Ueber die Axendrehung der Erde*).

Das bereits von den verschiedensten Gesichtspunkten aus betrachtete Thema läßt mir ein zu geringes Quantum von Stoff übrig, um mich weiter über dasselbe verbreiten und Ideen über den zu behandelnden Gegenstand aussprechen zu können, welche geeignet wären, allgemeineres Interesse zu erregen. Es sollen diese Zeilen durchaus keinen Anspruch darauf machen. Ich wurde vielmehr bei der Wahl des Themas von der Idee geleitet, den reiferen Schülern etwas in die Hände zu geben, woraus sie ohne große Mühe das Wichtigste über die Axendrehung der Erde und namentlich über den Foucault'schen Pendelversuch, durch welchen dieselbe in so evidenter Weise nachgewiesen ist, kennen lernen sollen.

Unter Axendrehung schlechtweg versteht man die Bewegung von Massen um eine Axe, und sie ist entweder eine theilweise oder eine vollständige. Letztere findet bei der Erde statt und wird Umwälzung oder Rotation genannt, so daß jedes Massenelement mit dem Abstande von der Axe als Halbmesser einen vollständigen Kreis beschreibt.

Für die Erscheinungen der täglichen Bewegung, wie wir sie am Himmel wahrnehmen, lassen sich jedenfalls zwei Erklärungen geben; entweder bewegen sich sämmtliche Fixsterne in 24^h um die Erde, oder es dreht sich die Erde in derselben Zeit um ihre Axe. — Schon der Umstand, daß die Umwälzung eines einzigen, verhältnißmäßig sehr kleinen Körpers die Erscheinungen ebenso hervorbringt, wie die Bewegung von Millionen größerer Massen, mußte die Axendrehung der Erde wahrscheinlich machen; aber noch mehr mußte die Wahrscheinlichkeit an's Licht treten, wenn man zugleich die Entfernung dieser Weltkörper in Betrachtung zieht. Da der nächste Fixstern eine Entfernung von nahezu 23,000 Millionen Erdhalbmessern hat, müßte er bei einer Rotation um die Erde eine Geschwindigkeit besitzen, welche die des Lichtes 3400 mal übertrifft! Die Wahrscheinlichkeit der Umdrehung der Erde wird durch mechanische Gründe zur völligen Gewißheit erhoben. Die kreisförmige Bewegung der Himmelskörper um die Erde könnte nur durch die Centralkräfte hervorgebracht werden, deren Mittelpunkt in der Erde selbst liegen müßte. Es ist nicht anzunehmen, daß durch diese im Mittelpunkte der Erde angenommene Kraft alle Körper, deren Entfernung von der Erde so verschieden ist, in derselben Zeit herumgeführt werden, so daß ihre wahre Geschwindigkeit im Verhältnisse mit der Entfernung wachse, während doch alle anderen Kräfte desto schwächer werden, je weiter sich ihre Wirksamkeit erstreckt.

Die Gründe nun, welche man von einem vollgültigen directen Beweise für die Axendrehung der Erde anführte, zerfielen in Hypothesen, und man begnügte sich damit, die Unwahrscheinlichkeit des Gegentheils anzuführen. Diese zeigte sich nach folgenden Punkten hin:

1) Die Erde muß sich bewegen wegen der ungeheuren Geschwindigkeit, mit der sich die anderen Körper bewegen müßten.

   Wenn sich die Erde in 24^h um ihre Axe bewegt, bewegt sich jeder Punkt im Aequator mit einer Geschwindigkeit von $\frac{5400}{24 . 60 . 60}$ Meilen $= 1500'$. Die Sonne müßte sich demnach mit einer Geschwindigkeit von 1500 Meilen bewegen.

*) Einige Notizen sind benutzt aus: Garthe, Pendelversuch, und Heinen, Rotationsapparate.

2) Wenn man auf die Größe der Fixsterne Rücksicht nimmt.

3) Es ist unwahrscheinlich, daß alle Himmelskörper, die doch so verschiedene Entfernungen von der Erde haben, sich innerhalb 24^h um die letztere bewegen. — Welche Kraft würde erfordert, die Sonne und alle anderen Sterne in ihren unendlich weiten Bahnen zu erhalten, wenn sie sich alle 24^h um unsern Erdball drehen müßten! Die Erde konnte aber auch nach mechanischen Grundsätzen die tägliche Axendrehung nicht erhalten, ohne daß zugleich ihrem Mittelpunkte eine im Raume fortschreitende Bewegung durch den nämlichen Stoß mitgetheilt worden wäre; denn hätte diese letztere nicht stattfinden sollen, so würde eine zweite Kraft nothwendig gewesen sein, deren Richtung durch den Erdmittelpunkt gegangen wäre, um die Wirkung der erstern Kraft aufzuheben und nur eine Axendrehung bestehen zu lassen, was nicht zulässig ist.

4) Es fehlt dieser Bewegung ein wirklicher Mittelpunkt.

5) Die Schwere nimmt ab von dem Pole nach dem Aequator in Folge der wachsenden Schwungkraft. Diese ist aber nur möglich bei der Axendrehung.

Hierzu will ich bemerken, daß die Anwendung von Pendeln verschiedener Länge unter verschiedenen Breiten nöthig ist, wenn man dieselbe Schwingungsdauer erzielen will. Diese verschiedene Intensität der Schwerkraft erklärte der französische Physiker Richer als eine nothwendige Folge der Axendrehung der Erde, und so wurde umgekehrt diese Beobachtung Richer's ein neuer Beweis für die Erdrotation. Die Axendrehung der Erde erzeugt eine Kraft, welche der Schwerkraft entgegen wirkt, und diese ist am Aequator am größten. Nehmen wir an, die Erde dreht sich binnen $23^h\ 56'\ 4''$ ($86164''$) mit gleichförmiger Geschwindigkeit und constanter Winkelgeschwindigkeit um ihre Axe. Bezeichnet nun (Fig. I) $AD = F_1$ die Fliehkraft im Punkte A, so ist $AD = F_1 = \frac{2\,AF\,.\,\pi^2}{(86164)^2}$. Die Componenten sind AB und AE, von denen AB der Schwerkraft entgegenwirkt. Es ist nun, wenn φ die geographische Breite, $AB = F_1 \cos\varphi = \frac{2\,AF\,.\,\pi^2\,.\,\cos\varphi}{(86164)^2}$;

$$AF = r\cos\varphi,\ \text{folglich}\ AB = \frac{2\,r\,\pi^2\cos^2\varphi}{(86164)^2}.$$

An den Polen ist demnach, da $\varphi = 90^0$ ist, die Gegenwirkung der Schwere $= \frac{2\,\pi^2\,r\cos^2\varphi}{(86164)^2} = \frac{2\,\pi^2\,r\cos^2 90^0}{(86164)^2} = 0$.

Wird $r = 19632462$ pariser Fuß gesetzt, ist $AB = 0{,}052197\cos^2\varphi$.

Ist der durch die Schwerkraft der Erde bedingte Fallraum an den Polen für $1'' = \frac{G}{2}$, so ist derselbe (für die Breite φ) $= \frac{G}{2} - 0{,}052197\cos^2\varphi$.

Die Schwerkraft nimmt mithin nach dem Aequator zu ab und ist am Aequator ein Minimum. AE ist aber $= AD\,.\,\sin\varphi = \frac{2\,r\,\pi^2\cos\varphi\sin\varphi}{(86164)^2} = \frac{r\,\pi^2\sin 2\,\varphi}{(86164)^2}$.

Diese Kraft bewirkte bei der Entstehung der Erde eine Verschiebung der Massentheile nach dem Aequator hin und hatte bei 45^0, wie sich aus der Formel ergibt, ihr Maximum, woraus sich die sphäroidische Gestalt der Erde erklären läßt.

6) Das dritte Kepler'sche Gesetz: Es verhalten sich die dritten Potenzen der mittlern Entfernung zweier Planeten wie die Quadrate ihrer Umlaufszeit.

Wenn man dieses Gesetz z. B. auf die Sonne und den Mond anwendet, in Bezug auf die Drehung um die Erde, die Entfernung des Mondes von der Erde = r, der Sonne = x setzt, ergibt sich:

$$r^3 : x^3 = 1^2 : 13^2$$
$$x^3 = 169\,r^3$$
$$x = r\sqrt[3]{169} = 5{,}53\,r.$$

Dies wäre ein Zeichen, daß die Sonne nur 5,53 mal so weit von der Erde entfernt wäre, als der Mond.

7) Aberration des Lichtes.

Diese angeführten Gründe, welche für die Wahrscheinlichkeit einer Axendrehung unseres Erdballes sprechen, mögen genügen; und ich gehe zu den directen Beweisen über, welche zuerst durch Fallexperimente herzustellen versucht sind.

Um einen directen Beweis für die Rotation der Erde zu liefern, benutzte man senkrecht in die Höhe geschossene Kanonenkugeln, die natürlich, da eine Kanonenkugel nicht in allen Punkten der Kanone fest anliegen kann, kein günstiges Resultat ergaben. Newton war der Erste, welcher die Sache wieder aufnahm und der da behauptete, daß ein Körper, der von einer großen Höhe herabfalle, östlich von der Lothlinie auffallen müßte, aber nur in geringem Maße; denn die Kugel behält ihre anfängliche Geschwindigkeit um die Axe, auch wenn sie durch den Fall eine neue Geschwindigkeit erhält. Der englische Physiker Hooke, durch die Idee Newton's geleitet, machte nun im 17. Jahrhundert die ersten Fallversuche, die natürlich bei der geringen Fallhöhe von 27′ nicht gelangen. Erst 112 Jahre nach dieser Zeit wurden die Versuche von dem italienischen Mathematiker Guglielmini in Bologna wieder aufgenommen, bei einer Höhe von 241′. Er fand, daß die Abweichung bei dieser Fallhöhe 7,4‴ nach Osten betrug, und nahm gleichzeitig eine bedeutende Abweichung nach Süden wahr. Diese letztere Abweichung kann nach mathematischen Berechnungen nicht stattfinden, hat also in Nebenumständen ihren Grund gehabt. Die folgenden Versuche wurden von Benzenberg auf der Sternwarte zu Bilk, in Hamburg und die Hauptversuche 1803 in dem Kohlenbergwerke zu Schlebusch, welches damals eine Tiefe von 262′ hatte, angestellt. Hier wurden 28 Versuche gemacht, und es zeigten diese im Mittel eine Abweichung nach Osten von 5,06‴, während nach der Berechnung eine Abweichung von 4,64‴ stattfinden sollte, also eine geringe Differenz von 0,41‴. Laplace hatte diese Beobachtungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung unterworfen und den Ausspruch gethan, daß man 8000 gegen 1 wetten könne, daß sich die Erde um ihre Axe drehe.

Die letzten Versuche wurden vom Professor Reich 1831 in Freiberg angestellt und hierdurch die Benzenberg'schen Versuche bestätigt. Reich machte Fallversuche von einer Fallhöhe von 488′. Es wurden 106 Versuche angestellt und zwar in der Weise, daß eine Kugel, welche gerade durch einen Ring ging, durch kochendes Wasser erwärmt wurde, bis sie endlich erkaltet durchfiel. Nach der Berechnung mußten die Experimente eine Abweichung von 12,17‴ nach Osten geben, ergaben aber nur 10,32‴, also eine Differenz von 1,85‴, welche bei diesen Versuchen als ganz unbedeutend anzusehen ist.

Hieraus geht hervor, daß die Fallexperimente einen directen Beweis für die Axendrehung der Erde liefern. —

Als Versinnlichungsmittel für die Rotation der Erde dient der sogenannte Bohnenberger'sche Apparat, welcher im Wesentlichen aus folgenden Theilen besteht: Aus einem Sphäroid, welches um seine Axe AB leicht beweglich (Fig. II) und mittelst dreier Ringe C, D, E so aufgehangen ist, daß die Mittelpunkte derselben mit dem des Sphäroids zusammenfallen. Die Axe des Ringes C, in welchem sich das Sphäroid bewegt, ist rechtwinklig zu der Axe des Ringes D, und die Axe, um welche der mittlere Ring im äußern E drehbar ist, ist ebenfalls rechtwinklig gegen die Axe des letztern. Das Ganze ist mit dem äußern Ringe E auf einem Stativ befestigt. In dem innern Ringe C ist ein kleines Gewicht g in der Richtung der Rotationsaxe angebracht und am Ende der Axe des Sphäroids ein kleiner Stift zur Befestigung der Schlinge eines starken seidenen Fadens, um ihn auf der Axe aufzuwickeln. Zieht man nun an diesem Faden, während man gleichzeitig den innern Ring C festhält, wird das Sphäroid in Rotation versetzt. Für unsern Zweck, d. h. durch diesen Apparat die Rotation der Erde zu zeigen, befestigt man ihn auf der Platte der Centrifugalmaschine, und man sieht, daß die Axe fortwährend mit sich parallel bleibt, wenn statt des Sphäroids eine Kugel angewendet wird, was nicht genau der Fall ist bei der sphäroidischen Gestalt.

Außerdem aber suchen die Anziehungskräfte der Sonne und des Mondes auf die Lage der Drehungs-Axe der Erde einen Einfluß auszuüben. Wäre nämlich die Erde eine vollständige Kugel und C der Mittelpunkt (Fig. III), NS die Axe derselben, N der Nordpol, S der Südpol, EQ der Aequator, S′ die Sonne, so ist die Ekliptik eine Ebene, welche durch S′C geht und auf der Ebene NCS′ senkrecht steht. Nimmt man nun zwei symmetrisch liegende Punkte P und P′ auf dieser Kugel an, so ist die Intensität der Anziehungskraft, welche die Sonne auf beide Punkte ausübt, wegen der Gleichheit der Entfernungen S′P und S′P′ gleich. Diese beiden Punkte haben demnach gleiches Bestreben, sich der Ebene der Ekliptik zu nähern; es wird also keine Lagenveränderung der Axe bewirkt. Wird aber die Erde als Sphäroid betrachtet, gestaltet sich der Einfluß, welchen die Sonne in Bezug auf die Anziehung ausübt, etwas anders. Nehmen wir z. B. die Stellungen, welche die Erde zur Zeit der Sommer-Sonnenwende und zur Zeit der Winter-Sonnenwende einnimmt, so ist klar, daß in der ersten Stellung die Massenpunkte am Aequator unterhalb der Ekliptik der Sonne näher liegen, also stärker angezogen werden, als die oberhalb der Ekliptik liegenden, daß aber im zweiten Falle die Sache umgekehrt ist. In beiden Stellungen wird also ein Bestreben vorhanden sein, die Lage der Erdaxe zu verändern. Steht aber die Erde der Sonne so gegenüber, daß diese in der Ebene des Aequators sich befindet, also zur Zeit der Frühlings- und Herbstes-Tag- und Nachtgleiche, so ist die Anziehung der Sonne auf die oberhalb und unterhalb der Ekliptik liegenden Massentheile der Erhöhung gleich, es kann demnach keine Lagenveränderung der Erdaxe stattfinden. In jeder andern Stellung ist sie vorhanden und bildet in den zuerst angeführten Fällen ein Maximum. Da nun aber die Erhöhung am Aequator als unbedeutend angenommen werden kann und die Anziehung im umgekehrten quadratischen Verhältnisse der Entfernung stattfindet, ist auch die Kraft, welche die Erdaxe aufzurichten strebt, eine sehr geringe.

Ein Beispiel des fortwährenden Parallelismus der Rotationsaxe hat man an dem Kreisel, denn diese bleibt immer in derselben Lage, welche sie vom Anfang der Drehung erhalten hat. Welche Lage man auch der Ebene, auf welcher sich der Kreisel befindet, geben mag, die Axe desselben ändert ihre Lage nicht, sondern das respective Gewicht zieht denselben mit vertical bleibender Axe, wenn die Stellung durch einen horizontalen Stoß bewirkt war, hinunter. Anders aber verhält sich die Sache, wenn ein Kreisel mit abgerundeter Axe auf einer ebenen Platte in Rotation versetzt wird. Er rollt in einer spiralförmigen Linie fort, denn das untere, rotirende Ende muß nun der Reibung wegen rollen. Das untere Ende zieht die ganze Masse M mit sich, und das obere Ende bleibt, seines Beharrungsvermögens wegen, auf der Stelle zu rotiren, gegen das untere Ende zurück. Die Axe kann also beim Fortrollen nicht parallel mit sich selbst bleiben, ihre Lage ändert sich stetig, und deshalb kann das untere Ende nur in einer krummen Linie rollen. Das Moment der Tangentialkraft ist größer, als das Moment des Gewichtes, und diese Beziehung muß nothwendig stattfinden, wenn der Kreisel nicht fallen soll; die Axe wird allmälig aufgerichtet. Denn ist α (Fig. IV) der Neigungswinkel der Axe zur Verticalen und $M = CD$ das Gewicht des Kreisels, so sind die beiden Componenten $CE = M \operatorname{tg} \alpha$ und CH.

$M \operatorname{tg} \alpha$ wirkt der Tangentialkraft entgegen, $CH = BO$ wirkt in der Richtung der Axe. Zerlegt man nun wieder BO in die beiden Componenten $PB = M$ und $BQ = M . \operatorname{tg} \alpha$, so wirkt PB senkrecht zur Plattenebene. Ist $F > M . \operatorname{tg} \alpha$, so richtet sich die Axe nothwendig auf. Diese Erscheinung stimmt vollständig mit der Veränderung der Axenlage der Erde in Bezug auf die sphäroidische Gestalt derselben überein. Die Präcession kann man sich nun sehr leicht versinnlichen. Ist nämlich die Axe NS (Fig. V) des rotirenden Körpers schief, so bewirkt ein abwärts gehender Druck der Scheibe bei A einen Druck bei B nach BD, bei E nach EF. Es findet demnach eine Oscillation bei N abwärts statt, dann aus der Ebene der Platte heraus gegen das Auge des Beobachters. Ist der Druck in A ein constanter, so werden diese Oscillationen unendlich klein, und N bewegt sich kreisförmig um seine frühere Lage in gleicher Richtung mit der Rotation der Scheibe. Wenn aber der Druck bei A nach aufwärts geht, also die Axe vertical zu stellen strebt, so erfolgt die Bewegung von N nach entgegengesetzter Richtung. Die Sonne sucht nun, wegen der Abplattung der Erde, ihre Axe, die gegen die Erdbahn unter 66° 32′ geneigt ist, gleichfalls senkrecht zu stellen, und bewirkt so die Bewegung der Pole oder die Präcession. Durch die Anziehungskraft des Mondes entsteht eine periodische Bewegung, die Nutation oder das Wanken der Erdaxe.

Obschon nun Newton, wie im Eingange dieser Zeilen bemerkt worden, die Verschiedenheit der Schwere und den verschiedenen Gang der Uhren als augenfälligen Beweis sowohl für die Rotation als die Abplattung der Erde hinstellte, ebenso Benzenberg und Laplace durch Fallversuche das Problem zu lösen versuchten, d. h. einen directen Beweis für die Axendrehung der Erde zu liefern; konnte doch eine durchgängige Richtigkeit für ihre Prämissen, so übereinstimmend auch bisweilen die angestellten Experimente waren, nicht unmittelbar gefolgert und in so evidenter Weise dem Beobachter vor Augen geführt werden, als es durch den Foucault'-Pendelversuch möglich gemacht wurde, wie die Theorie in der Folge nachgewiesen hat. Es mag wohl dem Beobachter, welcher zuerst die Veränderung der Pendelebene zum Beweise für die Rotation der Erde benutzt hat, der analytische Beweis Poisson's, welchen derselbe über den Gang der Wurfgeschosse mit Rücksicht auf die Bewegung der Erde lieferte, als Basis gedient haben; wenigstens hat er die Uebereinstimmung seines Versuches mit den von Poisson angestellten Berechnungen selbst ausgesprochen.

Wenn bis zu dem Zeitpunkte, wo Foucault sein Experiment anstellte, die Pendelbeobachtungen die Dauer der Schwingungen unter den verschiedenen Einflüssen zum Gegenstande der Untersuchung hatten und keine Rücksicht auf die Abweichung der Schwingungsebene genommen wurde, konnte man bei Vernachlässigung dieses Hauptmomentes nicht im Stande sein, nähern Aufschluß über die Rotation der Erde zu ertheilen, da gerade dieses Moment es ist, welches mit der größten Evidenz den gewünschten Aufschluß gibt. — Das Experiment in der einfachsten Gestalt, d. h. von der Umlaufsbewegung der Erde abstrahirt, den Beobachter an den Pol versetzt und als Aufhängepunkt des Pendels einen absolut festen, welcher in der verlängerten Erdaxe liegt, angenommen, so daß also die das Pendel tragende Stütze keinen Theil an der täglichen Bewegung der Erde nahm, war schon dazu geeignet, obgleich sie nur als rein ideale Bedingungen angesehen werden mußten, bei den später angestellten Versuchen als Richtschnur zu dienen und die Ausführung des Beweises für die einzelnen geographischen Breiten zu bewerkstelligen. Es reichten aber diese Vorstellungen nicht aus, und es mußte angenommen werden, daß alle Theile auf einem beweglichen Boden befindlich seien, so daß also Alles an der Rotation der Erde theilnehmen und schon dadurch eine Ablenkung der Schwingungs-Ebene des Pendels stattfinden muß; daß ferner die Luft auf die Bewegung eines Massenpunktes einen wesentlichen Einfluß ausübe und auch dadurch eine Ablenkung, respective eine Schwankung hervorgerufen werde. Dieser letztere Punkt war es nun gerade, welcher den Scharfsinn der Mathematiker in Anspruch genommen und Beweise in der verschiedensten Form hervorgerufen hat.

Man hat practisch nachgewiesen, daß die Schwingungsebene durch die Torsion des Fadens, im Fall derselbe durchaus homogen ist, um ein ganz unbedeutendes Moment abgelenkt wird, wie in der Schlußbemerkung gezeigt werden soll. Die Experimente haben zu folgenden Resultaten geführt:

Wird die Kugel, welche die Gestalt der Erde versinnlichen soll, und an welcher am Pole m (Fig. VI) ein Pendel mit dem Massenpunkte b so befestigt ist, daß derselbe sich frei bewegen kann, in der Richtung der Pfeile in Rotation versetzt, während man den Massenpunkt nach hz in Bewegung setzt, so daß also das Gestell mit dem Pendel an der Bewegung der Kugel theilnehmen muß, sieht man, daß die Pendelebene unausgesetzt dieselbe Richtung $ab'bb''$ beibehält, während die Kugel eine ganze Umdrehung in entgegengesetzter Richtung durchlaufen hat. Die scheinbare Drehung der Schwingungsebene beträgt demnach am Pole nach einer Umdrehung der Erde 360°. Noch augenscheinlicher ist die Wirkung bei dem einfachen Apparate (Fig. VII), welcher ohne Erklärung verständlich sein wird. Diesen Apparat kann man in die verschiedensten Richtungen und Lagen versetzen, ohne die einmal vorhandene Schwingungsrichtung zu verändern. Schwingt z. B. das Pendel ab in der Richtung M und dreht man den Apparat in der Richtung N, so übt diese Drehung keinen Einfluß auf die Schwingungsebene des Pendels aus, d. h. die Schwingungsebene bleibt dieselbe.

Bringt man ferner das Pendel in einem Punkte an, der sich dem Aequator genähert hat, so daß also die Horizontalebene eine immer schiefere Lage gegen die Erdaxe annimmt (Fig. VIII), complicirt sich selbstredend die Aufgabe, und das Pendel beschreibt einen Kegel, so daß die scheinbare Ablenkung in 24^h Sternzeit, je nach der geographischen Breite, einen größern oder kleinern Kreisbogen beschreibt, welcher am Aequator zu Null werden muß, weil die mit der Erdaxe parallel gehende Horizontallinie, auf welcher die Schwingungs-Ebene des Pendels vertical steht, die Oberfläche eines geraden Cylinders beschreibt, so daß die Schwingungs-Ebene fortwährend mit sich selbst parallel sein muß, also gar keine Abweichung zeigen kann. Auch hierfür kann eine einfache Construction, welche das ausgesprochene Raisonnement veranschaulicht, angegeben werden, aus welcher die Ablenkung für denselben Breitengrad und verschiedene Meridiane ersichtlich ist, so daß hieraus die Abhängigkeit der Ablenkung der Schwingungsebene von der geographischen Breite constatirt wird. — Es mag die Schwingungsebene ihre Richtung in der jedesmaligen Meridianebene haben, so daß die auf den Horizont projicirte Schwingungsebene die verlängerte Erdaxe trifft. Ist nun ab (Fig. IX) die Richtung der Schwingungsebene des Pendels unter einem beliebigen Meridian, so wird die Abweichung gemessen durch $\varphi = \varphi'$, also ab $\|$ mn.

Wenn man nun das Pendel unter einem niedrigern Breitengrade schwingen läßt, wird der Winkel $\psi = \psi'$ immer kleiner, es treffen sich die Verlängerungen in immer größeren Entfernungen von dem Erdmittelpunkte, und dieser Winkel wird sich am Aequator auf Null reduciren, d. h. es ist ab $\|$ a'b', also gar keine scheinbare Abweichung der Pendelebene am Aequator bemerkbar. — Durch diese Annullirung der Schwingungsebene am Aequator geht von selbst hervor, daß ein Umschlag auf der andern Erdhalbkugel in der entgegengesetzten Richtung erfolgen muß, $\alpha = \alpha'$.

Foucault sprach, gestützt auf das Experiment und die vielfachen Beobachtungen, das Gesetz aus: „Die Winkelbewegung der Schwingungsebene ist gleich der Winkelbewegung der Erde in derselben Zeit, multiplicirt mit dem Sinus der geographischen Breite."

Bevor ich zu der Angabe des Foucault'schen Pendelversuches übergehe, will ich noch in aller Kürze einiger Apparate Erwähnung thun, welche als mechanische Hülfsmittel das Gesetz in der Hauptsache bestätigen.

Eisenlohr bediente sich, um ohne mathematischen Beweis das Gesetz für die Axendrehung der Erde zu begründen, des folgenden Apparates. Ein eiserner Reifen NASQ (Fig. X) steht auf einer in 360° getheilten kreisförmigen Unterlage, welche sich auf einer kreisförmigen Tischplatte befindet, auf welcher ebenfalls eine Gradeintheilung angebracht ist; a und b sind Metallhülsen, welche sich auf dem Metallreifen beliebig verschieben und durch Metallschrauben an demselben befestigen lassen. An diesen Hülsen ist ein gespannter Hosenträgerdraht befestigt, in dessen Mitte sich eine kleine hölzerne Kugel befindet. Diese Kugel schwingt, wenn der Draht in Schwingungen versetzt wird, in derselben Richtung wie der Draht hin und her. Dreht man nun den eisernen Reifen um die Linie NS, welche die Erdaxe darstellt, so bedeutet AQ den Aequator und der Mittelpunkt der kleinen Kugel den Erdmittelpunkt. Wird der Draht in N und S befestigt, so schwingt derselbe senkrecht zur Ebene des Reifens, wenn man den letztern um 90° dreht. Befestigt man denselben aber in a und b, so daß der Bogen bQ = aA = 30°, der Sinus also $\frac{1}{2}$ ist, nimmt man wahr, wenn man den Draht in der Ebene des Reifens schwingen läßt und den letztern um 180° dreht, daß die Schwingungen zur Ebene des Reifens senkrecht, oder nur einen Winkel von $\frac{1}{2} . 180°$ bilden.

Ein zweiter, zum Beweise für die scheinbare Veränderung der Schwingungsebene des Pendels construirter Apparat ist der Wheatston'sche, welcher bis zur Evidenz die durch Rechnung gefundenen Resultate zur Anschauung bringt und mit genau vorgenommenen directen Pendelbeobachtungen übereinstimmt. Mit

Hülfe dieses Apparates ergibt sich vollkommen das Gesetz, daß unter den Polen in Folge des Beharrungs-Vermögens die Schwingungsebene den vollkommenen Parallelismus während einer Umdrehung der Erde beibehält, daß dies aber in demselben Grade desto weniger der Fall ist, je mehr man sich dem Aequator nähert, und endlich am Aequator selbst diese Abweichung sich auf Null reduciren muß. Wenn der Draht mit seiner Umdrehungsaxe zusammenfällt, und man setzt ihn z. B. von N nach S in Schwingungen, so verharrt er in denselben, welche Rotation ihm auch ertheilt wird, so daß die Schwingungsebene in Bezug auf die Axe des Drahtes mit derselben Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung sich bewegt. — Bei 30° Neigung gegen den Horizont, also 60° gegen die Rotationsaxe, macht die Schwingungsebene eine Umdrehung, während das Rad zwei macht; bei 19° 30′ macht die Schwingungsebene wiederum eine Umdrehung, das Rad drei, bei 14° 30′ vier u. s. f. Bei 0° findet keine Umdrehung der Schwingungs-Ebene statt. Es ist aber $\sin 90^\circ : \sin 30^\circ : \sin 19^\circ 30' : \sin 14^\circ 30' : \sin 0^\circ = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : 0$.

Es verhalten sich demnach die Schwingungszeiten respect. wie $1 : 2 : 3 : 4 : \ldots \infty$.

Nicht weniger werth hervorgehoben zu werden ist der von Krüger angegebene Apparat, welchen derselbe in den Annalen der Physik und Chemie von Poggendorf beschrieben hat, und durch welchen die Abweichung der Schwingungsebene mittelst eines in horizontaler Axe im Kreise herumschwingenden Elektromagneten, der seine Drehung um eine Axe vollführen kann, die auf die jedesmalige geographische Breite des Beobachtungs-Ortes eingestellt werden muß, mit ziemlicher Genauigkeit für kleinere Zeitabschnitte erkannt werden könnte. Die Kreisfläche des rotirenden Elektromagneten sollte die nach den Gesetzen der Trägheit beharrende Ebene im Raume vorstellen. — Der Gedanke ist freilich gut, aber die Ausführung desto schwieriger, da es wohl nicht leicht im Bereiche der Möglichkeit liegt, den Apparat in allen seinen einzelnen Theilen so herzustellen, daß eine gleichmäßige Rotation, d. h. keine Störung im Gange des Zeigers, hervorgerufen wird; denn eine so gleichmäßige Vertheilung der Massentheile, deren Schwungkraft ja bei dem Apparate in Betracht gezogen ist, ist praktisch rein unmöglich und ein unregelmäßiger Gang des angebrachten Zeigers eine natürliche Folge.

Es mag hier die Beschreibung der Experimente, welche ich vierzehn Tage hintereinander mit zwei Pendeln von verschiedener Länge unter einer Breite von 53° 12′ angestellt habe, Platz finden und das Resultat mitgetheilt werden. — Die Versuche wurden mit zwei Pendeln von den Längen 26′ und 20′ je sieben Tage vorgenommen und die Beobachtungen täglich angestellt, und zwar in einem massiven Gebäude, welches vor jeder Erschütterung geschützt war. Die Kugel bestand aus Eisen und war genau regulirt, indem sie nach Abfeilung einiger Massentheilchen durch Prüfung auf Quecksilber den Anforderungen entsprach. Diese Kugel wickelte ich in einen feinen Klavierdraht; hierauf wurde eine Oese angelöthet zur Befestigung an einen Klavierdraht und an dem entgegengesetzten Ende ein Stift von Eisen angebracht, um eine genauere Marquirung auf der Scala zu erzielen. Das Gesammtgewicht der so eingerichteten Kugel betrug 6,1 Pfund; der erste Draht, den ich benutzte, hatte bei einer Länge von 26′ ein Gewicht von 0,476 Pfund. An der Decke wurde der Aufhängepunkt so eingerichtet, daß sich der Draht frei um seine Axe bewegen konnte, indem sich ein ziemlich feiner Kegel, in welchem der Draht befestigt war, in einer stählernen runden Oeffnung, welche mit gereinigtem Mineralöl bestrichen war, bewegte. Hierauf wurde eine Scala auf einem runden Brette von 4′ Durchmesser hergerichtet; der Kreis wurde in 360° getheilt und jeder Grad wieder in drei Theile, so daß ich ziemlich genau $\frac{1}{3}^\circ$ ablesen konnte. An der Scheibe wurden die Linien, welche den Kreis in die Quadranten theilten, stark marquirt, mit N, S, W, O bezeichnet und das Ganze so aufgestellt, daß die an der Kugel angebrachte Spitze genau über dem Mittelpunkte (ungefähr 1″ über demselben) stand, nachdem vorher die genaue Horizontalebene dieses Gestelles durch eine Wasserwage fixirt war. Hierauf wurde das Pendel eingerichtet, indem ich ein zweites und drittes Pendel, kleine Bleikugeln an Zwirnsfäden, genau über der Linie von N nach S anbrachte. Ich brachte nun das Hauptpendel aus der Gleichgewichtslage, befestigte es so eingerichtet an der Wand mit einem feinen Faden und wartete, bis alle Bewegungen, die bis dahin vorhanden waren, ihr Ende erreicht hatten, brannte hierauf den Faden unmittelbar an der Pendelkugel durch, und die Schwingungen nahmen ihren Anfang von N nach S. Ich habe mich überzeugt, daß die Dauer einer Schwingung mit der eines mathematischen Pendels ziemlich übereinstimmte, daß also die Nebenaccidenzien erfüllt waren; denn die Dauer zweier Schwingungen betrug 6″, also etwas mehr als die Dauer der Schwingungen des mathematischen Pendels, welches aus der Formel

$$\lambda = \frac{m + \frac{1}{3}\mu}{m + \frac{1}{2}\mu} \cdot 1,$$

in welcher λ die Länge des mathematischen Pendels, m das Gewicht der Kugel, μ das Gewicht des Drahtes und l dessen Länge bedeutet, sein müßte:

$$\lambda = \frac{6{,}1 + \frac{0{,}476}{3}}{6{,}1 + \frac{0{,}476}{2}} \cdot 26 = 25{,}674'.$$

Da nun aber die Länge des Secundenpendels vom Aequator nach den Polen hin dem Quadrate der Sinus der geographischen Breite proportional zunimmt, so ist mit Berücksichtigung der Abplattung der Erde, wie sie sich aus Gradmessungen ergibt:

$$L = L_0\ (1 + 0{,}00539 \sin^2 \varphi) \text{ preuß. Fuß},$$
$$L = 3{,}15695\ (1 + 0{,}00539 \sin^2 53^0\ 12') = 3{,}1678'.$$

Jede Oscillation mußte demnach dauern:

$$\sqrt{\frac{25{,}674}{3{,}1678}} = 2{,}8468''.$$

Die Resultate stellten sich nun folgendermaßen heraus und zwar mit dem Pendel von 26′ Länge für eine Schwingungszeit von $2^h\ 12'$.

I. Zeit:		Drehung der Schwingungsebene:
	14. August	26° 20′.
	15. „	26° 11,5′.
	16. „	26° 26′.
	17. „	26° 19′.
	18. „	26° 18′.
	19. „	26° 22,5′.
	20. „	26° 18′.
	Mittel der Abweichung	26° 19,3′ auf die Zeit 2^h 12′.

II. Pendel von 20′ Länge, Schwingungsdauer 1^h 56′.		
	21. August	23° 10,5′.
	22. „	23° 12′.
	23. „	23° 9,5′.
	24. „	23° 10′.
	25. „	23° 13′.
	26. „	23° 11′.
	27. „	23° 10,5′.
	Mittel der Abweichung	23° 10,9′ auf die Zeit 1^h 56′.

Das erste Pendel gab auf 24^h eine Abweichung von 287° 8,7′, das zweite von 287° 46,3′.

Die Abweichung der Schwingungsebene mußte bei einer geographischen Breite von 53° 12′ betragen:

$$360 \cdot \sin 53^0\ 12' = 0{,}8007 \cdot 360 = 288{,}252^0 = 288^0\ 15'\ 7{,}2''.$$

Das genaueste Resultat, so mangelhaft dasselbe auch noch erscheinen mag, habe ich mit dem Pendel von 20′ erreicht. Es konnten die Versuche bei den geringen Hülfsmitteln, die mir zu Gebote standen, kein genaueres Resultat gewähren, trotzdem ich von zehn zu zehn Minuten die Beobachtungen anstellte und auf die geringfügigsten Umstände mein Augenmerk richtete.

Mit der Aufstellung der vorstehenden Versuchsreihen möge dieser Theil geschlossen sein, und ich will jetzt zu einer weiteren Ausführung der Aufgabe schreiten.

Es finden die scheinbare Bewegung der Schwingungsebene des Pendels um die Verticale des Aufhängepunktes und das hierbei zu berücksichtigende Gesetz der Winkelgeschwindigkeit ihre Erklärung, wenn man die Bewegung rein geometrisch betrachtet, welche diese Ebene bei der rotirenden Bewegung, verbunden mit der Schwere und Trägheit des Pendels, machen muß.

Ein einfacher geometrischer Beweis für die Berechnung der täglichen Drehung der verticalen Schwingungsebene für einen bestimmten Ort, aus welcher das von Foucault ausgesprochene Gesetz unmittelbar hervorgeht, würde folgender sein. Man berechnet die Summe der unendlich kleinen Winkel, welche die Spitze O (Fig. XI) des beschriebenen Kegels bilden. Wenn nun ψ die geographische Breite des Beobachtungsortes ist, r der Erdradius, ϱ der Radius des Parallelkreises, welcher durch den Meridian des Beobachtungsortes P geht; ferner $OT = l$, so hat man:

$$\varrho = r \cos \psi,$$
$$l = r \operatorname{cotg} \psi;$$

die Seitenfläche des Kegels ist aber $= \varrho \pi l$. Wenn man nun diese Fläche abwickelt, erhält man einen Kreissector, dessen Radius l (Fig. XII) und dessen Centriwinkel offenbar gleich der Summe der n für ein unendlich kleines Zeitintervall unendlich kleinen Winkel ist, welche die Spitze O bilden. Ist nun die Summe dieser Winkel $= \Sigma$, so ist $\alpha : 2 l \pi = \Sigma : 360$.

$$\alpha = \frac{2 l \pi \Sigma}{360}.$$

$$\text{Inhalt} = \frac{2 l \pi \Sigma}{360} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l^2 \pi \Sigma}{360}.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber $J = \varrho \pi l$; also $\frac{l^2 \pi \Sigma}{360} = \varrho \pi l$, oder $\frac{l \Sigma}{360} = \varrho$;

$\Sigma = \frac{360 \varrho}{l} = \frac{r \cos \psi}{r \operatorname{cotg} \psi} \cdot 360 = 360^0 \sin \psi$ für die geographische Breite ψ.

Man gewinnt auch durch folgenden einfachen Beweis, wie er von Garthe angegeben ist, eine anschauliche Vorstellung von der Bewegung der Schwingungsebene. Sei der Punkt M (Fig. XIII) der Mittelpunkt der Himmelssphäre, in welchem ein Pendel schwingt, PP' die Weltaxe, P der Himmelspol, E das Zenith des Ortes zu der Zeit t während einer Bewegung des Pendels, ME die Verticale, AEB der Himmelsmeridian, CE ein Quadrant des Verticalkreises, an welchem die Schwingungsebene EMC die Himmelssphäre trifft; so ist der Bogen BC, d. h. $B\hat{E}C = \alpha$ das Azimuth der Schwingungsebene, welches als Function der Zeit t oder des Winkels, um welchen sich die Erde während dieser Zeit gedreht hat, bestimmt werden muß. Das Zenith E beschreibt vermöge der Rotation der Erde ein Parallel der Himmelskugel um den Pol P und schreitet mit derselben Geschwindigkeit fort, mit welcher die Erde sich um ihre Axe dreht. Wenn diese Drehung ψ^0 in der Zeit t beträgt und durch ihre Fortsetzung das Zenith während des Zeitelementes dt nach F gelangt, ist $E\hat{P}F = d\psi$. Es kommt nun die Verticale EM in die Lage MF, wogegen die Pendelmasse vermöge ihrer Trägheit in der Richtung MC beharrt; die Schwingungsebene gelangt so in die Lage FMC. Sei FD $= EC = 90^0$, so schneidet die Schwingungsebene den neuen Horizont in DM, und auf diesen Horizont reducirt sich die Richtung CM in dem Zeitelement dt. Das sphärische Dreieck CPE geht über in DPF. Im Dreieck CPE ist PE die Zenithdistance des Poles, das Complement der Polhöhe. Ist diese letztere oder, was dasselbe ist, die geographische Breite $= \varphi$, so ist $PE = 90 - \varphi$.

Man hat nun folgende Gleichungen:

$$\cos PE \, . \cos \hat{P} = \sin PE \, . \operatorname{cotg} PC - \sin \hat{P} \, . \operatorname{cotg} PEC,$$
$$\operatorname{cotg} PEC = - \operatorname{cotg} \alpha,$$
$$\sin PE = \cos \varphi,$$
$$\cos PE = \sin \varphi,$$
$$\sin \varphi \cos \hat{P} = \cos \varphi \, . \operatorname{cotg} PC + \sin \hat{P} \, . \operatorname{cotg} \alpha.$$

Aendert sich nun P in $P - d\psi$, so ändert sich das Azimuth α in $\alpha - d\alpha$; PE und PC bleiben unverändert. Differentiirt man nun die obige Gleichung, so erhält man, da φ und PC constant sind:

$$- \sin \varphi \sin \hat{P} \, . \, d\psi = \cos \hat{P} \, . \operatorname{cotg} \alpha \, . \, d\psi - \frac{\sin P \, . \, d\alpha}{\sin^2 \alpha},$$
$$\sin \varphi \sin \hat{P} \, . \, d\psi = \frac{\sin \hat{P} \, . \, d\alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos \hat{P} \, . \operatorname{cotg} \alpha \, . \, d\psi,$$
$$\sin \varphi \, . \sin^2 \alpha \, . \sin \hat{P} \, . \, d\psi = \sin \hat{P} \, . \, d\alpha - \cos \hat{P} \operatorname{cotg} \alpha \, . \sin^2 \alpha \, d\psi,$$
$$\sin \varphi \sin^2 \alpha \, d\psi = d\alpha - \operatorname{cotg} \hat{P} \, . \cos \alpha \sin \alpha \, . \, d\psi,$$
$$\operatorname{cotg} \hat{P} = \sin \varphi \, . \operatorname{cotg} \alpha,$$
$$\sin \varphi \sin^2 \alpha \, . \, d\psi = d\alpha - \sin \varphi \operatorname{cotg} \alpha \cos \alpha \sin \alpha \, d\psi,$$
$$\sin \varphi \sin^2 \alpha \, . \, d\psi = d\alpha - \sin \varphi \cos^2 \alpha \, . \, d\psi,$$
$$d\alpha = \sin \varphi \, (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \, d\psi,$$
$$d\alpha = \sin \varphi \, . \, d\psi,$$
$$\alpha = \psi \sin \varphi,$$
$$\alpha : \psi = \sin \varphi : 1.$$

Die Winkelgeschwindigkeit, womit sich die Schwingungsebene des Pendels scheinbar um die Verticale des Aufhängepunktes dreht, verhält sich zur Umdrehung der Erde in derselben Zeit, wie der Sinus der geographischen Breite zu 1.

Die auf rein geometrische Anschauung gestützten Beweise von Coombe und Marignac für die Ablenkung der Schwingungsebene des Pendels durch die Umdrehung der Erde haben das von Foucault ausgesprochene Gesetz zur Genüge bestätigt; freilich nur für die einfachsten Fälle, indem von allen Nebenaccidenzien, die nothwendigerweise zu berücksichtigen sind, abstrahirt ist.

Die Grundbedingungen, an welche die Bewegung geknüpft ist, sind: Sie muß durch die Verticale des Aufhängepunktes gehen und gleichzeitig durch die Horizontalebene, nach deren Richtung die Schwingungen erfolgen. Es wird nun erübrigen, zuvörderst das ideale Pendel mit Rücksicht auf die Gestalt und Bewegung der Erde einer Discussion zu unterwerfen. Von dem Einfluß, welchen die Bewegung der Erde um die Sonne ausübt und die des Sonnensystems im Weltenraume, in Bezug auf die Bewegung der Körper auf der Oberfläche, wird abgesehen, da bereits in evidenter Weise nachgewiesen worden, daß diese Wirkung als höchst unbedeutend vernachlässigt werden kann.

Es muß angenommen werden, daß das Pendel ein rein mathematisches ist, d. h. eine schwerlose Linie, an deren Endpunkte ein schwerer Punkt befestigt ist; es muß sich dasselbe um den Aufhängepunkt nach allen Richtungen hin frei bewegen können. Wir erhalten zwei Coordinatensysteme, das eine für den Aufhängepunkt, das andere für die Masse des Punktes.

Seien die Coordinaten der Masse xyz, des Aufhängepunktes $x_1 \, y_1 \, z_1$; φ die geographische Breite des Beobachtungsortes M (Fig. XIV).

Die Ebene der xy gehe mit der Aequator-Ebene WO parallel, die z-Axe mit der Axe der Erde NS; A sei der Mittelpunkt der Erde. Man kann zweitens das Axensystem so annehmen, daß man den Horizont als xy-Axe, die Axe, welche hierauf senkrecht steht, d. h. durch das Zenith geht, als z-Axe ansieht, und kann nun durch Drehung das eine Coordinatensystem in das andere überführen. Seien die Coordinaten dieses Beobachtungsortes respective $\xi \eta \zeta$ und $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$, so ist

$$x = \alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta,$$
$$y = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta,$$
$$z = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta,$$

$$x_1 = \alpha \xi_1 + \beta \eta_1 + \gamma \zeta_1,$$
$$y_1 = \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \eta_1 + \gamma_1 \zeta_1,$$
$$z_1 = \alpha_2 \xi_1 + \beta_2 \eta_1 + \gamma_2 \zeta_1,$$

und wir gelangen so, wenn wir die trigonometrischen Functionen oder, was dasselbe ist, für $\alpha \beta \gamma$, $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ und $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ ihre Werthe setzen, zu der Gleichung:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = l^2$$

oder $$(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2 = l^2.$$

Discutiren wir zuvörderst die Gleichung $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = l^2$.

Man kann die Masse des Pendels als einen sich frei bewegenden Körper ansehen. Die Cosinus der Winkel zwischen dem Pendel und den Coordinatenaxen sind $\frac{x - x_1}{l}$, $\frac{y - y_1}{l}$, $\frac{z - z_1}{l}$, und die Kräfte, welche auf die Massenpunkte des Pendels wirken, sind die Componenten der Schwere $\frac{gx}{r}$, $\frac{gy}{r}$ und $\frac{gz}{r}$, worin r den Erdhalbmesser bedeutet. Ist nun w der Widerstand des Fadens, so sind die Componenten desselben: $\frac{-w(x-x_1)}{l}$, $\frac{-w(y-y_1)}{l}$, $\frac{-w(z-z_1)}{l}$, die also die Coordinaten zu vermindern streben. Ist nun die Zeit t, so sind die Gleichungen für die veränderliche Bewegung, vom Widerstande der Luft abstrahirt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gx}{r} - \frac{w(x - x_1)}{l},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{gy}{r} - \frac{w(y - y_1)}{l},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{gz}{r} - \frac{w(z - z_1)}{l},$$

oder auch: $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{gx}{r} + \frac{w(x - x_1)}{l} = 0.$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{gy}{r} + \frac{w(y - y_1)}{l} = 0.$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{gz}{r} + \frac{w(z - z_1)}{l} = 0.$$

Nehmen wir nun das Coordinatensystem in Bezug auf den Horizont, welches ich mit $\xi \eta \zeta$ und $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ bezeichnet habe, als beweglich an, dagegen $x y z$ und $x_1 y_1 z_1$ als fest und entwickeln die Gleichungen für dieses erste System, so erhalten wir durch Multiplication und nachherige Addition:

$$\text{I.}\quad \alpha \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{gx}{r} + \alpha w \frac{(x - x_1)}{l} = 0.$$
$$\alpha_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_1 \frac{gy}{r} + \alpha_1 w \frac{(y - y_1)}{l} = 0.$$
$$\alpha_2 \frac{d^2z}{dt^2} + \alpha_2 \frac{gz}{r} + \alpha_2 w \frac{(z - z_1)}{l} = 0.$$

$$1)\quad \alpha \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{g\xi}{r} + w \frac{(\xi - \xi_1)}{l} = 0.$$

$$\text{II.}\quad \beta\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{gx}{r}+\beta w\frac{(x-x_1)}{l}=0.$$

$$\beta_1\frac{d^2y}{dt^2}+\beta_1\frac{gy}{r}+\beta_1 w\frac{(y-y_1)}{l}=0.$$

$$\beta_2\frac{d^2z}{dt^2}+\beta_2\frac{gz}{r}+\beta_2 w\frac{(z-z_1)}{l}=0.$$

$$2)\ \beta\frac{d^2x}{dt^2}+\beta_1\frac{d^2y}{dt^2}+\beta_2\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{g\eta}{r}+w\frac{(\eta-\eta_1)}{l}=0.$$

$$\text{III.}\quad \gamma\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{gx}{r}+\gamma w\frac{(x-x_1)}{l}=0.$$

$$\gamma_1\frac{d^2y}{dt^2}+\gamma_1\frac{gy}{r}+\gamma_1 w\frac{(y-y_1)}{l}=0.$$

$$\gamma_2\frac{d^2z}{dt^2}+\gamma_2\frac{gz}{r}+\gamma_2 w\frac{(z-z_1)}{l}=0.$$

$$3)\ \gamma\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma_1\frac{d^2y}{dt^2}+\gamma_2\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{g\zeta}{r}+w\frac{(\zeta-\zeta_1)}{l}=0.$$

Es erübrigt jetzt noch, die zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ und $\frac{d^2z}{dt^2}$ herauszuschaffen und sie durch die von $\xi\eta\zeta$ auszudrücken.

Der veränderliche Winkel, welchen die Größen $\alpha\alpha_1\alpha_2$, $\beta\beta_1\beta_2$, $\gamma\gamma_1\gamma_2$ enthalten, und welcher bei der Rotation der Erde der Zeit proportional zunimmt, sei ϑ, so ist das Element der Winkelgeschwindigkeit bei der Rotation $=\frac{d\vartheta}{dt}=\mu$.

Differentiiren wir nun die im Eingange des Beweises angeführten Gleichungen:

$$x=\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta,$$
$$y=\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta,$$
$$z=\alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2\zeta$$

zweimal hintereinander und berücksichtigen, daß

$$\alpha=\cos\vartheta,\ \alpha_1=\sin\vartheta,\ \alpha_2=0,$$
$$\beta=-\sin\vartheta\sin\varphi,\ \beta_1=\cos\vartheta\sin\varphi,\ \beta_2=\cos\varphi,$$
$$\gamma=\sin\vartheta\cos\varphi,\ \gamma_1=\cos\vartheta\cos\varphi,\ \gamma_2=\sin\varphi$$

ist, erhält man:

$$1)\ \frac{d^2x}{dt^2}=\xi\frac{d^2\alpha}{dt^2}+2\frac{d\alpha}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt}+\alpha\frac{d^2\xi}{dt^2}+2\frac{d\beta}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt}+\eta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\beta\frac{d^2\eta}{dt^2}+\zeta\frac{d^2\gamma}{dt^2}+2\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{d\zeta}{dt}+\gamma\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

$$2)\ \frac{d^2y}{dt^2}=\xi\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}+2\frac{d\alpha_1}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt}+\alpha_1\frac{d^2\xi}{dt^2}+2\frac{d\beta_1}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt}+\eta\frac{d^2\beta_1}{dt^2}+\beta_1\frac{d^2\eta}{dt^2}+\zeta\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}+2\frac{d\gamma_1}{dt}\cdot\frac{d\zeta}{dt}+\gamma_1\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

$$3)\ \frac{d^2z}{dt^2}=\xi\frac{d^2\alpha_2}{dt^2}+2\frac{d\alpha_2}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt}+\alpha_2\frac{d^2\xi}{dt^2}+2\frac{d\beta_2}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt}+\eta\frac{d^2\beta_2}{dt^2}+\beta_2\frac{d^2\eta}{dt^2}+\zeta\frac{d^2\gamma_2}{dt^2}+2\frac{d\gamma_2}{dt}\cdot\frac{d\zeta}{dt}+\gamma_2\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Nach den vorigen Formeln ist aber:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\mu^2 \cos\vartheta,\quad \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = -\mu^2 \sin\vartheta,\quad \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = +\mu^2 \sin\vartheta \sin\varphi,\quad \frac{d^2\beta_1}{dt^2} = -\mu^2 \cos\vartheta \sin\varphi,\quad \frac{d^2\beta_2}{dt^2} = 0.$$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\mu^2 \sin\vartheta \cos\varphi,\quad \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} = +\mu^2 \cos\vartheta \cos\varphi,\quad \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} = 0.$$

Es ist demnach:

$$\alpha \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{g\xi}{r} + w\frac{(\xi-\xi_1)}{l} = -\xi\mu^2\cos^2\vartheta - 2\mu \sin\vartheta \cos\vartheta \frac{d\xi}{dt} +$$
$$\cos^2\vartheta \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\mu\cos^2\vartheta \sin\varphi \frac{d\eta}{dt} + \eta\mu^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta \frac{d^2\eta}{dt^2} -$$
$$\mu^2\zeta \sin\vartheta \cos\varphi \cos\vartheta + 2\mu\cos^2\vartheta\cos\varphi \frac{d\zeta}{dt} + \sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \xi\mu^2\sin^2\vartheta +$$
$$2\mu\cos\vartheta\sin\vartheta \frac{d\xi}{dt} + \sin^2\vartheta \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\mu\sin^2\vartheta\sin\varphi \frac{d\eta}{dt} - \eta\mu^2\cos\vartheta\sin\varphi\sin\vartheta +$$
$$\cos\vartheta\sin\varphi\sin\vartheta \frac{d^2\eta}{dt^2} + \zeta\mu^2\cos\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi + 2\mu\sin^2\vartheta\cos\varphi \frac{d\zeta}{dt} - \cos\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi \frac{d^2\zeta}{dt^2}$$
$$+ \frac{g\xi}{r} + w\frac{(\xi-\xi_1)}{l}.$$

Hieraus ergibt sich durch Summation:

$$\text{I.}\quad \frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\mu\cos\varphi \frac{d\zeta}{dt} - 2\mu\sin\varphi \frac{d\eta}{dt} - \mu^2\xi + \frac{g\xi}{r} + w\frac{(\xi-\xi_1)}{l} = 0.$$

Multipliciren wir jetzt die oberen Gleichungen der Reihe nach mit $\beta\ \beta_1\ \beta_2$, so erhalten wir:

$$\beta \frac{d^2x}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{g\eta}{r} + w\frac{(\eta-\eta_1)}{l} = \mu^2\xi\cos\vartheta\sin\vartheta\sin\varphi + 2\mu\sin^2\vartheta\sin\varphi \frac{d\xi}{dt}$$
$$- \cos\vartheta\sin\vartheta\sin\varphi \frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\mu\cos\vartheta\sin^2\varphi\sin\vartheta \frac{d\eta}{dt} - \eta\mu^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi \frac{d^2\eta}{dt^2}$$
$$+ \zeta\mu^2\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi - 2\cos\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi \frac{d\zeta}{dt} - \sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi \frac{d^2\zeta}{dt^2} -$$
$$\mu^2\xi\sin\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta + 2\mu\cos^2\vartheta\sin\varphi \frac{d\xi}{dt} + \sin\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\mu\sin\vartheta\sin^2\varphi\cos\vartheta \frac{d\eta}{dt}$$
$$- \mu^2\eta\cos^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta\sin^2\varphi \frac{d^2\eta}{dt^2} + \zeta\mu^2\cos^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + 2\sin\varphi\sin\vartheta\cos\varphi\cos\vartheta \frac{d\zeta}{dt}$$
$$- \cos^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \cos^2\varphi \frac{d^2\eta}{dt^2} + \sin\varphi\cos\varphi \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{g\eta}{r} + w\frac{(\eta-\eta_1)}{l}.$$

Durch Summation:

$$\text{II.}\quad \frac{d^2\eta}{dt^2} - \mu^2\eta\sin^2\varphi + 2\mu\sin\varphi \frac{d\xi}{dt} + \mu^2\zeta\cos\varphi\sin\varphi + \frac{g\eta}{r} + w\frac{(\eta-\eta_1)}{l} = 0.$$

Durch Multiplication mit $\gamma\ \gamma_1\ \gamma_2$ erhalten wir schließlich:

$$\gamma \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{g\zeta}{r} + w\frac{(\zeta-\zeta_1)}{l} = -\xi\mu^2\cos\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi - 2\mu\sin^2\vartheta\cos\varphi \frac{d\xi}{dt}$$
$$+ \cos\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\mu\cos\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi \frac{d\eta}{dt} + \mu^2\eta\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi -$$

$$\sin^2\vartheta \sin\varphi \cos\varphi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \zeta\mu^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + 2\mu \cos\vartheta \cos^2\varphi \sin\vartheta \frac{d\zeta}{dt} + \sin^2\vartheta \cos^2\varphi \frac{d^2\zeta}{dt^2} +$$

$$\xi\mu^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi - 2\mu \cos^2\vartheta \cos\varphi \frac{d\xi}{dt} - \sin\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi \frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\mu \sin\vartheta \sin\varphi \cos\vartheta \cos\varphi \frac{d\eta}{dt}$$

$$+ \mu^2\eta \cos^2\vartheta \cos\varphi \sin\varphi - \cos^2\vartheta \cos\varphi \sin\varphi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \mu^2\zeta \cos^2\vartheta \cos^2\varphi -$$

$$2\mu \sin\vartheta \cos\vartheta \cos^2\varphi \frac{d\zeta}{dt} + \cos^2\vartheta \cos^2\varphi \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \cos\varphi \sin\varphi \frac{d^2\eta}{dt^2} + \sin^2\varphi \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{g\zeta}{r} + w\frac{(\zeta-\zeta_1)}{l} =$$

$$\text{III.} \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \mu^2\eta \cos\varphi \sin\varphi - 2\mu \cos\varphi \frac{d\xi}{dt} - \mu^2\zeta \cos^2\varphi + \frac{g\zeta}{r} + w\frac{(\zeta-\zeta_1)}{l}.$$

Wenn man den Aufhängepunkt, der Einfachheit wegen, als unveränderlich annimmt, so ist $\xi_1 = \eta_1 = 0$; ferner $\frac{\xi}{r} = \frac{\eta}{r} = 0$, weil r im Verhältniß zu ξ und η sehr groß; $\frac{\zeta}{r} = \frac{\zeta_1}{r} = 1$; und die beiden Gleichungen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -2\mu \cos\varphi \frac{d\zeta}{dt} + 2\mu \sin\varphi \frac{d\eta}{dt} + \mu^2\xi - \frac{g\xi}{r} - \frac{w\xi}{l} + \frac{w\xi_1}{l},$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mu^2\eta \sin^2\varphi - 2\mu \sin\varphi \frac{d\xi}{dt} - \mu^2\zeta \cos\varphi \sin\varphi - \frac{g\eta}{r} - \frac{w\eta}{l} + \frac{w\eta_1}{l}$$

gehen über in:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -2\mu \cos\varphi \frac{d\zeta}{dt} + 2\mu \sin\varphi \frac{d\eta}{dt} + \mu^2\xi - \frac{w\xi}{l},$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mu^2\eta \sin^2\varphi - 2\mu \sin\varphi \frac{d\xi}{dt} - \mu^2\zeta \cos\varphi \sin\varphi - \frac{w\eta}{l},$$

weil $\frac{g\xi}{r} = 0$, $\frac{w\xi_1}{l} = 0$, $\frac{g\eta}{r} = 0$, $\frac{w\eta_1}{l} = 0$.

Multiplicirt man nun die erste dieser beiden Gleichungen mit η und die zweite mit ξ, so findet man durch Subtraction der ersten von der zweiten:

$$\xi \frac{d^2\eta}{dt^2} = \xi\mu^2\eta \sin^2\varphi - 2\mu\xi \sin\varphi \frac{d\xi}{dt} - \mu^2\xi\zeta \cos\varphi \sin\varphi - \xi\frac{w\eta}{l}.$$

$$\eta \frac{d^2\xi}{dt^2} = -2\mu\eta \cos\varphi \frac{d\zeta}{dt} + 2\mu\eta \sin\varphi \frac{d\eta}{dt} + \mu^2\xi\eta - \eta\frac{w\xi}{l}.$$

$$\xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2} = 2\mu\eta \cos\varphi \frac{d\zeta}{dt} - 2\mu\left(\xi\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\eta}{dt}\right) \sin\varphi -$$

$$\mu^2\xi(\zeta\cos\varphi + \eta\sin\varphi)\cos\varphi.$$

Ist der Winkel φ sehr groß, d. h. wird die Berechnung, um sie einfacher zu machen, für sehr hohe geographische Breiten vorgenommen, so ist $\cos\varphi = 0$ zu setzen, und die Gleichung ist annähernd:

$$\xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2} = -2\mu\left(\xi\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\eta}{dt}\right)\sin\varphi.$$

Ist nun die Projection der Pendellänge auf dem Horizont $= \lambda$, der Winkel, welchen diese Projection mit x einschließt, gleich ψ, so ist:

$$\xi = \lambda\cos\psi,$$

$$\eta = \lambda\sin\psi.$$

$$d\xi = \cos\psi\, d\lambda - \lambda\sin\psi\, d\psi,$$

$$d\eta = \sin\psi\, d\lambda + \lambda\cos\psi\, d\psi.$$

Mit Benutzung der beiden vorletzten Gleichungen erhalten wir so:

$$\eta \, d\xi = \lambda \sin\psi \cos\psi \, d\lambda - \lambda^2 \sin^2\psi \, d\psi,$$

$$\underline{\xi \, d\eta = \lambda \sin\psi \cos\psi \, d\lambda + \lambda^2 \cos^2\psi \, d\psi.}$$

$$\xi \, d\eta - \eta \, d\xi = \lambda^2 d\psi \, (\sin^2\psi + \cos^2\psi) = \lambda^2 d\psi.$$

$$2\xi d\xi + 2\eta d\eta = d(\xi^2 + \eta^2) = d(\lambda^2 \cos^2\psi + \lambda^2 \sin^2\psi) = d(\lambda^2).$$

Folglich geht die Gleichung $d\left(\dfrac{\dfrac{\xi d\eta}{dt} - \eta \dfrac{d\xi}{dt}}{dt}\right) = -\mu \dfrac{2\xi d\xi + 2\eta d\eta}{dt} \sin\varphi$ über in:

$$d\left(\frac{\lambda^2 d\psi}{dt}\right) = \mu \, d(\lambda^2) \sin\varphi.$$

Durch Integration: $\int d\left(\dfrac{\lambda^2 d\psi}{dt}\right) = -\mu \sin\varphi \int d(\lambda^2).$

$$\lambda^2 \frac{d\psi}{dt} = -\mu \sin\varphi \, . \, \lambda^2,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\mu \sin\varphi,$$

$$\int d\psi = -\mu \sin\varphi \int dt,$$

$$\underline{\psi = -\mu t \sin\varphi,}$$

wenn die Schwingungsebene sich zu Anfang der Bewegung, also zur Zeit $t = 0$ im Meridiane des Punktes $\xi\eta$ befindet und die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ ist. Das negative Vorzeichen gibt die Richtung von Osten nach Westen an, und das Hauptgesetz, wie es Foucault ausgesprochen hat: „Die Schwingungsebene dreht sich (scheinbar) proportional mit der Zeit um den Sinus der geographischen Breite," ist auch hierdurch erwiesen.

Schlußbemerkung.

In dem vorstehenden Beweise ist die Erde als Kugel betrachtet und von ihrer Form als Revolutionsellipsoid abstrahirt. Hansen, Director der Sternwarte in Gotha, führt nun in seiner vorzüglichen Abhandlung über den Foucault'schen Pendelversuch eine von der Erde herrührende Kraftfunction ein, mit Berücksichtigung, daß die Erde ein Revolutionsellipsoid ist. Ebenso supponirt und entwickelt er eine durch Torsion hervorgebrachte drehende Bewegung der Pendelkugel und findet so, wenn $n \sin\varrho = u$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde um die Verticale bedeutet, u' die Winkelgeschwindigkeit der Kugel multiplicirt mit dem Verhältniß des Trägheitsmomentes derselben zu dem des Pendels, welches von der Länge λ des Pendels abhängt, und wenn ε die größte, ε' die kleinste Elongation ist, die Schwingungsdauer:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{[g' + \mu^2 + \mu'^2]}} \left(1 + \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{4}\right);$$

in welcher Gleichung μ die in der Richtung nach dem Aufhängepunkte hin auf die Masse des Pendels einwirkende Kraft, $\mu' = \dfrac{n'C}{A}$, d. h. μ' ist gleich dem Producte aus dem Quotienten der Trägheitsmomente A und C und der Winkelgeschwindigkeit n' des Pendels um seine Achse, aber $g' = \dfrac{g\lambda m}{A}$.

Es ist demnach $T = \pi \left[1 - (\tfrac{1}{2}\mu^2 + \tfrac{1}{8}\mu'^2)\dfrac{A}{g\lambda m}\right] \sqrt{\dfrac{A}{g\lambda m}}$ mit Uebergehung der Quadrate und Producte von μ^2 und μ'^2.

Der Correctionsfactor ist $\left[1 - (\tfrac{1}{2}\mu^2 + \tfrac{1}{8}\mu'^2)\dfrac{A}{g\lambda m}\right]$ und daraus ersichtlich, daß eine Drehung der Pendelkugel um ihre Axe für gewöhnliche Verhältnisse auf die Schwingungsdauer von geringem Einfluß ist.

Größer ist indeß der Einfluß auf die scheinbare Drehung der Pendelebene, und zwar kann er so groß werden, daß die scheinbare Drehung der Schwingungsebene, die Folge der Rotation der Erde, von einer entgegengesetzten wirklichen Drehung jener Ebene als Folge der Rotation n' vollkommen aufgehoben werden kann. Nimmt man nun noch Rücksicht auf die Torsion des Fadens, welcher die Pendelstange bildet, so findet man, daß die durch dieselbe erzeugte Kraft dem Winkel, um den das freie Ende desselben gedreht worden, proportional ist; und es ergibt sich allgemein als Maximum der Aenderung der Schwingungsebene: $\frac{C\tau}{2A} + \frac{C}{2A}\sqrt{\tau + \frac{n'^2}{\omega'^2}}$, worin C und A die vorhin genannten Größen bedeuten, $\omega' = \sqrt{\frac{K}{C}}$ (K = Intensität der Torsionskraft) und τ die ursprüngliche Torsion ist.

Es wird demnach eine Verringerung des Fehlers erhalten, wenn man die Winkelgeschwindigkeit n' so klein als möglich macht und außerdem das Pendel vor dem Versuche sich selbst überläßt, so daß $\tau = 0$ werden kann.

Tritt dieser letzte Fall ein, so geht die Formel $\frac{C\tau}{2A} + \frac{C}{2A}\sqrt{\tau^2 + \frac{n'^2}{\omega'^2}}$ über in $\frac{Cn'}{2\,\omega' A}$ und gibt so das Maximum der Aenderung der Schwingungsebene an.