinzutritt, durch welche aber keineswegs die höhere Zahl allemal etwas Größeres wird, als die niedrigere. Achtzehn Nullen sind nicht größer als funfzehn Nullen, achtzehn Groschen dagegen kleiner als funfzehn Thaler. Es ist daher zu bedauern, daß der Sprachgebrauch, nach welchem man von größeren und kleineren Zahlen spricht, bereits so allgemein geworden ist, daß jeder Versuch, dafür die allein richtigen Benennungen höherer und niedrigerer Zahlen einzuführen, doch mißlingen würde. Eine Zahl heißt höher, wenn sie in der Zahlenreihe weiter aufwärts liegt, wenn man also von einer anderen Zahl, der niedrigeren, erst weiter zählen muß, um zu jener zu gelangen. Hätte man von Anfang an in der Arithmetik nur von höheren und niedrigeren, nicht aber von größeren und kleineren Zahlen gesprochen, so würden solche Ungereimtheiten, daß z. B. eine negative Zahl kleiner als Null sei, gar nicht aufgekommen sein. Denn Niemand würde in der Behauptung etwas Befremdendes gefunden haben, daß — 3 niedriger als 0, und — 7 niedriger als — 3 sei, weil die negativen Zahlen, wenn man sie als Glieder einer über Null hinaus rückwärts gezählten Zahlenreihe betrachtet, allerdings weiter zu rückliegen, als Null, und zwar desto weiter, je größer das hinter dem Minuszeichen folgende Glied ist. Jene Ungereimtheit, von einer Zahl zu sprechen, die kleiner als Null ist, mußte um so auffallender erscheinen, je mehr man sich an die fehlerhafte Verwechselung von Null und Nichts gewöhnt hatte, während Null nur das Nichtvorhandensein einer Zahl, Nichts dagegen das Nichtvorhandensein irgend welches Dinges bezeichnet.

Wenn nun schon aus den vorstehenden Betrachtungen folgt, daß die Zahl nicht als Größe betrachtet werden kann, weil sie an sich völlig inhaltsleer ist und weil ihr Vieles keinen stetigen Zusammenhang hat, ja nicht einmal ein Ganzes bilden darf, so kann selbst das Merkmal der Vergrößerung und Verkleinerung, welches sie nach der gewöhnlichen Meinung mit der Größe gemeinschaftlich haben soll, ihr auch nur in bedingter Weise beigelegt werden, während die unumschränkte Theilbarkeit das wesentliche Merkmal der Größe ist. Denn das Eine, welches in der Zahl wiederholt vorgestellt wird, ist schlechterdings untheilbar, daher kann die Zahl auch immer nur um Eins größer oder kleiner (höher oder niedriger) werden und deshalb auch nur bis zu Null abnehmen. Aber, wird man einwenden, die Zahl kann ja über Null hinaus ins Negative abnehmen, und ebenso ist ja auch jeder beliebige Theil von Eins durch einen Bruch darstellbar. Es sind jedoch weder die sogenannten negativen, noch die gebrochenen Zahlen wirkliche Zahlen, sondern Zahlausdrücke, die eine bestimmte Rechnung vorschreiben. Der Ausdruck -5 bedeutet, man soll 5 subtrahiren, und zwar von einer Zahl, die nicht angegeben ist, als deren Stellvertreter man also vorläufig Null nehmen kann. So wie hiernach jede negative Zahl erst einen vollständigen Sinn gewinnt, wenn sie mit einer anderen Zahl in Verbindung tritt, von der ihr Glied subtrahirt werden kann, so hat auch die algebraische Summe, deren Unterschied von der Differenz in den Lehrbüchern gewöhnlich gar nicht angegeben ist, nur einen Verbindungswerth, indem die Differenz $a-b$ eine Rechnung vorschreibt, die an Zahlen a und b selbst zu machen ist (man soll b von a subtrahiren), die algebraische Summe $+a-b$ oder $-b+a$ dagegen eine Rechnung vorschreibt, die mit den Zahlen a und b an einer dritten nicht angegebenen Zahl vorzunehmen ist (man soll a addiren und b subtrahiren, gleichviel, welches zuerst). Wenn nun die negative Zahl gleichwohl als eine Zahl betrachtet wird, die von Null aus durch Zurückzählen entsteht, indem man $-a$ als den Rest ansehen kann, den man erhält, wenn man a von 0 subtrahirt, so wird sie dadurch noch nicht zu einer wirklichen Zahl, sondern sie bleibt in dieser Auffassung so lange ein bloßes Zeichen einer nicht ausführbaren Subtraction (der Ausdruck $-a$, d. h. man soll a von 0 subtrahiren, gilt zugleich als Rest), als man sie nicht auf ein solches Stück einer Größe bezieht, welches wirklich dadurch entstanden ist, daß sich die Größe über ihre Anfangsgrenze hinaus rückwärts fortsetzte. Daß ferner Eins nicht theilbar sei, folgt zunächst schon aus dem Begriff des Einen, das als solches eben nicht zugleich ein Vieles sein kann. Wem dieser Grund nicht genügen sollte, versuche es doch, irgend einen Theil von Eins anzugeben. Die Antwort, daß der achte Theil von Eins $\frac{1}{8}$ sei, wird ihn dann überzeugen, daß der Bruch $\frac{1}{8}$ eben nichts weiter aussagt, als daß von dem achten Theil von Eins die Rede sei, der nicht durch eine Zahl angegeben werden kann, weil er gar nicht existirt. Aber wie in den Lehrbüchern der Arithmetik über die negative Zahl und algebraische Summe in der Regel entweder ganz falsche oder wenigstens sehr unklare Begriffe aufgestellt sind, so ist auch die gewöhnliche Erklärung des Bruchs höchst mangelhaft. Der Stammbruch $\frac{1}{8}$ bedeutet, man soll durch 8 dividiren, und zwar ist keine Zahl als Dividend angegeben, daher man Eins als vorläufigen Stellvertreter desselben nehmen kann. So wie hiernach der Stammbruch gleich der negativen Zahl erst einen vollständigen Sinn gewinnt, wenn er mit einer andern Zahl in Verbindung tritt, die durch den Nenner des Stammbruchs dividirt werden kann, so hat auch der gemeine Bruch analog der algebraischen Summe nur einen Verbindungswerth, indem der Quotient $\frac{a}{b}$ eine Rechnung vorschreibt, die an den Zahlen a und b selbst zu machen ist (man soll a durch b dividiren), der Bruch $\frac{a}{b}$ dagegen eine Rechnung vorschreibt, die mit den Zahlen a und b an einer dritten nicht angegebenen Zahl vorzunehmen ist (man soll mit a multipliciren und durch b dividiren, gleichviel, welches zuerst). Diese Erklärung giebt nicht allein einen wirklichen Unterschied zwischen Quotient und Bruch an, der in den Lehrbüchern gewöhnlich ganz verwischt wird, sondern sie beseitigt auch alle Widersprüche, auf die man sonst bei dem Operiren mit Brüchen unvermeidlich stößt. So ist z. B. die Multiplication mit einem Bruche unmöglich, wenn man ihn, wie gewöhnlich geschieht, für ein Vielfaches eines Theils der Einheit erklärt, da jedes Vielfache zugleich eine benannte Zahl ist, diese aber nie Multiplicator sein kann.

Diese Erörterungen werden hoffentlich genügen, um die gänzliche Unhaltbarkeit jedes Versuches, die Zahl und die Raumgröße in einen gemeinschaftlichen Begriff zusammen zu fassen, darzuthun. Die Zahl ist keine Größe, wohl aber ist sie ein unentbehrliches Symbol der Größe, und insofern ist die Zahlenlehre allerdings ein wesentlicher Theil der Mathematik. Da nämlich das Wesen der Größe in der Vielheit ihrer Theile und in der Ausdehnung in Zeit oder Raum besteht, so giebt es auch nur zwei Arten von Darstellungsmitteln, durch welche wir uns diese Eigenschaften der Größe zur Anschauung bringen können, nämlich die Linie und die Zahl. Die Linie stellt das Viele und Ausgedehnte der Größe zugleich dar und ist daher ein vollständiger Repräsentant jeder Größe, sowohl der Raum- als der Zeitgröße; wollen wir jedoch das Viele der Linie als ein Bestimmtes auffassen, so müssen wir uns dazu der Zahl bedienen, die aber dann auch eben nur das Viele der Größe, nicht aber das stetige Nebeneinander ihrer Theile ausdrückt, und daher auch niemals als völlig entsprechendes Symbol der Größe betrachtet werden darf.

Eine besondere Beachtung verdient noch die benannte Zahl, welche von den Meisten als vollständiger Stellvertreter der Größe angesehen wird, so daß z. B. Ohm unter Größe alles verstanden wissen will, was eine benannte Zahl ist oder werden kann. Die benannte Zahl entsteht durch die Verbindung einer Zahl mit einem bestimmten Dinge und unterscheidet sich also von der reinen Zahl dadurch, daß das Eine, welches bei dieser ganz unbestimmt gelassen ist, bei jener ein bestimmtes genanntes Ding ist. Schon aus dieser Erklärung der benannten Zahl folgt aber, daß sie im Allgemeinen nur eine bestimmte Menge gleichartiger Dinge bezeichnet, die zusammen nicht einmal ein Ganzes noch weniger eine Größe bilden dürfen, daß sie allerdings aber auch Größenausdruck sein könne, wenn ihre benannte Einheit das gemessene Stück einer Größe bezeichnet. Zwanzig Menschen geben keine Größe, auch wenn die Menschen in einem Haufen zusammenstehen, eben so wenig wie sieben Messer, wenn diese auch über einander liegen; beide benannte Zahlen sind daher auch nur als Ausdrücke bestimmter Mengen von abgesonderten Einzelwesen zu betrachten, die wegen der mangelnden Stetigkeit zusammen nie eine Größe bilden können. Dagegen kann die benannte Zahl 15 Fuß sowohl der Ausdruck einer Menge, wenn diese Fuß weiter in keinem Zusammenhange stehen, als auch der Ausdruck einer Größe sein, wenn diese Fuß zusammen eine einzige Linie bilden. Wie nöthig es aber sei, auf diesen Unterschied zwischen Dingen und Größen bei der benannten Zahl zu achten, zeigt sich, sobald man zu einer negativen Zahl oder einem Bruche eine Benennung hinzufügt. Bezieht man nämlich das Glied einer negativen Zahl auf eine Benennung, so erhält man nichts weiter, als einen benannten Subtrahend oder eine abzuziehende Menge, z. B. —(3 Thlr.) so viel, als man soll 3 Thlr. subtrahiren. Bezieht man dagegen das Minuszeichen einer negativen Zahl auf die hinzugefügte Benennung, so darf diese nicht ein Ding, sondern muß eine Größe bezeichnen, und man erhält dann, indem man die Wirkung des Minuszeichens in diese Größe selbst hineinlegt, eine negativ benannte Zahl, z. B. 3 Minus Thaler, 3 von einem Werthe rückwärts abgezählte Thaler, oder 3 Thaler negativer Werth, welcher letztere also dadurch entstanden gedacht werden muß, daß ein bestimmter aber nur mit einer Anfangsgrenze vorgestellter Werth über diese Anfangsgrenze hinaus rückwärts fortgesetzt wurde. So kann man von 3 Thlr. negativem Gewinn reden, weil der Gewinn unterhalb Null fortgesetzt gedacht in Gewinn für den Anderen, d. h. in eigenen Verlust umschlägt; ebenso lassen sich negative Forderungen (Forderungen des Andern, d. h. eigne Schulden), negative Einnahme (Ausgabe), negativer Vortheil (Schaden), negativer Druck (Gegendruck, Widerstand) denken, während von negativer Bevölkerung, negativer Waare, rc. nicht die Rede sein kann, weil diese Benennungen bloß eine Menge von Dingen, nicht aber eine Größe ausdrücken. Noch ungereimter wäre es, von negativen Personen, Federn rc. sprechen zu wollen. Wie hiernach die negativ benannte Zahl nur als Größenausdruck begriffen werden kann, so ist dieß auch bei der negativ gebrochenen Zahl der Fall. Da nämlich $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a = a \cdot \frac{1}{b}$ ist, und sich jeder Factor eines Products als Multiplicand, mithin auch als benannt betrachten läßt, so kann man einen Bruch auf doppelte Art auf eine Benennung beziehen. Betrachtet man den Zähler als benannt, so erhält man nichts weiter, als einen benannten formellen Quotient oder eine durch den Nenner zu theilende Menge, z. B. $\frac{1}{3}$ · 12 Personen so viel als 12 Personen : 3, d. h. man soll 12 Personen durch 3 theilen. Geht in dem Falle, wo die Benennung ein Ding ist, die Division nicht auf, so läßt sich die verlangte Theilung der gegebenen Menge entweder gar nicht, wenn der Zähler kleiner ist als der Nenner, oder wenigstens nur unvollständig ausführen, wenn der Zähler größer als der Nenner ist, z. B. $\frac{1}{3}$ · 2 Personen hat gar keinen Sinn, dagegen kann man für $\frac{1}{3}$ · 7 Personen annähernd 2 Personen nehmen. Bezieht man ferner bei dem Bruche $a \cdot \frac{1}{b}$ den Stammbruch $\frac{1}{b}$ auf die Benennung des Bruchs, so darf diese nicht ein Ding, sondern muß eine Größe bezeichnen, und man erhält dann, indem man die Wirkung des Nenners in diese Größe selbst hineinlegt, eine gebrochen benannte Zahl, z. B. 12 ($\frac{1}{3}$ Thaler), 12 Drittel-Thalerwerth, welcher letztere also dadurch entstanden gedacht werden muß, daß der bestimmte auf beiden Seiten fest begrenzte Werth des Thalers in drei Theile getheilt wurde. Man kann daher von ganz beliebigen Bruchtheilen jeder auf beiden Seiten begrenzt angenommenen Zeit- oder Raumgröße reden, z. B. $\frac{5}{8}$ Tag (5 Achteltag), $\frac{4}{9}$ Pfennigwerth, $\frac{8}{9}$ Zollänge 2c.; ungereimt wäre es dagegen, wenn man von Bruchtheilen eines Dinges, z. B. einer Person, einer Feder 2c. sprechen wollte.

Diese Andeutungen mögen genügen, um es einleuchtend zu machen, daß die Lehre von den negativen und gebrochenen Zahlen von allen dunkeln oder geradezu unbegreiflichen Behauptungen, wie man sie in den mathematischen Lehrbüchern in Menge findet, befreit wird, wenn man die Zahl nicht als Größe, sondern nur als Symbol der Größe betrachtet und dabei noch in jedem Falle unterscheidet, ob sie wirklich Ausdruck einer Größe oder nur einer Menge von Dingen ist. Ausführlicher und im systematischen Zusammenhange hat der Verfasser dieser Zeilen seine Ansichten über einen den obigen Grundsätzen entsprechenden Aufbau der Arithmetik und Geometrie in seinem Lehrbuche der Mathematik (1 Bd. 1845, 3 Bd. 1846, 2 Bd. 1848, Leipzig bei Breitkopf und Härtel) niedergelegt, und er hofft, wenn es ihm vergönnt sein sollte, die Hindernisse, welche bisher der Fortsetzung des Buches entgegenstanden, zu beseitigen, in den folgenden Bänden desselben auch darzuthun, wie die höhere Mathematik ebenfalls nur bei einer consequent durchgeführten Unterscheidung zwischen Zahl und Größe durch haltbare Principien begründet werden könne. Der Verfasser hält übrigens den Einfluß, welchen die scharfe Unterscheidung zwischen Zahlen, Dingen und Größen auf die ganze mathematische Methode hat, für so erheblich, daß er hierin hauptsächlich das Mittel sieht, durch welches die in der neueren Zeit allgemein als nothwendig erkannte Neugestaltung der Mathematik auf eine den jetzigen Anforderungen der Wissenschaft entsprechende Weise bewerkstelligt werden kann. Er kann daher auch nicht die Ansicht derer theilen, welche von der bevorstehenden Reform in der Mathematik eine gänzliche Veränderung oder gar theilweise Beseitigung der elementaren Theile erwarten, indem sie hoffen, daß der höhere Calcul durch Vereinfachung der Methode selbst schon beim ersten Unterricht eine Stelle finden werde. Euclid's Ausspruch, daß es keinen kürzeren und bequemeren Weg zur Geometrie, als den durch die Elemente gebe, läßt sich auf die Mathematik im Allgemeinen anwenden; den allmähligen Stufengang, den diese Wissenschaft in ihrer Fortbildung von den ersten mathematischen Grundbegriffen bis zu den tiefsten Forschungen der Analysis genommen hat, muß Jeder durchwandern, der in das höhere Gebiet derselben eindringen und sich hier der herrlichsten Genüsse erfreuen will, deren der menschliche Geist fähig ist. Auch haben wir vorläufig keinen Grund, uns über den Zeitaufwand zu beklagen, den das Erlernen der Mathematik in Anspruch nimmt. Ein zwölfjähriger Knabe von mittelmäßigen Anlagen kann bei vier wöchentlichen Lehrstunden in vier Jahren den ganzen Elementar-Cursus absolviren und steht dann erst in einem Alter, in welchem frühestens die nöthige Verstandesreife zum Verständniß der höheren Mathematik vorausgesetzt werden kann.

Wilde.