DAS

ELLIPTISCHE INTEGRAL DRITTER GATTUNG

FÜR

VERSCHIEDENE WERTE VON ARGUMENT UND PARAMETER

VON

KARL FRITZSCH,

ORDENTL. LEHRER.

BEILAGE ZUM JAHRESBERICHT

DES KÖNIGL. GYMNASIUMS MIT VOLLBERECHTIGTEM REALPROGYMNASIUM

ZU

STADE

FÜR DAS SCHULJAHR 1891/92.

b

LEIPZIG,

DRUCK VON B. G. TEUBNER.

1892.

1892. Progr. Nr. 316.

Das elliptische Integral dritter Gattung für verschiedene Werte von Argument und Parameter.

Unter einem elliptischen Integrale versteht man bekanntlich nicht nur das Integral, welches die Rektifikation eines Ellipsenbogens bewirkt und welches die Veranlassung zur Aufstellung des Namens „elliptische Integrale“ geworden ist, sondern man versteht unter dieser Bezeichnung ganz allgemein ein Integral solcher algebraischer irrationaler Funktionen, die eine Quadratwurzel aus einem Ausdrucke entweder des dritten oder des vierten Grades enthalten. Von diesen beiden Fällen ist derjenige, in welchem eine Quadratwurzel aus einem Ausdrucke vierten Grades auftritt, der allgemeinere und enthält den anderen als einen besonderen Fall in sich. Der Grund hierfür liegt darin, dafs die Theorie der elliptischen Integrale verlangt, den Radikanden der Quadratwurzel in seine linearen Faktoren zu zerlegen d. h. die Wurzeln dieses gleich Null gesetzten Ausdrucks zu bestimmen. Ist daher der Radikand vom dritten Grade, so hat man nur zu beachten, dafs man jeden Ausdruck dritten Grades, gleich Null gesetzt, als eine Gleichung vierten Grades ansehen darf, deren eine Wurzel unendlich geworden ist. Bei der Untersuchung der elliptischen Integrale pflegt man daher sich auf jenen ersten Fall zu beschränken.

Bezeichnet man mit f eine algebraische rationale Funktion und setzt Q gleich einer Quadratwurzel aus einem Ausdruck vierten Grades, also

$$Q = \sqrt{a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0},$$

so ist die allgemeinste Form eines elliptischen Integrales:

$$J = \int f(x,\, Q)\, dx.$$

Bezeichnet man weiter mit U_0, U_1, U_2 u. s. w. und ebenso mit V_0, V_1, V_2 u. s. w. rationale Funktionen von x, so ist wieder die allgemeinste Form der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion $f(x, Q)$ die folgende:

$$f(x,\, Q) = \frac{U_0 + U_1 Q + U_2 Q^2 + \cdots}{V_0 + V_1 Q + V_2 Q^2 + \cdots} = \frac{R + SQ}{R' + S' Q},$$

wo R, R', S, S' ebenfalls rationale Funktionen von x bezeichnen. Denn alle geraden Potenzen von Q sind rationale Funktionen von x und alle ungeraden Potenzen von Q lassen sich als ein Produkt von Q in eine rationale Funktion von x darstellen. Jedes elliptische Integral ist also in der Form enthalten:

$$J = \int \frac{R + SQ}{R' + S' Q}\, dx.$$

Multipliziert man, um die Quadratwurzel aus dem Nenner zu entfernen, Zähler und Nenner des Bruches unter dem Integralzeichen mit $R' - S'Q$, so erhält man:

$$J = \int \frac{(R + SQ)(R' - S'Q)}{R'^2 - S'^2 Q^2} dx = \int \frac{RR' + (R'S - RS')Q - SS'Q^2}{R'^2 - S'^2 Q^2} dx$$

$$= \int \frac{RR' - SS'Q^2}{R'^2 - S'^2 Q^2} dx + \int \frac{(R'S + RS')Q}{R'^2 - S'^2 Q^2} dx.$$

In diesem Ausdrucke sind $\frac{RR' - SS'Q^2}{R'^2 - S'^2 Q^2}$ und $\frac{R'S - RS'}{R'^2 - S'^2 Q^2}$ wieder rationale Funktionen von x.

Bezeichnet man die erste dieser Funktionen mit $\varphi(x)$, die zweite mit $\psi(x)$, so erhält das elliptische Integral die Form:

$$J = \int \varphi(x)\, dx + \int \psi(x)\, Q dx.$$

Der erste Summand der rechten Seite ist das Integral einer rationalen Funktion. Mit solchen Integralen, welche ausgeführt auf algebraische Funktionen oder Logarithmen oder cyklometrische Funktionen führen, beschäftigt sich die elementare Integralrechnung und nur der zweite Summand der rechten Seite liefert ein Integral, welches mit den Mitteln der elementaren Integralrechnung nicht ausgeführt werden kann und mit dem sich die Theorie der elliptischen Integrale zu beschäftigen hat.

Die Form $\int \psi(x)\, Q dx$ ist aber noch immer nicht diejenige, in der man das elliptische Integral zu behandeln pflegt, auf diese Form wird es erst gebracht, wenn man $\psi(x)\, Q$ mit Q multipliziert und dividiert, so dafs die Funktion unter dem Integralzeichen die Gestalt $\frac{\psi(x)\, Q^2}{Q}$ annimmt.

Setzt man endlich $\psi(x)\, Q^2 = F(x)$, wo $F(x)$ eine rationale Funktion von x ist, so erhält man in

$$\int \frac{F(x)\, dx}{Q} = \int \frac{F(x)\, dx}{\sqrt{a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}}$$

ein Integral, welches man im besonderen mit dem Namen „elliptisches Integral" belegt hat.

Von der jedesmaligen Beschaffenheit der Funktion $F(x)$ ist der Charakter eines solchen Integrales abhängig, aber alle diese für den ersten Augenblick sehr zahlreich scheinenden Fälle lassen sich zu vier charakteristischen Gruppen zusammenfassen.

Von diesen vier Gruppen enthält eine derartige Integrale, welche nur scheinbar elliptische Integrale sind, da sie sich bei gehöriger Reduktion auf solche Integrale zurückführen lassen, welche mittelst der gewöhnlichen Methoden entwickelt, also durch algebraische Funktionen, Logarithmen oder cyklometrische Funktionen ausgedrückt werden können. Die übrigen drei Gruppen dagegen enthalten Integrale, die man nicht auf Potenzen, Logarithmen und Kreisbogen zurückführen kann, und die die Veranlassung zum Auffinden der elliptischen Funktionen gegeben haben. Diese drei Gruppen hat man als elliptische Integrale der ersten, zweiten und dritten Gattung bezeichnet.

Man nennt

$$\int \frac{F(x)}{Q} dx$$

ein elliptisches Integral erster Gattung, wenn $F(x)$ nur eine Konstante ist, enthält dagegen $F(x)$ die Variable x, so hat man es mit einem elliptischen Integrale zweiter oder dritter Gattung zu thun, wenn nicht der besondere Fall eintritt, dafs das Integral aufhört ein elliptisches zu sein.

Das elliptische Integral erster Gattung hat demnach die allgemeine Form

$$\int \frac{dx}{Q} = \int \frac{dx}{\sqrt{a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}} = \frac{1}{\sqrt{a_4}} \int \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

wo

$$X = \pm x^4 + \frac{a_3}{a_4} x^3 + \frac{a_2}{a_4} x^2 + \frac{a_1}{a_4} x + \frac{a_0}{a_4}.$$

Das doppelte Vorzeichen vor x^4 ist deshalb erforderlich, weil a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 als reelle Gröfsen und a_4 als positiv vorausgesetzt werden sollen und infolge dessen, je nach den für das Integral bestimmten Grenzen, der Koeffizient von x^4 positiv oder negativ gewählt werden mufs, damit X positiv und mithin $\sqrt{X}$ reell ausfalle.

Stellt man die Gleichung auf

$$X = 0,$$

so ist dieselbe vom vierten Grade und hat deshalb entweder vier reelle, oder zwei reelle und zwei imaginäre, oder vier imaginäre Wurzeln. Diese Wurzeln seien α, β, γ, δ und zwar sei für den Fall, dafs alle Wurzeln reell sind,

$$\alpha > \beta > \gamma > \delta$$

und für den Fall des Auftretens imaginärer Wurzeln, sei α dem β und γ dem δ konjugiert Infolge dieser Festsetzungen ist

$$X = \pm (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta).$$

Ohne weiteres ist ersichtlich, dafs bei nur reellen Wurzeln das Produkt

$$p = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$$

positiv ist, wenn x zwischen folgenden Grenzen liegt:

1) zwischen α und ∞,
2) zwischen $-\infty$ und δ,
3) zwischen γ und β,

dagegen negativ, wenn x zwischen den folgenden Grenzen liegt:

4) zwischen β und α,
5) zwischen δ und γ.

Sind zwei Wurzeln der Gleichung $X = 0$ imaginär, es seien dies die Wurzeln $\gamma = m + ni$ und $\delta = m - ni$, so ist das Produkt

$$(x - \gamma)(x - \delta) = (x - m)^2 + n^2$$

gleich der Summe von zwei Quadraten reeller Gröfsen, also stets positiv, und mithin hängt das Vorzeichen von X nur von dem Produkte $(x - \alpha)(x - \beta)$ ab. Es ist

$$p = (x - \alpha)(x - \beta)[(x - m)^2 + n^2]$$

positiv, wenn x

6) zwischen α und ∞

dagegen negativ, wenn x

7) zwischen β und α

liegt.

Sind endlich alle vier Wurzeln der Gleichung $X = 0$ imaginär $\alpha = r + si$; $\beta = r - si$; $\gamma = m + ni$; $\delta = m - ni$, so ist

$$p = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) = [(x - r)^2 + s^2][(x - m)^2 + n^2],$$

also stets positiv, es mag x beliebig liegen

8) zwischen $+\infty$ und $-\infty$.

Für die drei unter 1), 2) und 3) angeführten Intervalle bei nur reellen Wurzeln, für das unter 6) bezeichnete Intervall bei zwei reellen und zwei imaginären Wurzeln und endlich bei nur imaginären Wurzeln stets, wie das unter 8) gekennzeichnete Intervall angiebt, ist, damit der Wurzelausdruck $\sqrt{X}$ reell ausfällt, zu betrachten

$$\int \frac{dx}{\sqrt{p}}.$$

Dagegen ist bei nur reellen Wurzeln für die beiden unter 4) und 5) angeführten Intervalle und ebenso bei zwei reellen und zwei imaginären Wurzeln für die unter 7) angegebenen Grenzen, aus demselben Grunde zu wählen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-p}}.$$

Jedem dieser Integrale und mithin auch dem durch Multiplikation eines dieser beiden mit dem konstanten Faktor $\frac{1}{\sqrt{a_4}}$ entstehenden Integrale $\int \frac{dx}{Q}$ kann man durch eine Substitution von der Form:

$$x = \frac{by - a}{b'y - a'}, \text{ woraus sich } dx = \frac{(ab' - a'b)\,dy}{(b'y - a')^2} \text{ ergiebt,}$$

durch derartig über a, a', b, b' getroffene Verfügung, dafs das Produkt p, durch y ausgedrückt, die ungeraden Potenzen von y nicht mehr enthält, die Gestalt geben

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(g - hy^2)(g' - h'y^2)}},$$

in welcher g, h, g' und h' konstante von a_4 und den Wurzeln der Gleichung $X = 0$ abhängige Gröfsen sind.

Das in diesem Integral auftretende Radikal kann, je nachdem alle vier Wurzeln reell, oder zwei Wurzeln reell und zwei imaginär, oder alle vier Wurzeln imaginär sind, beziehungsweise auf die reellen Formen gebracht werden:

$$\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}; \quad \sqrt{(1 - z^2)(1 + c^2 z^2)}; \quad \sqrt{(1 + z^2)(1 + c^2 z^2)}.$$

Die beiden ersten Umformungen gelingen, wenn man

$$\frac{h}{g} y^2 = z^2 \quad \text{und} \quad \frac{gh'}{hg'} = \varkappa^2 \text{ setzt.}$$

Sollen diese Transformationen reell sein, so müssen h und g gleiches Vorzeichen haben, und dies ist der Fall, wenn zwei Wurzeln α und β der Gleichung $X = 0$ reell sind. Es mufs aber auch erreicht werden, dafs $\varkappa$ reell ist, und diese Bedingung ist erfüllt, wenn auch h' und g' von gleichem Vorzeichen sind. Gleiche Vorzeichen besitzen aber h' und g', wenn auch die beiden andern Wurzeln γ und δ der Gleichung $X = 0$ reelle Werte haben.

Sind also die vier Wurzeln der Gleichung $X = 0$ reell, so erhält das Radikal durch die angegebenen Substitutionen die erste der oben aufgeführten Formen und wir erhalten das Integral in der Gestalt

$$F \cdot \frac{1}{\sqrt{hg}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}},$$

wo F ein konstanter Faktor ist.

Wenn aber nur die beiden Wurzeln α und β reell, die beiden andern γ und δ imaginär sind, so ist zwar $\frac{h}{g}$ positiv und daher z reell, aber $\frac{h'}{g'}$ negativ und also $\varkappa$ imaginär. Bei dieser Sachlage ist $\frac{gh'}{hg'} = -c^2$ zu setzen und das elliptische Integral geht über in

$$F \cdot \frac{1}{\sqrt{hg'}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+c^2 z^2)}}.$$

Haben endlich alle vier Wurzeln imaginäre Werte, so müssen wir, um eine reelle Transformation durchzuführen, das Radikal auf die dritte der angegebenen Formen bringen durch die Substitutionen

$$-\frac{h}{g} y^2 = z^2 \quad \text{und} \quad \frac{gh'}{hg'} = c^2.$$

Durch die Einführung dieser Werte nimmt das elliptische Integral die Gestalt an

$$F \cdot \frac{1}{\sqrt{-hg'}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+c^2 z^2)}}.$$

Das Differential jeder dieser drei Formen geht in die gemeinschaftliche Normalform über, wenn man

im ersten Falle $z = \sin\varphi$,
im zweiten Falle $z = \cos\varphi$,
im dritten Falle $z = \operatorname{tg}\varphi$

setzt. In dieser Normalform wird nach Legendre $\varkappa$ der Modul des elliptischen Integrals genannt und ist stets ein positiver echter Bruch, so dafs

$$1 > \varkappa > 0.$$

Durch die angegebenen Substitutionen in die oben aufgestellten Integrale erhält man nämlich beziehungsweise:

$$F \cdot \frac{1}{\sqrt{hg'}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}}, \quad \text{wo } \varkappa^2 = \frac{gh'}{hg'}$$

$$-F \cdot \frac{1}{\sqrt{hg'-gh'}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}}, \quad \text{wo } \varkappa^2 = \frac{c^2}{1+c^2} = \frac{gh'}{gh'-hg'},$$

$$F \cdot \frac{1}{\sqrt{-hg'}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}}, \quad \text{wo } \varkappa^2 = 1 - c^2 = \frac{hg'-gh'}{hg'}.$$

Alle elliptischen Integrale erster Gattung können auf die Normalform gebracht werden:

$$C \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}},$$

in welcher C eine Konstante ist.

Betrachtet man dieses Integral zwischen den Grenzen 0 und φ, so heifst bekanntlich die obere Grenze φ die Amplitude des betreffenden Integrals.

Substituiert man in das allgemeine elliptische Integral

$$\int \frac{F(x)\,dx}{Q}$$

für x denselben Wert

$$x = \frac{by - a}{b'y - a'},$$

so geht dieses, wenn von dem konstanten Faktor abgesehen wird, über in

$$\int \frac{F\left(\frac{by-a}{b'y-a'}\right)dy}{\sqrt{(g-hy^2)(g'-h'y^2)}} = \int \frac{\Phi(y)\,dy}{\sqrt{(g-hy^2)(g'-h'y^2)}},$$

wenn man die Funktion $F\left(\frac{by-a}{b'y-a'}\right)$ von y mit $\Phi(y)$ bezeichnet.

Tritt der Fall ein, dafs $\Phi(y)$ eine ungerade Funktion von y ist, so läfst sich zeigen, dafs das oben stehende Integral nicht mehr ein elliptisches ist. Jede ungerade Funktion kann als Produkt aus ihrem Argumente in eine gerade Funktion dargestellt und jede gerade Funktion in eine andere verwandelt werden, welche das Quadrat des Argumentes der ursprünglichen Funktion zum Argumente hat. Aus diesen Gründen kann daher, für den Fall, dafs $\Phi(y)$ eine ungerade Funktion ist, gesetzt werden:

$$\Phi(y) = y\varphi(y) = y\psi(y^2),$$

wo $\varphi(y)$ eine gerade Funktion ist.

Substituieren wir aber diesen Wert von $\Phi(y)$ in unser Integral, so erhalten wir:

$$\int \frac{\Phi(y)\,dy}{\sqrt{(g-hy^2)(g'-h'y^2)}} = \int \frac{y\psi(y^2)\,dy}{\sqrt{(g-hy^2)(g'-h'y^2)}}.$$

Setzen wir weiter

$$y^2 = v, \quad \text{folglich} \quad dy = \frac{1}{2}\frac{dv}{\sqrt{v}},$$

so geht das Integral über in:

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{v}\,\psi(v)\,dv}{\sqrt{v}\sqrt{(g-hv)(g'-h'v)}} = \frac{1}{2}\int \frac{\psi(v)\,dv}{\sqrt{(g-hv)(g'-h'v)}}.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen übersteigt nicht den zweiten Grad und deshalb kann das obige Integral mit den Mitteln der elementaren Integralrechnung ausgeführt werden.

Wenn also $F(x)$ durch die Substitution

$$x = \frac{by - a}{b'y - a'}$$

in eine ungerade Funktion von y übergeht, so werden wir auf kein elliptisches Integral geführt.

Bei Betrachtung der elliptischen Integrale können wir daher diesen Fall ausschliefsen und von vornherein annehmen, dafs durch die angegebene Substitution für x die Funktion $F(x)$ in eine gerade Funktion von y übergeht. Es werden also nur Integrale von der Form:

$$S = \int \frac{F\left(\frac{by-a}{b'y-a'}\right)dy}{\sqrt{(g-hy^2)(g'-h'y^2)}} = \int \frac{\Phi(y)\,dy}{\sqrt{(g-hy^2)(g'-h'y^2)}} = \int \frac{\varphi(y^2)\,dy}{\sqrt{(g-hy^2)(g'-h'y^2)}}$$

zu untersuchen sein.

In diesem Integrale hat man, je nach der Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung

$$Q^2 = 0,$$

wie oben bereits näher bestimmt wurde, zu setzen:

$$\frac{h}{g} y^2 = z^2 \quad \text{und} \quad \varkappa^2 = \frac{gh'}{hg'} \quad \text{und hierauf} \quad z = \sin \varphi,$$

$$\frac{h}{g} y^2 = z^2 \quad \text{und} \quad -c^2 = \frac{gh'}{hg'} \quad \text{und hierauf} \quad z = \cos \varphi,$$

$$-\frac{h}{g} y^2 = z^2 \quad \text{und} \quad c^2 = \frac{gh'}{hg'} \quad \text{und hierauf} \quad z = \operatorname{tg} \varphi,$$

wodurch, abgesehen von einem konstanten Faktor, das Integral beziehungsweise in eine der Formen übergeht:

$$\int \frac{f(\sin^2 \varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}}; \quad \int \frac{f(\cos^2 \varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}}; \quad \int \frac{f(\operatorname{tg}^2 \varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}},$$

wo f eine rationale Funktion bezeichnet.

Da jede rationale Funktion als Summe aus einer ganzen und einer gebrochenen Funktion dargestellt werden kann, wobei der Fall nicht ausgeschlossen ist, dafs die erstere verschwindet, jede gebrochene Funktion aber wieder in Partialbrüche zerlegt werden kann, so ist klar, dafs S ein Aggregat von Termen von der Form sein wird:

$$A_n = \int \frac{(\alpha + \sin^2 \varphi)^n\, d\varphi}{\Delta \varphi}; \quad B_n = \int \frac{(\beta + \cos^2 \varphi)^n\, d\varphi}{\Delta \varphi}; \quad C_n = \int \frac{(\gamma + \operatorname{tg}^2 \varphi)^n\, d\varphi}{\Delta \varphi},$$

wo $\Delta \varphi = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}$ und n eine ganze positive oder negative Zahl ist.

Die drei Integrale A_n, B_n, C_n hängen von 9 anderen ab, welche sich aber auf 3 zurückführen lassen.

Um die Abhängigkeit der drei Integrale A_n, B_n, C_n von 9 anderen nachzuweisen, kann man sich der folgenden, von *Richelot* angegebenen Reduktionsformeln bedienen, die sich aus den identischen Gleichungen ergeben:

$$1) \qquad (\alpha + \sin^2 \varphi)^n \sin \varphi \,.\, \cos \varphi \,.\, \Delta \varphi = \int_0^\varphi \frac{d\left[(\alpha + \sin^2 \varphi)^n \sin \varphi \,.\, \cos \varphi \,.\, \Delta \varphi\right]}{d\varphi}\, d\varphi,$$

$$2) \qquad (\beta + \cos^2 \varphi)^n \sin \varphi \,.\, \cos \varphi \,.\, \Delta \varphi = \int_0^\varphi \frac{d\left[(\beta + \cos^2 \varphi)^n \sin \varphi \,.\, \cos \varphi \,.\, \Delta \varphi\right]}{d\varphi}\, d\varphi,$$

$$3) \qquad (\gamma + \operatorname{tg}^2 \varphi)^n \frac{\sin \varphi \,.\, \Delta \varphi}{\cos^3 \varphi} = \int_0^\varphi \frac{d\left[(\gamma + \operatorname{tg}^2 \varphi)^n \dfrac{\sin \varphi \,.\, \Delta \varphi}{\cos^3 \varphi}\right]}{d\varphi}\, d\varphi.$$

Führt man in 1) die Differentiation auf der rechten Seite aus, so erhält man unter dem Integralzeichen folgenden in $d\varphi$ multiplizierten Ausdruck:

$$2n\,(\alpha + \sin^2 \varphi)^{n-1} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi\, \Delta \varphi + (\alpha + \sin^2 \varphi)^n \left[\cos^2 \varphi\, \Delta \varphi - \sin^2 \varphi\, \Delta \varphi - \frac{\varkappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\Delta \varphi}\right]$$

und multipliziert man den ganzen Ausdruck mit $\Delta \varphi$, so erhält man unter dem Integralzeichen als Faktor von $\frac{d\varphi}{\Delta \varphi}$ den Ausdruck:

$$2n\,(\alpha + \sin^2 \varphi)^{n-1} \sin^2 \varphi \,.\, \cos^2 \varphi \,.\, \Delta^2 \varphi + (\alpha + \sin^2 \varphi)^n \left[\cos^2 \varphi\, \Delta^2 \varphi - \sin^2 \varphi\, \Delta^2 \varphi - \varkappa^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi\right].$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\alpha + \sin^2\varphi = v,$$

also: $\sin^2\varphi = v - \alpha;\quad \cos^2\varphi = 1 - v + \alpha;\quad \Delta^2\varphi = 1 - \varkappa^2 v + \varkappa^2\alpha,$

so geht der obige Ausdruck über in:

$$2n(v-\alpha)(1-v+\alpha)(1-\varkappa^2 v+\varkappa^2\alpha)v^{n-1} + v^n[(1-v+\alpha)(1-\varkappa^2 v+\varkappa^2\alpha)$$
$$-(v-\alpha)(1-\varkappa^2 v+\varkappa^2\alpha) - \varkappa^2(v-\alpha)(1-v+\alpha)]$$

$$= 2n\{(1+\alpha)v - \alpha(1+\alpha) - v^2 + \alpha v\}\{1+\varkappa^2\alpha - \varkappa^2 v\}v^{n-1}$$
$$+[(1+\alpha)(1+\varkappa^2\alpha) - (1+\varkappa^2\alpha)v - \varkappa^2(1+\alpha)v + \varkappa^2 v^2 - (1+\varkappa^2\alpha)v + (1+\varkappa^2\alpha)\alpha$$
$$+\varkappa^2 v^2 - \varkappa^2\alpha v - \varkappa^2(1+\alpha)v + \varkappa^2\alpha(1+\alpha) + \varkappa^2 v^2 - \varkappa^2\alpha v]v^n$$

$$= 2n\{-\alpha(1+\alpha) + (1+2\alpha)v - v^2\}\{1+\varkappa^2\alpha - \varkappa^2 v\}v^{n-1}$$
$$+[(1+\varkappa^2\alpha)(1+2\alpha) + \varkappa^2\alpha(1+\alpha) - \{2(1+\varkappa^2\alpha) + 2\varkappa^2(1+\alpha) + 2\varkappa^2\alpha\}v + 3\varkappa^2 v^2]v^n$$

$$= 2n[-\alpha(1+\alpha)(1+\varkappa^2\alpha) + (1+2\alpha)(1+\varkappa^2\alpha)v - (1+\varkappa^2\alpha)v^2 + \varkappa^2\alpha(1+\alpha)v - \varkappa^2(1+2\alpha)v^2 + \varkappa^2 v^3\}v^{n-1}$$
$$+[1+\varkappa^2\alpha + 2\alpha + 2\varkappa^2\alpha^2 + \varkappa^2\alpha + \varkappa^2\alpha^2 - 2\{1+\varkappa^2\alpha + \varkappa^2 + \varkappa^2\alpha + \varkappa^2\alpha\}v + 3\varkappa^2 v^2]v^n$$

$$= 2n[-\alpha(1+\alpha)(1+\varkappa^2\alpha) + \{(1+2\alpha)(1+\varkappa^2\alpha) + \varkappa^2\alpha(1+\alpha)\}v - \{1+\varkappa^2\alpha + \varkappa^2(1+2\alpha)\}v^2$$
$$+\varkappa^2 v^3]v^{n-1} + [1+2\alpha + 2\varkappa^2\alpha + 3\varkappa^2\alpha^2 - 2\{1+\varkappa^2 + 3\varkappa^2\alpha\}v + 3\varkappa^2 v^2]v^n$$

$$= 2n[-\alpha(1+\alpha)(1+\varkappa^2\alpha) + \{1+2\alpha + \varkappa^2\alpha + 2\varkappa^2\alpha^2 + \varkappa^2\alpha + \varkappa^2\alpha^2\}v - \{1+\varkappa^2\alpha + \varkappa^2 + 2\varkappa^2\alpha\}v^2$$
$$+\varkappa^2 v^3]v^{n-1} + [1+2\alpha + 2\varkappa^2\alpha + 3\varkappa^2\alpha^2 - 2(1+\varkappa^2 + 3\varkappa^2\alpha)v + 3\varkappa^2 v^2]v^n$$

$$= 2n[-\alpha(1+\alpha)(1+\varkappa^2\alpha) + (1+2\alpha + 2\varkappa^2\alpha + 3\varkappa^2\alpha^2)v - (1+\varkappa^2 + 3\varkappa^2\alpha)v^2 + \varkappa^2 v^3]v^{n-1}$$
$$+[1+2\alpha + 2\varkappa^2\alpha + 3\varkappa^2\alpha^2 - 2(1+\varkappa^2 + 3\varkappa^2\alpha)v + 3\varkappa^2 v^2]v^n$$

$$= -2n\alpha(1+\alpha)(1+\varkappa^2\alpha)v^{n-1} + (2n+1)(1+2\alpha + 2\varkappa^2\alpha + 3\varkappa^2\alpha^2)v^n$$
$$-(2n+2)(1+\varkappa^2 + 3\varkappa^2\alpha)v^{n+1} + \varkappa^2(2n+3)v^{n+2}.$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung 1) und kehren zu unserer Bezeichnung zurück, wonach:

$$\int_0^\varphi \frac{(\alpha + \sin^2\varphi)^n\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{v^n\, d\varphi}{\Delta\varphi} = A_n$$

ist, so ergiebt sich die Gleichung:

I. $$(\alpha + \sin^2\varphi)^n \sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi$$
$$= -2n\alpha(1+\alpha)(1+\varkappa^2\alpha)A_{n-1} + (2n+1)(1+2\alpha + 2\varkappa^2\alpha + 3\varkappa^2\alpha^2)A_n$$
$$-(2n+2)(1+\varkappa^2 + 3\varkappa^2\alpha)A_{n+1} + (2n+3)\varkappa^2 A_{n+2}.$$

Führt man in 2) auf der rechten Seite die Differentiation aus, so erhält man folgenden Ausdruck, der mit $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ multipliziert ist:

$$-2n\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\Delta^2\varphi(\beta + \cos^2\varphi)^{n-1} - (\beta + \cos^2\varphi)^n[\sin^2\varphi\,\Delta^2\varphi - \cos^2\varphi\,\Delta^2\varphi + \varkappa^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi].$$

Setzt man nun:

$$\beta + \cos^2\varphi = v_1$$

folglich $\cos^2\varphi = v_1 - \beta;\ \sin^2\varphi = 1 - v_1 + \beta;\ \Delta^2\varphi = 1 - \varkappa^2 + \varkappa^2 v_1 - \varkappa^2\beta$, oder, wenn nach dem Vorgange von Legendre und Jacobi das Komplement des Moduls $\varkappa'$ eingeführt wird, welches mit $\varkappa$ durch die Gleichung verbunden ist:

$$\varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1,$$

$$\Delta^2\varphi = \varkappa'^2 + \varkappa^2 v_1 - \varkappa^2\beta,$$

so geht der obige Ausdruck über in:

$$\begin{aligned}
&-2n(v_1-\beta)(1-v_1+\beta)(\varkappa'^2+\varkappa^2 v_1-\varkappa^2\beta)\,v_1^{n-1}\\
&-v_1^n[(1-v_1+\beta)(\varkappa'^2+\varkappa^2v_1-\varkappa^2\beta)-(v_1-\beta)(\varkappa'^2+\varkappa^2v_1-\varkappa^2\beta)+\varkappa^2(1-v_1+\beta)(v_1-\beta)]\\
=&-2n[\{(1+\beta)v_1-\beta(1+\beta)-v_1^2+\beta v_1\}\{\varkappa'^2+\varkappa^2v_1-\varkappa^2\beta\}]\,v_1^{n-1}\\
&-[(1+\beta)(\varkappa'^2-\varkappa^2\beta)-(\varkappa'^2-\varkappa^2\beta)v_1+\varkappa^2(1+\beta)v_1-\varkappa^2v_1^2-(\varkappa'^2-\varkappa^2\beta)v_1+\beta(\varkappa'^2-\varkappa^2\beta)\\
&-\varkappa^2v_1^2+\varkappa^2\beta v_1+\varkappa^2(1+\beta)v_1-\varkappa^2v_1^2-\varkappa^2\beta(1+\beta)+\varkappa^2\beta v_1]\,v_1^n\\
=&-2n[\{-\beta(1+\beta)+(1+2\beta)v_1-v_1^2\}\{\varkappa'^2+\varkappa^2v_1-\varkappa^2\beta\}]\,v_1^{n-1}\\
&-[(1+2\beta)(\varkappa'^2-\varkappa^2\beta)-\varkappa^2\beta(1+\beta)-2\{(\varkappa'^2-\varkappa^2\beta)-\varkappa^2(1+\beta)-\varkappa^2\beta\}v_1-3\varkappa^2v_1^2]\,v_1^n\\
=&-2n[-\beta(1+\beta)(\varkappa'^2-\varkappa^2\beta)+(1+2\beta)(\varkappa'^2-\varkappa^2\beta)v_1-(\varkappa'^2+\varkappa^2\beta)v_1^2-\varkappa^2\beta(1+\beta)v_1\\
&\qquad+\varkappa^2(1+2\beta)v_1^2-\varkappa^2v_1^3]\,v_1^{n-1}\\
&-[\varkappa'^2+2\varkappa'^2\beta-\varkappa^2\beta-2\varkappa^2\beta^2-\varkappa^2\beta-\varkappa^2\beta^2-2\{\varkappa'^2-\varkappa^2\beta-\varkappa^2-\varkappa^2\beta-\varkappa^2\beta\}v_1-3\varkappa^2v_1^2\}\,v_1^n\\
=&-2n[-\beta(1+\beta)(\varkappa'^2-\varkappa^2\beta)+\{\varkappa'^2+2\varkappa'^2\beta-\varkappa^2\beta-2\varkappa^2\beta^2-\varkappa^2\beta-\varkappa^2\beta^2\}v_1\\
&\qquad-\{\varkappa'^2-\varkappa^2\beta-\varkappa^2-2\varkappa^2\beta\}v_1^2-\varkappa^2v_1^3]\,v_1^{n-1}\\
&-[\varkappa'^2+2\varkappa'^2\beta-2\varkappa^2\beta-3\varkappa^2\beta^2-2\{\varkappa'^2-\varkappa^2-3\varkappa^2\beta\}v_1-3\varkappa^2v_1^2]\,v_1^n\\
=&\,2n\beta(1+\beta)(\varkappa'^2-\varkappa^2\beta)v_1^{n-1}-(2n+1)(\varkappa'^2+2\varkappa'\beta-2\varkappa^2\beta-3\varkappa^2\beta^2]\,v_1^n\\
&+(2n+2)(\varkappa'^2-\varkappa^2-3\varkappa^2\beta)v_1^{n+1}+(2n+3)\varkappa^2v_1^{n+2}.
\end{aligned}$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung 2) und beachten, dass:

$$\int_0^\varphi \frac{(\beta+\cos^2\varphi)^n\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{v_1^n\,d\varphi}{\Delta\varphi} = B_n,$$

so erhalten wir:

II. $$(\beta+\cos^2\varphi)^n \sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi$$
$$= 2n\beta(1+\beta)(\varkappa'^2-\varkappa^2\beta)B_{n-1}-(2n+1)(\varkappa'^2+2\varkappa'^2\beta-2\varkappa^2\beta-3\varkappa^2\beta^2)B_n$$
$$+(2n+2)(\varkappa'^2-\varkappa^2-3\varkappa^2\beta)B_{n+1}+(2n+3)\varkappa^2B_{n+2}.$$

Behandeln wir endlich die Gleichung 3) in entsprechender Weise, so erhalten wir durch Differentiation unter dem Integralzeichen als Factor von $d\varphi$:

$$2n\cdot\frac{\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\Delta\varphi}{\cos^5\varphi}(\gamma+\mathrm{tg}^2\varphi)^{n-1}+(\gamma+\mathrm{tg}^2\varphi)^n\left[\frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{\varkappa^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi\cdot\Delta\varphi}+3\,\frac{\sin^2\varphi\,\Delta\varphi}{\cos^4\varphi}\right],$$

mithin als Factor von $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, wenn wir im ersten Gliede $\mathrm{tg}\,\varphi$ durch $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ ersetzen:

$$2n\frac{\sin^2\varphi}{\cos^6\varphi}\Delta^2\varphi\,(\gamma+\mathrm{tg}^2\varphi)^{n-1}+(\gamma+\mathrm{tg}^2\varphi)^n\left[\frac{\Delta^2\varphi}{\cos^2\varphi}-\varkappa^2\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}-3\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\Delta^2\varphi\right].$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\gamma + \operatorname{tg}^2\varphi = v_2,$$

$$\text{also } \operatorname{tg}^2\varphi = v_2 - \gamma;\ \sin^2\varphi = \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{v_2-\gamma}{1+v_2-\gamma},$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{1+v_2-\gamma},$$

$$\Delta^2\varphi = 1 - \varkappa^2\sin^2\varphi = 1 - \varkappa^2\frac{v_2-\gamma}{1+v_2-\gamma} = \frac{1+v_2-\gamma-\varkappa^2(v_2-\gamma)}{1+v_2-\gamma},$$

oder wenn wir $\varkappa^2$ wieder durch den Komplementärmodul, also durch $1-\varkappa'^2$ ersetzen:

$$\Delta^2\varphi = \frac{1+v_2-\gamma-(1-\varkappa'^2)(v_2-\gamma)}{1+v_2-\gamma} = \frac{1+v_2-\gamma-v_2+\varkappa'^2v_2+\gamma-\varkappa'^2\gamma}{1+v_2-\gamma} = \frac{1+\varkappa'^2v_2-\varkappa'^2\gamma}{1+v_2-\gamma},$$

so geht der obige Ausdruck über in:

$$\begin{aligned}
&2n\frac{v_2-\gamma}{1+v_2-\gamma}\cdot\frac{1+\varkappa'^2v_2-\varkappa'^2\gamma}{1+v_2-\gamma}(1+v_2-\gamma)^3 v_2^{n-1}\\
&\qquad + v_2^n\Big[\frac{1+\varkappa'^2v_2-\varkappa'^2\gamma}{1+v_2-\gamma}(1+v_2-\gamma) - \varkappa^2\cdot\frac{v_2-\gamma}{1+v_2-\gamma}(1+v_2-\gamma)\\
&\qquad\qquad + 3\,\frac{1+\varkappa'^2v_2-\varkappa'^2\gamma}{1+v_2-\gamma}\cdot\frac{v_2-\gamma}{1+v_2-\gamma}(1+v_2-\gamma)^2\Big]\\
&= 2n(v_2-\gamma)(1+\varkappa'^2v_2-\varkappa'^2\gamma)(1+v_2-\gamma)v_2^{n-1}\\
&\qquad + [(1+\varkappa'^2v_2-\varkappa'^2\gamma) - \varkappa^2(v_2-\gamma) + 3(1+\varkappa'^2v_2^2-\varkappa'^2\gamma)(v_2-\gamma)]\,v_2^n\\
&= 2n\{(1-\varkappa'^2\gamma)v_2 - \gamma(1-\varkappa'^2\gamma) + \varkappa'^2v_2^2 - \varkappa'^2\gamma v_2\}\{1-\gamma+v_2\}\,v_2^{n-1}\\
&\quad + [1-\varkappa'^2\gamma+\varkappa'^2v_2-\varkappa^2v_2+\varkappa^2\gamma+3(1-\varkappa'^2\gamma)v_2+3\varkappa'^2v_2^2-3\gamma(1-\varkappa'^2\gamma)-3\varkappa'^2\gamma v_2]\,v_2^n\\
&= 2n\{-\gamma(1-\varkappa'^2\gamma)+(1-2\varkappa'^2\gamma)v_2+\varkappa'^2v_2^2\}\{1-\gamma+v_2\}\,v_2^{n-1}\\
&\quad + [1-\varkappa'^2\gamma+\varkappa^2\gamma-3\gamma(1-\varkappa'^2\gamma)+\{\varkappa'^2-\varkappa^2+3(1-\varkappa'^2\gamma)-3\varkappa'^2\gamma\}v_2+3\varkappa'^2v_2^2]\,v_2^n\\
&= 2n[-\gamma(1-\gamma)(1-\varkappa'^2\gamma)+(1-2\varkappa'^2\gamma)(1-\gamma)v_2+\varkappa'^2(1-\gamma)v_2^2-\gamma(1-\varkappa'^2\gamma)v_2\\
&\qquad + (1-2\varkappa'^2\gamma)v_2^2+\varkappa'^2v_2^3]\,v_2^{n-1}\\
&\quad + [1-2\varkappa'^2\gamma+(1-\varkappa'^2)\gamma-3\gamma(1-\varkappa'^2\gamma)+\{\varkappa'^2-1+\varkappa'^2+3(1-\varkappa'^2\gamma)-3\varkappa'^2\gamma\}v_2+3\varkappa'^2v_2^2]\,v_2^n\\
&= 2n[-\gamma(1-\gamma)(1-\varkappa'^2\gamma)+\{(1-2\varkappa'^2\gamma)(1-\gamma)-\gamma(1-\varkappa'^2\gamma)\}v_2\\
&\qquad\qquad + \{\varkappa'^2(1-\gamma)+(1-2\varkappa'^2\gamma)\}v_2^2+\varkappa'^2v_2^3]\,v_2^{n-1}\\
&\quad + [1-2\varkappa'^2\gamma+\gamma-\varkappa'^2\gamma-3\gamma+3\varkappa'^2\gamma+\{2\varkappa'^2-1+3-3\varkappa'^2\gamma-3\varkappa'^2\gamma\}v_2+3\varkappa'^2v_2^2]\,v_2^n\\
&= 2n[-\gamma(1-\gamma)(1-\varkappa'^2\gamma)+\{1-2\varkappa'^2\gamma-\gamma+2\varkappa'^2\gamma^2-\gamma+\varkappa'^2\gamma^2\}v_2\\
&\qquad + \{\varkappa'^2-\varkappa'^2\gamma+1-2\varkappa'^2\gamma\}v_2^2+\varkappa'^2v_2^3]\,v_2^{n-1}\\
&\quad + [1-2\varkappa'^2\gamma-2\gamma+3\varkappa'^2\gamma^2+\{2\varkappa'^2+2-6\varkappa'^2\gamma\}v_2+3\varkappa'^2v_2^2]\,v_2^n\\
&= 2n[-\gamma(1-\gamma)(1-\varkappa'^2\gamma)+\{1-2\varkappa'^2\gamma-2\gamma+3\varkappa'^2\gamma\}v_2+\{\varkappa'^2+1-3\varkappa'^2\gamma\}v_2+\varkappa'^2v_2^3]\,v_2^{n-1}\\
&\quad + [1-2\varkappa'^2\gamma-2\gamma+3\varkappa'^2\gamma^2+2\{\varkappa'^2+1-3\varkappa'^2\gamma\}v_2+3\varkappa'^2v_2^2]\,v_2^n\\
&= -2n\gamma(1-\gamma)(1-\varkappa'^2\gamma)v_2^{n-1}+(2n+1)(1-2\varkappa'^2\gamma-2\gamma+3\varkappa'\gamma)v_2^n\\
&\quad + (2n+2)(\varkappa'^2+1-3\varkappa'^2\gamma)v_2^{n+1}+(2n+3)\varkappa'^2v_2^{n+2}.
\end{aligned}$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung 3) und berücksichtigen, dass:

$$\int_0^\varphi \frac{(\gamma + \operatorname{tg}^2\varphi)^n\, d\varphi}{\varDelta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{v_2{}^n\, d\varphi}{\varDelta\varphi} = C_n,$$

so erhalten wir:

III. $$(\gamma + \operatorname{tg}^2\varphi)^n \frac{\sin\varphi \,.\, \varDelta\varphi}{\cos^3\varphi}$$

$$= -2n\gamma(1-\gamma)(1-\varkappa'^2\gamma)\, C_{n-1} + (2n+1)(1-2\varkappa'^2\gamma - 2\gamma + 3\varkappa'^2\gamma)\, C_n$$
$$+ (2n+2)(\varkappa'^2 + 1 - 3\varkappa^2\gamma)\, C_{n+1} + (2n+3)\varkappa'^2\, C_{n+2}.$$

Die nähere Untersuchung der Gleichung I zeigt folgendes: für $n = 0$ lässt sich A_2 ausdrücken durch A_0 und A_1, für $n = 1$ lässt sich A_3 durch A_2, A_1 und A_0 ausdrücken, folglich muss sich A_3, da A_2 wieder durch A_1 und A_0 ausgedrückt werden kann, durch eine Verbindung von A_1 und A_0 darstellen lassen.

Diesen Schluss können wir, indem wir n nach und nach alle positiven ganzzahligen Werte annehmen lassen, immer wiederholen und wir finden auf diese Weise, dass sich A_n immer durch A_0 und A_1 ausgedrückt darstellen lässt.

Für $n = -1$ ergiebt sich eine Gleichung, aus welcher A_{-2} durch A_{-1} und A_1 ausgedrückt werden kann, für $n = -2$ können wir A_{-3} durch A_{-2}, A_{-1} und A_0 ausdrücken, und da sich A_{-2} durch eine Verbindung von A_{-1} und A_1 ersetzen läſst, so ist auch A_{-3} mit Hülfe von A_{-1}, A_1 und A_0 darzustellen möglich.

Fährt man in dieser Schluſsweise fort, indem man nach und nach n die Reihe der negativen ganzen Zahlen durchlaufen läſst, so findet man, daſs sich A_{-n} durch A_{-1}, A_0 und A_1 ausdrücken läſst.

Dasselbe, was hier für die A auseinandergesetzt ist, gilt auch für die B und C, da die Gleichungen II und III der Gleichung I ganz konform gebaut sind und daher folgt, daſs für alle ganzzahligen n, sie mögen positiv oder negativ sein, die drei Integrale A_n, B_n, C_n sich auf Verbindungen der folgenden 9 Integrale reduzieren lassen:

$$\begin{array}{ccc} A_{-1}, & A_0, & A_1, \\ B_{-1}, & B_0, & B_1, \\ C_{-1}, & C_0, & C_1, \end{array}$$

Diese 9 Integrale können aber stets auf 4 zurückgeführt werden.

Von den oben aufgezählten 9 Integralen sind zunächst die mit dem Index Null behafteten einander gleich, da für $n = 0$ die allgemeinen Integrale A_n, B_n, C_n übergehen in:

$$A_0 = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}; \qquad B_0 = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}; \qquad C_0 = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi},$$

woraus ohne weiteres folgt:

$$A_0 = B_0 = C_0.$$

Durch die Gleichheit dieser drei Integrale reduzieren sich die oben aufgezählten neun auf sieben Integrale.

Das Integral $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$ hat Legendre, wie schon oben erwähnt, das elliptische Integral erster Gattung in seiner Normalform genannt und es gleich $F(\varphi)$ gesetzt, während Jacobi es mit u bezeichnete.

Setzen wir in der Gleichung für A_n $n = 1$, so geht A_n über in

$$A_1 = \int_0^\varphi \frac{(\alpha + \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Nun ist aber

$$\Delta^2\varphi = 1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi,$$

folglich

$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \Delta^2\varphi}{\varkappa^2}$$

und

$$\alpha + \sin^2\varphi = \frac{\alpha\varkappa^2 + 1 - \Delta^2\varphi}{\varkappa^2},$$

mithin

$$A_1 = \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^\varphi \frac{1 + \alpha\varkappa^2 - \Delta^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi = \frac{1 + \alpha\varkappa^2}{\varkappa^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1}{\varkappa}\int_0^\varphi \Delta\varphi\,d\varphi$$

oder, wenn wir für das Integral erster Gattung die Jacobi'sche Bezeichnung einführen:

$$A_1 = \frac{1 + \alpha\varkappa^2}{\varkappa^2}\,u - \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^\varphi \Delta\varphi\,d\varphi.$$

Wird in der Gleichung für B_n für n ebenfalls 1 gesetzt, so ergiebt sich:

$$B_1 = \int_0^\varphi \frac{(\beta + \cos^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{(\beta + 1 - \sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \beta\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_0^\varphi \frac{1 - \sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi$$

oder da

$$1 - \sin^2\varphi = 1 - \frac{1 - \Delta^2\varphi}{\varkappa^2} = \frac{\varkappa^2 - 1 + \Delta^2\varphi}{\varkappa^2},$$

wenn für das Integral erster Gattung zugleich u eingeführt wird:

$$B_1 = \beta u + \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^\varphi \frac{\varkappa^2 - 1 - \Delta^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi = \beta u + \frac{\varkappa^2 - 1}{\varkappa^2}\,u + \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^\varphi \Delta\varphi\,d\varphi.$$

Endlich wird aus C_n für $n = 1$

$$C_1 = \int_0^\varphi \frac{(\gamma + \mathrm{tg}^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi} = \gamma\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_0^\varphi \frac{\mathrm{tg}^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Um das letzte Integral zu reduzieren, müssen wir $\frac{\mathrm{tg}^2\varphi}{\Delta\varphi}$ in einer etwas weitläufigeren Art umformen.

Da

$$\frac{\Delta^2\varphi - \varkappa^2\cos^2\varphi}{\varkappa'^2} = \frac{1 - \varkappa^2\sin^2\varphi - \varkappa^2\cos^2\varphi}{\varkappa'^2} = \frac{1 - \varkappa^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}{\varkappa'^2} = \frac{1 - \varkappa^2}{\varkappa'^2} = 1,$$

so ist

$$\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\Delta^2\varphi - \varkappa^2\cos^2\varphi}{\varkappa'^2}$$

und mithin:

$$\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\sin^2\varphi\,\Delta^2\varphi - \varkappa^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\varkappa'^2\cos^2\varphi\,\Delta\varphi} = \frac{\sin^2\varphi\,\Delta\varphi}{\varkappa'^2\cos^2\varphi} - \frac{\varkappa^2\sin^2\varphi}{\varkappa'^2\Delta\varphi}$$
$$= \frac{(1-\cos^2\varphi)\,\Delta\varphi}{\varkappa'^2\cos^2\varphi} - \frac{\varkappa^2\sin^2\varphi}{\varkappa'^2\Delta\varphi} = \frac{\Delta\varphi - \cos^2\varphi\,\Delta\varphi}{\varkappa'^2\cos^2\varphi} - \frac{\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi\operatorname{tg}\varphi}{\varkappa'^2\Delta\varphi}$$
$$= \frac{1}{\varkappa'^2}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{\Delta\varphi}{\varkappa'^2} - \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi}$$
$$= \frac{1}{\varkappa'^2}\left\{\frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi}\right\} - \frac{\Delta\varphi}{\varkappa'^2}.$$

Da

$$\frac{d(\Delta\varphi\operatorname{tg}\varphi)}{d\varphi} = \Delta\varphi\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{d\varphi} + \operatorname{tg}\varphi\frac{d\Delta\varphi}{d\varphi}$$
$$= \frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi\operatorname{tg}\varphi}{\Delta\varphi},$$

so dürfen wir für den in der Klammer stehenden Ausdruck das Differential von $\Delta\varphi\,.\operatorname{tg}\varphi$ nach φ schreiben. Dadurch erhalten wir:

$$\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{\varkappa'^2}\,\frac{d(\Delta\varphi\,.\operatorname{tg}\varphi)}{d\varphi} - \frac{\Delta\varphi}{\varkappa'^2}.$$

Unter Berücksichtigung dieses Wertes ergiebt sich:

$$C_1 = \gamma u + \frac{1}{\varkappa'^2}\int_0^\varphi \frac{d(\Delta\varphi\,.\operatorname{tg}\varphi)}{d\varphi}\,d\varphi - \frac{1}{\varkappa'^2}\int_0^\varphi \Delta\varphi\,d\varphi,$$

$$C_1 = \gamma u + \frac{1}{\varkappa'^2}\,\Delta\varphi\,.\operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{\varkappa'^2}\int_0^\varphi \Delta\varphi\,d\varphi. \tag{1}$$

Diese Reduktionen zeigen, dafs A_1, B_1, C_1 zusammengesetzt sind aus Verbindungen des Integrals $u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, welchem A_0, B_0 und C_0 gleich waren, und eines neuen Integrales

$$\int_0^\varphi \Delta\varphi\,d\varphi = \int_0^\varphi \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Dieses Integral hat Legendre das elliptische Integral zweiter Gattung in der Normalform genannt und dasselbe mit $E(\varphi)$ berechnet, so dafs nach Legendre ist:

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = E(\varphi).$$

Jacobi hat diese Bezeichnung dahin abgeändert, dafs er die elliptischen Funktionen, welche er bei der Untersuchung der elliptischen Integrale erster Gattung gewonnen hatte, auch in die elliptischen Integrale zweiter Gattung einführte.

Jacobi sieht bekanntlich das Integral

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

als Funktion der oberen Grenze an und setzt:

$$\varphi = \operatorname{am} u.$$

Aus der obigen Gleichung folgt aber

$$\frac{d\varphi}{du} = \Delta\varphi,$$

folglich

$$d\varphi = \Delta \operatorname{am} u\, du.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung

$$\int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi = E(\varphi)$$

ein, so erhalten wir die Jacobi'sche Bezeichnung:

$$\int_0^u \Delta^2 \operatorname{am} u\, du = E(\operatorname{am} u),$$

die Jacobi noch dahin abgekürzt hat, daſs er nicht $E(\operatorname{am} u)$, sondern kurz $E(u)$ schreibt.

Da die Integrale A_1, B_1, C_1 auf Verbindungen von u und E führen, so sind die ursprünglichen neun Integrale schon auf fünf reduziert.

Um schliesſslich auch die letzten drei Integrale auf ihre einfachste Form zu bringen, hat man in den allgemeinen Formen A_n, B_n, C_n, $n = -1$ zu setzen, wodurch man erhält

$$A_{-1} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(\alpha + \sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}; \quad B_{-1} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(\beta + \cos^2\varphi)\,\Delta\varphi}; \quad C_{-1} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(\gamma + \operatorname{tg}^2\varphi)\,\Delta\varphi}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{1}{\alpha + \sin^2\varphi} = \frac{\alpha}{\alpha(\alpha + \sin^2\varphi)} = \frac{\alpha + \sin^2\varphi - \sin^2\varphi}{\alpha(\alpha + \sin^2\varphi)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\alpha + \sin^2\varphi},$$

$$\frac{1}{\beta + \cos^2\varphi} = \frac{1}{\beta + 1 - \sin^2\varphi} = \frac{\beta + 1}{(\beta+1)(\beta + 1 - \sin^2\varphi)} = \frac{\beta + 1 - \sin^2\varphi + \sin^2\varphi}{(\beta+1)(\beta + 1 - \sin^2\varphi)}$$

$$= \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\beta + 1 - \sin^2\varphi},$$

$$\frac{1}{\gamma + \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{\gamma\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{1 - \sin^2\varphi}{\gamma - \gamma\sin^2\varphi + \sin^2\varphi}$$

$$= \frac{\gamma - \gamma\sin^2\varphi + \sin^2\varphi - \sin^2\varphi}{\gamma(\gamma - \gamma\sin^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\gamma + (1-\gamma)\sin^2\varphi}.$$

Mit Berücksichtigung dieser Werte und bei Einführung der Bezeichnung u erhalten wir:

$$A_{-1} = \frac{1}{\alpha}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1}{\alpha}\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\alpha + \sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{u}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\alpha + \sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$B_{-1} = \frac{1}{\beta+1}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1}{\beta+1}\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\beta + 1 - \sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{u}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+1}\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\beta + 1 - \sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$C_{-1} = \frac{1}{\gamma}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1}{\gamma}\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\gamma + (1-\gamma)\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{u}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\gamma + (1-\gamma)\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Alle drei Integrale A_{-1}, B_{-1}, C_{-1} bestehen also aus einem Teile, welcher das elliptische Integral erster Gattung enthält, und einem zweiten Teile, in welchem ein Integral von der Form auftritt:

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{g+\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

wo g positiv oder negativ sein kann.

Dieses Integral nennt Legendre das elliptische Integral dritter Gattung. Zur Normalform des elliptischen Integrals dritter Gattung hat Legendre die folgende gewählt:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{1+n\sin^2\varphi}\cdot\frac{1}{\Delta\varphi},$$

dieses Integral mit $\Pi(\varphi, n)$ bezeichnet und n den Parameter des Integrals genannt.

Diese Normalform unterscheidet sich von dem zuerst aufgestellten Integrale nur um ein Integral erster Gattung, denn es ist:

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{g+\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{g+\sin^2\varphi-g}{g+\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$= \int_0^\varphi \left(1-\frac{g}{g+\sin^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int_0^\varphi \frac{g}{g+\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$= u - \int_0^\varphi \frac{1}{1+\frac{1}{g}\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u - \Pi\left(\varphi, \frac{1}{g}\right).$$

Die drei Integrale A_{-1}, B_{-1}, C_{-1} führen also auf Verbindungen von u und Π und hiermit sind die zuerst aufgestellten 9 Integrale wirklich auf die drei u, E und Π reduziert.

Jacobi hat als Normalform des elliptischen Integrales dritter Gattung nicht dasjenige Integral gewählt, welches man erhält, wenn man in die Legendre'sche Form die elliptischen Funktionen einführt, sondern ein von diesem abweichendes. Da Jacobi seine Normalform auch mit Π bezeichnet, so thut man gut, um Verwirrungen zu vermeiden, dem einen Π einen Index anzufügen. Wir wollen dem Π, wenn es die Legendre'sche Normalform bezeichnen soll, den Index Null geben, so dass also:

$$\Pi_0(\varphi, n) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{1+n\sin^2\varphi}\cdot\frac{1}{\Delta\varphi} \quad \text{ist.}$$

Führen wir in diese Legendre'sche Form die elliptischen Funktionen ein, indem wir:

$$\varphi = \operatorname{am} u, \quad \text{folglich} \quad d\varphi = \Delta \operatorname{am} u\, du$$

setzen, so erhalten wir:

$$\Pi(\operatorname{am} u, n) = \int_0^u \frac{du}{1+n\sin^2\operatorname{am} u}.$$

Wie oben erwähnt, hat Jacobi nicht diese Form als Normalform hingestellt, sondern er hat dazu diejenige gewählt, welche man nahezu erhält, wenn man den Zähler der Legendre'schen Form mit $n\sin^2\varphi$ multipliziert, also:

$$\int_0^\varphi \frac{n \sin^2\varphi\, d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi},$$

d. h. die Form, auf welche wir bei der Reduktion der Integrale A_{-1}, B_{-1}, C_{-1} geführt wurden. Führen wir nämlich in diese Form die elliptischen Funktionen ein, so erhalten wir:

$$\int_0^u \frac{n \sin^2 \mathrm{am}\, u\, \Delta \mathrm{am}\, u\, du}{(1+n\sin^2 \mathrm{am}\, u)\,\Delta \mathrm{am}\, u} = \int_0^u \frac{n \sin^2 \mathrm{am}\, u\, du}{1-n\sin^2 \mathrm{am}\, u}.$$

Die ganz genaue Normalform Jacobi's ist folgende:

$$\Pi(u,a) = \int_0^u \frac{\varkappa^2 \sin \mathrm{am}\, a \,.\, \cos \mathrm{am}\, a \quad \Delta \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u\, du}{1-\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u}.$$

Der Zusammenhang zwischen dieser Form von Jacobi und der Legendre'schen ist leicht aufzustellen. Da

$$\frac{1}{1+n\sin^2\varphi} = \frac{1+n\sin^2\varphi - n\sin^2\varphi}{1+n\sin^2\varphi} = 1 - \frac{n\sin^2\varphi}{1+n\sin^2\varphi},$$

so hat man sofort:

$$\Pi_0(\varphi,n) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = \int_0^\varphi \left(1 - \frac{n\sin^2\varphi}{1+n\sin^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int_0^\varphi \frac{n\sin^2\varphi}{1+n\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(\varphi) - \int_0^\varphi \frac{n\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi},$$

wenn man für die Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung die Legendre'sche Bezeichnung einführt.

Jacobi gab nun dem elliptischen Integral dritter Gattung in dem Falle eine reelle Form, wenn der Parameter n ein negativer echter Bruch und absolut genommen kleiner als $\varkappa^2$ ist.

Um dies zu erreichen, setzte er:

$$n = -\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a$$

und nannte die Grösse a den Parameter des elliptischen Integrales.

Führen wir in die obige Gleichung für $\Pi_0(\varphi,n)$ diesen Wert für n und die elliptischen Funktionen ein, indem wir $\varphi = \mathrm{am}\, u$ setzen, so erhalten wir:

$$\Pi_0(\varphi,n) = u + \int_0^u \frac{\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u\, du}{1-\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u}.$$

Vergleichen wir aber diese Form mit der Normalform von Jacobi, so ergiebt sich augenblicklich:

$$\text{(A)} \qquad \Pi_0(\varphi,n) = u + \frac{\sin \mathrm{am}\, a}{\cos \mathrm{am}\, a \,.\, \Delta \mathrm{am}\, a}\,\Pi(u,a).$$

Der Legendre'sche Parameter kann sowohl reelle als imaginäre Werte annehmen, verweilen wir aber zunächst nur bei reellem n, so ist klar, da:

$$n = -\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a$$

somit:

$$\sin \operatorname{am} a = \frac{\sqrt{-n}}{\varkappa}$$

und folglich, wie aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannt ist:

$$a = \int_0^{\frac{\sqrt{-n}}{\varkappa}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}},$$

dass der Jacobi'sche Parameter a nur solange reell ist, als die obere Grenze des Integrals, welches den Werth von a bestimmt, reell ist und da diese obere Grenze den Wert eines Sinus ausdrückt, dessen Argument reell sein soll, so muss diese obere Grenze ausserdem auch kleiner als 1 sein. Diese beiden Bedingungen sind erfüllt, wenn n negativ und zwischen den Grenzen 0 und $-\varkappa^2$ liegt, d. h. solange n ein negativer echter Bruch ist, dessen absoluter Wert den Wert von $\varkappa^2$ nicht übersteigt. Es ist also erforderlich:

$$-\varkappa^2 < n < 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$0 < \sin \operatorname{am} a < 1.$$

Ausser dem eben angeführten ersten Fall, dass:

1) $$-\varkappa^2 < n < 0,$$

ein Fall, der zur Folge hat, dafs a reell ausfällt, haben wir für reelle n noch die weiteren Fälle zu unterscheiden:

2) $$-1 < n < -\varkappa^2$$

3) $$-\infty < n < -1$$

4) $$0 < n < \infty.$$

Ist nach 2):

$$-1 < n < -\varkappa^2,$$

so liegt $\sin \operatorname{am} a$ zwischen $\frac{1}{\varkappa}$ und 1,

also:

$$\frac{1}{\varkappa} < \sin \operatorname{am} a < 1.$$

Ist nach 3)

$$-\infty < n < -1,$$

so ergiebt sich, dass $\sin \operatorname{am} a$ zwischen $\frac{1}{\varkappa}$ und ∞ liegen muss, also:

$$\frac{1}{\varkappa} < \sin \operatorname{am} a < \infty.$$

Aus der Grenze ∞ für $\sin \operatorname{am} a$ geht sofort hervor, dass das Argument dieses Sinus nicht reell sein kann, da für reelle Argumente der Sinus nur zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegt, das Argument dieses Sinus muss vielmehr imaginär sein, da nur für imaginäre Argumente der Sinus unendlich werden kann.

Ist endlich nach 4)

$$0 < n < +\infty,$$

so ist $\sin \operatorname{am} a$ stets rein imaginär.

Stellen wir diese vier Fälle, in denen n nur reelle Werte annimmt, noch einmal übersichtlich zusammen, so haben wir folgende zusammengehörende Intervalle der Werte von n und $\sin \operatorname{am} a$:

1) $-\varkappa^2 < n < 0$; $0 < \sin \operatorname{am} a < 1$

2) $-1 < n < -\varkappa^2$; $\frac{1}{\varkappa} < \sin \operatorname{am} a < 1$

3) $-\infty < n < -1$; $\frac{1}{\varkappa} < \sin \operatorname{am} a < \infty$

4) $0 < n < +\infty$; $\sin \operatorname{am} a$ stets rein imaginär.

Um für diese verschiedenen Fälle die jedesmaligen Werte des Jacobi'schen Parameters a aufzufinden, ist es nötig, einige Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen näher in's Auge zu fassen. Es handelt sich ja darum, die Argumente für die Funktion sin am aufzustellen, für welche diese Funktion beziehungsweise die Werte 0, 1, $\frac{1}{\varkappa}$ und ∞ annimmt, und für welche sie rein imaginär wird.

Fasst man mit Jacobi das Integral $\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2 \varphi}} = u$ als Funktion der oberen Grenze u auf, indem man setzt:

$$\varphi = \operatorname{am} u,$$

so folgt, da φ und u gleichzeitig verschwinden:

$$\operatorname{am} 0 = 0.$$

Setzt man ferner, wenn $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird, der Fall, in welchem das elliptische Integral das vollständige Integral genannt wird, mit Jacobi:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2 \varphi}} = K,$$

so ergiebt sich:

$$\frac{1}{2}\pi = \operatorname{am} K.$$

Diese Betrachtungen liefern uns sofort die Argumente, für welche sin am die Werte Null und 1 annimmt, denn es ist offenbar:

(2) $$\sin \operatorname{am} 0 = 0,$$

(3) $$\sin \operatorname{am} K = 1.$$

Um die noch übrigen Fälle auch zu erledigen, erinnern wir daran, dass die elliptischen Funktionen eine doppelte Periode besitzen, nämlich eine reelle $4K$ und eine imaginäre $4K'i$, wo:

$$K' = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa'^2 \sin^2 \varphi}}$$

ist d. h. das vollständige Integral, in welches das vollständige Integral K übergeht, wenn man in ihm den Modul $\varkappa$ durch den Komplementärmodul $\varkappa'$ ersetzt.

Es ist ja bekanntlich:

$$(4)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(u \pm 4K) = \sin\operatorname{am} u; \\ \cos\operatorname{am}(u \pm 4K) = \cos\operatorname{am} u; \\ \Delta\operatorname{am}(u \pm 4K) = \Delta\operatorname{am} u: \end{cases} \qquad (5)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(u \pm 4K'i) = \sin\operatorname{am} u; \\ \cos\operatorname{am}(u \pm 4K'i) = \cos\operatorname{am} u; \\ \Delta\operatorname{am}(u \pm 4K'i) = \Delta\operatorname{am} u. \end{cases}$$

Die Periode der elliptischen Funktion hängt aber von dem Modul ab. Denn hätte man als Modul der elliptischen Funktionen nicht $\varkappa$ gewählt, wie oben geschehen ist, sondern $\varkappa'$, so wäre nicht $4K$, sondern $4K'$ der reelle Periodicitätsindex, und ebenso nicht $4K'i$, sondern $4Ki$ der Index der imaginären Periode, so dafs also:

$$\sin\operatorname{am}(u \pm 4K', \varkappa') = \sin\operatorname{am}(u, \varkappa') \text{ u. s. w.}$$
$$\sin\operatorname{am}(u \pm 4Ki, \varkappa') = \sin\operatorname{am}(u, \varkappa') \text{ u. s. w.}$$

Fügt man zu dem Argumente der Funktion nur den halben Periodicitätsindex, also $2K$ und $2K'i$, so behalten bekanntlich die elliptischen Funktionen zum Teil ganz genau, zum Teil, abgesehen von dem Vorzeichen, ihre Werte ungeändert bei, denn es ist:

$$(6)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(u \pm 2K) = -\sin\operatorname{am} u; \\ \cos\operatorname{am}(u \pm 2K) = -\cos\operatorname{am} u; \\ \Delta\operatorname{am}(u \pm 2K) = \Delta\operatorname{am} u; \end{cases} \qquad (7)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(u \pm 2K'i) = \sin\operatorname{am} u; \\ \cos\operatorname{am}(u \pm 2K'i) = -\cos\operatorname{am} u; \\ \Delta\operatorname{am}(u \pm 2K'i) = -\Delta\operatorname{am} u. \end{cases}$$

Setzt man in die Gleichungen (4) bis (7) $u = 0$, so erhält man:

$$\begin{aligned} \sin\operatorname{am} 4K &= 0; & \sin\operatorname{am} 4K'i &= 0; \\ \cos\operatorname{am} 4K &= 1; & \cos\operatorname{am} 4K'i &= 1; \\ \Delta\operatorname{am} 4K &= 1; & \Delta\operatorname{am} 4K'i &= 1; \\ \sin\operatorname{am} 2K &= 0; & \sin\operatorname{am} 2K'i &= 0; \\ \cos\operatorname{am} 2K &= -1; & \cos\operatorname{am} 2K'i &= -1; \\ \Delta\operatorname{am} 2K &= 1; & \Delta\operatorname{am} 2K'i &= -1. \end{aligned}$$

Den Zusammenhang zwischen den elliptischen Funktionen mit reellem Argumente und denjenigen mit imaginärem Argumente drücken die Formeln aus:

$$(8)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am} ui = i \cdot \dfrac{\sin\operatorname{am}(u, \varkappa')}{\cos\operatorname{am}(u, \varkappa')}, \\ \cos\operatorname{am} ui = \dfrac{1}{\cos\operatorname{am}(u, \varkappa')}, \\ \Delta\operatorname{am} ui = \dfrac{\Delta\operatorname{am}(u, \varkappa')}{\cos\operatorname{am}(u, \varkappa')}. \end{cases}$$

Die elliptischen Funktionen mit imaginärem Argument können also durch elliptische Funktionen mit reellem Argument ersetzt werden, der Modul dieser letzteren ist jedoch das Komplement des Moduls jener ersteren.

Die Periodicität der elliptischen Funktionen bleibt auch bestehen, wenn man die reelle und imaginäre Periode mit einander verbindet, denn es ist:

$$(9)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(u \pm 4K \pm 4K'i) = \sin\operatorname{am} u, \\ \cos\operatorname{am}(u \pm 4K \pm 4K'i) = \cos\operatorname{am} u, \\ \Delta\operatorname{am}(u \pm 4K \pm 4K'i) = \Delta\operatorname{am} u. \end{cases}$$

Ebenso kehren die elliptischen Funktionen entweder ganz genau oder, abgesehen vom Vorzeichen, in sich selbst zurück, wenn man die Hälfte der reellen mit der Hälfte der imaginären Periode verbindet, denn es ist:

$$(10)\quad \begin{cases} \sin \operatorname{am}(u \pm 2K \pm 2K'i) = -\sin \operatorname{am} u, \\ \cos \operatorname{am}(u \pm 2K \pm 2K'i) = \quad \cos \operatorname{am} u, \\ \Delta \operatorname{am}(u \pm 2K \pm 2K'i) = -\Delta \operatorname{am} u. \end{cases}$$

Setzt man in (9) und (10) $u = 0$, so erhält man:

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{am}(4K \pm 4K'i) &= 0; & \sin \operatorname{am}(2K \pm 2K'i) &= \quad 0; \\ \cos \operatorname{am}(4K \pm 4K'i) &= 1; & \cos \operatorname{am}(2K \pm 2K'i) &= \quad 1; \\ \Delta \operatorname{am}(4K \pm 4K'i) &= 1; & \Delta \operatorname{am}(2K \pm 2K'i) &= -1. \end{aligned}$$

Nennt man mit Jacobi die Amplitude von $K - u$ das Komplement der Amplitude von u oder die Koamplitude von u und setzt demgemäss:

$$\operatorname{am}(K - u) = \operatorname{coam} u,$$

so sind als wichtige Formeln zu merken:

$$\sin \operatorname{am}(K - u) = \sin \operatorname{coam} u = \frac{\cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u},$$

$$\cos \operatorname{am}(K - u) = \cos \operatorname{coam} u = \frac{\varkappa' \sin \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u},$$

$$\Delta \operatorname{am}(K - u) = \Delta \operatorname{coam} u = \frac{\varkappa'}{\Delta \operatorname{am} u}.$$

Setzt man in diese Gleichungen $-u$ statt u und führt zugleich $u - K$ statt $K - u$ ein, so erhält man bei Berücksichtigung, dass die Amplitude eine ungerade Funktion ist, also:

$$\operatorname{am}(-u) = -\operatorname{am} u$$

und infolge dessen $\sin \operatorname{am}(-u) = -\sin \operatorname{am} u$; $\cos \operatorname{am}(-u) = \cos \operatorname{am} u$; $\Delta \operatorname{am}(-u) = \Delta \operatorname{am} u$.

$$(11)\quad \begin{cases} \sin \operatorname{am}(u \pm K) = \pm \dfrac{\cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}, \\ \cos \operatorname{am}(u \pm K) = \mp \dfrac{\varkappa' \sin \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}, \\ \Delta \operatorname{am}(u \pm K) = \quad \dfrac{\varkappa'}{\Delta \operatorname{am} u}, \end{cases}$$

Setzt man in diesen Gleichungen ui statt u und transformiert dann die elliptischen Funktionen mit imaginärem Argumente auf solche mit reellem Argumente, so erhält man:

$$(12)\quad \begin{cases} \sin \operatorname{am}(ui \pm K) = \pm \dfrac{1}{\Delta \operatorname{am}(u, \varkappa')}, \\ \cos \operatorname{am}(ui \pm K) = \mp \dfrac{i\varkappa' \sin \operatorname{am}(u, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(u, \varkappa')}, \\ \Delta \operatorname{am}(ui \pm K) = \quad \dfrac{\varkappa' \cos \operatorname{am}(u, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(u, \varkappa')}, \end{cases}$$

Lässt man in den Formeln (8), welche den Zusammenhang der elliptischen Funktionen reellen Argumentes mit denen imaginären Argumentes feststellen, u um K' zu- oder abnehmen, so erhält man nach gehöriger Reduktion die Formeln:

$$\sin \operatorname{am}(ui \pm K'i) = -i \frac{\cos \operatorname{am}(u, \varkappa')}{\varkappa \sin \operatorname{am}(u, \varkappa')},$$

$$\cos \operatorname{am}(ui \pm K'i) = \mp \frac{\varDelta \operatorname{am}(u, \varkappa')}{\varkappa \sin \operatorname{am}(u, \varkappa')},$$

$$\varDelta \operatorname{am}(ui \pm K'i) = \mp \frac{1}{\sin \operatorname{am}(u, \varkappa')}.$$

Drückt man in diesen Gleichungen die elliptischen Funktionen mit dem Modul $\varkappa'$ durch die Funktionen mit dem Modul $\varkappa$ aus, indem man berücksichtigt, dafs aus den Gleichungen (8) sich ergiebt:

$$\sin \operatorname{am}(u, \varkappa') = -i \frac{\sin \operatorname{am} ui}{\cos \operatorname{am} ui},$$

$$\cos \operatorname{am}(u, \varkappa') = \frac{1}{\cos \operatorname{am} ui},$$

$$\varDelta \operatorname{am}(u, \varkappa') = \frac{\varDelta \operatorname{am} ui}{\cos \operatorname{am} ui},$$

so erhält man:

$$\sin \operatorname{am}(ui \pm K'i) = \frac{1}{\varkappa \sin \operatorname{am} ui},$$

$$\cos \operatorname{am}(ui \pm K'i) = \mp \frac{i \varDelta \operatorname{am} ui}{\varkappa \sin \operatorname{am} ui},$$

$$\varDelta \operatorname{am}(ui \pm K'i) = \mp i \frac{\cos \operatorname{am} ui}{\sin \operatorname{am} ui}$$

und setzt man in diesen Gleichungen u statt ui, so entstehen die Gleichungen:

$$(13) \qquad \begin{cases} \sin \operatorname{am}(u \pm K'i) = \dfrac{1}{\varkappa \sin \operatorname{am} u}, \\ \cos \operatorname{am}(u \pm K'i) = \mp \dfrac{i}{\varkappa} \dfrac{\varDelta \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u}, \\ \varDelta \operatorname{am}(u \pm K'i) = \mp i \dfrac{\cos \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u}. \end{cases}$$

Setzt man in diesen Formeln $u = 0$, so ergiebt sich:

$$(14) \qquad \begin{cases} \sin \operatorname{am}(\pm K'i) = \infty, \\ \cos \operatorname{am}(\pm K'i) = \infty, \\ \varDelta \operatorname{am}(\pm K'i) = \infty. \end{cases}$$

Ersetzt man in den Gleichungen (13) u einmal durch $u + K$, das andere Mal durch $u - K$, so erhält man bei Berücksichtigung der Gleichungen (11):

$$\sin \operatorname{am}(u \pm K \pm K'i) = \pm \frac{\varDelta \operatorname{am} u}{\varkappa \cos \operatorname{am} u},$$

$$\cos \operatorname{am}(u \pm K \pm K'i) = \mp (\pm) \frac{i \varkappa'}{\varkappa \cos \operatorname{am} u},$$

$$\varDelta \operatorname{am}(u \pm K \pm K'i = \pm \frac{i \varkappa' \sin \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u}.$$

Setzt man hier $u = 0$, so erhält man:

$$(15) \qquad \begin{cases} \sin \operatorname{am}(K \pm K'i) = \dfrac{1}{\varkappa}, \\ \cos \operatorname{am}(K \pm K'i) = \mp \dfrac{i \varkappa'}{\varkappa}, \\ \varDelta \operatorname{am}(K \pm K'i) = 0. \end{cases}$$

Diese Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen liefern das erforderliche Material, um die oben gestellten Forderungen zu befriedigen.

Wie die Gleichungen (2) und (3) erkennen lassen, nimmt die Funktion Sinusamplitude beziehungsweise die Werte Null und Eins an, wenn das Argument gleich Null, respektive gleich K ist. Während also $\sin\operatorname{am} a$ von Null bis Eins wächst, nimmt das Argument von Null bis K zu, d. h. a ist in diesem Intervall gleich u, wenn u von Null bis K wächst.

Weiter zeigt die erste Gleichung (15), dass $\sin\operatorname{am} a$ den Wert $\frac{1}{\varkappa}$ erreicht, wenn $a = K + K'i$ wird, während also $\sin\operatorname{am} a$ von 1 bis $\frac{1}{\varkappa}$ zunimmt, wächst a von K bis $K + K'i$, mit anderen Worten, a ist in diesem Intervalle, in welchem $\sin\operatorname{am} a$ von 1 bis $\frac{1}{\varkappa}$ wächst, gleich $ui + K$, wo u von Null bis K' wächst, denn:

$$\Big[\sin\operatorname{am}(ui + K)\Big]_{u=0} = \sin\operatorname{am} K = 1;\quad \Big[\sin\operatorname{am}(ui + K)\Big]_{u=K'} = \sin\operatorname{am}(K + K'i) = \frac{1}{\varkappa}.$$

Den Wert ∞ erreicht aber, wie Gleichung (14) zeigt, $\sin\operatorname{am} a$, wenn $a = K'i$, während also $\sin\operatorname{am} a$ von $\frac{1}{\varkappa}$ bis ∞ zunimmt, mufs a von $K'i + K$ bis $K'i$ abnehmen, d. h. a hat in diesem Intervalle die Form $u + K'i$, wenn u von K bis Null abnimmt, denn:

$$\Big[\sin\operatorname{am}(u + K'i)\Big]_{u=K} = \sin\operatorname{am}(K + K'i) = \frac{1}{\varkappa},$$

$$\Big[\sin\operatorname{am}(u + K'i)\Big]_{u=0} = \sin\operatorname{am} K'i = \infty.$$

Wenn aber $\sin\operatorname{am} a$ rein imaginär ist, so ergiebt sich aus der Gleichung (8), dafs a die Form ui annehmen mufs.

Liegt also

1) n zwischen 0 und $\varkappa^2$, so liegt $\sin\operatorname{am} a$ zwischen 0 und 1 und a zwischen 0 und K,
2) n „ $-\varkappa^2$ „ -1 „ „ $\sin\operatorname{am} a$ „ 1 „ $\frac{1}{\varkappa}$ „ a „ K „ $K+K'i$,
3) n „ -1 „ $-\infty$ „ „ $\sin\operatorname{am} a$ „ $\frac{1}{\varkappa}$ „ ∞ „ a „ $K+K'i$ „ $K'i$,
4) n „ $+1$ „ $+\infty$, so ist $\sin\operatorname{am} a$ rein imaginär und a hat die Form ui,

oder es ist

im ersten Intervalle $n = -\varkappa^2 \sin^2\operatorname{am} a$

„ zweiten „ $n = -\varkappa^2 \sin^2\operatorname{am}(ai + K) = -\dfrac{\varkappa^2}{\Delta^2\operatorname{am}(a, \varkappa')}$ nach (12)

„ dritten „ $n = -\varkappa^2 \sin^2\operatorname{am}(a + K'i) = -\dfrac{1}{\sin^2\operatorname{am} a}$ nach (13)

„ vierten „ $n = -\varkappa^2 \sin^2\operatorname{am} ai = \varkappa^2 \dfrac{\sin^2\operatorname{am}(a, \varkappa')}{\cos^2\operatorname{am}(a, \varkappa')}$ nach (8),

wo a in allen Fällen eine reelle Gröfse bedeutet.

Um für alle Fälle den Zusammenhang zwischen der Legendre'schen und Jacobi'schen Form des elliptischen Integrals dritter Gattung darstellen zu können, ist es erforderlich, wie aus der oben entwickelten Gleichung (A) ersichtlich, den Wert von $\frac{\sin \operatorname{am} a}{\cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a}$ für alle vier Fälle kennen zu lernen.

Nun ist aber den Gleichungen (12) gemäfs

$$\frac{\sin \operatorname{am}(ai + K)}{\cos \operatorname{am}(ai + K)\, \Delta \operatorname{am}(ai + K)} = - \frac{\Delta \operatorname{am}(a, \varkappa')}{i \varkappa'^2 \sin \operatorname{am}(a, \varkappa') \cos \operatorname{am}(a, \varkappa')}$$

$$= i \frac{\Delta \operatorname{am}(a, \varkappa')}{\varkappa'^2 \sin \operatorname{am}(a, \varkappa') \cos \operatorname{am}(a, \varkappa')}.$$

Ferner ist, wie die Gleichungen (13) zeigen:

$$\frac{\sin \operatorname{am}(a + K'i)}{\cos \operatorname{am}(a + K'i)\, \Delta \operatorname{am}(a + K'i)} = - \frac{\sin \operatorname{am} a}{\cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a}$$

und endlich, wie sich aus den Gleichungen (8) ergiebt:

$$\frac{\sin \operatorname{am}(ai)}{\cos \operatorname{am}(ai)\, \Delta \operatorname{am}(ai)} = i \frac{\sin \operatorname{am}(a, \varkappa') \cos \operatorname{am}(a, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(a, \varkappa')}.$$

Berücksichtigt man diese Werte und die allgemeine Reduktionsformel (A), so erhält man für reelles n folgende spezielle Reduktionsformeln:

1) n zwischen 0 und $-\varkappa^2$, also $n = -\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a$,

$$\Pi_0(\varphi, n) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\, \Delta\varphi} = u + \frac{\sin \operatorname{am} a}{\cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a} \Pi(u, a),$$

2) n zwischen $-\varkappa^2$ und -1, also $n = -\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(ai + K)$

$$\Pi_0(\varphi, n) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\, \Delta\varphi} = u + i \frac{\Delta \operatorname{am}(a, \varkappa')}{\varkappa'^2 \sin \operatorname{am}(a, \varkappa') \cos \operatorname{am}(a, \varkappa')} \Pi(u, ai + K),$$

3) n zwischen -1 und $-\infty$, also $n = -\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(a + K'i)$

$$\Pi_0(\varphi, n) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)\, \Delta\varphi} = u - \frac{\sin \operatorname{am} a}{\cos \operatorname{am} a \, \Delta \operatorname{am} a} \Pi(u, a + K'i),$$

4) n positiv, also $n = -\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} ai$

$$\Pi_0(\varphi, n) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)\, \Delta\varphi} = u + i \frac{\sin \operatorname{am}(a, \varkappa') \cos \operatorname{am}(a, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(a, \varkappa')} \Pi(u, ai).$$

Ist der Legendre'sche Parameter n selbst imaginär, so läfst sich der Jacobi'sche Parameter auf die Form $a + bi$ bringen, so dafs also

$$n = -\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(a + bi)$$

wird.

Hat n einen imaginären Wert, so sei

$$n = p + qi,$$

alsdann setzt man

$$p + qi = -\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(a + bi),$$

folglich

$$p - qi = -\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(a - bi).$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\varkappa^2 + p + qi = \varkappa^2 \big(1 - \sin^2 \mathrm{am}\,(a+bi)\big) = \varkappa^2 \cos^2 \mathrm{am}\,(a+bi),$$
$$\varkappa^2 + p - qi = \varkappa^2 \big(1 - \sin^2 \mathrm{am}\,(a-bi)\big) = \varkappa^2 \cos^2 \mathrm{am}\,(a-bi),$$
$$1 + p + qi = 1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,(a+bi) \quad = \Delta^2 \mathrm{am}\,(a+bi),$$
$$1 + p - qi = 1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,(a-bi) \quad = \Delta^2 \mathrm{am}\,(a-bi).$$

Setzt man weiter:

$$(16)\ \begin{cases} -(p+qi) = A^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha), & \text{folglich} \quad -(p-qi) = A^2(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha) \\ \varkappa^2 + p + qi = B^2(\cos 2\beta + i \sin 2\beta), & \text{„} \quad \varkappa^2 + p - qi = B^2(\cos 2\beta - i \sin 2\beta) \\ 1 + p + qi = C^2(\cos 2\gamma + i \sin 2\gamma), & \text{„} \quad 1 + p - qi = C^2(\cos 2\gamma - i\sin 2\gamma) \end{cases}$$

so erhält man, wenn man die Substitutionen mit den vorigen vergleicht und für die Sinus und Kosinus die Exponentialgröfse einführt:

$$(17)\ \begin{cases} A^2 e^{2\alpha i} = \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,(a+bi) & \text{und} \quad A^2 e^{-2\alpha i} = \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,(a-bi) \\ B^2 e^{2\beta i} = \varkappa^2 \cos^2 \mathrm{am}\,(a+bi) & \text{„} \quad B^2 e^{-2\beta i} = \varkappa^2 \cos^2 \mathrm{am}\,(a-bi) \\ C^2 e^{2\gamma i} = \Delta^2 \mathrm{am}\,(a+bi) & \text{„} \quad C^2 e^{-2\gamma i} = \Delta^2 \mathrm{am}\,(a-bi). \end{cases}$$

Setzt man in den Gleichungen (16) die reellen Teile der einen Seite gleich den reellen Teilen der anderen Seite und behandelt die imaginären Teile beider Seiten ebenso, alsdann erhält man:

$$1)\ -p = A^2 \cos 2\alpha; \qquad 2)\ -q = A^2 \sin 2\alpha;$$
$$3)\ \varkappa^2 + p = B^2 \cos 2\beta; \qquad 4)\ q = B^2 \sin 2\beta;$$
$$5)\ 1 + p = C^2 \cos 2\gamma; \qquad 6)\ q = C^2 \sin 2\gamma.$$

Aus diesen sechs Gleichungen können die Gröfsen A, B, C, α, β, γ durch p, q und $\varkappa$ ausgedrückt werden.

Denn aus 1) und 2) folgt:

$$p^2 = A^4 \cos^2 2\alpha,$$
$$q^2 = A^4 \sin^2 2\alpha,$$
$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = \frac{1 - \sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha},$$

mithin

$$p^2 \sin^2 2\alpha = q^2 - q^2 \sin^2 2\alpha,$$
$$(p^2 + q^2) \sin^2 2\alpha = q^2,$$
$$\sin^2 2\alpha = \frac{q^2}{p^2 + q^2},$$

folglich

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Setzt man den Wert von $\sin^2 2\alpha$ in die Gleichung:

$$q^2 = A^4 \sin^2 2\alpha$$

ein, so erhält man:

$$q^2 = A^4 \cdot \frac{q^2}{p^2 + q^2},$$
$$A^4 = p^2 + q^2,$$
$$A = \pm \sqrt[4]{p^2 + q^2}.$$

Auf ganz analogem Wege erhält man aus den obigen Gleichungen 3) und 4) einerseits und aus den Gleichungen 5) und 6) andererseits die Werte:

$$B = \pm \sqrt[4]{(\varkappa^2 + p)^2 + q^2}; \qquad \sin 2\beta = \pm \frac{q}{\sqrt{(\varkappa^2 + p)^2 + q^2}};$$

$$C = \pm \sqrt[4]{(1 + p)^2 + q^2}; \qquad \sin 2\gamma = \pm \frac{q}{\sqrt{(1 + p)^2 + q^2}}.$$

Aus den Gleichungen (17) erhält man:

$$(18) \quad \begin{cases} Ae^{\alpha i} = \varkappa \sin \operatorname{am}(a + bi) & \text{und} \quad Ae^{-\alpha i} = \varkappa \sin \operatorname{am}(a - bi) \\ Be^{\beta i} = \varkappa \cos \operatorname{am}(a + bi) & \text{„} \quad Be^{-\beta i} = \varkappa \cos \operatorname{am}(a - bi) \\ Ce^{\gamma i} = \quad \Delta \operatorname{am}(a + bi) & \text{„} \quad Ce^{-\gamma i} = \quad \Delta \operatorname{am}(a - bi). \end{cases}$$

Um lästig lange Formeln zu vermeiden, wollen wir die Gröfsen $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ beibehalten und für diese die eben gefundenen Werte nicht einführen.

Die Quantitäten a und b, welche Bestandteile des Jacobi'schen Parameters werden sollen, sind also durch $p, q, \varkappa$ oder, was dasselbe ist, durch $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ auszudrücken. Zu diesem Zwecke stellt man $\sin \operatorname{am} 2a$ und $\sin \operatorname{am} 2bi$, $\cos \operatorname{am} 2a$ und $\cos \operatorname{am} 2bi$ durch die eben angegebenen Gröfsen dar, indem man unter Berücksichtigung, dafs

$$2a = (a + bi) + (a - bi),$$
$$2bi = (a + bi) - (a - bi),$$

also

$$\sin \operatorname{am} 2a = \sin \operatorname{am} [(a + bi) + (a - bi)],$$
$$\sin \operatorname{am} 2bi = \sin \operatorname{am} [(a + bi) - (a - bi)],$$
$$\cos \operatorname{am} 2a = \cos \operatorname{am} [(a + bi) + (a - bi)],$$
$$\cos \operatorname{am} 2bi = \cos \operatorname{am} [(a + bi) - (a - bi)]$$

sind, auf diese Werte von $\sin \operatorname{am} 2a$, $\sin \operatorname{am} 2bi$, $\cos \operatorname{am} 2a$ und $\cos \operatorname{am} 2bi$ die aus dem Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung fliefsenden Relationen zwischen den elliptischen Funktionen mit zusammengesetztem und mit einfachem Argument zur Anwendung bringt.

Aus diesem Additionstheorem ergiebt sich bekanntlich:

$$(19) \quad \begin{cases} \sin \operatorname{am}(u \pm v) = \dfrac{\sin \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} v \pm \sin \operatorname{am} v \,.\, \cos \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v} \\ \cos \operatorname{am}(u \pm v) = \dfrac{\cos \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} v \mp \sin \operatorname{am} u \,.\, \sin \operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} v}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v}. \end{cases}$$

Wenden wir die erste dieser Formeln auf die Werte von $\sin \operatorname{am} 2a$ und $\sin \operatorname{am} 2bi$ an, so erhalten wir:

$$\sin \operatorname{am} 2a = \frac{\sin \operatorname{am}(a + bi) \cos \operatorname{am}(a - bi)\, \Delta \operatorname{am}(a - bi) + \sin \operatorname{am}(a - bi) \cos \operatorname{am}(a + bi)\, \Delta \operatorname{am}(a + bi)}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(a + bi) \sin^2 \operatorname{am}(a - bi)},$$

$$\sin \operatorname{am} 2bi = \frac{\sin \operatorname{am}(a + bi) \cos \operatorname{am}(a - bi)\, \Delta \operatorname{am}(a - bi) - \sin \operatorname{am}(a - bi) \cos \operatorname{am}(a + bi)\, \Delta \operatorname{am}(a + bi)}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(a + bi) \sin^2 \operatorname{am}(a - bi)}.$$

Setzen wir auf den rechten Seiten dieser Gleichungen die oben in den Gleichungen (18) und (17) zusammengestellten Werte ein, so erhalten wir:

$$\sin \operatorname{am} 2a = ABC \frac{e^{(\alpha-\beta-\gamma)i} + e^{-(\alpha-\beta-\gamma)i}}{\varkappa^2 - A^4},$$

$$\sin \operatorname{am} 2bi = ABC \frac{e^{(\alpha-\beta-\gamma)i} - e^{-(\alpha-\beta-\gamma)i}}{\varkappa^2 - A^4},$$

oder wenn wir für die Exponentialfunktion die Sinus und Kosinus einführen:

$$\sin \operatorname{am} 2a = 2ABC \frac{\cos(\alpha - \beta - \gamma)}{\varkappa^2 - A^4},$$

$$\sin \operatorname{am} 2bi = 2iABC \frac{\sin(\alpha - \beta - \gamma)}{\varkappa^2 - A^4}.$$

Entsprechend erhalten wir, wenn wir die zweite der Gleichungen (19) auf die Werte von $\cos \operatorname{am} 2a$ und $\cos \operatorname{am} 2bi$ zur Anwendung bringen:

$$\cos \operatorname{am} 2a = \frac{\cos \operatorname{am}(a+bi) \cos \operatorname{am}(a-bi) - \sin \operatorname{am}(a+bi) \sin \operatorname{am}(a-bi)\, \varDelta \operatorname{am}(a+bi)\, \varDelta \operatorname{am}(a-bi)}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(a+bi) \sin^2 \operatorname{am}(a-bi)},$$

$$\cos \operatorname{am} 2bi = \frac{\cos \operatorname{am}(a+bi) \cos \operatorname{am}(a-bi) + \sin \operatorname{am}(a+bi) \sin \operatorname{am}(a-bi)\, \varDelta \operatorname{am}(a+bi)\, \varDelta \operatorname{am}(a-bi)}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(a+bi) \sin^2 \operatorname{am}(a-bi)},$$

oder durch Einsetzung der Werte aus den Gleichungen (18) und (17):

$$\cos \operatorname{am} 2a = \frac{B^2 - A^2C^2}{\varkappa^2 - A^4},$$

$$\cos \operatorname{am} 2bi = \frac{B^2 + A^2C^2}{\varkappa^2 - A^4}.$$

Wir finden daher:

$$\operatorname{tg} \operatorname{am} 2a = \frac{2ABC}{B^2 - A^2C^2} \cos(\alpha - \beta - \gamma),$$

$$\operatorname{tg} \operatorname{am} 2bi = \frac{2iABC}{B^2 + A^2C^2} \sin(\alpha - \beta - \gamma).$$

Setzen wir der Kürze wegen noch:

$$\frac{2ABC}{B^2 - A^2C^2} = \operatorname{tg} 2\delta,$$

folglich:

$$\frac{B^2 - A^2C^2}{2ABC} = \operatorname{ctg} 2\delta,$$

$$\frac{B^4 - 2A^2B^2C^2 + A^4C^4}{4A^2B^2C^2} = \operatorname{ctg}^2 2\delta,$$

$$\frac{B^4 - 2A^2B^2C^2 + A^4C^4}{4A^2B^2C^2} + 1 = 1 + \operatorname{ctg}^2 2\delta,$$

$$\frac{B^4 - 2A^2B^2C^2 + A^4C^4 + 4A^2B^2C^2}{4A^2B^2C^2} = 1 + \operatorname{ctg}^2 2\delta,$$

$$\frac{B^4 + 2A^2B^2C^2 + A^4C^4}{4A^2B^2C^2} = 1 + \operatorname{ctg}^2 2\delta,$$

$$\left(\frac{B^2 + A^2C^2}{2ABC}\right)^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 2\delta,$$

$$\frac{B^2 + A^2C^2}{2ABC} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\delta},$$

$$\frac{2ABC}{B^2 + A^2C^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\delta}} = \sin 2\delta,$$

so erhalten wir:

$$\operatorname{tg} \operatorname{am} 2a = \operatorname{tg} 2\delta \,.\, \cos(\alpha - \beta - \gamma)$$

$$\operatorname{tg} \operatorname{am} 2bi = i \sin 2\delta \,.\, \sin(\alpha - \beta - \gamma).$$

Der Gleichung (8) zufolge ist aber:

$$\operatorname{tg}\operatorname{am} 2bi = \frac{\sin\operatorname{am} 2bi}{\cos\operatorname{am} 2bi} = i\sin\operatorname{am}(2b, \varkappa').$$

Wir haben also zur Bestimmung von a und b die beiden Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\operatorname{am} 2a = \operatorname{tg} 2\delta \,.\, \cos(\alpha - \beta - \gamma)$$
$$\sin\operatorname{am}(2b, \varkappa') = \sin 2\delta \,.\, \sin(\alpha - \beta - \gamma).$$

Diese beiden Gleichungen genügen, um für einen gegebenen Modul $\varkappa$ die Werte von a und b zu bestimmen. Denn aus der letzten dieser Gleichungen ergiebt sich sofort:

$$2b = \int\limits_0^{\sin 2\delta \,.\, \sin(\alpha-\beta-\gamma)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa'^2 x^2)}}$$

und berücksichtigt man, dafs

$$\sin\operatorname{am} 2a = \frac{\operatorname{tg}\operatorname{am} 2a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{am} 2a}},$$

$$\sin\operatorname{am} 2a = \frac{\operatorname{tg} 2\delta \,.\, \cos(\alpha-\beta-\gamma)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{am} 2\delta \,.\, \cos^2(\alpha-\beta-\gamma)}},$$

so folgt:

$$2a = \int\limits_0^{\frac{\operatorname{tg} 2\delta \,.\, \cos(\alpha-\beta-\gamma)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{am} 2\delta \,.\, \cos(\alpha-\beta-\gamma)}}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}.$$

Hiermit ist nachgewiesen, dafs für den Fall der Legendre'sche Parameter n imaginär ist und die Form hat:

$$n = p + qi,$$

der Jacobi'sche Parameter die Form:

$$a + bi$$

annimmt, wo a und b reelle Gröfsen sind, welche von A, B, C, α, β, γ, oder, da diese sechs Quantitäten sich wieder durch p, q und $\varkappa$ ausdrücken lassen, von p, q und $\varkappa$ abhängig sind. Ist also n imaginär, so ist der Jacobi'sche Parameter von der Form:

$$n = -\varkappa^2 \sin^2\operatorname{am}(a + bi).$$

Die bisherige Untersuchung hat gezeigt, dafs man, n mag reell oder imaginär sein, diesen Parameter n immer in der Form $-\varkappa^2 \sin^2\operatorname{am} c$ voraussetzen darf, wo c entweder eine reelle, oder eine imaginäre oder eine komplexe Gröfse ist.

Im letzten Falle, der eintritt, wenn n selbst imaginär ist und der Jacobi'sche Parameter die Form $a + bi$ annimmt, verlangt das Auffinden des Zusammenhanges zwischen der Legendre'schen und der Jacobi'schen Form des elliptischen Integrales dritter Gattung das Additionstheorem der Parameter. Die Mittel zur Herleitung dieses Theorems ergeben sich aus den Reihenentwicklungen für die elliptischen Funktionen und die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung und deshalb muss zunächst zu diesen Reihenentwickelungen geschritten werden.

Die elliptischen Funktionen können bekanntlich durch unendliche Produkte dargestellt werden und zwar ist:

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}} \quad \sin \frac{\pi u}{2K} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - 2q^{2r} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4r}}{1 - 2q^{2r-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4r-2}},$$

$$\cos \operatorname{am} u = \frac{2\sqrt{\varkappa'}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}} \cos \frac{\pi u}{2K} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 + 2q^{2r} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4r}}{1 - 2q^{2r-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4r-2}},$$

$$\varDelta \operatorname{am} u = \sqrt{\varkappa'} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 + 2q^{2r-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4r-2}}{1 - 2q^{2r-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4r-2}},$$

wo q die von Jacobi eingeführte Bedeutung hat:

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$$

und während $\frac{K'}{K}$ alle positiven Werte von ∞ bis 0 annimmt, von 0 bis 1 wächst.

Die Werte der Faktoren $\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}}$, $\frac{2\sqrt{\varkappa'}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}}$ und $\sqrt{\varkappa'}$ findet man, wenn man einmal in der ersten Gleichung $u = K + K'i$ und dann in der letzten Gleichung $u = K$ setzt.

Der Gleichung (15) zufolge ist $\sin \operatorname{am} (K + K'i) = \frac{1}{\varkappa}$, und da $\operatorname{am} K = \frac{\pi}{2}$, so ist $\varDelta \operatorname{am} K = \varDelta \frac{\pi}{2} = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \frac{\pi}{2}} = \sqrt{1 - \varkappa^2} = \varkappa'$.

Setzen wir daher in der dritten der obigen Gleichungen $u = K$, so erhalten wir:

$$\varDelta \operatorname{am} K = \varkappa' = \sqrt{\varkappa'} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - 2q^{2r-1} + q^{4r-2}}{1 + 2q^{2r-1} + q^{4r-2}}$$

$$= \sqrt{\varkappa'} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 - q^{2r-1}}{1 + q^{2r-1}}\right)^2,$$

folglich ist:

$$\sqrt{\varkappa'} = \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 - q^{2r-1}}{1 + q^{2r-1}}\right)^2. \tag{20}$$

Weitläufiger als die eben durchgeführte Herleitung des Wertes für $\sqrt{\varkappa'}$ sind die Herleitungen der Werte für $\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}}$ und $\frac{2\sqrt{\varkappa'}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}}$. Zwecks der Bestimmung dieser Werte ist, wie schon gesagt, in die Gleichung, welche die elliptische Funktion $\sin \operatorname{am} u$ durch ein unendliches Produkt ausdrückt, $u = K + K'i$ zu setzen. Durch diese Substitution erhalten wir, bei Berücksichtigung des Wertes $\sin \operatorname{am} (K + K'i) = \frac{1}{\varkappa}$:

$$\sin \operatorname{am} (K + K'i) = \frac{1}{\varkappa} = \frac{2q^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\varkappa}} \sin \pi \cdot \frac{K + K'i}{2K} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - 2q^{2r} \cos \pi \frac{K + K'i}{K} + q^{4r}}{1 - 2q^{2r-1} \cos \pi \frac{K + K'i}{K} + q^{4r-2}}.$$

Nun ist

$$\sin \pi \frac{K + K'i}{2K} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi i K'}{2K}\right) = \cos \frac{\pi i K'}{K}$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi K'}{2K}} + e^{-\frac{\pi K'}{2K}}}{2} = \frac{q^{-\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1+q}{2q^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos \pi \frac{K + K'i}{K} = \cos\left(\pi + \frac{\pi i K'}{K}\right) = -\cos \frac{\pi i K'}{K}$$

$$= -\frac{e^{\pi\frac{K'}{K}} + e^{-\pi\frac{K'}{K}}}{2} = -\frac{q^{-1} + q}{2} = -\frac{1+q^2}{2q}.$$

Folglich ist:

$$\sin \operatorname{am}(K + K'i) = \frac{1}{\varkappa} = \frac{1+q}{q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\varkappa}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 + q^{2r-1}(1+q^2) + q^{4r}}{1 + q^{2r-2}(1+q^2) + q^{4r-2}}$$

$$= \frac{1+q}{q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\varkappa}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 + q^{2r-1} + q^{2r+1} + q^{4r}}{1 + q^{2r-2} + q^{2r} \quad + q^{4r-2}}$$

$$= \frac{1+q}{q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\varkappa}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{(1 + q^{2r-1})(1 + q^{2r+1})}{(1 + q^{2r-2})(1 + q^{2r})}.$$

Die beiden im Zähler des Ausdrucks hinter dem Zeichen des Produktes stehenden Faktoren $(1 + q^{2r-1})$ und $(1 + q^{2r+1})$ unterscheiden sich dadurch von einander, dafs der letztere den Faktor $1 + q$, welcher sich für $r = 1$ für den ersten ergiebt, nicht enthält; dieser steht aber vor dem Zeichen des Produktes und deshalb darf man den Zähler schreiben $\prod_{r=1}^{r=\infty} (1 + q^{2r-1})^2$; im Nenner desselben Ausdrucks nimmt für $r = 1$ der Faktor $(1 + q^{2r-2})$ den Wert 2 an und diesen Faktor 2 darf man vor das Zeichen des unendlichen Produktes stellen, so dafs der Nenner die Form erhält $2 \prod_{r=1}^{r=\infty} (1 + q^{2r})^2$.

Infolge dieser Umformungen erhält man:

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{2q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\varkappa}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 + q^{2r-1}}{1 + q^{2r}}\right)^2.$$

Hieraus ergiebt sich durch Multiplikation mit $\sqrt{\varkappa}$

$$\frac{1}{\sqrt{\varkappa}} = \frac{1}{2q^{\frac{1}{4}}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 + q^{2r-1}}{1 + q^{2r}}\right)^2$$

und folglich:

(21) $$\sqrt{\varkappa} = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 + q^{2r}}{1 + q^{2r-1}}\right)^2.$$

Aus den beiden Werten von $\sqrt{\varkappa}$ und $\sqrt{\varkappa'}$, wie sie die Gleichungen (21) und (20) bieten, ergeben sich die Werte der gesuchten Koeffizienten als folgende:

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}} = \displaystyle\prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2, \\[2ex] \dfrac{2\sqrt{\varkappa'}\,\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}} = \displaystyle\prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2, \\[2ex] \sqrt{\varkappa'} \quad = \displaystyle\prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\right)^2. \end{cases}$$

Setzen wir in die die elliptischen Funktionen durch unendliche Produkte darstellenden Gleichungen für die Koeffizienten die in (22) aufgeführten Werte und gleichzeitig:

$$u = \frac{2Kx}{\pi},$$

so erhalten wir:

$$(23)\qquad \begin{cases} \sin \operatorname{am} \dfrac{2Kx}{\pi} = \sin x \displaystyle\prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2 \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1-2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}, \\[2ex] \cos \operatorname{am} \dfrac{2Kx}{\pi} = \cos x \displaystyle\prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2 \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1+2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}, \\[2ex] \varDelta \operatorname{am} \dfrac{2Kx}{\pi} = \qquad \displaystyle\prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\right)^2 \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1+2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind, um von unendlichen Produkten auf unendliche Summen zu kommen, zu logarithmieren. Die Logarithmen der unendlichen Produkte, in denen der Kosinus von $2x$ auftritt, lassen sich aber wesentlich vereinfachen, und deshalb mögen zunächst die Logarithmen dieser unendlichen Produkte betrachtet werden, und zwar an erster Stelle der Logarithmus des in dem Werte für $\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$ auftretenden unendlichen Produktes.

$$(24)\qquad \log \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1-2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \log\left(1-2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}\right)$$
$$- \sum_{r=1}^{r=\infty} \log\left(1-2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}\right).$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} \log(1-2p\cos 2x + p^2) &= \log(1-pe^{2xi} - pe^{-2xi} + p^2) \\ &= \log(1-pe^{2xi})(1-pe^{-2xi}) \\ &= \log(1+pe^{2xi}) + \log(1-pe^{-2xi}). \end{aligned}$$

Nehmen wir p zwischen den Grenzen -1 und $+1$, so können wir $\log(1-pe^{2xi})$ und $\log(1-pe^{-2xi})$ in Reihen entwickeln und es ist:

$$\log(1-pe^{2xi}) = -\frac{pe^{2xi}}{1} - \frac{p^2e^{4xi}}{2} - \frac{p^3e^{6xi}}{3} - \frac{p^4e^{8xi}}{4} - \ldots\ldots$$
$$\log(1-pe^{-2xi}) = -\frac{pe^{-2xi}}{1} - \frac{p^2e^{-4xi}}{2} - \frac{p^3e^{-6xi}}{3} - \frac{p^4e^{-8xi}}{4} - \ldots\ldots$$

$$\log(1-pe^{2xi})+\log(1-pe^{-2xi})=-\frac{p}{1}(e^{2xi}+e^{-2xi})-\frac{p^2}{2}(e^{4xi}+e^{-4xi})-\frac{p^3}{3}(e^{6xi}+e^{-6xi})-\cdots$$

$$=-2p\cos 2x-\frac{2p^2}{2}\cos 4x-\frac{2p^3}{3}\cos 6x-\frac{2p^4}{4}\cos 8x-\cdots$$

$$=-2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{p^s}{s}\cos 2sx.$$

Setzen wir nun einmal $p=q^{2r}$ und dann $p=q^{2r-1}$, was erlaubt ist, da

$$0<q<1,$$

so erhalten wir:

$$\log(1-q^{2r}e^{2xi})+\log(1-q^{2r}e^{-2xi})=-2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{q^{2rs}}{s}\cos 2sx$$

$$\log(1-q^{2r-1}e^{2xi})+\log(1-q^{2r-1}e^{-2xi})=-2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{q^{(2r-1)s}}{s}\cos 2sx.$$

Substituieren wir diese Werte in die Gleichung (24), so erhalten wir:

$$\log\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1-2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}=-2\sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{q^{2rs}}{s}\cos 2sx$$

$$+2\sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{q^{(2r-1)s}}{s}\cos 2sx$$

$$=2\sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2sx}{s}\left\{q^{(2r-1)s}-q^{2rs}\right\}$$

$$=2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2sx}{s}\left\{(q^s+q^{3s}+q^{5s}+\cdots)-(q^{2s}+q^{4s}+q^{6s}+\cdots)\right\}$$

$$=2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2sx}{s}\left\{\frac{q^s}{1-q^{2s}}-\frac{q^{2s}}{1-q^{2s}}\right\}$$

$$=2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2sx}{s}\cdot\frac{q^s-q^{2s}}{1-q^{2s}}$$

$$=2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2sx}{s}\,\frac{q^s(1-q^s)}{(1-q^s)(1+q^s)}$$

$$=2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2sx}{s}\cdot\frac{q^s}{1+q^s}.$$

Es hat sich also als Resultat dieser Betrachtung ergeben:

$$\text{(25)}\qquad \log\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1-2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}=2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2sx}{s}\cdot\frac{q^s}{1+q^s}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $-q$ statt q und $x+\frac{1}{2}\pi$ statt x, so erhalten wir wegen:

$$\cos 2n\left(x+\frac{1}{2}\pi\right)=(-1)^n\cos 2nx,$$

$$\log\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1+2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}=2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\cos 2sx}{s}\cdot\frac{(-1)^s q^s}{1+(-1)^n q^s}$$

oder

$$\log\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1+2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}=2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2sx}{s}\cdot\frac{q^s}{1+(-1)^s q^s}. \tag{26}$$

Um den Logarithmus des Produktes, welches auf der rechten Seite der dritten der Gleichungen (23) auftritt, zu entwickeln, setzen wir in der oben hergeleiteten Hülfsformel:

$$\log(1-2p\cos 2x+p^2)=-2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{p^s}{s}\cos 2sx$$

$-p$ statt p. Dadurch geht diese über in:

$$\log(1+2p\cos 2x+p^2)=-2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^s p^s}{s}\cos 2sx$$

$$=\quad 2\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}\frac{p^s}{s}\cos 2sx.$$

Wird der dem oben verfolgten Wege entsprechende Weg eingeschlagen, so ergiebt sich:

$$\log\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1+2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}=\sum_{r=1}^{r=\infty}\log(1+2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2})$$

$$-\sum_{r=1}^{r=\infty}\log(1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2})$$

$$=2\sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}\frac{q^{(2r-1)s}}{s}\cos 2sx+2\sum_{r=1}^{r=\infty}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{q^{(2r-1)s}}{s}\cos 2sx$$

$$=2\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}\frac{\cos 2sx}{s}(q^s+q^{3s}+q^{5s}+\cdots)+2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2sx}{s}(q^s+q^{3s}+q^{5s}+\cdots)$$

$$=2\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}\frac{\cos 2sx}{s}\cdot\frac{q^s}{1-q^{2s}}+2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2sx}{s}\cdot\frac{q^s}{1-q^{2s}}.$$

Da die Terme der ersten Summe abwechselnd positiv und negativ sind, je nachdem s ungerade oder gerade ist, so trennen wir zweckmäfsig nicht nur die erste, sondern auch die zweite Summe in je zwei Summen, von denen die erste nur die bei ungeraden s, die zweite nur die bei geraden s sich ergebenden Summanden enthält. Durch dieses Verfahren erhalten wir für die rechte Seite der letzten Gleichung:

$$2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2(2s-1)x}{2s-1}\cdot\frac{q^{2s-1}}{1-q^{2(2s-1)}}-2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2(2x)}{2s}\cdot\frac{q^{2s}}{1-q^{2(2s)}}$$

$$+2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2(2s-1)x}{2s-1}\cdot\frac{q^{2s-1}}{1-q^{2(2s-1)}}+2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2(2x)}{2s}\cdot\frac{q^{2s}}{1-q^{2(2s)}}$$

$$=4\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2(2s-1)x}{2s-1}\cdot\frac{q^{2s-1}}{1-q^{2(2s-1)}}.$$

Das Ergebnis der angestellten Untersuchung ist daher:

$$\log\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1+2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}=4\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2\,(2s-1)\,x}{2s-1}\cdot\frac{q^{2s-1}}{1-q^{2\,(2s-1)}}. \tag{27}$$

Aus den Gleichungen (22), (23) und (25) bis (27) finden wir:

$$\log\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\log\left(\frac{2q^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\varkappa}}\sin x\right)+2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2sx}{s}\cdot\frac{q^{s}}{1+q^{s}},$$

$$\log\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\log\left(2q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\cos x\right)+2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2sx}{s}\cdot\frac{q^{s}}{1+(-1)^{s}q^{s}},$$

$$\log\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\log\sqrt{\varkappa'}+4\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos 2\,(2s-1)\,x}{2s-1}\cdot\frac{q^{2s-1}}{1-q^{2\,(2s-1)}}.$$

Um nun $\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$ in eine unendliche Reihe zu entwickeln, ist noch die Herleitung einer wichtigen Relation erforderlich, welche deshalb zunächst bewirkt werden soll.

Werden in dem Werte für $\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$ in der ersten Gleichung des Systems (23) für $\sin x$ und $\cos 2x$ ihre durch die Exponentialgrösse ausgedrückten Werte gesetzt, so ergiebt sich:

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^{2}\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1-q^{2r}e^{2xi}-q^{2r}e^{-2xi}+q^{4r}}{1-q^{2r-1}e^{2xi}-q^{2r-1}e^{-2xi}+q^{4r-2}}$$

$$=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^{2}\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{(1-q^{2r}e^{2xi})\,(1-q^{2r}e^{-2xi})}{(1-q^{2r-1}e^{2xi})\,(1-q^{2r-1}e^{-2xi})}.$$

Setzen wir nun $x-\frac{1}{2}\log q$ statt x, so gehen e^{2xi}, e^{-2xi}, e^{xi} und e^{-xi} beziehungsweise über in

$$\begin{aligned} e^{2xi+\log q}&=q\,.\,e^{2xi}\\ e^{-2xi-\log q}&=q^{-1}e^{-2xi}\\ e^{xi+\frac{1}{2}\log q}&=q^{\frac{1}{2}}e^{xi}\\ e^{-xi-\frac{1}{2}\log q}&=q^{-\frac{1}{2}}e^{-xi}\end{aligned}$$

und es ist mithin:

$$\sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\left(x-\frac{1}{2}\log q\right)=\frac{q^{\frac{1}{2}}e^{xi}-q^{-\frac{1}{2}}e^{-xi}}{2i}\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^{2}\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{(1-q^{2r+1}e^{2xi})\,(1-q^{2r-1}e^{-2xi})}{(1-q^{2r}e^{2xi})\,(1-q^{2r-2}e^{-2xi})}.$$

Setzen wir im zweiten unendlichen Produkte im ersten Faktor des Zählers $r = r' - 1$ und im zweiten Faktor des Nenners $r = r' + 1$, so ergiebt sich:

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} (1 - q^{2r+1} e^{2xi}) = \prod_{r'=2}^{r'=\infty} (1 - q^{2r'-1} e^{2xi}) = \frac{1}{1 - q e^{2xi}} \prod_{r'=1}^{r'=\infty} (1 - q^{2r'-1} e^{2xi}),$$

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} (1 - q^{2r-2} e^{-2xi}) = \prod_{r'=0}^{r'=\infty} (1 - q^{2r'} e^{-2xi}) = (1 - e^{2xi}) \prod_{r'=1}^{r'=\infty} (1 - q^{2r'} e^{-2xi}).$$

Führen wir als Multiplikationsbuchstaben wieder r statt r' ein, so ergiebt sich:

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - q^{2r+1} e^{2xi}}{1 - q^{2r} e^{2xi}} \cdot \frac{1 - q^{2r-1} e^{-2xi}}{1 - q^{2r-2} e^{-2xi}} = \frac{1}{(1 - q e^{2xi})(1 - e^{2xi})} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{(1 - q^{2r-1} e^{2xi})(1 - q^{2r-1} e^{-2xi})}{(1 - q^{2r} e^{2xi})(1 - q^{2r} e^{-2xi})}$$

$$= \frac{1}{(1 - q e^{2xi})(1 - e^{-2xi})} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - q^{2r-1}(e^{2xi} + e^{-2xi}) + q^{4r-2}}{1 - q^{2r}(e^{2xi} + e^{-2xi}) + q^{4r}}$$

$$= \frac{1}{(1 - q e^{2xi})(1 - e^{-2xi})} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - 2q^{2r-1} \cos 2x + q^{4r-2}}{1 - 2q^{2r} \cos 2x + q^{4r}}.$$

Weiter ist:

$$\frac{q^{\frac{1}{2}} e^{xi} - q^{-\frac{1}{2}} e^{-xi}}{2i} \cdot \frac{1}{(1 - q e^{2xi})(1 - e^{-2xi})} = \frac{q e^{2xi} - 1}{2 i q^{\frac{1}{2}} e^{xi}} \cdot \frac{1}{1 - q e^{2xi}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2xi}}$$

$$= - \frac{1 - q e^{2xi}}{2 i q^{\frac{1}{2}} e^{xi}} \cdot \frac{1}{1 - q e^{2xi}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2xi}} = - \frac{1}{2 i q^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{e^{xi}(1 - e^{-2xi})}$$

$$= - \frac{1}{2 i q^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{e^{xi} - e^{-xi}} = - \frac{1}{2 i q^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2 i \sin x} = \frac{1}{4 q^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sin x}.$$

Mit Berücksichtigung aller dieser Werte finden wir mithin:

$$(28) \quad \sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\left(x - \frac{1}{2} i \log q\right) = \frac{1}{4 q^{\frac{1}{2}} \sin x} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 + q^{2r-1}}{1 + q^{2r}}\right)^2 \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - 2q^{2r-1} \cos 2x + q^{4r-2}}{1 - 2q^{2r} \cos 2x + q^{4r}}.$$

Der Vergleich dieses Wertes von $\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(x - \frac{1}{2} i \log q)$ mit dem Werte von $\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$ in Gleichung (23) ergiebt, dafs alle Faktoren, welche mit x zusammenhängen, in den beiden Ausdrücken reciproke Werte von einander sind und durch Multiplikation der ersten Gleichung (23) mit Gleichung (28) erwächst die gesuchte wichtige Relation:

$$\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \cdot \sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\left(x - \frac{1}{2} i \log q\right) = \frac{1}{4 q^{\frac{1}{2}}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 + q^{2r-1}}{1 + q^{2r}}\right)^4.$$

Den Fortschritt zur Reihenentwicklung für $\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$ oder vielmehr des reciproken Wertes dieser Funktion wollen wir durch die Betrachtung des folgenden Produktes bewirken:

$$P = \frac{1}{\sin x} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - 2q^{2r-1} \cos 2(x+y) + q^{4r-2}}{1 - 2q^{2r} \cos 2x + q^{4r}}$$

$$= \frac{2i}{e^{xi} - e^{-xi}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - q^{2r-1} e^{2xi+2yi} - q^{2r-1} e^{-2xi-2yi} + q^{4r-2}}{1 - q^{2r} e^{2xi} - q^{2r} e^{-2xi} + q^{4r}}$$

$$= \frac{2ie^{xi}}{e^{2xi}-1} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{(1 - q^{2r-1} e^{2xi+2yi})(1 - q^{2r-1} e^{-2xi-2yi})}{(1 - q^{2r} e^{2xi})(1 - q^{2r} e^{-2xi})}.$$

Wird gesetzt:

$$e^{2xi} = \alpha; \quad e^{2yi} = \beta$$

und

$$\frac{P}{2ie^{xi}} = \frac{P}{2i\alpha^{\frac{1}{2}}} = f(\alpha),$$

so entsteht:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - q^{2r-1}\alpha\beta}{1 - q^{2r}\alpha} \cdot \frac{1 - q^{2r-1}\alpha^{-1}\beta^{-1}}{1 - q^{2r}\alpha^{-1}}$$

$$= \frac{1}{\alpha - 1} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - q^{2r-1}\alpha\beta}{1 - q^{2r}\alpha} \cdot \frac{\alpha - q^{2r-1}\beta^{-1}}{\alpha - q^{2r}}.$$

Dieser Ausdruck kann nach der von Somoff angegebenen Methode sofort in Partialbrüche zerlegt werden, da der Nenner einen mit α behafteten Faktor mehr als der Zähler enthält, mithin der Grad des Nenners den Grad des Zählers um eine Einheit übersteigt.

Es ist also:

$$f(\alpha) = \frac{A_0}{\alpha - 1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{A_n}{1 - q^{2n}\alpha} + \frac{B_n}{\alpha - q^{2n}} \right\}. \tag{29}$$

Zur Bestimmung der Koefficienten A_0, A_n, B_n beachte man, dass durch Multiplikation der Gleichung (29) beziehungsweise mit $\alpha - 1$, $1 - q^{2n}\alpha$, $\alpha - q^{2n}$ entsteht:

$$f(\alpha)(\alpha - 1) = A_0 + (\alpha - 1) \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{A_n}{1 - q^{2n}\alpha} + \frac{B_n}{\alpha - q^{2n}} \right\},$$

$$f(\alpha)(1 - q^{2n}\alpha) = \frac{A_0(1 - q^{2n}\alpha)}{\alpha - 1} + A_n + \sum_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n}\alpha) \frac{B_n}{\alpha - q^{2n}},$$

$$f(\alpha)(\alpha - q^{2n}) = \frac{A_0(\alpha - q^{2n})}{\alpha - 1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\alpha - q^{2n}) \frac{A_n}{1 - q^{2n}\alpha} + B_n.$$

Aus diesen Gleichungen erhellt, dass

$$\left[f(\alpha)(\alpha - 1)\right]_{\alpha=1} = A_0,$$

$$\left[f(\alpha)(1 - q^{2n}\alpha)\right]_{\alpha=q^{-2n}} = A_n,$$

$$\left[f(\alpha)(\alpha - q^{2n})\right]_{\alpha=q^{2n}} = B_n.$$

Nun ist

$$(\alpha - 1) f(\alpha) = \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - q^{2r-1}\alpha\beta}{1 - q^{2r}\alpha} \cdot \frac{\alpha - q^{2r-1}\beta^{-1}}{\alpha - q^{2r}},$$

folglich

$$A_0 = \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{(1-q^{2r-1}\beta)(1-q^{2r-1}\beta^{-1})}{(1-q^{2r})^2}.$$

Wird in die Gleichung für A_n für $f(\alpha)$ sein Wert gesetzt, so ergiebt sich:

$$A_n = \left[\frac{1-q^{2n}\alpha}{\alpha-1} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1-q^{2r-1}\alpha\beta}{1-q^{2r}\alpha} \cdot \frac{\alpha-q^{2r-1}\beta^{-1}}{\alpha-q^{2r}}\right]_{\alpha=q^{-2n}}.$$

Scheidet man aus dem ersten Faktor des unendlichen Produktes den Faktor, welcher sich für $r=n$ ergiebt, aus, so wird:

$$A_n = \left[\frac{1-q^{2n}\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{1-q^{2n-1}\alpha\beta}{1-q^{2n}\alpha} \prod_{r=1}^{r=n-1} \frac{1-q^{2r-1}\alpha\beta}{1-q^{2r}\alpha} \prod_{r=n+1}^{n=\infty} \frac{1-q^{2r-1}\alpha\beta}{1-q^{2r}\alpha} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{\alpha-q^{2r-1}\beta^{-1}}{\alpha-q^{2r}}\right]_{\alpha=q^{-2n}}$$

$$= \left[\frac{1-q^{2n-1}\alpha\beta}{\alpha-1} \prod_{n=1}^{r=n-1} \frac{1-q^{2r-1}\alpha\beta}{1-q^{2r}\alpha} \prod_{r=n+1}^{n=\infty} \frac{1-q^{2r-1}\alpha\beta}{1-q^{2r}\alpha} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{\alpha-q^{2r-1}\beta^{-1}}{\alpha-q^{2r}}\right]_{\alpha=q^{-2n}}$$

$$= \frac{1-q^{-1}\beta}{q^{-2n}-1} \prod_{r=1}^{r=n-1} \frac{1-q^{2r-2n-1}\beta}{1-q^{2r-2n}} \prod_{r=n+1}^{r=\infty} \frac{1-q^{2r-2n-1}}{1-q^{2r-2n}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{-2n}-q^{2r-1}\beta^{-1}}{q^{-2n}-q^{2r}}.$$

Die beiden unendlichen und das endliche Produkt der rechten Seite mögen gesondert betrachtet und umgeformt werden. Wird zunächst in dem zweiten unendlichen Produkte $r=s-n$ gesetzt, so erhält man:

$$(30) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{-2n}-q^{2r-1}\beta^{-1}}{q^{-2n}-q^{2r}} = \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1-q^{2r+2n-1}\beta^{-1}}{1-q^{2r+2n}} = \prod_{s=n+1}^{s=\infty} \frac{1-q^{2s-1}\beta^{-1}}{1-q^{2s}}.$$

Wird sodann in dem anderen unendlichen Produkte $r=s+n$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$(31) \qquad \prod_{r=n+1}^{r=\infty} \frac{1-q^{2r-2n-1}\beta}{1-q^{2r-2n}} = \prod_{s=1}^{s=\infty} \frac{1-q^{2s-1}\beta}{1-q^{2s}}.$$

Wird schliesslich das endliche Produkt entwickelt, so findet sich:

$$\frac{1-q^{-1}\beta}{q^{-2n}-1} \prod_{r=1}^{r=n-1} \frac{1-q^{2r-2n-1}\beta}{1-q^{2r-2n}} = \frac{1-q^{-1}\beta}{q^{-2n}-1} \cdot \frac{1-q^{-(2n-1)}\beta}{1-q^{-(2n-2)}} \cdot \frac{1-q^{-(2n-3)}\beta}{1-q^{-(2n-4)}} \cdots \frac{1-q^{-3}\beta}{1-q^{-2}}$$

$$= \frac{q-\beta}{1-q^{2n}} \cdot \frac{q^{2n}}{q} \cdot \frac{q^{2n-1}-\beta}{q^{2n-2}-1} \cdot \frac{q^{2n-2}}{q^{2n-1}} \cdot \frac{q^{2n-3}-\beta}{q^{2n-4}-1} \cdot \frac{q^{2n-4}}{q^{2n-3}} \cdots \frac{q^3-\beta}{q^2-1} \cdot \frac{q^2}{q^3}$$

$$= \frac{(q-\beta)(q^3-\beta)(q^5-\beta)\cdots(q^{2n-1}-\beta)}{(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)\cdots(q^{2n-2}-1)(1-q^{2n})} \cdot \frac{q^{2+4+\cdots+2n}}{q^{1+3+\cdots(2n-1)}}.$$

Wird berücksichtigt, dafs

$$2+4+\cdots+2n = n(n+1)$$
$$1+3+\cdots+(2n-1) = n^2,$$

so erhält man:

$$\frac{1-q^{-1}\beta}{q^{-2n-1}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1-q^{2n-2r-1}\beta}{1-q^{2r-2n}} = \frac{(q-\beta)(q^3-\beta)(q^5-\beta)\ldots(q^{2n-1}-\beta)}{(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)\ldots(q^{2n-2}-1)(1-q^{2n})} \cdot \frac{q^{n(n+1)}}{q^{n^2}}.$$

Wird nun der Zähler so umgeformt, daſs in jedem einzelnen Faktor β die erste und die Potenz von q die zweite Stelle einnimmt und der Nenner so, daſs 1 die erste und die Potenz von q die zweite Stelle erhält, so sind im Zähler n und im Nenner $(n-1)$ Umstellungen und damit verbundene Zeichenwechsel vorzunehmen. Ist n gerade, so ändert der Zähler durch diese Umstellungen sein Vorzeichen nicht, wohl aber der Nenner, ist dagegen n ungerade, so ändert der Zähler sein Vorzeichen, während der Nenner das seine beibehält. Also in beiden Fällen, n sei gerade oder ungerade, wird die rechte Seite der obigen Gleichung durch diese Umstellungen negativ und deshalb ist:

$$\frac{1-q^{-1}\beta}{q^{-2n}-1}\prod_{r=1}^{r=n-1}\frac{1-q^{2r-2n-1}\beta}{1-q^{2r-2n}} = -\frac{(\beta-q)(\beta-q^3)(\beta-q^5)\ldots(\beta-q^{2n-1})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots(1-q^{2n-2})(1-q^{2n})}q^n$$

$$= -\frac{(1-q\beta^{-1})(1-q^3\beta^{-1})\ldots\ldots(1-q^{2n-1}\beta^{-1})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots\ldots(1-q^{2n})}\beta^n q^n,$$

oder:

$$\frac{1-q^{-1}\beta}{q^{-2n}-1}\prod_{r=1}^{r=n-1}\frac{1-q^{2r-2n-1}\beta}{1-q^{2r-2n}} = -q^n\beta^n\prod_{s=1}^{s=n}\frac{1-q^{2s-1}\beta^{-1}}{1-q^{2s}}. \tag{32}$$

Werden die für die drei Produkte in den Gleichungen (30), (31) und (32) gefundenen Werte in die Gleichung für A_n eingesetzt, so ergiebt sich:

$$A_n = -q^n\beta^n\prod_{s=1}^{s=n}\frac{1-q^{2s-1}\beta^{-1}}{1-q^{2s}}\prod_{s=1}^{s=\infty}\frac{1-q^{2s-1}\beta}{1-q^{2s}}\prod_{s=n+1}^{s=\infty}\frac{1-q^{2s-1}\beta^{-1}}{1-q^{2s}}$$

$$= -q^n\beta^n\prod_{s=1}^{s=\infty}\frac{1-q^{2s-1}\beta^{-1}}{1-q^{2s}}\prod_{s=1}^{s=\infty}\frac{1-q^{2s-1}\beta}{1-q^{2s}}$$

$$= -q^n\beta^n\prod_{s=1}^{s=\infty}\frac{(1-q^{2s-1}\beta^{-1})(1-q^{2s-1}\beta)}{(1-q^{2s})^2}$$

$$= -q^n\beta^n A_0.$$

Wird in die Gleichung für B_n der Wert für $f(\alpha)$ eingesetzt, so entsteht:

$$B_n = \left[\frac{\alpha-q^{2n}}{\alpha-1}\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1-q^{2r-1}\alpha\beta}{1-q^{2r}\alpha}\cdot\frac{\alpha-q^{2r-1}\beta^{-1}}{\alpha-q^{2r}}\right]_{\alpha=q^{2n}}$$

Scheidet man aus dem zweiten Factor des unendlichen Produktes den Factor aus, welcher sich für $r=n$ ergiebt, so wird:

$$B_n = \left[\frac{\alpha-q^{2n}}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha-q^{2n-1}\beta^{-1}}{\alpha-q^{2r}}\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1-q^{2r-1}\alpha\beta}{1-q^{2r}\alpha}\cdot\prod_{r=1}^{r=n-1}\frac{\alpha-q^{2r-1}\beta^{-1}}{\alpha-q^{2r}}\prod_{r=n+1}^{r=\infty}\frac{\alpha-q^{2r-1}\beta^{-1}}{\alpha-q^{2r}}\right]_{\alpha=q^{2n}}$$

$$= \frac{q^{2n}-q^{2n-1}\beta^{-1}}{q^{2n}-1}\prod_{r=1}^{r=n-1}\frac{q^{2n}-q^{2r-1}\beta^{-1}}{q^{2n}-q^{2r}}\prod_{r=n+1}^{r=\infty}\frac{q^{2n}-q^{2r-1}\beta^{-1}}{q^{2n}-q^{2r}}\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1-q^{2r+2n-1}\beta}{1-q^{2n+2n}}.$$

Werden die beiden unendlichen Produkte und das endliche Produkt wieder gesondert behandelt und setzt man zuerst in dem letzten unendlichen Produkt $r = s - n$, so ergiebt sich:

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - q^{2r+2n-1}\beta}{1 - q^{2r+2n}} = \prod_{s=n+1}^{s=\infty} \frac{1 - q^{2s-1}\beta}{1 - q^{2s}}. \tag{33}$$

Das andere unendliche Produkt lässt sich zunächst durch Multiplikation des Zählers und Nenners des unter dem Produktzeichen stehenden Bruches mit q^{-2n} umformen:

$$\prod_{r=n+1}^{r=\infty} \frac{q^{2n} - q^{2r-1}\beta^{-1}}{q^{2n} - q^{2r}} = \prod_{r=n+1}^{r=\infty} \frac{1 - q^{2r-2n-1}\beta^{-1}}{1 - q^{2r-2n}}$$

und wird jetzt $r = s + n$ gesetzt, so resultiert:

$$\prod_{r=n+1}^{r=\infty} \frac{q^{2n} - q^{2r-1}\beta^{-1}}{q^{2n} - q^{2r}} = \prod_{s=1}^{s=\infty} \frac{1 - q^{2s-1}\beta^{-1}}{1 - q^{2s}}. \tag{34}$$

Es bleibt noch übrig, den endlichen Faktor zu reduzieren.

Es ist aber:

$$\frac{q^{2n} - q^{2n-1}\beta^{-1}}{q^{2n} - 1} \prod_{r=1}^{r=n-1} \frac{q^{2n} - q^{2r-1}\beta^{-1}}{q^{2n} - q^{2r}} = q^{2n} \cdot \frac{1 - q^{-1}\beta^{-1}}{q^{2n} - 1} \prod_{r=1}^{r=n-1} \frac{1 - q^{-(2n-2r+1)}\beta^{-1}}{1 - q^{-2(n-r)}}$$

$$= q^{2n} \cdot \frac{1 - q^{-1}\beta^{-1}}{q^{2n} - 1} \cdot \frac{1 - q^{-(2n-1)}\beta^{-1}}{1 - q^{-2(n-1)}} \cdot \frac{1 - q^{-(2n-3)}\beta^{-1}}{1 - q^{-2(n-2)}} \cdot \ldots \cdot \frac{1 - q^{-3}\beta^{-1}}{1 - q^{-2}}$$

$$= \frac{q^{2n}}{q^{2n}} \cdot \frac{1 - q^{-1}\beta^{-1}}{1 - q^{-2n}} \cdot \frac{1 - q^{-(2n-1)}\beta^{-1}}{1 - q^{-(2n-2)}} \cdot \frac{1 - q^{-(2n-3)}\beta^{-1}}{1 - q^{-(2n-4)}} \cdot \ldots \cdot \frac{1 - q^{-3}\beta^{-1}}{1 - q^{-2}}$$

$$= \frac{q\beta - 1}{q^{2n} - 1} \cdot \frac{q^{2n}}{q\beta} \cdot \frac{q^{2n-1}\beta - 1}{q^{2n-2} - 1} \cdot \frac{q^{2n-2}}{q^{2n-1}\beta} \, \frac{q^{2n-3}\beta - 1}{q^{2n-4} - 1} \cdot \frac{q^{2n-4}}{q^{2n-3}\beta} \cdots \frac{q^3\beta - 1}{q^2 - 1} \cdot \frac{q^2}{q^3\beta}$$

$$= \frac{(q\beta - 1)(q^{2n-1}\beta - 1)(q^{2n-3}\beta - 1)\ldots(q^3\beta - 1)\, q^{2+4+6+\ldots+2n}}{(q^{2n} - 1)(q^{2n-2} - 1)(q^{2n-4} - 1)\ldots(q^2 - 1)\, \beta^n\, q^{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}$$

$$= \frac{(q\beta - 1)(q^3\beta - 1)(q^5\beta - 1)\ldots\ldots(q^{2n-1}\beta - 1)\, q^{n(n+1)}}{(q^2 - 1)(q^4 - 1)(q^6 - 1)\ldots\ldots(q^{2n} - 1)\, \beta^n\, q^{n^2}}.$$

Werden in den einzelnen Faktoren die Glieder so umgestellt, dafs die Potenzen von q die zweite Stelle einnehmen, so sind sowohl im Zähler als im Nenner n Umstellungen vorzunehmen. Das Vorzeichen des ganzen Ausdruckes wird deshalb durch diese Umstellungen nicht geändert und es ergiebt sich:

$$\frac{q^{2n} - q^{2n-1}\beta^{-1}}{q^{2n} - 1} \prod_{r=1}^{r=n-1} \frac{q^{2n} - q^{2r-1}\beta^{-1}}{q^{2n} - q^{2r}} = q^n \beta^{-n} \frac{(1 - q\beta)(1 - q^3\beta)\ldots(1 - q^{2n-1}\beta)}{(1 - q^2)(1 - q^4)\ldots\ldots(1 - q^{2n})}. \tag{35}$$

Werden die in den Gleichungen (33), (34) und (35) aufgestellten Werte in die Gleichung eingesetzt, welche den Wert von B_n angiebt, so wird gefunden:

$$B_n = q^n \beta^{-n} \prod_{s=1}^{s=n} \frac{1 - q^{2s-1}\beta}{1 - q^{2s}} \prod_{s=1}^{s=\infty} \frac{1 - q^{2s-1}\beta^{-1}}{1 - q^{2s}} \prod_{s=n+1}^{s=\infty} \frac{1 - q^{2s-1}\beta}{1 - q^{2s}}$$

$$= q^n \beta^{-n} \prod_{s=1}^{s=\infty} \frac{1 - q^{2s-1}\beta}{1 - q^{2s}} \prod_{s=1}^{s=\infty} \frac{1 - q^{2s-1}\beta^{-1}}{1 - q^{2s}}$$

$$= q^n \beta^{-n} \prod_{s=1}^{s=\infty} \frac{(1 - q^{2s-1}\beta)(1 - q^{2s-1}\beta^{-1})}{(1 - q^{2s})^2}$$

$$= q^n \beta^{-n} A_0.$$

Werden die beiden für A_n und B_n gefundenen Werte in die Gleichung (29) substituiert, so erhält man:

$$f(\alpha) = A_0 \left\{ \frac{1}{\alpha - 1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} q^n \left(\frac{-\beta^n}{1 - q^{2n}\alpha} + \frac{\beta^{-n}}{\alpha - q^{2n}} \right) \right\}$$

$$= A_0 \left\{ \frac{1}{\alpha - 1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} q^n \left(\frac{-\beta^n}{1 - q^{2n}\alpha} + \frac{\alpha^{-1}\beta^{-n}}{1 - \alpha^{-1} q^{2n}} \right) \right\}.$$

Werden nun wieder:

$$\alpha = e^{2xi}; \quad \beta = e^{2yi}; \quad P = 2ie^{xi} f(\alpha)$$

gesetzt, so ergiebt sich die Gleichung:

$$P = 2ie^{xi} A_0 \left\{ \frac{1}{e^{2xi} - 1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} q^n \left(-\frac{e^{2nyi}}{1 - e^{2xi} q^{2n}} + \frac{e^{-(2ny+2x)i}}{1 - e^{-2xi} q^{2n}} \right) \right\}$$

$$= 2iA_0 \left\{ \frac{e^{xi}}{e^{2xi} - 1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} q^n \left(-\frac{e^{(2ny+x)i}}{1 - e^{2xi} q^{2n}} + \frac{e^{-(2ny+x)i}}{1 - e^{-2xi} q^{2n}} \right) \right\}$$

Folglich ist:

$$\frac{P}{A_0} = 2i \left\{ \frac{e^{xi}}{e^{2xi} - 1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} q^n \left(-\frac{e^{(2ny+x)i}}{1 - e^{2xi} q^{2n}} + \frac{e^{-(2ny+x)i}}{1 - e^{-2xi} q^{2n}} \right) \right\}.$$

Setzt man für P und A_0 ihre Werte, so erhält man andererseits die Gleichung:

$$\frac{P}{A_0} = \frac{1}{\sin x} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - 2q^{2r-1} \cos 2(x+y) + q^{4r-2}}{1 - 2q^{2r} \cos 2x + q^{4r}} \cdot \frac{(1 - q^{2r})^2}{(1 - q^{2r-1}\beta)(1 - q^{2r-1}\beta^{-1})},$$

oder, da

$$(1 - q^{2r-1}\beta)(1 - q^{2r-1}\beta^{-1}) = 1 - q^{2r-1}(\beta + \beta^{-1}) + q^{4r-2}$$
$$= 1 - q^{2r-1}(e^{2yi} + e^{-2yi}) + q^{4r-2}$$
$$= 1 - 2q^{2r-1} \cos 2y + q^{4r-2}$$

$$\frac{P}{A_0} = \frac{1}{\sin x} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{(1 - q^{2r})^2 (1 - 2q^{2r-1} \cos 2(x+y) + q^{4r-2})}{(1 - 2q^{2r} \cos 2x + q^{4r})(1 - 2q^{2r-1} \cos 2y + q^{4r-2})}.$$

Durch Vergleich der beiden für $\frac{P}{A_0}$ gefundenen Werte erhält man:

$$\text{(36)} \qquad \frac{1}{\sin x} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{(1-q^{2r})^2 (1 - 2q^{2r-1} \cos 2(x+y) + q^{4r-2})}{(1-2q^{2r} \cos 2x + q^{4r})(1-2q^{2r-1} \cos 2y + q^{4r-2})}$$

$$= 2i \left\{ \frac{1}{e^{xi} - e^{-xi}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{-q^n e^{2nyi+xi}}{1 - e^{2xi} q^{2n}} + \frac{q^n e^{-2nyi-xi}}{1-e^{-2xi} q^{2n}} \right) \right\}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $y = 0$, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{\sin x} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{(1-q^{2r})^2 (1-2q^{2r-1} \cos 2x + q^{4r-2})}{(1-q^{2r-1})^2 (1-2q^{2r} \cos 2x + q^{4r})}$$

$$= 2i \left\{ \frac{1}{e^{xi} - e^{-xi}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{-q^n e^{xi}}{1-e^{2xi} q^{2n}} + \frac{q^n e^{-xi}}{1-e^{-2xi} q^{2n}} \right) \right\}.$$

Nun ist aber nach Gleichung (23):

$$\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \sin x \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}} \right)^2 \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1-2q^{2r} \cos 2x + q^{4r}}{1-2q^{2r-1} \cos 2x + q^{4r-2}}.$$

Vergleicht man diesen Wert von $\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$ mit dem Werte des eben entwickelten Produktes, so folgt sofort:

$$\frac{1}{\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}} \cdot \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1-q^{2r}}{1-q^{2r-1}} \right)^2 \left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}} \right)^2$$

$$= 2i \left\{ \frac{1}{e^{xi} - e^{-xi}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{-q^n e^{xi}}{1-e^{2xi} q^{2n}} + \frac{q^n e^{-xi}}{1-e^{-2xi} q^{2n}} \right) \right\}.$$

Wird in dieser Gleichung $x - \frac{1}{2} i \log q$ an die Stelle von x gesetzt, so geht dieselbe über in:

$$\frac{1}{\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\left(x - \frac{1}{2} i \log q\right)} \cdot \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1-q^{2r}}{1-q^{2r-1}} \right)^2 \left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}} \right)^2$$

$$= 2i \cdot \frac{1}{q^{\frac{1}{2}} e^{xi} - q^{-\frac{1}{2}} e^{-xi}} - 2i \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}} e^{xi}}{1-q^{2n+1} e^{2xi}} + 2i \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}} e^{-xi}}{1-q^{2n-1} e^{-2xi}}.$$

Wird Zähler und Nenner des ersten Gliedes der rechten Seite mit $-q^{\frac{1}{2}} e^{xi}$ multipliziert und unter dem ersten Summenzeichen $n = n' - 1$ gesetzt, so erhält man für diese rechte Seite der obigen Gleichung:

$$-2i \frac{q^{\frac{1}{2}} e^{xi}}{1 - qe^{2xi}} - 2i \sum_{n'=2}^{n'=\infty} \frac{q^{n'-\frac{1}{2}} e^{xi}}{1-q^{2n'-1} e^{2xi}} + 2i \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}} e^{-xi}}{1-q^{2n-1} e^{-2xi}},$$

oder, wenn der erste Summand mit unter das erste Summenzeichen gebracht und n wieder als Summationsbuchstabe eingeführt wird:

$$-2i\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}e^{xi}}{1-q^{2n-1}e^{2xi}}+2i\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{-\frac{1}{2}}e^{-xi}}{1-q^{2n-1}e^{-2xi}}$$

$$=-2i\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}e^{xi}}{1-q^{2n-1}e^{2xi}}-\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}e^{-xi}}{1-q^{2n-1}e^{-2xi}}\right).$$

Nun ist sowohl

$$q^{\frac{2n-1}{2}}e^{xi}<1 \text{ als auch } q^{\frac{2n-1}{2}}e^{-xi}<1.$$

Die beiden unter dem Summenzeichen stehenden Ausdrücke haben also die Form $\frac{p}{1-p^2}$, wo $p<1$.

Da aber

$$\frac{p}{1-p^2}=p+p^3+p^5+p^7+\cdots\cdots$$

eine konvergente Reihe bildet, so lange $p<1$, so ist auch

$$\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}e^{xi}}{1-q^{2n-1}e^{2xi}}=q^{\frac{2n-1}{2}}e^{xi}+q^{3\cdot\frac{2n-1}{2}}e^{3xi}+q^{5\cdot\frac{2n-1}{2}}e^{5xi}+\cdots\cdots$$

$$\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}e^{-xi}}{1-q^{2n-1}e^{-2xi}}=q^{\frac{2n-1}{2}}e^{-xi}+q^{3\cdot\frac{2n-1}{2}}e^{-3xi}+q^{5\cdot\frac{2n-1}{2}}e^{-5xi}+\cdots\cdots$$

$$\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}e^{xi}}{1-q^{2n-1}e^{2xi}}-\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}e^{-xi}}{1-q^{2n-1}e^{-2xi}}=q^{\frac{2n-1}{2}}(e^{xi}-e^{-xi})+q^{3\cdot\frac{2n-1}{2}}(e^{3xi}-e^{-3xi})+\cdots\cdots$$

$$=2i\left\{q^{\frac{2n-1}{2}}\sin x+q^{3\cdot\frac{2n-1}{2}}\sin 3x+q^{5\cdot\frac{2n-1}{2}}\sin 5x+\cdots\cdots\right\}.$$

Es ergiebt sich mithin die Gleichung:

$$\frac{1}{\sin\operatorname{am}\frac{2K\left(x-\frac{1}{2}i\log q\right)}{\pi}}\prod_{r=1}^{r=8}\left(\frac{1-q^{2r}}{1-q^{2r-1}}\right)^2\left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2$$

$$=4\sum_{n=1}^{n=\infty}(q^{\frac{2n-1}{2}}\sin x+q^{3\cdot\frac{2n-1}{2}}\sin 3x+q^{5\cdot\frac{2n-1}{2}}\sin 5x+\cdots)$$

$$=4\left\{(q^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{3}{2}}+q^{\frac{5}{2}}\cdots)\sin x+(q^{\frac{3}{2}}+q^{\frac{9}{2}}+q^{\frac{15}{2}}+\cdots)\sin 3x\right.$$
$$\left.+(q^{\frac{5}{2}}+q^{\frac{15}{2}}+q^{\frac{25}{2}}+\cdots)\sin 5x+\cdots\right\}$$

$$=4\left\{\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q}\sin x+\frac{q^{\frac{3}{2}}}{1-q^3}\sin 3x+\frac{q^{\frac{5}{2}}}{1-q^5}\sin 5x+\cdots\right\}$$

$$=4\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}}\sin(2r-1)x.$$

Früher hatte sich die Relation ergeben:

$$\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \cdot \sin \operatorname{am} \frac{2K\left(x - \frac{1}{2} i \log q\right)}{\pi} = \frac{1}{4q^{\frac{1}{2}}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 + q^{2r-1}}{1 + q^{2r}}\right)^4,$$

also ist

$$q^{\frac{1}{2}} \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 + q^{2r}}{1 + q^{2r-1}}\right)^2 = \frac{1}{4 \sin \operatorname{am} \frac{2K\left(x - \frac{1}{2} i \log q\right)}{\pi}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 + q^{2r-1}}{1 + q^{2r}}\right)^2$$

$$q^{\frac{1}{2}} \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 + q^{2r}}{1 + q^{2r-1}}\right)^2 \left(\frac{1 - q^{2r}}{1 - q^{2r-1}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4 \sin \operatorname{am} \frac{2K\left(x - \frac{1}{2} i \log q\right)}{\pi}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 - q^{2r}}{1 - q^{2r-1}}\right)^2 \left(\frac{1 + q^{2r-1}}{1 + q^{2r}}\right)^2.$$

Wird für die rechte Seite der oben gefundene Wert gesetzt, so ergiebt sich:

$$q^{\frac{1}{2}} \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 - q^{4r}}{1 - q^{4r-2}}\right)^2 = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1 - q^{2r-1}} \sin (2r - 1) x,$$

folglich

$$\text{(37)} \qquad \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 - q^{4r-2}}{1 - q^{4r}}\right)^2 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1 - q^{2r-1}} \sin (2r - 1) x.$$

Auf ganz ähnliche Weise können auch die entsprechenden Ausdrücke für $\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$ und $\Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$ hergeleitet werden, aber auf kürzerem Wege führen wir diese Herleitungen in folgender Weise durch.

Wird auf der rechten Seite der ersten der unter (23) aufgestellten Gleichungen, welche den Wert von $\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$ angiebt, also in:

$$\sin x \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 + q^{2r-1}}{1 + q^{2r}}\right)^2 \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - 2q^{2r} \cos 2x + q^{4r}}{1 - 2q^{2r-1} \cos 2x + q^{4r-2}}$$

$-q$ statt q und $\frac{\pi}{2} - x$ statt x gesetzt, so geht dieser Ausdruck über in:

$$\cos x \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1 - q^{2r-1}}{1 + q^{2r}}\right)^2 \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 + 2q^{2r} \cos 2x + q^{4r}}{1 - 2q^{2r-1} \cos 2x + q^{4r-2}}.$$

Durch Vergleich dieses Wertes mit der rechten Seite der zweiten der unter (23) aufgestellten Gleichungen ergiebt sich, dass der obige Wert mit dieser rechten Seite vollständig übereinstimmt, dafs also durch diese Substitutionen $\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$ in $\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$ übergeht. Es wird mithin für $\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$ der dem in (37) für $\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$ gefundenen entsprechende Wert erhalten werden, wenn wir auch in der Gleichung (37) q durch $-q$ und x durch $\frac{\pi}{2} - x$

ersetzen. Bringen wir noch vor Einführung dieser Substitutionen in (37) den vor dem Summenzeichen stehenden Faktor $\frac{1}{q^{\frac{1}{2}}}$ unter das Summenzeichen, so erhalten wir:

$$\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1-q^{4r-2}}{1-q^{4r}}\right)^2 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{r-1}}{1-q^{2r-1}} \sin(2r-1)\, x.$$

Führen wir in diese Gleichungen die oben angeführten Ersetzungen ein, so ergiebt sich:

$$\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1-q^{4r-2}}{1-q^{4r}}\right)^2 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\mp q^{r-1}}{1+q^{2r-1}} \sin(2r-1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

wo unter dem Summenzeichen das positive oder negative Vorzeichen gilt, je nachdem r gerade oder ungerade ist.

Nun ist aber:

$$\sin(2r-1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left[(2r-1)\frac{\pi}{2} - (2r-1)\, x\right]$$

$$= \sin(2r-1)\frac{\pi}{2} \cos(2r-1)\, x,$$

da $\cos(2r-1)\frac{\pi}{2} = 0$, gleichgiltig ob r gerade oder ungerade ist. Da aber $\sin(2r-1)\frac{\pi}{2} = \mp 1$, je nachdem r gerade oder ungerade, so folgt:

$$\sin(2r-1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \mp \cos(2r-1)\, x,$$

so dafs bei geradem r das positive, bei ungeradem r das negative Vorzeichen gilt.

Unter dem Summenzeichen steht daher bei geradem r

$$\frac{-q^{r-1}}{1+q^{2r-1}}\Big(-\cos(2r-1)\Big)\, x = \frac{q^{r-1}}{1+q^{2r-1}} \cos(2r-1)\, x$$

und bei ungeradem r

$$\frac{q^{r-1}}{1+q^{2r-1}} \cos(2r-1)\, x.$$

Es ist daher in jedem Falle, r mag gerade oder ungerade sein:

$$\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1-q^{4r-2}}{1-q^{4r}}\right)^2 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{r-1}}{1+q^{2r-1}} \cos(2r-1)\, x,$$

oder, wenn der Faktor $\frac{1}{q^{\frac{1}{2}}}$ wieder vor das Summenzeichen gesetzt wird:

(38) $$\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1-q^{4r-2}}{1-q^{4r}}\right)^2 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1+q^{2r-1}} \cos(2r-1)\, x.$$

Um endlich auch für $\Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$ den entsprechenden Wert herzuleiten, gehen wir am einfachsten von der früher entwickelten Gleichung (36) aus:

$$\frac{1}{\sin x}\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{(1-q^{2r})^2(1-2q^{2r-1}\cos 2(x+y)+q^{4r-2})}{(1-2q^{2r-1}\cos 2y+q^{4r-2})(1-2q^{2r}\cos 2x+q^{4r})}$$

$$=2i\left\{\frac{1}{e^{xi}-e^{-xi}}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{-q^n e^{2nyi+xi}}{1-e^{2xi}q^{2n}}+\frac{q^n e^{-2nyi-xi}}{1-e^{-2xi}q^{2n}}\right)\right\}$$

$$=2i\left\{\frac{1}{2i\sin x}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{-q^n e^{(2ny+x)i}+q^{3n}e^{(2ny-x)i}+q^n e^{-(2ny+x)i}-q^{3n}e^{-(2ny-x)i}}{1-q^{2n}e^{2xi}-q^{2n}e^{-2xi}+q^{4n}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sin x}+2i\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{-q^n(e^{(2ny+x)i}-e^{-(2ny+x)i})+q^{3n}(e^{(2ny-x)i}-e^{-(2ny-x)i})}{1-q^{2n}(e^{2xi}+e^{-2xi})+q^{4n}}$$

$$=\frac{1}{\sin x}+2i\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{-2iq^n\sin(2ny+x)+2iq^{3n}\sin(2ny-x)}{1-2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}}$$

$$=\frac{1}{\sin x}+4\sum_{n=1}^{n=\infty}q^n\frac{\sin(2ny+x)-q^{2n}\sin(2ny-x)}{1-2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}}.$$

Wird in dieser Gleichung $x=\frac{\pi}{2}$ gesetzt, so erhalten wir:

$$\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{(1-q^{2r})^2(1-2q^{2r-1}\cos(\pi+2y)+q^{4r-2})}{(1-2q^{2r-1}\cos 2y+q^{4r-2})(1+2q^{2r}+q^{4r})}=1+4\sum_{n=1}^{n=\infty}q^n\frac{\sin\left(2ny+\frac{\pi}{2}\right)-q^{2n}\sin\left(2ny-\frac{\pi}{2}\right)}{1+2q^{2n}+q^{4n}}$$

$$\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{(1-q^{2r})^2(1+2q^{2r-1}\cos 2y+q^{4r-2})}{(1+q^{2r})^2(1-2q^{2r-1}\cos 2y+q^{4r-2})}=1+4\sum_{n=1}^{n=\infty}q^n\frac{\cos 2ny+q^{2n}\cos 2ny}{(1+q^{2n})^2}$$

$$\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{1-q^{2r}}{1+q^{2r}}\right)^2\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1+2q^{2r-1}\cos 2y+q^{4r-2}}{1-2q^{2r-1}\cos 2y+q^{4r-2}}=1+4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n\cos 2ny\,(1+q^{2n})}{(1+q^{2n})^2}$$

$$=1+4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos 2ny$$

und setzen wir $y=x$:

$$\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{1-q^{2r}}{1+q^{2r}}\right)^2\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1+2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}=1+4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos 2nx.$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit dem in der dritten der unter (23) zusammengestellten Gleichungen für $\varDelta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}$ angegebenen Werte lehrt, dafs die linke Seite der Gleichung mit jenem Werte übereinstimmt, wenn er mit $\left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\right)^2$ multipliziert und durch $\left(\frac{1-q^{2r}}{1+q^{2r}}\right)^2$ dividiert wird, folglich ist, wenn als Summationsbuchstabe wieder r gesetzt wird:

$$\varDelta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}=\prod_{r=1}^{r=\infty}\left[\left(\frac{1+q^{2r}}{1-q^{2r}}\right)^2\left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\right)^2\right]\left(1+4\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^r}{1+q^{2r}}\cos 2rx\right).\tag{39}$$

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die in den Gleichungen (37), (38) und (39) mit den unendlichen Reihen multiplizierten unendlichen Produkte durch bekannte Gröſsen auszudrücken.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1-q^{4r-2}}{1-q^{4r}}\right)^2 = Q,$$

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1+q^{2r}}{1-q^{2r}}\right)^2 \left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\right)^2 = Q_1$$

und ferner $\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \varphi(x)$; $\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \psi(x)$ und $\Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \chi(x)$, so finden wir Q_1, wenn wir die beiden Gleichungen:

$$\frac{\psi(x)}{Q} = \frac{\sqrt{q}}{1+q} \cos x + \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3} \cos 3x + \frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5} \cos 5x + \cdots\cdots$$

$$\frac{\chi(x)}{Q_1} = 1 + \frac{4q}{1+q^2} \cos 2x + \frac{4q^2}{1+q^4} \cos 4x + \frac{4q^3}{1+q^6} \cos 6x + \cdots\cdots$$

mit einander multiplizieren.

$$\begin{aligned}
\frac{\psi(x)}{Q} \cdot \frac{\chi(x)}{Q_1} = {} & \frac{\sqrt{q}}{1+q} \cos x + \cdots\cdots + \frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1+q^{2n+1}} \cos(2n+1)x + \cdots\cdots \\
& + \frac{4q}{1+q^2} \cdot \frac{\sqrt{q}}{1+q} \cos 2x \cdot \cos x + \cdots\cdots + \frac{4q}{1+q^2} \cdot \frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1+q^{2n-1}} \cos(2n-1)x \cdot \cos 2x + \cdots\cdots \\
& + \frac{4q}{1+q^2} \cdot \frac{\sqrt{q^{2n+3}}}{1+q^{2n+3}} \cos(2n+3)x \cdot \cos 2x + \cdots\cdots \\
& + \frac{4q^2}{1+q^4} \cdot \frac{\sqrt{q}}{1+q} \cos 4x \,.\, \cos x + \cdots\cdots + \frac{4q^2}{1+q^4} \frac{\sqrt{q^{2n-3}}}{1+q^{2n-3}} \cos(2n-3)x \cdot \cos 4x + \cdots\cdots \\
& + \frac{4q^2}{1+q^4} \cdot \frac{\sqrt{q^{2n+5}}}{1+q^{2n+5}} \cos(2n+5)x \,.\, \cos 4x + \cdots\cdots \\
& + \frac{4q^3}{1+q^6} \cdot \frac{\sqrt{q}}{1+q} \cos 6x \,.\, \cos x + \cdots\cdots + \frac{4q^3}{1+q^6} \frac{\sqrt{q^{2n-5}}}{1+q^{2n-5}} \cos(2n-5)x \cdot \cos 6x + \cdots\cdots \\
& + \frac{4q^3}{1+q^6} \frac{\sqrt{q^{2n+7}}}{1+q^{2n+7}} \cos(2n+7)x \,.\, \cos 6x + \cdots\cdots \\
& + \cdots\cdots \\
& + \frac{4q^n}{1+q^{2n}} \frac{\sqrt{q}}{1+q} \cos 2nx \,.\, \cos x + \cdots\cdots \\
& + \frac{4q^{n+1}}{1+q^{2n+2}} \cdot \frac{\sqrt{q}}{1+q} \cos(2n+2)x \,.\, \cos x + \cdots\cdots \\
& + \frac{4q^{n+2}}{1+q^{2n+4}} \cdot \frac{\sqrt{q}}{1+q} \cos(2n+4)x \,.\, \cos x + \frac{4q^{n+2}}{1+q^{2n+4}} \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3} \cos(2n+4)x \cdot \cos 3x + \cdots \\
& + \cdots\cdots
\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir, daſs

$$\cos(2r-1)x \,.\, \cos 2sx = \tfrac{1}{2}\cos(2r+2s-1)x + \tfrac{1}{2}\cos(2r-2s-1)x,$$

so können wir die rechte Seite schreiben:

$$\frac{\sqrt{q}}{1+q}\cos x + \cdots + \frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1+q^{2n+1}}\cos(2n+1)x + \cdots$$

$$+ \frac{4q}{1-q^2}\,\frac{\sqrt{q}}{1+q}\left(\tfrac{1}{2}\cos 3x + \tfrac{1}{2}\cos x\right) + \cdots + \frac{4q}{1+q^2}\,\frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1+q^{2n-1}}\left(\tfrac{1}{2}\cos(2n+1)x + \tfrac{1}{2}\cos(2n-3)x\right) + \cdots$$

$$+ \frac{4q}{1+q^2}\cdot\frac{\sqrt{q^{2n+3}}}{1+q^{2n+3}}\left(\tfrac{1}{2}\cos(2n+5)x + \tfrac{1}{2}\cos(2n+1)x\right) + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{4q^2}{1+q^4}\cdot\frac{\sqrt{q}}{1+q}\left(\tfrac{1}{2}\cos 5x + \tfrac{1}{2}\cos 3x\right) + \cdots$$

$$+ \frac{4q^2}{1+q^4}\cdot\frac{\sqrt{q^{2n-3}}}{1+q^{2n-3}}\left(\tfrac{1}{2}\cos(2n+1)x + \tfrac{1}{2}\cos(2n-7)x\right) + \cdots$$

$$+ \frac{4q^2}{1+q^4}\cdot\frac{\sqrt{q^{2n+5}}}{1+q^{2n+5}}\left(\tfrac{1}{2}\cos(2n+9)x + \tfrac{1}{2}\cos(2n+1)x+\right) + \cdots$$

$$+ \frac{4q^3}{1+q^6}\cdot\frac{\sqrt{q}}{1+q}\left(\tfrac{1}{2}\cos 7x + \tfrac{1}{2}\cos 5x\right) + \cdots$$

$$+ \frac{4q^3}{1+q^6}\cdot\frac{\sqrt{q^{2n-5}}}{1+q^{2n-5}}\left(\tfrac{1}{2}\cos(2n+1)x + \tfrac{1}{2}\cos(2n-11)x\right) + \cdots$$

$$+ \frac{4q^3}{1+q^6}\cdot\frac{\sqrt{q^{2n+7}}}{1+q^{2n+7}}\left(\tfrac{1}{2}\cos(2n+13)x + \tfrac{1}{2}\cos(2n+1)x\right) + \cdots$$

$$+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$+ \frac{4q^n}{1+q^{2n}}\cdot\frac{\sqrt{q}}{1+q}\left(\tfrac{1}{2}\cos(2n+1)x + \tfrac{1}{2}\cos(2n-1)x\right) + \cdots$$

$$+ \frac{4q^{n+1}}{1+q^{2n+2}}\cdot\frac{\sqrt{q}}{1+q}\left(\tfrac{1}{2}\cos(2n+3)x + \tfrac{1}{2}\cos(2n+1)x\right) + \cdots$$

$$+ \frac{4q^{n+2}}{1+q^{2n+4}}\cdot\frac{\sqrt{q}}{1+q}\left(\tfrac{1}{2}\cos(2n+5)x + \tfrac{1}{2}\cos(2n+3)x\right)$$

$$+ \frac{4q^{n+2}}{1+q^{2n+4}}\,\frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\left(\tfrac{1}{2}\cos(2n+7)x + \tfrac{1}{2}\cos(2n+1)x\right) + \cdots$$

$$+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Der Faktor von $\cos(2n+1)x$ ist also folgender:

$$\frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1+q^{2n+1}} + 2\left(\frac{q}{1+q^2}\,\frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1+q^{2n-1}} + \frac{q^2}{1+q^4}\cdot\frac{\sqrt{q^{2n-3}}}{1+q^{2n-3}} + \frac{q^3}{1+q^6}\,\frac{\sqrt{q^{2n-5}}}{1+q^{2n-5}} + \cdots + \frac{q^n}{1+q^n}\,\frac{\sqrt{q}}{1+q}\right)$$

$$+ 2\left(\frac{q}{1+q^2}\,\frac{\sqrt{q^{2n+3}}}{1+q^{2n+3}} + \frac{q^2}{1+q^4}\cdot\frac{\sqrt{q^{2n+5}}}{1+q^{2n+5}} + \frac{q^3}{1+q^6}\,\frac{\sqrt{q^{2n+7}}}{1+q^{2n+7}} + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\right)$$

$$+ 2\left(\frac{\sqrt{q}}{1+q}\cdot\frac{q^{n+1}}{1+q^{2n+2}} + \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cdot\frac{q^{n+2}}{1+q^{2n+4}} + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\right).$$

Der Faktor von $\cos(2n+1)x$ stellt sich dar als eine Summe von vier Summanden, von denen der erste Summand eingliedrig, der zweite Summand eine endliche Summe aus n Gliedern, der dritte und vierte Summand unendliche Summen sind.

Bei der gewählten Anordnung der Partialprodukte rührt der eingliedrige Summand aus der ersten Reihe der Partialprodukte her, die endliche Summe und die erste unendliche Summe stammen aus der Reihe der Partialprodukte, welche in den Klammern $\frac{1}{2}\cos(2n+1)x$ entweder als ersten oder als zweiten Summanden enthalten, und zwar die endliche Summe aus den Partialprodukten dieser Reihenfolge, welche $\frac{1}{2}\cos(2n+1)x$ als ersten, die unendliche Summe dagegen aus den Partialprodukten, welche $\frac{1}{2}\cos(2n+1)x$ als zweiten Summanden aufweisen, endlich die letzte unendliche Summe entspringt aus der Reihe derjenigen Partialprodukte, welche in der Klammer $\frac{1}{2}\cos(2n+1)x$ nur als zweiten Summanden haben.

Führen wir in den Faktor von $\cos(2n+1)x$ die Summenzeichen ein, so nimmt er die Form an:

$$\frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1+q^{2n+1}}+2\sum_{r=1}^{r=n}\frac{q^r}{1+q^{2r}}\cdot\frac{q^{\frac{2n-2r+1}{2}}}{1+q^{2n-2r+1}}+2\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^r}{1+q^{2r}}\cdot\frac{q^{\frac{2n+2r+1}{2}}}{1+q^{2n+2r+1}}$$
$$+2\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1+q^{2r-1}}\cdot\frac{q^{n+r}}{1+q^{2n+2r}}.$$

Diese Summen lassen sich aber bedeutend reduzieren. Zunächst ist:

$$2\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^r}{1+q^{2r}}\cdot\frac{q^{\frac{2n+2r+1}{2}}}{1+q^{2n+2r+1}}=2q^{n+\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r}}{(1+q^{2r})(1+q^{2n+2r+1})}$$
$$=2\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r}(1-q^{2n+1})}{(1+q^{2r})(1+q^{2n+2r+1})}=2\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r}-q^{2n+2r+1}}{(1+q^{2r})(1+q^{2n+2r+1})}$$
$$=2\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r}+q^{2n+4r+1}-q^{2n+2r+1}-q^{2n+4r+1}}{(1+q^{2r})(1+q^{2n+2r+1})}$$
$$=2\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r}(1+q^{2n+2r+1})-q^{2n+2r+1}(1+q^{2r})}{(1+q^{2r})(1+q^{2n+2r+1})}$$
$$=2\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{q^{2r}}{1+q^{2r}}-\frac{q^{2n+2r+1}}{1+q^{2n+2r+1}}\right).$$

Ferner ist:

$$2\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1+q^{2r-1}}\cdot\frac{q^{n+r}}{1+q^{2n+2r}}=2q^{n-\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r}}{(1+q^{2r-1})(1+q^{2n+2r})}$$
$$=2q^{n+\frac{1}{2}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r-1}}{(1+q^{2r-1})(1+q^{2n+2r})}$$

$$= \frac{2\,q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{2r-1} - q^{2n+2r}}{(1+q^{2r-1})\,(1+q^{2n+2r})}$$

$$= \frac{2\,q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{2r-1} + q^{2n+4r-1} - q^{2n+2r} - q^{2n+4r-1}}{(1+q^{2r-1})\,(1+q^{2n+2r})}$$

$$= \frac{2\,q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{2r-1}(1+q^{2n+2r}) - q^{2n+2r}(1+q^{2r-1})}{(1+q^{2r-1})\,(1+q^{2n+2r})}$$

$$= \frac{2\,q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sum_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}} - \frac{q^{2n+2r}}{1+q^{2n+2r}}\right).$$

Addieren wir die beiden unendlichen Summen, so erhalten wir:

$$2\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^r}{1+q^{2r}} \cdot \frac{q^{\frac{2n+2r+1}{2}}}{1+q^{2n+2r+1}} + 2\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1+q^{2r-1}} \cdot \frac{q^{n+r}}{1+q^{2n+2r}}$$

$$= 2\,\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sum_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}} - \frac{q^{2n+2r+1}}{1+q^{2n+2r+1}} + \frac{q^{2r}}{1+q^{2r}} - \frac{q^{2n+2r}}{1+q^{2n+2r}}\right)$$

$$= 2\,\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \left\{\frac{q}{1+q} + \frac{q^3}{1+q^3} + \cdots + \frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} + \frac{q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}} + \frac{q^{2n+3}}{1+q^{2n+3}} + \frac{q^{2n+5}}{1+q^{2n+5}} + \cdots\right.$$

$$- \frac{q^{2n+3}}{1+q^{2n+3}} - \frac{q^{2n+5}}{1+q^{2n+5}} + \cdots$$

$$+ \frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^4}{1+q^4} + \cdots + \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} + \frac{q^{2n+2}}{1+q^{2n+2}} + \frac{q^{2n+4}}{1+q^{2n+4}} + \frac{q^{2n+6}}{1+q^{2n+6}} + \cdots$$

$$\left. - \frac{q^{2n+2}}{1+q^{2n+2}} - \frac{q^{2n+4}}{1+q^{2n+4}} - \frac{q^{2n+6}}{1+q^{2n+6}} - \cdots\right\}$$

$$= 2\,\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \left\{\frac{q}{1+q} + \frac{q^3}{1+q^3} + \cdots + \frac{q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}} + \frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^4}{1+q^4} + \cdots + \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\right\}.$$

Hiermit ist die Reduktion der beiden unendlichen Summen durchgeführt und es erübrigt nur noch die endliche Summe zu vereinfachen.

$$2\sum_{r=1}^{r=n} \frac{q^r}{1+q^{2r}} \cdot \frac{q^{\frac{2n-2r+1}{2}}}{1+q^{2n-2r+1}} = 2\,q^{n+\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{1+q^{2r}} \cdot \frac{1}{1+q^{2n-2r+1}}$$

$$= 2\,\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1-q^{2n+1}}{(1+q^{2r})\,(1+q^{2n-2r+1})}$$

$$= 2\,\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 + q^{2n-2r+1} + q^{2r} + q^{2n+1} - q^{2r} - q^{2n+1} - q^{2n-2r+1} - q^{2n+1}}{(1+q^{2r})\,(1+q^{2n-2r+1})}$$

$$= \frac{2q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(1+q^{2n-2r+1}) + q^{2r}(1+q^{2n-2r+1}) - q^{2r}(1+q^{2n-2r+1}) - q^{2n-2r+1}(1+q^{2r})}{(1+q^{2r})\,(1+q^{2n-2r+1})}$$

$$= \frac{2q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(1+q^{2r})(1+q^{2n-2r+1}) - q^{2r}(1+q^{2n-2r+1}) - q^{2n-2r+1}(1+q^{2r})}{(1+q^{2r})(1+q^{2n-2r+1})}$$

$$= \frac{2q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sum_{r=1}^{r=n} \left(1 - \frac{q^{2r}}{1+q^{2r}} - \frac{q^{2n-2r+1}}{1+q^{2n-2r+1}}\right)$$

$$= \frac{2q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \left\{n - \frac{q^2}{1+q^2} - \frac{q^4}{1+q^4} - \cdots - \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} - \frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} - \frac{q^{2n-3}}{1+q^{2n-3}} - \cdots - \frac{q}{1+q}\right\}.$$

Addieren wir diesen Wert der endlichen Summe und den oben gefundenen Wert der Summe der beiden unendlichen Summen, so erhalten wir:

$$\frac{2q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \left\{n + \frac{q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}}\right\}.$$

Der Faktor von $\cos(2n+1)x$ ist mithin folgender:

$$\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}} + 2n \cdot \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} + 2 \cdot \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \cdot \frac{q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}}.$$

Berücksichtigen wir, dafs

$$\frac{2q^{2n+1}}{(1-q^{2n+1})(1+q^{2n+1})} = \frac{1+q^{2n+1}-(1-q^{2n+1})}{(1-q^{2n+1})(1+q^{2n+1})} = \frac{1}{1-q^{2n+1}} - \frac{1}{1+q^{2n+1}},$$

so kann der Faktor von $\cos(2n+1)x$ geschrieben werden:

$$\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}} + 2n \cdot \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} + q^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-q^{2n+1}} - \frac{1}{1+q^{2n+1}}\right)$$

$$= \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}} + 2n \cdot \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} + \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} - \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}} = (2n+1)\frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}}.$$

Infolge dieser Betrachtungen stellt sich als Wert des Produktes $\frac{\psi(x)}{Q} \cdot \frac{\chi(x)}{Q_1}$ heraus:

$$\frac{\psi(x)}{Q} \cdot \frac{\chi(x)}{Q_1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \cos(2n+1)x$$

oder:

$$\psi(x) \cdot \chi(x) = Q \cdot Q_1 \left\{\frac{\sqrt{q}}{1-q}\cos x + \frac{3\sqrt{q^3}}{1-q^3}\cos 3x + \frac{5\sqrt{q^5}}{1-q^5}\cos 5x + \cdots\cdots\right\}$$

$$= Q \cdot Q_1 \frac{d}{dx}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin x + \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin 3x + \frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5}\sin 5x + \cdots\cdots\right\}.$$

Da aber in (37) gefunden:

$$\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1-q^{4r-2}}{1-q^{4r}}\right)^2 \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}} \sin(2r-1)x$$

und ferner für $\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$ die Bezeichnung $\varphi(x)$ und für $\frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1-q^{4r-2}}{1-q^{4r}}\right)^2$ die Bezeichnung Q eingeführt ist, so dafs:

$$\varphi(x) = Q \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}} \sin(2r-1)x,$$

so ergiebt sich:

$$\psi(x) \cdot \chi(x) = Q_1 \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Werden für $\psi(x)$ und $\chi(x)$ ihre durch $\varphi(x)$ ausgedrückten Werte gesetzt, so erhalten wir:

$$Q_1 \frac{d\varphi(x)}{dx} = \sqrt{1-\varphi^2(x)}\sqrt{1-\varkappa^2\varphi^2(x)}.$$

Wird zur Abkürzung $\varphi(x) = z$ gesetzt, so ist für $x = 0$ auch $z = 0$, für $x = \frac{\pi}{2}$ ist $z = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und wir erhalten:

$$Q_1 \frac{dz}{dx} = \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-\varkappa^2 z^2}$$

oder

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} = \frac{dx}{Q_1}.$$

Da x und z gleichzeitig verschwinden, so giebt die letzte Gleichung integriert, wenn die Integrationsvariable mit t bezeichnet wird:

$$\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2 t^2)}} = \frac{x}{Q_1}.$$

Da für $z = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$ ist, so liefert diese Relation:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2 t^2)}} = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{Q_1}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber gleich K, mithin ist:

$$K = \frac{\pi}{2Q_1} \text{ oder:}$$

(40) $$Q_1 = \frac{\pi}{2K}.$$

Hiermit ist Q_1 gefunden. Um auch Q zu bestimmen, beachte man, dafs aus den für Q_1 und Q aufgestellten Definitionsgleichungen sich ergiebt:

$$\frac{4Q_1}{Q} = 4\sqrt{q} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{\left(\frac{1+q^{2r}}{1-q^{2r}}\right)^2 \left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\right)^2}{\left(\frac{1-q^{4r-2}}{1-q^{4r}}\right)^2}$$

$$= 4\sqrt{q} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{\left(\frac{1+q^{2r}}{1-q^{2r}}\right)^2 \left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\right)^2}{\left(\frac{1-q^{2r-1}}{1-q^{2r}}\right)^2 \left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2}$$

$$= 4\sqrt{q} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1+q^{2r}}{1+q^{2r-1}}\right)^4.$$

Früher ist aber in Gleichung (21) gefunden:

$$\sqrt{\varkappa} = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{1+q^{2r}}{1+q^{2r-1}}\right)^2,$$

folglich ist:

$$4\frac{Q_1}{Q} = \varkappa \text{ oder}$$

(41) $$Q = \frac{4Q_1}{\varkappa} = \frac{2\pi}{\varkappa K}.$$

Werden alle diese Werte in die Gleichungen (37), (38) und (39) eingesetzt, so erhält man:

(42) $$\begin{cases} \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\pi}{\varkappa K}\sum\limits_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}}\sin(2r-1)x \\ \cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\pi}{\varkappa K}\sum\limits_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1+q^{2r-1}}\cos(2r-1)x \\ \Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\pi}{2K}\left\{1+4\sum\limits_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^r}{1+q^{2r}}\cos 2rx\right\}. \end{cases}$$

Hiermit sind die elliptischen Funktionen in Reihen entwickelt.

Wie die elliptischen Funktionen, so können auch die elliptischen Transcendenten $E(u)$ und $\Pi(u, a)$ in Reihen entwickelt werden.

Für die elliptischen Integrale zweiter Gattung findet man nach dem Vorgange Jacobi's diese Reihenentwicklung, wenn man die Gleichung:

$$\frac{\varphi(x)}{Q} = \frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin x + \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin 3x + \frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5}\sin 5x + \cdots\cdots$$

zum Quadrat erhebt.

Multipliziert man die Gleichung:

$$\frac{\varphi(x)}{Q} = \sqrt{q}\left\{\frac{1}{1-q}\sin x + \frac{q}{1-q^3}\sin 3x + \frac{q^2}{1-q^5}\sin 5x + \cdots\cdots\right\}$$

mit sich selbst, so erhält man:

$$\left[\frac{\varphi(x)}{Q}\right]^2 = (\sqrt{q})^2\left\{\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q}\sin x \,.\, \sin x + \frac{q}{1-q^3}\,\frac{1}{1-q}\sin 3x \,.\, \sin x + \cdots\right.$$

$$+ \frac{q^{n-1}}{1-q^{2n-1}}\,\frac{1}{1-q}\sin(2n-1)x\sin x$$

$$+ \frac{q^n}{1-q^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-q}\sin(2n+1)x \,.\, \sin x + \cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{1-q}\,\frac{q}{1-q^3}\sin x \,.\, \sin 3x + \cdots + \frac{q^{n-2}}{1-q^{2n-3}}\cdot\frac{q}{1-q^3}\sin(2n-3)x \,.\, \sin 3x + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{q^{n+1}}{1-q^{2n+3}}\,\frac{q}{1-q^3}\sin(2n+3)x \,.\, \sin 3x + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{1-q}\,\frac{q^2}{1-q^5}\sin x\,.\,\sin 5x + \cdots + \frac{q^{n-3}}{1-q^{2n-5}}\,\frac{q^2}{1-q^5}\sin(2n-5)\,x\,.\,\sin 5x + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{q^{n+2}}{1-q^{2n+5}}\,\frac{q^2}{1-q^5}\sin(2n+5)\,x\,.\,\sin 5x + \cdots\cdots$$

$$+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$+ \frac{1}{1-q}\,\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n-1}}\sin x\,.\,\sin(2n-1)\,x + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{1-q}\,\frac{q^{n}}{1-q^{2n+1}}\sin x\,.\,\sin(2n+1)\,x + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{1-q}\,\frac{q^{n+1}}{1-q^{2n+3}}\sin x\,.\,\sin(2n+3)\,x + \frac{q}{1-q^3}\cdot\frac{q^{n+1}}{1-q^{2n+3}}\sin 3x\,.\,\sin(2n+3)x + \cdots$$

$$+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \Big\}$$

Da

$$\sin(a+b)\cdot\sin(a-b) = \frac{1}{2}\cos 2b - \frac{1}{2}\cos 2a$$

oder, wenn der Kosinus des doppelten Argumentes durch den Sinus des einfachen Argumentes ausgedrückt wird:

$$\sin(a+b)\,.\,\sin(a-b) = \frac{1}{2}(1-2\sin^2 b) - \frac{1}{2}(1-2\sin^2 a)$$

$$= \frac{1}{2} - \sin^2 b - \frac{1}{2} + \sin^2 a = \sin^2 a - \sin^2 b$$

ist, so erhält man, wenn

$$a + b = v$$
$$a - b = w$$

gesetzt wird, so dafs

$$a = \frac{1}{2}(v + w)$$

$$b = \frac{1}{2}(v - w)$$

$$\sin v\,.\,\sin w = \sin^2\frac{1}{2}(v+w) - \sin^2\frac{1}{2}(v-w)\,.$$

Werden in die obige Gleichung für die Produkte aus je zwei Sinus die aus der letzten Relation sich ergebenden Werte gesetzt, so findet man:

$$\left[\frac{\varphi(x)}{Q}\right]^2 = (\sqrt{q})^2\left\{\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q}\sin^2 x + \frac{q}{1-q^3}\cdot\frac{1}{1-q}(\sin^2 2x - \sin^2 x) + \cdots\cdot\right.$$

$$+ \frac{q^{n-1}}{1-q^{2n-1}}\cdot\frac{1}{1-q}\Big(\sin^2 nx - \sin^2(2n-1)\,x\Big)$$

$$+ \frac{q^{n}}{1-q^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-q}\Big(\sin^2(n+1)\,x - \sin^2 nx\Big) + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{1-q}\,\frac{q}{1-q^3}(\sin^2 2x - \sin^2 x) + \cdots + \frac{q^{n-2}}{1-q^{2n-3}}\cdot\frac{q}{1-q^3}\Big(\sin^2 nx - \sin^2(n-3)\,x\Big) + \cdots$$

$$+\frac{q^{n+1}}{1-q^{2n+3}}\;\frac{q}{1-q^3}\Big(\sin^2(n+3)\,x-\sin^2 nx\Big)+\cdots\;\cdot\cdot$$

$$+\frac{1}{1-q}\;\frac{q^2}{1-q^5}(\sin^2 3x-\sin^2 2x)+\cdots+\frac{q^{n-3}}{1-q^{2n-5}}\cdot\frac{q^2}{1-q^5}\Big(\sin^2 nx-\sin^2(n-5)x\Big)+\cdots$$

$$+\frac{q^{n+2}}{1-q^{2n+5}}\cdot\frac{q^2}{1-q^5}\Big(\sin^2(n+5)\,x-\sin^2 nx\Big)+\cdots\cdots$$

$$+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$+\frac{1}{1-q}\cdot\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n-1}}\Big(\sin^2 nx-\sin^2(n-1)\,x\Big)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{1-q}\;\frac{q^{n}}{1-q^{2n+1}}\Big(\sin^2(n+1)\,x-\sin^2 nx\Big)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{1-q}\;\frac{q^{n+1}}{1-q^{2n+3}}\Big(\sin^2(n+2)\,x-\sin^2(n+1)\,x\Big)$$

$$+\frac{q}{1-q^3}\;\frac{q^{n+1}}{1-q^{2n+3}}\Big(\sin^2(n+3)\,x-\sin^2 nx\Big)+\cdots\cdots$$

$$+\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\Big\}$$

Der Faktor von $\sin^2 nx$ ist also folgender:

$$\Big(\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n-1}}\cdot\frac{1}{1-q}+\frac{q^{n-2}}{1-q^{2n-3}}\cdot\frac{q}{1-q^3}+\frac{q^{n-3}}{1-q^{2n-5}}\cdot\frac{q^2}{1-q^5}+\cdots+\frac{1}{1-q}\;\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n-1}}\Big)$$

$$-\Big(\frac{q^{n}}{1-q^{2n+1}}\;\frac{1}{1-q}+\frac{q^{n+1}}{1-q^{2n+3}}\;\frac{q}{1-q^3}+\frac{q^{n+2}}{1-q^{2n+5}}\cdot\frac{q^2}{1-q^5}+\cdots\cdots\Big)$$

$$-\Big(\frac{q^{n}}{1-q^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-q}+\frac{q^{n+1}}{1-q^{2n+3}}\cdot\frac{q}{1-q^3}+\frac{q^{n+2}}{1-q^{2n+5}}\cdot\frac{q^2}{1-q^5}+\cdots\cdots\Big).$$

Der Faktor von $\sin^2 nx$ stellt sich als eine aus drei Summanden bestehende Summe dar, von diesen Summen ist die erste endlich und besteht aus n Gliedern, die beiden anderen Summen sind dagegen unendlich und dabei gleich. Bei der gewählten Anordnung der Partialprodukte stammt die endliche Summe und die erste unendliche Summe aus der Reihe der Partialprodukte, welche in den Klammern $\sin^2 nx$ entweder als ersten oder als zweiten Summanden enthalten, und zwar die endliche Summe aus den Partialprodukten dieser Reihenfolge, welche $\sin^2 nx$ als ersten, die unendliche Summe aus den Partialprodukten, welche $\sin^2 nx$ als zweiten Summanden aufweisen, endlich die letzte unendliche Summe ergiebt sich aus denjenigen Partialprodukten, welche in den Klammern $\sin^2 nx$ nur als zweiten Summanden haben.

Beachtet man die Gleichheit der unendlichen Summen und führt Summenzeichen ein, so nimmt der Faktor von $\sin^2 nx$ die folgende Form an:

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{q^{n-r}}{1-q^{2n-2r+1}}\cdot\frac{q^{r-1}}{1-q^{2r-1}}-2\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{r-1}}{1-q^{2r-1}}\cdot\frac{q^{n+r-1}}{1-q^{2n+2r-1}}.$$

Auch diese Summen lassen sich auf wesentlich einfachere Formen bringen. Zunächst ist:

$$2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{r-1}}{1-q^{2r-1}}\cdot\frac{q^{n+r-1}}{1-q^{2n+2r-1}}=2q^{n-1}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r-1}}{(1-q^{2r-1})(1-q^{2n+2r-1})}$$

$$=\frac{2q^{n-1}}{1-q^{2n}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{2r-1}(1-q^{2n})}{(1-q^{2r-1})(1-q^{2n+2r-1})}=\frac{2q^{n-1}}{1-q^{2n}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r-1}-q^{2n+2r-1}}{(1-q^{2r-1})(1-q^{2n+2r-1})}$$

$$=\frac{2q^{n-1}}{1-q^{2n}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r-1}-q^{2n+4r-2}-q^{2n+2r-1}+q^{2n+4r-2}}{(1-q^{2r-1})(1-q^{2n+2r-1})}$$

$$=\frac{2q^{n-1}}{1-q^{2n}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r-1}(1-q^{2n+2r-1})-q^{2n+2r-1}(1-q^{2r-1})}{(1-q^{2r-1})(1-q^{2n+2r-1})}$$

$$=\frac{2q^{n-1}}{1-q^{2n}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}}-\frac{q^{2n+2r-1}}{1-q^{2n+2r-1}}\right)$$

$$=\frac{2q^{n-1}}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots+\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}+\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}+\frac{q^{2n+3}}{1-q^{2n+3}}+\cdots\cdots\cdots\right.$$
$$\left.-\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}-\frac{q^{2n+3}}{1-q^{2n+3}}-\cdots\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{2q^{n-1}}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots\cdots+\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right\}.$$

Ferner ist:

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{q^{n-r}}{1-q^{2n-2r+1}}\cdot\frac{q^{r-1}}{1-q^{2r-1}}=q^{n-1}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{1-q^{2n-2r+1}}\cdot\frac{1}{1-q^{2r-1}}$$

$$=\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n}}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1-q^{2n}}{(1-q^{2n-2r+1})(1-q^{2r-1})}$$

$$=\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n}}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1-q^{2n-2r+1}+q^{2n-2r+1}-q^{2n}+q^{2n}-q^{2r-1}+q^{2r-1}-q^{2n}}{(1-q^{2n-2r+1})(1-q^{2r-1})}$$

$$=\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n}}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{(1-q^{2n-2r+1})+q^{2r-1}(1-q^{2n-2r+1})-q^{2r-1}(1-q^{2n-2r+1})+q^{2n-2r+1}(1-q^{2r-1})}{(1-q^{2n-2r+1})(1-q^{2r-1})}$$

$$=\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n}}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{(1-q^{2n-2r+1})(1-q^{2r-1})+q^{2r-1}(1-q^{2n-2r+1})+q^{2n-2r+1}(1-q^{2r-1})}{(1-q^{2n-2r+1})(1-q^{2r-1})}$$

$$=\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n}}\sum_{r=1}^{r=n}\left(1+\frac{q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}}+\frac{q^{2n-2r+1}}{1-q^{2n-2r+1}}\right)$$

$$=\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n}}\left\{n+\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots+\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}+\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}+\frac{q^{2n-3}}{1-q^{2n-3}}+\cdots+\frac{q}{1-q}\right\}$$

$$=\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n}}\left\{n+2\left(\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots+\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right)\right\}.$$

Subtrahiert man nun von dem Werte der endlichen Summe den Wert der unendlichen Summe, so ergiebt sich:

$$\frac{q^{n-1}}{1-q^{2n}}\left\{n+2\left(\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots+\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right)\right\}$$
$$-\frac{2q^{n-1}}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots+\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right\}.$$

woraus sich ohne weiteres als Wert des Faktors von $\sin^2 nx$ der einfache Ausdruck ergiebt:

$$\frac{nq^{n-1}}{1-q^{2n}}.$$

Als Wert für $\left[\frac{\varphi(x)}{Q}\right]^2$ stellt sich demnach heraus:

$$\left[\frac{\varphi(x)}{Q}\right]^2=(\sqrt{q})^2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^{n-1}}{1-q^{2n}}\sin^2 nx.$$

Wird in diese Gleichung der oben in Gleichung (41) festgelegte Wert

$$Q=\frac{2\pi}{\varkappa K}$$

eingesetzt, so folgt:

$$\varphi^2(x)=\frac{4\pi^2}{\varkappa^2K^2}\cdot q\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^{n-1}}{1-q^{2n}}\sin^2 nx=\frac{4\pi^2}{\varkappa^2K^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\sin^2 nx.$$

Da
$$1-2\sin^2 nx=\cos 2nx,\quad \text{folglich}$$
$$\sin^2 nx=\frac{1}{2}(1-\cos 2nx),$$

so ist auch

$$\varphi^2(x)=\frac{2\pi^2}{\varkappa^2K^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}(1-\cos 2nx).$$

Setzt man nun wieder

$$\varphi(x)=\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi},$$

so erhält man:

$$\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\frac{2\pi^2}{\varkappa^2K^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}(1-\cos 2nx)$$

und wird $\frac{2Kx}{\pi}=u$, mithin $x=\frac{\pi u}{2K}$ gesetzt:

$$\sin^2\operatorname{am} u=\frac{2\pi^2}{\varkappa^2K^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\left(1-\cos\frac{n\pi u}{K}\right)$$

$$\sin^2\operatorname{am} u=\frac{\pi^2}{\varkappa^2K^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{2nq^n}{1-q^{2n}}-\frac{2nq^n}{1-q^{2n}}\cos\frac{n\pi u}{K}\right).$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{nq^n}{1-q^{2n}}=C,$$

so ist:

$$\sin^2 \mathrm{am}\, u = \frac{\pi^2}{\varkappa^2 K^2} \left\{ C - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n q^n}{1 - q^{2n}} \cos \frac{n \pi u}{K} \right\}.$$

Aus diesem Werte für $\sin^2 \mathrm{am}\, u$ folgt:

$$1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, u = 1 - \frac{\pi^2}{K^2} \left\{ C - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n q^n}{1 - q^{2n}} \cos \frac{n \pi u}{K} \right\}.$$

Nun ist die erste elliptische Transcendente:

$$E(u) = \int_0^u (1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, u)\, du,$$

mithin ergiebt sich:

$$E(u) = \int_0^u \left[1 - \frac{\pi^2}{K^2} \left\{ C - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n q^n}{1 - q^{2n}} \cos \frac{n \pi u}{K} \right\} \right] du$$

und durch Ausführung der Integration:

$$E(u) = \left[u - \frac{\pi^2}{K^2} C u + \frac{2\pi^2}{K^2} \cdot \frac{K}{n\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n q^n}{1 - q^{2n}} \sin \frac{n \pi u}{K} \right]_0^u$$

(43) $$E(u) = \left(1 - \frac{\pi^2}{K^2} C \right) u + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \sin \frac{n \pi u}{K}.$$

Setzt man wieder

$$C = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n q^n}{1 - q^{2n}}$$

so folgt:

(44) $$E(u) = \left[1 - 2 \frac{\pi^2}{K^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n q^n}{1 - q^{2n}} \right] u + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \sin \frac{n \pi u}{K},$$

wodurch die Reihenentwicklung der ersten elliptischen Transcendenten bewerkstelligt ist.

Setzt man in der Reihe für $E(u)$ $u = K$, so erhält man die Reihenentwicklung für das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung $E(K)$ oder E, und zwar erhält man, da für $u = K$ der unter dem zweiten Summenzeichen stehende Ausdruck verschwindet:

$$E = \left[1 - 2 \frac{\pi^2}{K^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n q^n}{1 - q^{2n}} \right] K,$$

folglich

$$\frac{E}{K} = 1 - 2 \left(\frac{\pi}{K} \right)^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n q^n}{1 - q^{2n}}.$$

Setzt man also E als bekannt voraus, so kann man auch die Reihenentwicklung für $E(u)$ schreiben:

$$E(u) = \frac{E}{K} \cdot u + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \sin \frac{n \pi u}{K},$$

oder, wenn man mit Jacobi setzt:

(45)
$$Z(u) = \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{K},$$

so ist zu schreiben:

(46)
$$E(u) = \frac{E}{K} \cdot u + Z(u).$$

Um endlich das elliptische Integral dritter Gattung in eine Reihe zu entwickeln, geht man von der Erklärung desselben aus:

(47)
$$\Pi(u, a) = \int_0^u \frac{\varkappa^2 \sin \mathrm{am}\, a \,.\, \cos \mathrm{am}\, a \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u\, du}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u}.$$

Differenziert man diese Gleichung zweimal nach u, so wird man, wie Jacobi gezeigt hat, auf Ausdrücke geführt, für welche bereits Reihenentwicklungen bekannt sind.

Aus der obigen Gleichung (47) folgt:

$$\frac{d\Pi(u, a)}{du} = \frac{\varkappa^2 \sin \mathrm{am}\, a \,.\, \cos \mathrm{am}\, a \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u}$$

$$\frac{d^2\Pi(u, a)}{du^2} = \left\{\frac{1}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u}\right\}^2 .$$

$$\cdot \Big\{ 2\varkappa^2 (1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u) \sin \mathrm{am}\, a \,.\, \cos \mathrm{am}\, a \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, a \,.\, \sin \mathrm{am}\, u \,.\, \cos \mathrm{am}\, u \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, u$$
$$+ 2\varkappa^4 \sin^3 \mathrm{am}\, a \,.\, \cos \mathrm{am}\, a \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^3 \mathrm{am}\, u \,.\, \cos \mathrm{am}\, u \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, u \Big\}$$

$$= \frac{2\varkappa^2 \sin \mathrm{am}\, a \,.\, \cos \mathrm{am}\, a \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, a \,.\, \sin \mathrm{am}\, u \,.\, \cos \mathrm{am}\, u \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, u}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u}$$
$$+ \frac{2\varkappa^4 \sin^3 \mathrm{am}\, a \,.\, \cos \mathrm{am}\, a \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^3 \mathrm{am}\, u \,.\, \cos \mathrm{am}\, u \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, u}{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u)^2}$$

$$= \frac{2\varkappa^2 \sin \mathrm{am}\, a \,.\, \cos \mathrm{am}\, u \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, u}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u} \Big\{ \sin \mathrm{am}\, u \,.\, \cos \mathrm{am}\, a \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, a$$
$$+ \frac{\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \cos \mathrm{am}\, a \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^3 \mathrm{am}\, u}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u} \Big\}$$

$$= \frac{2\varkappa^2 \sin \mathrm{am}\, a \,.\, \cos \mathrm{am}\, u \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, u}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u} \cdot \frac{\sin \mathrm{am}\, u \,.\, \cos \mathrm{am}\, a \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, a}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u}.$$

Nach dem Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung [Gleichung (19)] ist:

$$\sin \mathrm{am}\,(u + a) = \frac{\sin \mathrm{am}\, u \,.\, \cos \mathrm{am}\, a \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, a + \sin \mathrm{am}\, a \,.\, \cos \mathrm{am}\, u \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, u}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u}$$

$$\sin \mathrm{am}\,(u - a) = \frac{\sin \mathrm{am}\, u \,.\, \cos \mathrm{am}\, a \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, a - \sin \mathrm{am}\, a \,.\, \cos \mathrm{am}\, u \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, u}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u}.$$

Durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$\sin \mathrm{am}\,(u + a) + \sin \mathrm{am}\,(u - a) = \frac{2 \sin \mathrm{am}\, u \,.\, \cos \mathrm{am}\, a \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, a}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u}$$

$$\sin \mathrm{am}\,(u + a) - \sin \mathrm{am}\,(u - a) = \frac{2 \sin \mathrm{am}\, a \,.\, \cos \mathrm{am}\, u \,.\, \varDelta \mathrm{am}\, u}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\, u}.$$

Mit Benutzung dieser Werte erhält man:

$$\frac{d^2\Pi(u, a)}{du^2} = \frac{1}{2}\varkappa^2 \Big\{\sin \mathrm{am}\,(u + a) - \sin \mathrm{am}\,(u - a)\Big\}\Big\{\sin \mathrm{am}\,(u + a) + \sin \mathrm{am}\,(u - a)\Big\}.$$

(48)
$$\frac{d^2\Pi(u, a)}{du^2} = \frac{1}{2}\varkappa^2 \Big\{\sin^2 \mathrm{am}\,(u + a) - \sin^2 \mathrm{am}\,(u - a)\Big\}.$$

Bei der Reihenentwicklung der ersten elliptischen Transcendenten $E(u)$ ist hergeleitet:

$$\varphi^2(x) = \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \left(\frac{2\pi}{\varkappa K}\right)^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \sin^2 nx,$$

hieraus ergiebt sich, wenn aus der Substitutionsgleichung:

$$u = \frac{2Kx}{\pi}$$

der Wert

$$x = \frac{\pi u}{2K}$$

in diese Gleichung eingesetzt wird:

$$\sin^2 \operatorname{am} u = \left(\frac{2\pi}{\varkappa K}\right)^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \sin^2 \frac{n\pi u}{2K}.$$

Wird in diese letzte Gleichung statt u einmal $u+a$, das andere Mal $u-a$ gesetzt, so ergiebt sich ohne weiteres als Wert für $\frac{d^2 \Pi(u,a)}{du^2}$ der folgende:

$$\frac{d^2 \Pi(u,a)}{du^2} = \frac{1}{2}\varkappa^2 \left(\frac{2\pi}{\varkappa K}\right)^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \left(\sin^2 \operatorname{am} \frac{n\pi(u+a)}{2K} - \sin^2 \operatorname{am} \frac{n\pi(u-a)}{2K}\right).$$

Führt man hier wieder, wie oben auch geschehen, an Stelle des Quadrats des Sinus den Kosinus des doppelten Winkels ein, indem man wieder von der Formel Gebrauch macht:

$$\sin^2 y = \frac{1}{2}(1 - \cos 2y),$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \Pi(u,a)}{du^2} &= 2\left(\frac{\pi}{K}\right)^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \left\{\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{n\pi(u+a)}{K}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{n\pi(u-a)}{K}\right)\right\} \\ &= 2\left(\frac{\pi}{K}\right)^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{n\pi(u+a)}{K} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{n\pi(u-a)}{K}\right\} \\ &= \left(\frac{\pi}{K}\right)^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \left\{\cos\frac{n\pi(u-a)}{K} - \cos\frac{n\pi(u+a)}{K}\right\}.\end{aligned}$$

Integriert man diese Gleichung zwischen den Grenzen 0 und u, so erhält man, da

$$\frac{d\Pi(u,a)}{du} = \frac{\varkappa^2 \sin \operatorname{am} a \,.\, \cos \operatorname{am} a \,.\, \Delta \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u}$$

für $u = 0$ verschwindet:

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi(u,a)}{du} &= \left(\frac{\pi}{K}\right)^2 \left[\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cdot \frac{K}{n\pi} \left\{\sin\frac{n\pi(u-a)}{K} - \sin\frac{n\pi(u+a)}{K}\right\}\right]_0^u \\ &= \frac{\pi}{K} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \left\{\sin\frac{n\pi(u-a)}{K} - \sin\frac{n\pi(u+a)}{K}\right\} \\ &\quad + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin\frac{n\pi a}{K}.\end{aligned}$$

Wird diese Gleichung nun noch einmal zwischen den Grenzen 0 und u integriert, so ergiebt sich schliesslich:

$$\Pi(u,a) = \frac{\pi}{K}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left[\left\{-\frac{K}{n\pi}\cos\frac{n\pi(u-a)}{K}+\frac{K}{n\pi}\cos\frac{n\pi(u+a)}{K}\right\}\right]_0^u$$

$$+\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left[u\sin\frac{n\pi a}{K}\right]_0^u$$

$$=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\left(\cos\frac{n\pi(u+a)}{K}-\cos\frac{n\pi(u-a)}{K}\right)+\frac{2\pi}{K}u\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\sin\frac{n\pi a}{K}.$$

Ersetzt man die Differenz der beiden Kosinus durch das doppelte Produkt des Sinus der halben Summe und des Sinus der halben Differenz, so wird:

$$\Pi(u,a) = \frac{2\pi}{K}\cdot u\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\sin\frac{n\pi a}{K} - 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\sin\frac{n\pi u}{K}\cdot\sin\frac{n\pi a}{K},$$

oder endlich, wenn man sich der von Jacobi eingeführten Funktionsbezeichnung Z bedient:

$$\Pi(u,a) = uZ(a) - 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\sin\frac{n\pi u}{K}\cdot\sin\frac{n\pi a}{K}. \tag{49}$$

Diese Reihenentwicklung für die zweite elliptische Transcendente $\Pi(u,a)$ gestattet auch das elliptische Integral dritter Gattung durch den Logarithmus eines unendlichen Produktes auszudrücken und damit die Funktion einzuführen, welche von Jacobi mit ϑ bezeichnet wurde und nach Dirichlet's Vorschlag die Jacobi'sche Funktion genannt ist.

Bekanntlich ist:

$$\frac{q^n}{1-q^{2n}} = q^n + q^{3n} + q^{5n} + q^{7n} + \cdots\cdots$$

folglich

$$\frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\cos nx = \frac{q^n}{n}\cos nx + \frac{q^{3n}}{n}\cos nx + \frac{q^{5n}}{n}\cos nx + \cdots\cdots$$

und mithin:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\cos nx = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{q^n}{n}\cos nx + \frac{q^{3n}}{n}\cos nx + \frac{q^{5n}}{n}\cos nx + \cdots\cdots\right\}.$$

Führt man hier für den Kosinus die Exponentialfunktion ein, so erhält man:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\cos nx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{q^n}{n}(e^{nxi}+e^{-nxi}) + \frac{q^{3n}}{n}(e^{nxi}+e^{-nxi}) + \cdots\cdots\right\}.$$

Da aber für

$$-1 < z < 1$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{z^n}{n} = \frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots = \log\left(\frac{1}{1-z}\right) = -\log(1-z),$$

so ist auch, da

$$0 < q < 1$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{n(1-q^{2n})} \cos nx = -\frac{1}{2}\left[\{\log(1-qe^{xi}) + \log(1-qe^{-xi})\}\right.$$

$$\left. + \{\log(1-q^3e^{xi}) + \log(1-q^3e^{-xi})\} + \{\log(1-q^5e^{xi}) + \log(1-q^5e^{-xi}) + \cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\{\log(1-qe^{xi})(1-qe^{-xi}) + \log(1-q^3e^{xi})(1-q^3e^{-xi}) + \log(1-q^5e^{xi})(1-q^5e^{-xi}) + \cdots\}$$

$$= -\frac{1}{2}\{\log[1-q(e^{xi}+e^{-xi})+q^2] + \log[1-q^3(e^{xi}+e^{-xi})+q^6]$$

$$+ \log[1-q^5(e^{xi}+e^{-xi})+q^{10}] + \cdots\cdots\}$$

$$= -\frac{1}{2}\{\log(1-2q\cos x+q^2) + \log(1-2q^3\cos x+q^6) + \log(1-2q^5\cos x+q^{10}) + \cdots\}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=\infty} \log(1-2q^{2r-1}\cos x + q^{4r-2})$$

$$= -\frac{1}{2}\log\prod_{r=1}^{r=\infty}(1-2q^{2r-1}\cos x + q^{4r-2}).$$

Setzt man in dieser Gleichung einmal $x = \frac{\pi(u+a)}{K}$ und dann $x = \frac{\pi(u-a)}{K}$, so erhält man:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{n(1-q^{2n})} \cos\frac{n\pi(u+a)}{K} = -\frac{1}{2}\log\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(1-2q^{2r-1}\cos\frac{\pi(u+a)}{K} + q^{4r-2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n}{n(1-q^{2n})} \cos\frac{n\pi(u-a)}{K} = -\frac{1}{2}\log\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(1-2q^{2r-1}\cos\frac{\pi(u-a)}{K} + q^{4r-2}\right)$$

und folglich ist:

$$\Pi(u,a) = uZ(a) - \frac{1}{2}\log\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(1-2q^{2r-1}\cos\frac{\pi(u+a)}{K} + q^{4r-2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\log\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(1-2q^{2r-1}\cos\frac{\pi(u-a)}{K} + q^{4r-2}\right)$$

$$= uZ(a) + \frac{1}{2}\log\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1-2q^{2r-1}\cos\frac{\pi(u-a)}{K} + q^{4r-2}}{1-2q^{2r-1}\cos\frac{\pi(u+a)}{K} + q^{4r-2}}.$$

Diese Entwicklung macht es möglich $\Pi(u,a)$ durch die von Jacobi eingeführte Funktion:

$$\vartheta(u) = 1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + 2q^{16}\cos\frac{4\pi u}{K} - \cdots\cdot$$

$$= \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-q^{2r})\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(1-2q^{2r-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4r-2}\right)$$

auszudrücken.

Denn ersetzt man einmal u durch $u-a$ und dann durch $u+a$, so erhält man:

$$\vartheta(u-a) = 1 - 2q\cos\frac{\pi(u-a)}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi(u-a)}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi(u-a)}{K} + 2q^{16}\cos\frac{4\pi(u-a)}{K} - \ldots$$

$$= \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-q^{2r})\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(1 - 2q^{2r-1}\cos\frac{\pi(u-a)}{K} + q^{4r-2}\right)$$

$$\vartheta(u+a) = 1 - 2q\cos\frac{\pi(u+a)}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi(u+a)}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi(u+a)}{K} + 2q^{16}\cos\frac{4\pi(u+a)}{K} - \ldots$$

$$= \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-q^{2r})\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(1 - 2q^{2r-1}\cos\frac{\pi(u+a)}{K} + q^{4r-2}\right)$$

und diese Werte von $\vartheta(u-a)$ und $\vartheta(u+a)$ lehren auf der Stelle, dafs:

$$\Pi(u,a) = uZ(a) + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)}. \tag{50}$$

Dieser Ausdruck für die Transcendente Π durch die Funktion ϑ ermöglicht es nun zu zeigen, dafs von den vier aufgestellten Gleichungen, welche den Zusammenhang zwischen dem elliptischen Integral dritter Gattung nach Legendre und der Jacobi'schen Transcendenten darstellen, sich der dritte Fall auf den ersten und der vierte Fall auf den zweiten zurückführen läfst, wenn man die Funktionen Z und ϑ auch für imaginäre Argumente kennt.

Nach der Untersuchung von Jacobi bestehen folgende Beziehungen, welche wir weiter unten noch begründen werden:

$$Z(u+K'i) = -\frac{\pi i}{2K} + \frac{\cos\operatorname{am} u \,.\, \Delta\operatorname{am} u}{\sin\operatorname{am} u} + Z(u)$$

$$\vartheta(u+K'i) = \frac{i\sqrt{\varkappa}}{\sqrt[4]{q}}\,e^{-\frac{\pi i u}{2K}}\sin\operatorname{am} u\,.\,\vartheta(u).$$

Für den Fall, dafs in der Form von Legendre für das elliptische Integral dritter Gattung:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}$$

n zwischen -1 und $-\infty$ liegt, ist der Jacobi'sche Parameter $a+K'i$, so dafs

$$n = -\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(a+K'i).$$

Für diesen Fall ist daher nach Gleichung (50):

$$\Pi(u, a+K'i) = uZ(a+K'i) + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a-K'i)}{\vartheta(u+a+K'i)}.$$

Aus den oben angegebenen Beziehungen erkennen wir sofort, dafs:

$$Z(a+K'i) = -\frac{\pi i}{2K} + \frac{\cos\operatorname{am} a\,.\,\Delta\operatorname{am} a}{\sin\operatorname{am} a} + Z(a)$$

und aus der für $\vartheta(u+K'i)$ angegebenen Relation finden wir, wenn u durch $u+a$ ersetzt wird:

$$\vartheta(u+a+K'i)=\frac{i\sqrt{\varkappa}}{\sqrt[4]{q}}e^{-\frac{\pi i(u+a)}{2K}}\sin\operatorname{am}(u+a)\,.\,\vartheta(u+a).$$

Berücksichtigen wir weiter, dafs, wie sich aus der den Wert von $\vartheta(u)$ ausdrückenden Reihe:

$$(51)\qquad \vartheta(u)=1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}-2q^9\cos\frac{3\pi u}{K}+\cdots$$

sofort ergiebt, $\vartheta(u)$ eine gerade Funktion d. h.

$$\vartheta(-u)=\vartheta(u)$$

ist, so erhellt, dafs

$$\vartheta(u-a-K'i)=\vartheta[-(a-u+K'i)]=\vartheta(a-u+K'i).$$

Ersetzen wir also in der für $\vartheta(u+K'i)$ aufgestellten Gleichung u durch $a-u$, so ergiebt sich:

$$\vartheta(u-a-K'i)=\vartheta(a-u+K'i)=\frac{i\sqrt{\varkappa}}{\sqrt[4]{q}}e^{-\frac{\pi i(a-u)}{2K}}\sin\operatorname{am}(a-u)\,.\,\vartheta(a-u).$$

Folglich ist:

$$\frac{\vartheta(u-a-K'i)}{\vartheta(u+a+K'i)}=\frac{e^{-\frac{\pi i(a-u)}{2K}}\sin\operatorname{am}(a-u)\,.\,\vartheta(a-u)}{e^{-\frac{\pi i(a+u)}{2K}}\sin\operatorname{am}(a+u)\,.\,\vartheta(a+u)}$$

$$=e^{\frac{\pi i u}{K}}\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)\,.\,\vartheta(a-u)}{\sin\operatorname{am}(a+u)\,.\,\vartheta(a+u)}.$$

Setzen wir diesen Werth und ebenso den für $Z(a+K'i)$ aufgestellten Wert in die Gleichung für $\Pi(u,a+K'i)$ ein, so erhalten wir:

$$\Pi(u,a+K'i)=-\frac{\pi i u}{2K}+u\cdot\frac{\cos\operatorname{am}a\,.\,\Delta\operatorname{am}a}{\sin\operatorname{am}a}+uZ(a)+\frac{1}{2}\log\left[e^{\frac{\pi i u}{K}}\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)\,.\,\vartheta(a-u)}{\sin\operatorname{am}(a+u)\,.\,\vartheta(a+u)}\right]$$

$$=-\frac{\pi i u}{K}+u\frac{\cos\operatorname{am}a\,.\,\Delta\operatorname{am}a}{\sin\operatorname{am}a}+uZ(a)+\frac{\pi i u}{2K}+\frac{1}{2}\log\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)}{\sin\operatorname{am}(a+u)}+\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(a-u)}{\vartheta(a+u)}$$

$$=uZ(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(a-u)}{\vartheta(a+u)}+u\frac{\cos\operatorname{am}a\,.\,\Delta\operatorname{am}a}{\sin\operatorname{am}a}+\frac{1}{2}\log\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)}{\sin\operatorname{am}(a+u)}.$$

Da

$$\vartheta(a-u)=\vartheta(u-a)$$

so ist:

$$\Pi(u,a+K'i)=uZ(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)}+u\frac{\cos\operatorname{am}a\,.\,\Delta\operatorname{am}a}{\sin\operatorname{am}a}+\frac{1}{2}\log\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)}{\sin\operatorname{am}(a+u)}.$$

Da aber nach (50)

$$uZ(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)}=\Pi(u,a),$$

so erhalten wir schliefslich:

$$(52)\qquad \Pi(u,a+K'i)=\Pi(u,a)+u\frac{\cos\operatorname{am}a\,.\,\Delta\operatorname{am}a}{\sin\operatorname{am}a}+\frac{1}{2}\log\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)}{\sin\operatorname{am}(a+u)}.$$

Diese Formel zeigt, dafs der von uns als der dritte bezeichnete Fall sich auf den ersten zurückführen läfst.

Wenn also in einem elliptischen Integrale dritter Gattung der Legendre'sche Parameter negativ und grösser als 1 ist, so läfst sich dieses Integral stets auf ein solches reduzieren, in welchem der Parameter negativ und kleiner als $-\varkappa^2$ ist.

Um den vierten Fall, in welchem der Parameter rein imaginär ist, zu reduzieren, müssen wir vorher die Funktion $\Pi(u, a+K)$ untersuchen.

Setzen wir in der Grundformel (50) $a+K$ statt a, so ergiebt sich:

$$\Pi(u, a+K) = uZ(a+K) + \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta(u-a-K)}{\vartheta(u+a+K)}.$$

Zur Herleitung eines durch elliptische Funktionen und die Funktion $Z(a)$ ausgedrückten Wertes für $Z(a+K)$ gehen wir von der früher hergeleiteten Gleichung (48) aus:

$$\frac{d^2 \Pi(u,a)}{du^2} = \frac{1}{2} \varkappa^2 \{\sin^2 \operatorname{am}(u+a) - \sin^2 \operatorname{am}(u-a)\}$$

und führen für den Sinus die Funktion Δ ein.

Da nach der Erklärung der Funktion Δ

$$\Delta^2 \operatorname{am} x = 1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x,$$

so folgt:

$$\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x = 1 - \Delta^2 \operatorname{am} x.$$

Also ist

$$\frac{1}{2}\varkappa^2 \{\sin^2 \operatorname{am}(u+a) - \sin^2 \operatorname{am}(u-a)\} = \frac{1}{2}\{1 - \Delta^2 \operatorname{am}(u+a)\} - \frac{1}{2}\{1 - \Delta^2 \operatorname{am}(u-a)\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Delta^2 \operatorname{am}(u+a) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Delta^2 \operatorname{am}(u-a) = \frac{1}{2}\{\Delta^2 \operatorname{am}(u-a) - \Delta^2 \operatorname{am}(u+a)\}.$$

Diesen Wert in die obige Gleichung eingesetzt, ergiebt:

$$\frac{d^2 \Pi(u,a)}{du^2} = \frac{1}{2}\{\Delta^2 \operatorname{am}(u-a) - \Delta^2 \operatorname{am}(u+a)\}.$$

Integrieren wir diese Gleichung zwischen den Grenzen 0 und u, so erhalten wir:

$$\frac{d\,\Pi(u,a)}{du} = \frac{1}{2}\int_0^u \Delta^2 \operatorname{am}(u-a)\,du - \frac{1}{2}\int_0^u \Delta^2 \operatorname{am}(u+a)\,du.$$

Nun ist nach der Erklärung der ersten elliptischen Transcendenten:

$$\int_0^v \Delta^2 \operatorname{am} v\,dv = E(v).$$

Setzen wir in dem ersten der obigen Integrale $u - a = v$, so ist:

$$\int_0^u \Delta^2 \operatorname{am}(u-a)\,du = \int_{-a}^{u-a} \Delta^2 \operatorname{am} v\,dv = \int_0^{u-a} \Delta^2 \operatorname{am} v\,dv + \int_{-a}^{0} \Delta^2 \operatorname{am} v\,dv$$

$$= \int_0^{u-a} \Delta^2 \operatorname{am} v\,dv - \int_0^{-a} \Delta^2 \operatorname{am} v\,dv$$

oder, da allgemein $\int_0^{-v} f(y^2)\,dy = -\int_0^v f(y^2)\,dy$

$$\int_0^u \Delta^2 \operatorname{am}(u-a)\,du = \int_0^{u-a} \Delta^2 \operatorname{am} v\,dv + \int_0^a \Delta^2 \operatorname{am} v\,dv$$

$$= E(u-a) + E(a).$$

Setzen wir in dem zweiten der obigen Integrale $u + a = v$, so ist

$$\int_0^u \Delta^2 \operatorname{am}(u+a)\,du = \int_a^{u+a} \Delta^2 \operatorname{am} v\,dv = \int_0^{u+a} \Delta^2 \operatorname{am} v\,dv - \int_0^a \Delta^2 \operatorname{am} v\,dv$$
$$= E(u+a) - E(a).$$

Demnach ist:

$$\frac{d\Pi(u,a)}{du} = \frac{1}{2}\{E(u-a)+E(a)\} - \frac{1}{2}\{E(u+a)-E(a)\}$$
$$= \frac{1}{2}E(u-a) + \frac{1}{2}E(a) - \frac{1}{2}E(u+a) + \frac{1}{2}E(a)$$
$$= E(a) + \frac{1}{2}E(u-a) - \frac{1}{2}E(u+a).$$

Nun ist nach Gleichung (46):

$$E(a) = \frac{E}{K}\cdot a + Z(a)$$
$$E(u-a) = \frac{E}{K}(u-a) + Z(u-a)$$
$$E(u+a) = \frac{E}{K}(u+a) + Z(u+a).$$

Mithin:

$$\frac{d\Pi(u,a)}{du} = \frac{E}{K}\cdot a + Z(a) + \frac{1}{2}\frac{E}{K}\cdot(u-a) + \frac{1}{2}Z(u-a) - \frac{1}{2}\frac{E}{K}(u+a) - \frac{1}{2}Z(u+a)$$
$$= \frac{E}{K}\cdot a + Z(a) + \frac{1}{2}\frac{E}{K}\cdot u - \frac{1}{2}\frac{E}{K}\cdot a + \frac{1}{2}Z(u-a) - \frac{1}{2}\frac{E}{K}\cdot u - \frac{1}{2}\frac{E}{K}\cdot a - \frac{1}{2}Z(u+a).$$

$$\frac{d\Pi(u,a)}{du} = Z(a) + \frac{1}{2}Z(u-a) - \frac{1}{2}Z(u+a). \tag{52}$$

Da andererseits, wie sich ohne weiteres aus der zuerst eingeführten Erklärung für $\Pi(u,a)$ ergiebt:

$$\frac{d\Pi(u,a)}{du} = \frac{\varkappa^2 \sin\operatorname{am} a\,.\,\cos\operatorname{am} a\,.\,\Delta\operatorname{am} a\,.\,\sin^2\operatorname{am} u}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am} a\,.\,\sin^2\operatorname{am} u},$$

so erhalten wir durch die Gleichsetzung der beiden Werte von $\frac{d\Pi(u,a)}{du}$

$$\frac{\varkappa^2 \sin\operatorname{am} a\,.\,\cos\operatorname{am} a\,.\,\Delta\operatorname{am} a\,.\,\sin^2\operatorname{am} u}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am} a\,.\,\sin^2\operatorname{am} u} = Z(a) + \frac{1}{2}Z(u-a) - \frac{1}{2}Z(u+a). \tag{53}$$

Vertauschen wir in dieser Gleichung u mit a, so ist:

$$\frac{\varkappa^2 \sin\operatorname{am} u\,.\,\cos\operatorname{am} u\,.\,\Delta\operatorname{am} u\,.\,\sin^2\operatorname{am} a}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am} a\,.\,\sin^2\operatorname{am} u} = Z(u) + \frac{1}{2}Z(a-u) - \frac{1}{2}Z(u+a).$$

Da, wie aus der Definitionsgleichung (45) für Z hervorgeht, Z eine ungerade Funktion, also

$$Z(a-u) = -Z(u-a)$$

ist, so folgt:

$$\frac{\varkappa^2 \sin\operatorname{am} u\,.\,\cos\operatorname{am} u\,.\,\Delta\operatorname{am} u\,.\,\sin^2\operatorname{am} a}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am} a\,.\,\sin^2\operatorname{am} u} = Z(u) - \frac{1}{2}Z(u-a) - \frac{1}{2}Z(u+a). \tag{54}$$

Durch Addition von (53) und (54) erhalten wir also:

$$Z(u)+Z(a)-Z(u+a) = \varkappa^2\sin\operatorname{am} u\,.\,\sin\operatorname{am} a\cdot\frac{\sin\operatorname{am} u\,.\,\cos\operatorname{am} a\,.\,\Delta\operatorname{am} a + \sin\operatorname{am} a\,.\,\cos\operatorname{am} u\,.\,\Delta\operatorname{am} u}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am} a\,.\,\sin^2\operatorname{am} u}$$

oder mit Berücksichtigung des Additionstheorems der elliptischen Funktionen:

(55) $$Z(u) + Z(a) - Z(u+a) = \varkappa^2 \sin\mathrm{am}\, u \,.\, \sin\mathrm{am}\, a \,.\, \sin\mathrm{am}\,(u+a).$$

Diese Gleichung drückt das Additionstheorem der Funktion Z aus.

Setzen wir in dieser Gleichung (55) $a = K$ und berücksichtigen, dafs aus der Definitionsgleichung (45) ohne weiteres folgt:

$$Z(K) = 0,$$

so erhalten wir:

(56) $$Z(u) - Z(u+K) = \varkappa^2 \sin\mathrm{am}\, u \,.\, \sin\mathrm{am}\,(u+K).$$

Hiermit haben wir das erforderliche Material zusammengetragen, um $Z(a+K)$ in der gewünschten Weise auszudrücken. Denn setzen wir in der letzten Gleichung $u = a$ und lösen die erhaltene Gleichung nach $Z(a+K)$ auf, so erhalten wir:

$$Z(a+K) = -\varkappa^2 \sin\mathrm{am}\, a \cdot \sin\mathrm{am}\,(a+K) + Z(a)$$

oder, da nach (11) $\sin\mathrm{am}\,(a+K) = \frac{\cos\mathrm{am}\, a}{\Delta\mathrm{am}\, a}$

a) $$Z(a+K) = -\frac{\varkappa^2 \sin\mathrm{am}\, a \,.\, \cos\mathrm{am}\, a}{\Delta\mathrm{am}\, a} + Z(a).$$

Es erübrigt noch den Wert von $\log \frac{\vartheta(u-a-K)}{\vartheta(u+a+K)}$ umzuformen. Zu diesem Zwecke gehen wir von der bei der Umformung von $Z(a+K)$ gefundenen Formel (52):

$$\frac{d\,\Pi(u,a)}{du} = Z(a) + \tfrac{1}{2} Z(u-a) - \tfrac{1}{2} Z(u+a)$$

aus und integrieren diese zwischen den Grenzen 0 und u, wodurch wir erhalten:

$$\Pi(u,a) = u\,Z(a) + \frac{1}{2}\int_0^u Z(u-a)\,du - \frac{1}{2}\int_0^u Z(u+a)\,du.$$

Vergleichen wir diese Formel mit der Gleichung (50)

$$\Pi(u,a) = u\,Z(a) + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)},$$

so erhalten wir:

$$\log\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)} = \int_0^u Z(u-a)\,du - \int_0^u Z(u+a)\,du$$

oder

$$\log\frac{\vartheta(u+a)}{\vartheta(u-a)} = \int_0^u Z(u+a)\,du - \int_0^u Z(u-a)\,du.$$

Setzen wir in dem ersten Integrale $u + a = w$, so ist:

$$\int_0^u Z(u+a)\,du = \int_a^{u+a} Z(w)\,dw = \int_0^{u+a} Z(w)\,dw - \int_0^a Z(w)\,dw.$$

Setzen wir in dem zweiten Integrale $u - a = w$, so ist:

$$\int_0^u Z(u-a)\,du = \int_{-a}^{u-a} Z(w)\,dw = \int_0^{u-a} Z(w)\,dw + \int_{-a}^0 Z(w)\,dw$$

$$= \int_0^{u-a} Z(w)\,dw - \int_0^a Z(w)\,dw = \int_0^{u-a} Z(w)\,dw + \int_0^a Z(-w)\,dw$$

und, da die Funktion Z eine ungerade, also $Z(-w) = -Z(w)$

$$\int_0^u Z(u-a)\,du = \int_0^{u-a} Z(w)\,dw - \int_0^a Z(w)\,dw.$$

Setzen wir die für die beiden Integrale gefundenen Werte ein, so ergiebt sich:

$$\log\frac{\vartheta(u+a)}{\vartheta(u-a)} = \int_0^{u+a} Z(w)\,dw - \int_0^a Z(w)\,dw - \int_0^{u-a} Z(w)\,dw + \int_0^a Z(w)\,dw$$

oder:

$$\log\frac{\vartheta(u+a)}{\vartheta(u-a)} = \int_0^{u+a} Z(w)\,dw - \int_0^{u-a} Z(w)\,dw.$$

Setzen wir $a = u$, so folgt:

$$\log\frac{\vartheta(2u)}{\vartheta(0)} = \int_0^{2u} Z(w)\,dw$$

oder, wenn wir $2u = v$ setzen:

(57)
$$\log\frac{\vartheta(v)}{\vartheta(0)} = \int_0^{v} Z(w)\,dw.$$

Nachdem auf diese Weise der Zusammenhang zwischen der ϑ- und Z-Funktion hergestellt ist, benutzen wir die oben gefundene Gleichung (56):

$$Z(u) - Z(u+K) = \varkappa^2 \sin\operatorname{am} u \,.\, \sin\operatorname{am}(u+K)$$

oder, da nach (11) $\sin\operatorname{am}(u+K) = \dfrac{\cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}$

$$Z(u) - Z(u+K) = \frac{\varkappa^2 \sin\operatorname{am} u \,.\, \cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}.$$

Da

$$\frac{d\log\Delta\operatorname{am} u}{du} = \frac{1}{\Delta\operatorname{am} u}\,\frac{d\Delta\operatorname{am} u}{du} = -\frac{\varkappa^2 \sin\operatorname{am} u \,.\, \cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u},$$

so folgt:

$$Z(u) - Z(u+K) = -\frac{d\log\Delta\operatorname{am} u}{du}.$$

Integrieren wir diese Gleichung zwischen 0 und u, so erhalten wir:

(58)
$$\int_0^u Z(u)\,du - \int_0^u Z(u+K)\,du = -\Big[\log\Delta\operatorname{am} u\Big]_0^u.$$

Ganz entsprechend der oben durchgeführten Umformung des Wertes von $\int_0^u Z(u+a)\,du$ ergiebt sich:

$$\int_0^u Z(u+K)\,du = \int_K^{u+K} Z(w)\,dw = \int_0^{u+K} Z(w)\,dw - \int_0^K Z(w)\,dw$$

und mit Berücksichtigung von (57):

$$\int_0^u Z(u+K)\,du = \log\frac{\vartheta(u+K)}{\vartheta(0)} - \log\frac{\vartheta(K)}{\vartheta(0)} = \log\frac{\vartheta(u+K)}{\vartheta(K)}.$$

Infolge dieses Wertes und des aus der Gleichung (57) entspringenden Wertes für das erste Integral der Gleichung (58) geht diese Gleichung über in:

$$\log \frac{\vartheta(u)}{\vartheta(0)} - \log \frac{\vartheta(u+K)}{\vartheta(K)} = -\log \varDelta \operatorname{am} u,$$

denn $\log \varDelta \operatorname{am} 0 = \log 1 = 0$.

Diese letzte Gleichung kann auch geschrieben werden:

$$\log \frac{\vartheta(u+K)}{\vartheta(K)} - \log \frac{\vartheta(u)}{\vartheta(0)} = \log \varDelta \operatorname{am} u,$$

folglich auch:

$$\log \frac{\vartheta(u+K)}{\vartheta(K)} \cdot \frac{\vartheta(0)}{\vartheta(u)} = \log \varDelta \operatorname{am} u$$

und mithin auch:

(59) $$\frac{\vartheta(0) \,.\, \vartheta(u+K)}{\vartheta(K) \,.\, (\vartheta(u))} = \varDelta \operatorname{am} u.$$

Zur Bestimmung von $\frac{\vartheta(0)}{\vartheta(K)}$ setzen wir $u = K$, so dafs wir erhalten:

$$\frac{\vartheta(0) \,.\, \vartheta(2K)}{\vartheta^2(K)} = \varDelta \operatorname{am} K.$$

Aus der Definitionsgleichung (51) für $\vartheta(u)$ folgt:

$$\begin{aligned} \vartheta(u+2K) &= 1 - 2q \cos \frac{\pi}{K}(u+2K) + 2q^4 \cos \frac{2\pi}{K}(u+2K) - 2q^9 \cos \frac{3\pi}{K}(u+2K) + \cdots \\ &= 1 - 2q \cos\left(\frac{\pi u}{K} + 2\pi\right) + 2q^4 \cos\left(\frac{2\pi u}{K} + 4\pi\right) - 2q^9 \cos\left(\frac{3\pi u}{K} + 6\pi\right) + \cdots \\ &= 1 - 2q \cos \frac{\pi u}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi u}{K} - 2q^9 \cos \frac{3\pi u}{K} + \cdots \end{aligned}$$

mithin $$\vartheta(u) = \vartheta(u+2K).$$

Setzen wir in dieser Gleichung $u = 0$, so ergiebt sich:

$$\vartheta(0) = \vartheta(2K).$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichung ergiebt sich:

$$\left(\frac{\vartheta(0)}{\vartheta(K)}\right)^2 = \varDelta \operatorname{am} K,$$

oder, da $\varDelta \operatorname{am} K = \varDelta \frac{\pi}{2} = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \frac{\pi}{2}} = \sqrt{1-\varkappa^2} = \varkappa'$,

$$\frac{\vartheta(0)}{\vartheta(K)} = \sqrt{\varkappa'}.$$

Substituieren wir diesen Wert von $\frac{\vartheta(0)}{\vartheta(K)}$ in Gleichung (59), so finden wir:

(60) $$\sqrt{\varkappa'}\,\frac{\vartheta(u+K)}{\vartheta(u)} = \varDelta \operatorname{am} u$$

$$\vartheta(u+K) = \sqrt{\frac{1}{\varkappa'}}\,\varDelta \operatorname{am} u \,.\, \vartheta(u).$$

Ersetzen wir in der Gleichung einmal u durch $a+u$ und dann durch $a-u$ und beachten bei der letzten Substitution, dafs die ϑ-Funktion eine gerade ist, so erhalten wir:

$$\vartheta(a+u+K)=\vartheta(u+a+K)=\sqrt{\frac{1}{\varkappa'}}\,\Delta\,\mathrm{am}\,(a+u)\,.\,\vartheta(a+u),$$

$$\vartheta(a-u+K)=\vartheta(u-a-K)=\sqrt{\frac{1}{\varkappa'}}\,\Delta\,\mathrm{am}\,(a-u)\,.\,\vartheta(a-u).$$

Folglich ist:

b)
$$\frac{\vartheta(u-a-K)}{\vartheta(u+a+K)}=\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(a-u)}{\Delta\,\mathrm{am}\,(a+u)}\cdot\frac{\vartheta(a-u)}{\vartheta(a+u)}.$$

Setzen wir nun in die oben aufgestellte Gleichung:

$$\Pi(u,a+K)=uZ(a+K)+\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a-K)}{\vartheta(u+a+K)}$$

die in a) und b) für $Z(a+K)$ und $\frac{\vartheta(u-a-K)}{\vartheta(u+a+K)}$ gefundenen Werte ein, so finden wir:

$$\Pi(u,a+K)=uZ(a)-u\cdot\frac{\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,a\,.\,\cos\mathrm{am}\,a}{\Delta\,\mathrm{am}\,a}+\frac{1}{2}\log\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(a-u)}{\Delta\,\mathrm{am}\,(a+u)}+\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(a-u)}{\vartheta(a+u)}$$

oder, da sowohl $\Delta\,\mathrm{am}\,u$ als $\vartheta(u)$ gerade Funktionen sind:

$$\Pi(u,a+K)=uZ(a)-u\cdot\frac{\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,a\,.\,\cos\mathrm{am}\,a}{\Delta\,\mathrm{am}\,a}+\frac{1}{2}\log\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(u-a)}{\Delta\,\mathrm{am}\,(u+a)}+\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)}.$$

Es ist aber nach Gleichung (50):

$$uZ(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)}=\Pi(u,a),$$

mithin auch:

$$\Pi(u,a+K)=\Pi(u,a)-u\cdot\frac{\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,a\,.\,\cos\mathrm{am}\,a}{\Delta\,\mathrm{am}\,a}+\frac{1}{2}\log\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(u-a)}{\Delta\,\mathrm{am}\,(u+a)}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung ai statt a, so erhalten wir:

$$\Pi(u,ai+K)=\Pi(u,ai)-u\,\frac{\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,ai\,.\,\cos\mathrm{am}\,ai}{\Delta\,\mathrm{am}\,ai}+\frac{1}{2}\log\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(u-ai)}{\Delta\,\mathrm{am}\,(u+ai)}.$$

Wir haben nun noch die elliptischen Funktionen mit zusammengesetztem Argument auf solche mit einfachem Argument und die elliptischen Funktionen mit imaginärem Argument auf solche mit reellem Argument zu reduzieren.

Da nach dem Additionstheorem der elliptischen Funktionen:

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(u\pm v)=\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,v\mp\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\sin\mathrm{am}\,v\,.\,\cos\mathrm{am}\,v}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\,\sin^2\mathrm{am}\,v},$$

so ist:

$$\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(u-ai)}{\Delta\,\mathrm{am}\,(u+ai)}=\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,ai+\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\sin\mathrm{am}\,ai\,.\,\cos\mathrm{am}\,ai}{\Delta\,\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,ai-\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\sin\mathrm{am}\,ai\,.\,\cos\mathrm{am}\,ai};$$

da ferner nach den Gleichungen (8)

$$\sin\mathrm{am}\,ai=i\,\frac{\sin\mathrm{am}\,(a,\varkappa')}{\cos\mathrm{am}\,(a,\varkappa')}=i\,\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,(a,\varkappa')$$

$$\cos\mathrm{am}\,ai=\frac{1}{\cos\mathrm{am}\,(a,\varkappa')};\quad\Delta\,\mathrm{am}\,ai=\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(a,\varkappa')}{\cos\mathrm{am}\,(a,\varkappa')},$$

so ist:

$$\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(u-ai)}{\Delta\,\mathrm{am}\,(u+ai)}=\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,(a,\varkappa')+i\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,(a,\varkappa')}{\Delta\,\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,(a,\varkappa')-i\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,(a,\varkappa')}.$$

Ferner ist:

$$\frac{\sin\mathrm{am}\,ai\,.\,\cos\mathrm{am}\,ai}{\Delta\,\mathrm{am}\,ai}=\frac{i\,\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,(a,\varkappa')}{\Delta\,\mathrm{am}\,(a,\varkappa')}.$$

Durch Substitution dieser Werte in die obige Gleichung erhalten wir:

$$\Pi(u, ai+K) = \Pi(u, ai) - u i \varkappa^2 \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am}(a, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(a, \varkappa')}$$

$$+ \frac{1}{2} \log \frac{\Delta \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am}(a, \varkappa') + i\varkappa^2 \sin \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} u \,.\, \operatorname{tg} \operatorname{am}(a, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am}(a, \varkappa') - i\varkappa^2 \sin \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} u \,.\, \operatorname{tg} \operatorname{am}(a, \varkappa')}.$$

Nun ist:

$$\log \frac{x+iy}{x-iy} = 2i \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x},$$

folglich:

$$\frac{1}{2} \log \frac{\Delta \operatorname{am}(u-ai)}{\Delta \operatorname{am}(u+ai)} = i \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varkappa^2 \sin \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} u \,.\, \operatorname{tg} \operatorname{am}(a, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am}(a, \varkappa')}$$

und mithin:

$$\Pi(u, ai+K) = \Pi(u, ai) - u i \varkappa^2 \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am}(a, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(a, \varkappa')} + i \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varkappa^2 \sin \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} u \,.\, \operatorname{tg} \operatorname{am}(a, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am}(a, \varkappa')}.$$

Hiermit ist gezeigt, dafs sich der vierte der unterschiedenen Fälle auf den zweiten reduzieren läfst.

Da nun in dem ersten dieser vier Fälle der Legendre'sche Parameter n zwischen den Grenzen 0 und $-\varkappa^2$, im zweiten Falle zwischen den Grenzen $-\varkappa^2$ und -1 lag, so kann also das Integral dritter Gattung in der Legendre'schen Normalform, wenn n positiv oder negativ reell ist, stets auf ein Integral zurückgeführt werden, in dem n negativ ist und zwischen den Grenzen 0 und -1 liegt. Liegt aber n zwischen 0 und $-\varkappa^2$, so ist der Jacobi'sche Parameter a reell und liegt zwischen 0 und K, und liegt n zwischen $-\varkappa^2$ und -1, so hat der Jacobi'sche Parameter die Form $ai+K$ und a liegt zwischen 0 und K'.

Mit der Herleitung der oben gefundenen Gleichung (57):

$$\log \frac{\vartheta(v)}{\vartheta(0)} = \int_0^u Z(w)\, dw$$

ist der eine wesentliche Schritt gethan, um die oben nur angeführten, von Jacobi herrührenden Gleichungen, welche die Werte der Funktionen $Z(u+K'i)$ und $\vartheta(u+K'i)$ durch $Z(u)$ und $\vartheta(u)$ ausdrücken, herzuleiten, es erübrigt nur noch, um diesen Zweck zu erreichen, den zweiten, darin bestehenden Schritt zu thun, die erste elliptische Transcendente E und die Funktion Z für imaginäre Argumente zu bestimmen.

Aus der Erklärung für E:

$$E(u) = \int_0^u \Delta^2 \operatorname{am} u\, du$$

folgt:

$$E(ui) = \int_0^{ui} \Delta^2 \operatorname{am} w\, dw.$$

Setzen wir $w = vi$, also $dw = i dv$

und berücksichtigen wir, dafs nach (8):

$$\Delta \operatorname{am} vi = \frac{\Delta \operatorname{am}(v, \varkappa')}{\cos \operatorname{am}(v, \varkappa')},$$

so wird:

$$E(ui) = i \int_0^u \frac{\Delta^2 \operatorname{am}(v, \varkappa')}{\cos^2 \operatorname{am}(v, \varkappa')}\, dv.$$

Nun ist: $$\Delta^2 \operatorname{am}(v, \varkappa') = 1 - \varkappa'^2 \sin^2 \operatorname{am}(v, \varkappa')$$
$$= 1 - \varkappa'^2 \left(1 - \cos^2 \operatorname{am}(v, \varkappa')\right)$$
$$= 1 - \varkappa'^2 + \varkappa'^2 \cos^2 \operatorname{am}(v, \varkappa')$$
$$= \varkappa^2 + \varkappa'^2 \cos^2 \operatorname{am}(v, \varkappa'),$$

also:

$$E(ui) = i \int_0^u \frac{\varkappa^2 + \varkappa'^2 \cos^2 \operatorname{am}(v, \varkappa')}{\cos^2 \operatorname{am}(v, \varkappa')}\, dv$$

$$= i\varkappa^2 \int_0^u \frac{dv}{\cos^2 \operatorname{am}(v, \varkappa')} + i\varkappa'^2 \int_0^u dv$$

$$= i\varkappa^2 \int_0^u \frac{dv}{\cos^2 \operatorname{am}(v, \varkappa')} + i\varkappa'^2 u.$$

Um für das hier auftretende Integral $\int_0^u \frac{dv}{\cos^2 \operatorname{am}(v, \varkappa')}$ den durch elliptische Funktionen und $E(u)$ ausgedrückten Wert zu finden, setzen wir zunächst in der früher hergeleiteten Gleichung (1)

$$\int_0^\varphi \frac{(\gamma + \operatorname{tg}^2 \varphi)\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \gamma u + \frac{1}{\varkappa'^2} \operatorname{tg} \varphi\, \Delta\varphi - \frac{1}{\varkappa'^2} \int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi,$$

$$\varphi = \operatorname{am} u, \quad \text{also} \quad d\varphi = \Delta \operatorname{am} u\, du$$

$$\int_0^\varphi \Delta\varphi\, d\varphi = \int_0^u \Delta^2 \operatorname{am} u\, du = E(u)$$

und $\gamma = 0$, wodurch wir erhalten:

$$\int_0^\varphi \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} u\, du = \frac{1}{\varkappa'^2} \operatorname{tg} \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u - \frac{1}{\varkappa'^2} E(u).$$

Nun ist $$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \text{ und } \frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

also

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi\, \Delta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)\, d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_0^\varphi \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi},$$

oder:

$$\int_0^u \frac{du}{\cos^2 \operatorname{am} u} = u + \int_0^u \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} u\, du$$

$$\int_0^u \frac{du}{\cos^2 \operatorname{am} u} = u + \frac{1}{\varkappa'^2} \operatorname{tg} \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u - \frac{1}{\varkappa'^2} E(u).$$

Hieraus folgt durch Einführung der komplementären Funktionen:

$$\int_0^u \frac{du}{\cos^2 \operatorname{am}(u, \varkappa')} = u + \frac{1}{\varkappa^2} \operatorname{tg} \operatorname{am}(u, \varkappa') \, \Delta \operatorname{am}(u, \varkappa') - \frac{1}{\varkappa^2} E(u, \varkappa').$$

Setzen wir diesen für das Integral ermittelten Wert in die Gleichung:

$$E(ui) = i\varkappa^2 \int_0^u \frac{dv}{\cos^2 \operatorname{am}(v, \varkappa')} + i\varkappa'^2 u$$

ein, so erhalten wir:

$$E(ui) = i \operatorname{tg} \operatorname{am}(u, \varkappa') \, \Delta \operatorname{am}(u, \varkappa') - iE(u, \varkappa') + i\varkappa^2 u + i\varkappa'^2 u$$

$$E(ui) = i \operatorname{tg} \operatorname{am}(u, \varkappa') \, \Delta \operatorname{am}(u, \varkappa') - iE(u, \varkappa') + ui.$$

Da aber nach Gleichung (46)

$$E(u) = \frac{E}{K} u + Z(u),$$

also

$$E(ui) = i \frac{E}{K} \cdot u + Z(ui)$$

und

$$E(u, \varkappa') = \frac{E'}{K'} \cdot u + Z(u, \varkappa'),$$

so erhalten wir durch Einführung dieser Werte für $E(ui)$ und $E(u, \varkappa')$ in die obige Gleichung:

$$i \frac{E}{K} \cdot u + Z(ui) = i \operatorname{tg} \operatorname{am}(u, \varkappa') \,.\, \Delta \operatorname{am}(u, \varkappa') - i \frac{E'}{K'} \cdot u - iZ(u, \varkappa') + ui.$$

Multiplizieren wir mit i und lösen zugleich nach $iZ(ui)$ auf, so ist:

$$iZ(ui) = -\operatorname{tg} \operatorname{am}(u, \varkappa') \, \Delta \operatorname{am}(u, \varkappa') + \frac{E'}{K'} \cdot u + Z(u, \varkappa') - u + \frac{E}{K} \cdot u$$

$$iZ(ui) = -\operatorname{tg} \operatorname{am}(u, \varkappa') \, \Delta \operatorname{am}(u, \varkappa') + u\left(\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1\right) + Z(u, \varkappa').$$

Nun besteht, wie Legendre gezeigt hat, zwischen den vollständigen Integralen K und K' der ersten Gattung und den vollständigen Integralen E und E' der zweiten Gattung der Zusammenhang:

$$K'.E + K.E' - K.K' = \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Division durch $K.K'$

$$\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1 = \frac{\pi}{2K.K'}$$

und durch Einsetzen dieses Wertes in die den Wert von $iZ(ui)$ darstellende Gleichung:

(61) $$iZ(ui) = -\operatorname{tg} \operatorname{am}(u, \varkappa') \,.\, \Delta \operatorname{am}(u, \varkappa') + \frac{\pi u}{2K.K'} + Z(u, \varkappa').$$

Integrieren wir diese Gleichung (61) zwischen den Grenzen 0 und u, so erhalten wir:

$$i\int_0^u Z(ui)\,du = -\int_0^u \operatorname{tg} \operatorname{am}(u, \varkappa') \,.\, \Delta \operatorname{am}(u, \varkappa')\,du + \frac{\pi}{2K.K'} \int_0^u u\,du + \int_0^u Z(u, \varkappa')\,du.$$

Da nach Gleichung (57)

$$\int_0^u Z(u)\,du = \log\frac{\vartheta(u)}{\vartheta(0)},$$

so ist:

$$\int_0^{ui} Z(v)\,dv = \log\frac{\vartheta(ui)}{\vartheta(0)}.$$

Im Integrale $v = ui$, also $dv = i\,du$ gesetzt und dann wieder u und v vertauscht ergiebt:

$$i\int_0^u Z(ui)\,du = \log\frac{\vartheta(ui)}{\vartheta(0)},$$

Ebenso folgt aus Gleichung (57)

$$\int_0^u Z(u,\varkappa')\,du = \log\frac{\vartheta(u,\varkappa')}{\vartheta(0,\varkappa')}.$$

Ferner ist:

$$\frac{d\log\cos\operatorname{am}(u,\varkappa')}{du} = \frac{1}{\cos\operatorname{am}(u,\varkappa')}\,\frac{d\cos\operatorname{am}(u,\varkappa')}{du}$$

$$= -\frac{\sin\operatorname{am}(u,\varkappa')\,.\,\Delta\operatorname{am}(u,\varkappa')}{\cos\operatorname{am}(u,\varkappa')} = -\operatorname{tg}\operatorname{am}(u,\varkappa')\,\Delta\operatorname{am}(u,\varkappa').$$

Führen wir diese Werte in die obige Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\log\frac{\vartheta(ui)}{\vartheta(0)} = \int_0^u \frac{d\log\cos\operatorname{am}(u,\varkappa')}{du}\,du + \frac{\pi}{2KK'}\int_0^u u\,du + \log\frac{\vartheta(u,\varkappa')}{\vartheta(0,\varkappa')}$$

$$\log\frac{\vartheta(ui)}{\vartheta(0)} = \log\cos\operatorname{am}(u,\varkappa') + \frac{\pi u^2}{4KK'} + \log\frac{\vartheta(u,\varkappa')}{\vartheta(0,\varkappa')}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$(62)\qquad \frac{\vartheta(ui)}{\vartheta(0)} = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\,.\,\cos\operatorname{am}(u,\varkappa')\,\frac{\vartheta(u,\varkappa')}{\vartheta(0,\varkappa')}.$$

Mit den Gleichungen (61) und (62) sind die Funktionen Z und ϑ für imaginäres Argument hergeleitet.

Setzen wir in der Gleichung (62) $u + K'$ für u, so können wir dadurch $\vartheta(u + K'i)$ bestimmen. Zunächst geht die Gleichung (62) durch diese Substitution über in:

$$\vartheta(ui + K'i) = e^{\frac{\pi(u+K')^2}{4KK'}}\cos\operatorname{am}(u+K',\varkappa')\,\frac{\vartheta(u+K',\varkappa')\,.\,\vartheta(0)}{\vartheta(0,\varkappa')}.$$

Da nach Gleichung (11)

$$\cos(u+K) = -\frac{\varkappa'\sin\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u}$$

und, wie aus Gleichung (60) hervorgeht:

$$\vartheta(u+K) = \frac{\Delta\operatorname{am}u\,.\,\vartheta(u)}{\sqrt{\varkappa'}},$$

so sind:

$$\cos\operatorname{am}(u+K',\varkappa') = -\frac{\varkappa\sin\operatorname{am}(u,\varkappa')}{\Delta\operatorname{am}(u,\varkappa')}$$

und

$$\vartheta(u + K', \varkappa') = \frac{\Delta \operatorname{am}(u, \varkappa') \,.\, \vartheta(u, \varkappa')}{\sqrt{\varkappa}}$$

und mithin:

$$\vartheta(ui + K'i) = -e^{\frac{\pi(u^2 + 2uK' + K'^2)}{4KK'}} \cdot \frac{\varkappa \sin \operatorname{am}(u, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(u, \varkappa')} \cdot \frac{\Delta \operatorname{am}(u, \varkappa') \,.\, \vartheta(u, \varkappa')}{\sqrt{\varkappa}} \cdot \frac{\vartheta(0)}{\vartheta(0, \varkappa')}$$

$$= -\sqrt{\varkappa}\, e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \,.\, e^{\frac{\pi u}{2K}} \,.\, e^{\frac{\pi K'}{4K}} \sin \operatorname{am}(u, \varkappa') \,.\, \vartheta(u, \varkappa') \frac{\vartheta(0)}{\vartheta(0, \varkappa')}.$$

Nun ist nach Jacobi bekanntlich:

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q, \quad \text{folglich} \quad e^{\frac{\pi K'}{K}} = \frac{1}{q} \quad \text{und} \quad e^{\frac{\pi K'}{4K}} = \frac{1}{\sqrt[4]{q}} \quad \text{und folglich:}$$

$$\vartheta(ui + K'i) = -\frac{\sqrt{\varkappa}}{\sqrt[4]{q}} e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \,.\, e^{\frac{\pi u}{2K}} \sin \operatorname{am}(u, \varkappa') \,.\, \vartheta(u, \varkappa') \frac{\vartheta(0)}{\vartheta(0, \varkappa')}.$$

Setzen wir $ui = v$, folglich $u = \frac{v}{i} = -iv$ und $u^2 = -v^2$ und ersetzen das Argument v gleich wieder durch u, so erhalten wir:

$$\vartheta(u + K'i) = -\frac{\sqrt{\varkappa}}{\sqrt[4]{q}} e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \,.\, e^{-\frac{\pi u i}{2K}} \sin \operatorname{am}(-ui, \varkappa') \,.\, \vartheta(-ui, \varkappa') \frac{\vartheta(0)}{\vartheta(0, \varkappa')}.$$

Da Sinusamplitude eine ungerade und ϑ eine gerade Funktion, also

$$\sin \operatorname{am}(-ui, \varkappa') = -\sin \operatorname{am}(ui, \varkappa')$$

$$\vartheta(-ui, \varkappa') = \quad \vartheta(ui, \varkappa'),$$

so ist auch:

$$\vartheta(u + K'i) = \frac{\sqrt{\varkappa}}{\sqrt[4]{q}} e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \,.\, e^{-\frac{\pi u i}{2K}} \sin \operatorname{am}(ui, \varkappa') \,.\, \vartheta(ui, \varkappa') \frac{\vartheta(0)}{\vartheta(0, \varkappa')}.$$

Es ist aber nach Gleichung (8)

$$\sin \operatorname{am} iu = i \operatorname{tg} \operatorname{am}(u, \varkappa'),$$

und wie eben in Gleichung (62) gefunden:

$$\vartheta(ui) = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cos \operatorname{am}(u, \varkappa') \frac{\vartheta(u, \varkappa') \,.\, \vartheta(0)}{\vartheta(0, \varkappa')}$$

und folglich:

$$\sin \operatorname{am}(ui, \varkappa') = i \operatorname{tg} \operatorname{am} u$$

$$\vartheta(ui, \varkappa') = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cos \operatorname{am} u \frac{\vartheta(u) \,.\, \vartheta(0, \varkappa')}{\vartheta(0)}.$$

Diese Werte in die obige Gleichung substituiert ergiebt:

$$\vartheta(u + K'i) = \frac{\sqrt{\varkappa}}{\sqrt[4]{q}} e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \,.\, e^{-\frac{\pi u i}{2K}} i \operatorname{tg} \operatorname{am} u \,.\, e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cos \operatorname{am} u \frac{\vartheta(u)\, \vartheta(0, \varkappa')}{\vartheta(0)} \cdot \frac{\vartheta(0)}{\vartheta(0, \varkappa')},$$

oder gehörig reduziert:

$$\vartheta(u + K'i) = \frac{i\sqrt{\varkappa}}{\sqrt[4]{q}} e^{-\frac{\pi u i}{2K}} \sin \operatorname{am} u \,.\, \vartheta(u). \tag{63}$$

Diese Gleichung (63) giebt uns den oben bereits als von Jacobi herrührend bezeichneten Wert der Funktion $\vartheta(u + K'i)$.

Dividieren wir (63) durch $\vartheta(0)$, nehmen dann die Logarithmen und differenzieren schliefslich nach u, so erhalten wir nach und nach:

$$\frac{\vartheta(u+K'i)}{\vartheta(0)} = \frac{i\sqrt{\varkappa}}{\sqrt[4]{q}} e^{-\frac{\pi u i}{2K}} \sin \operatorname{am} u \frac{\vartheta(u)}{\vartheta(0)}$$

$$\log \frac{\vartheta(u+K'i)}{\vartheta(0)} = \log \frac{i\sqrt{\varkappa}}{\sqrt[4]{q}} - \frac{\pi u i}{2K} + \log \sin \operatorname{am} u + \log \frac{\vartheta(u)}{\vartheta(0)}$$

und endlich

$$(64) \qquad Z(u+K'i) = -\frac{\pi i}{2K} + \frac{\cos \operatorname{am} u \,.\, \varDelta \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u} + Z(u).$$

Diese Gleichung (64) bietet uns den oben bereits angegebenen Wert der Funktion $Z(u+K'i)$.

Die letzte noch durchzuführende Untersuchung bezieht sich auf den Fall, dafs der Legendre'sche Parameter n des elliptischen Integrales dritter Gattung imaginär ist. In diesem Falle nimmt, wie weiter oben gezeigt ist, der Jacobi'sche Parameter die komplexe Gestalt $a+bi$ an, wo a und b reelle Gröfsen sind. In diesem Falle wird also:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\varDelta\varphi} = u + \frac{\sin \operatorname{am}(a+bi)}{\cos \operatorname{am}(a+bi) \,.\, \varDelta \operatorname{am}(a+bi)} \Pi(u, a+bi).$$

Führen wir für die elliptischen Funktionen mit zusammengesetztem Argument solche mit einfachem Argument durch Anwendung des Additionstheorems der elliptischen Funktionen ein, so erhalten wir für den Faktor von $\Pi(u, a+bi)$ den Wert:

$$\frac{\sin \operatorname{am} a \,.\, \cos \operatorname{am} bi \,.\, \varDelta \operatorname{am} bi + \sin \operatorname{am} bi \cos \operatorname{am} a \,.\, \varDelta \operatorname{am} a}{\cos \operatorname{am} a \,.\, \cos \operatorname{am} bi - \sin \operatorname{am} a \,.\, \sin \operatorname{am} bi \,.\, \varDelta \operatorname{am} a \,.\, \varDelta \operatorname{am} bi} \,.$$

$$\cdot \frac{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} bi}{\varDelta \operatorname{am} a \,.\, \varDelta \operatorname{am} bi - \varkappa^2 \sin \operatorname{am} a \,.\, \sin \operatorname{am} bi \,.\, \cos \operatorname{am} a \,.\, \cos \operatorname{am} bi}$$

und, wenn wir für die imaginären Argumente mit Benutzung der Gleichungen (8) reelle einführen und die nötigen Reduktionen vornehmen:

$$\frac{\sin \operatorname{am} a \,.\, \varDelta \operatorname{am}(b,\varkappa') + i \cos \operatorname{am} a \,.\, \varDelta \operatorname{am} a \,.\, \sin \operatorname{am}(b,\varkappa') \,.\, \cos \operatorname{am}(b,\varkappa')}{\cos \operatorname{am} a \,.\, \cos \operatorname{am}(b,\varkappa') - i \sin \operatorname{am} a \,.\, \varDelta \operatorname{am} a \,.\, \sin \operatorname{am}(b,\varkappa') \,.\, \varDelta \operatorname{am}(b,\varkappa')} \,.$$

$$\cdot \frac{\cos^2 \operatorname{am}(b,\varkappa') + \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am}(b,\varkappa')}{\varDelta \operatorname{am} a \,.\, \cos \operatorname{am}(b,\varkappa') \,.\, \varDelta \operatorname{am}(b,\varkappa') - i\varkappa^2 \sin \operatorname{am} a \,.\, \cos \operatorname{am} a \,.\, \sin \operatorname{am}(b,\varkappa')} \,.$$

Die Funktion $\Pi(u, a+bi)$ selbst macht das Additionstheorem der Parameter erforderlich. Wir gehen zunächst zum Additionstheorem der Argumente über und leiten daraus das Additionstheorem der Parameter ab.

Da nach (50) die Gleichungen gelten:

$$\Pi(u,a) = \qquad u Z(a) + \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)}$$

$$\Pi(v,a) = \qquad v Z(a) + \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta(v-a)}{\vartheta(v+a)}$$

$$\Pi(u+v,a) = (u+v) Z(a) + \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta(u+v-a)}{\vartheta(u+v+a)},$$

so ergiebt sich durch Subtraktion der letzten von der Summe der beiden ersten:

$$\Pi(u,a)+\Pi(v,a)-\Pi(u+v,a)=u\,Z(a)+v\,Z(a)-(u+v)\,Z(a)$$
$$+\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)}+\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(v-a)}{\vartheta(v+a)}-\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u+v-a)}{\vartheta(u+v+a)}$$
$$=(u+v)\,Z(a)-(u+v)\,Z(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a)\,.\,\vartheta(v-a)\,.\,\vartheta(u+v+a)}{\vartheta(u+a)\,.\,\vartheta(v+a)\,.\,\vartheta(u+v-a)}.$$

$$\Pi(u,a)+\Pi(v,a)-\Pi(u+v,a)=\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a)\,.\,\vartheta(v-a)\,.\,\vartheta(u+v+a)}{\vartheta(u+a)\,.\,\vartheta(v+a)\,.\,\vartheta(u+v-a)}. \tag{65}$$

Will man in dieser Gleichung, welche das Additionstheorem der Argumente der Integrale dritter Gatttung ausdrückt, noch den auf der rechten Seite stehenden Logarithmanden durch elliptische Funktionen ausdrücken, so hat man die Gleichung (50)

$$\Pi(u,a)=u\,Z(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)}$$

nach u zu differenzieren und die dann erhaltene Gleichung nach dem Parameter a zwischen den Grenzen 0 und a zu integrieren.

Auf diese Weise erhält man zunächst nach Gleichung (52):

$$\frac{d\,\Pi(u,a)}{du}=Z(a)+\frac{1}{2}\,Z(u-a)-\frac{1}{2}\,Z(u+a)$$

und sodann $$\int_0^a\frac{d\,\Pi(u,a)}{du}\,da=\int_0^a Z(a)\,da+\frac{1}{2}\int_0^a Z(u-a)\,da-\frac{1}{2}\int_0^a Z(u+a)\,da.$$

Nun ist nach Gleichung (57)

$$\int_0^a Z(a)\,da=\log\frac{\vartheta(a)}{\vartheta(0)}.$$

Um die beiden anderen Integrale zu entwickeln, setzen wir in dem letzten $u+a=z$, in dem ersten $u-a=z$. Auf diese Weise wird:

$$\int_0^a Z(u+a)\,da=\int_u^{u+a}Z(z)\,dz=\int_0^{u+a}Z(z)\,dz-\int_0^u Z(z)\,dz=\log\frac{\vartheta(u+a)}{\vartheta(0)}-\log\frac{\vartheta(u)}{\vartheta(0)}$$
$$=\log\frac{\vartheta(u+a)}{\vartheta(0)}\cdot\frac{\vartheta(0)}{\vartheta(u)}=\log\frac{\vartheta(u+a)}{\vartheta(u)}$$

$$\int_0^a Z(u-a)\,da=-\int_u^{u-a}Z(z)\,dz=-\int_0^{u-a}Z(z)\,dz+\int_0^u Z(z)\,dz=-\log\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(0)}+\log\frac{\vartheta(u)}{\vartheta(0)}$$
$$=\log\frac{\vartheta(u)}{\vartheta(0)}\cdot\frac{\vartheta(0)}{\vartheta(u-a)}=\log\frac{\vartheta(u)}{\vartheta(u-a)}=-\log\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u)}.$$

Unsere obige Gleichung geht daher über in:

$$\int_0^a\frac{d\Pi(u,a)}{du}\,da=\log\frac{\vartheta(a)}{\vartheta(0)}-\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u)}-\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u+a)}{\vartheta(u)}$$
$$=\log\frac{\vartheta(a)}{\vartheta(0)}-\frac{1}{2}\left[\log\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u)}+\log\frac{\vartheta(u+a)}{\vartheta(u)}\right]$$
$$=\log\frac{\vartheta(a)}{\vartheta(0)}-\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a)\,.\,\vartheta(u+a)}{\vartheta^2 u}$$
$$=\log\frac{\vartheta(a)}{\vartheta(0)}-\log\sqrt{\vartheta(u-a)\,.\,\vartheta(u+a)}+\log\vartheta(u).$$

Nach der von Jacobi aufgestellten Erklärung der Funktion $\Pi(u, a)$ ist aber:

$$\Pi(u, a) = \int_0^u \frac{\varkappa^2 \sin \operatorname{am} a \,.\, \cos \operatorname{am} a \,.\, \Delta \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, du}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u}$$

und folglich:

$$\frac{d\Pi(u, a)}{du} = \frac{\varkappa^2 \sin \operatorname{am} a \,.\, \cos \operatorname{am} a \,.\, \Delta \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u}.$$

Integrieren wir auch diese Gleichung nach a zwischen den Grenzen 0 und a, so erhalten wir:

$$\int_0^a \frac{d\Pi(u, a)}{du}\, da = \int_0^a \frac{\varkappa^2 \sin \operatorname{am} a \,.\, \cos \operatorname{am} a \,.\, \Delta \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, da}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u}. \tag{66}$$

Nun ist:

$$\frac{d \log (1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u)}{da} = \frac{1}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u} \cdot \frac{d(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u)}{da}$$

$$= - \frac{2\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin \operatorname{am} a \,.\, \cos \operatorname{am} a \,.\, \Delta \operatorname{am} a}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u}.$$

Mit Berücksichtigung dieses Wertes für den unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite der Gleichung (66) stehenden Ausdruck erhalten wir:

$$\int_0^a \frac{d\Pi(u, a)}{du}\, da = -\frac{1}{2} \Big[\log (1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u)\Big]_0^a$$

und da für $a = 0$ sich für $\sin \operatorname{am} a$ der Wert 0 ergiebt und deshalb für den unteren Grenzwert der in der Klammer stehende Logarithmus zu $\log 1 = 0$ wird, so ist:

$$\int_0^a \frac{d\Pi(u, a)}{du}\, da = -\frac{1}{2} \log (1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u).$$

Setzen wir die für dasselbe Integral gefundenen beiden Werte einander gleich, so entsteht die Gleichung:

$$-\frac{1}{2} \log (1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u) = \log \frac{\vartheta(a)}{\vartheta(0)} - \log \sqrt{\vartheta(u-a) \,.\, \vartheta(u+a)} + \log \vartheta(u),$$

oder

$$\log \frac{1}{(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u)^{\frac{1}{2}}} = \log \frac{\vartheta(a) \,.\, \vartheta(u)}{\vartheta(0) \sqrt{\vartheta(u-a) \,.\, \vartheta(u+a)}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\vartheta(a)}{\vartheta(0)} \frac{\vartheta(u)}{[\vartheta(u-a) \,.\, \vartheta(u+a)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u)^{-1} = \left(\frac{\vartheta(a) \,.\, \vartheta(u)}{\vartheta(0)}\right)^2 \cdot \frac{1}{\vartheta(u-a) \,.\, \vartheta(u+a)},$$

und folglich:

$$\vartheta(u+a) \,.\, \vartheta(u-a) = \left(\frac{\vartheta(a) \,.\, \vartheta(u)}{\vartheta(0)}\right)^2 (1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u)$$

oder, wie wir auch schreiben können:

$$\vartheta(r+s) \,.\, \vartheta(r-s) = \left(\frac{\vartheta(r) \,.\, \vartheta(s)}{\vartheta(0)}\right)^2 (1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} r \,.\, \sin^2 \operatorname{am} s).$$

Mit Hülfe dieser Gleichung finden wir aber, wenn wir der Reihe nach:

1) $$\begin{aligned} r+s &= u-a \\ r-s &= v-a \\ \hline r &= \frac{u+v}{2} - a = \frac{u+v-2a}{2} \\ s &= \frac{u-v}{2} \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} r+s &= u+a \\ r-s &= v+a \\ \hline r &= \frac{u+v}{2} + a = \frac{u+v+2a}{2} \\ s &= \frac{u-v}{2} \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} r+s &= u+v-a \\ r-s &= a \\ \hline r &= \frac{u+v}{2} \\ s &= \frac{u+v}{2} - a = \frac{u+v-2a}{2} \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} r+s &= u+v+a \\ r-s &= a \\ \hline r &= \frac{u+v}{2} + a = \frac{u+v+2a}{2} \\ s &= \frac{u+v}{2} \end{aligned}$$

setzen:

$$\vartheta(u-a) \, . \, \vartheta(v-a) = \left\{\frac{\vartheta\left(\frac{u+v-2a}{2}\right) . \, \vartheta\left(\frac{u-v}{2}\right)}{\vartheta(0)}\right\}^2 \left\{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{u+v-2a}{2} \cdot \sin^2 \operatorname{am} \frac{u-v}{2}\right\}$$

$$\vartheta(u+a) \, . \, \vartheta(v+a) = \left\{\frac{\vartheta\left(\frac{u+v+2a}{2}\right) . \, \vartheta\left(\frac{u-v}{2}\right)}{\vartheta(0)}\right\}^2 \left\{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{u+v+2a}{2} \cdot \sin^2 \operatorname{am} \frac{u-v}{2}\right\}$$

$$\vartheta(u+v-a) \, . \, \vartheta(a) = \left\{\frac{\vartheta\left(\frac{u+v}{2}\right) \vartheta\left(\frac{u+v-2a}{2}\right)}{\vartheta(0)}\right\}^2 \left\{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{u+v}{2} \cdot \sin^2 \operatorname{am} \frac{u+v-2a}{2}\right\}$$

$$\vartheta(u+v+a) \cdot \vartheta(a) = \left\{\frac{\vartheta\left(\frac{u+v+2a}{2}\right) \vartheta\left(\frac{u+v}{2}\right)}{\vartheta(0)}\right\}^2 \left\{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{u+v+2a}{2} \cdot \sin^2 \operatorname{am} \frac{u+v}{2}\right\}.$$

Dividieren wir das Produkt aus der ersten und vierten dieser Gleichungen durch das Produkt aus der zweiten und dritten, so erhalten wir:

(67) $$\frac{\vartheta(u-a) \, . \, \vartheta(v-a) \, . \, \vartheta(u+v+a)}{\vartheta(u+a) \, . \, \vartheta(v+a) \, . \, \vartheta(u+v-a)}$$

$$= \frac{\left\{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{u+v-2a}{2} \sin^2 \operatorname{am} \frac{u-v}{2}\right\} \left\{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{u+v+2a}{2} \cdot \sin^2 \operatorname{am} \frac{u+v}{2}\right\}}{\left\{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{u+v+2a}{2} \cdot \sin^2 \operatorname{am} \frac{u-v}{2}\right\} \left\{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{u+v-2a}{2} \sin^2 \operatorname{am} \frac{u+v}{2}\right\}}.$$

Hiermit ist der oben gefundene Logarithmand durch elliptische Funktionen ausgedrückt und durch Einsetzung des Wertes in die das Additionstheorem der Argumente der elliptischen Integrale dritter Gattung aussprechende Gleichung (65) erhalten wir:

(68)
$$\Pi(u,a) + \Pi(v,a) - \Pi(u+v,a)$$
$$= \frac{1}{2}\log \frac{\left\{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{u+v-2a}{2} \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{u-v}{2}\right\}\left\{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{u+v+2a}{2} \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{u+v}{2}\right\}}{\left\{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{u+v+2a}{2} \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{u-v}{2}\right\}\left\{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{u+v-2a}{2} \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{u+v}{2}\right\}}.$$

Aus diesem Satze leitet Jacobi das Additionstheorem für die Parameter ab, indem er sich des Satzes von der Vertauschung des Argumentes mit dem Parameter bedient.

Dieser letztere Satz läfst sich ohne weiteres aus der schon öfter angewandten Fundamentalgleichung (50):

c)
$$\Pi(u,a) = u\,Z(a) + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)}$$

herleiten. Vertauschen wir u und a mit einander, so ist:

$$\Pi(a,u) = a\,Z(u) + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(a-u)}{\vartheta(a+u)}$$

oder, da ϑ eine gerade Funktion, also:

$$\vartheta(a-u) = \vartheta(u-a),$$

d)
$$\Pi(a,u) = a\,Z(u) + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)}.$$

Subtrahieren wir d) von c), so erhalten wir:

(69)
$$\Pi(u,a) - \Pi(a,u) = u\,Z(a) - a\,Z(u),$$

eine Gleichung, welche den Satz von der Vertauschung des Argumentes und des Parameters ausspricht.

Aus dieser Gleichung (69) folgt:

$$\begin{aligned}
\Pi(a,u) - \Pi(u,a) &= a\,Z(u) - u\,Z(a)\\
\Pi(b,u) - \Pi(u,b) &= b\,Z(u) - u\,Z(b)\\
\Pi(a+b,u) - \Pi(u,a+b) &= (a+b)\,Z(u) - u\,Z(a+b)
\end{aligned}$$

und, wenn man die letzte Gleichung von der Summe der beiden ersten subtrahiert:

$$\Pi(a,u) + \Pi(b,u) - \Pi(a+b,u) - \Pi(u,a) - \Pi(u,b) + \Pi(u,a+b)$$
$$= a\,Z(u) + b\,Z(u) - (a+b)\,Z(u) - u\,Z(a) - u\,Z(b) + u\,Z(a+b)$$

oder:

$$\Pi(u,a) + \Pi(u,b) - \Pi(u,a+b)$$
$$= \Pi(a,u) + \Pi(b,u) - \Pi(a+b,u) + u\,\{Z(a) + Z(b) - Z(a+b)\}.$$

Nun ist aber nach Gleichung (65):

$$\Pi(a,u) + \Pi(b,u) - \Pi(a+b,u) = \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(a-u)\,.\,\vartheta(b-u)\,.\,\vartheta(a+b+u)}{\vartheta(a+u)\,.\,\vartheta(b+u)\,.\,\vartheta(a+b-u)}$$

und mithin:

$$\Pi(u,a) + \Pi(u,b) - \Pi(u,a+b)$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(a-u)\,.\,\vartheta(b-u)\,.\,\vartheta(a+b+u)}{\vartheta(a+u)\,.\,\vartheta(b+u)\,.\,\vartheta(a+b-u)} + u\,\{Z(a) + Z(b) - Z(a+b)\}.$$

Aus der früher durch Gleichsetzung von zwei für $\frac{d\,\Pi(u,a)}{du}$ gefundenen Werten gewonnenen Gleichung (53):

$$(53)\qquad \frac{\varkappa^2 \sin\operatorname{am} a \,.\, \cos\operatorname{am} a \,.\, \Delta\operatorname{am} a \,.\, \sin^2\operatorname{am} u}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am} a \,.\, \sin^2\operatorname{am} u} = Z(a) + \tfrac{1}{2} Z(u-a) - \tfrac{1}{2} Z(u+a)$$

und der aus dieser Gleichung durch Vertauschung von a und u erhaltenen Gleichung (54):

$$(54)\qquad \frac{\varkappa^2 \sin\operatorname{am} u \,.\, \cos\operatorname{am} u \,.\, \Delta\operatorname{am} u \,.\, \sin^2\operatorname{am} a}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am} a \,.\, \sin^2\operatorname{am} u} = Z(u) - \tfrac{1}{2} Z(u-a) - \tfrac{1}{2} Z(u+a)$$

fanden wir durch Addition die Gleichung (55):

$$(55)\qquad Z(a) + Z(u) - Z(u+a) = \varkappa^2 \sin\operatorname{am} u \,.\, \sin\operatorname{am} a \,.\, \sin\operatorname{am}(u+a).$$

Hieraus folgt:

$$Z(a) + Z(b) - Z(a+b) = \varkappa^2 \sin\operatorname{am} a \,.\, \sin\operatorname{am} b \,.\, \sin\operatorname{am}(a+b).$$

Wir erhalten daher:

$$(70)\qquad \Pi(u,a) + \Pi(u,b) - \Pi(u,a+b)$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(a-u) \,.\, \vartheta(b-u) \,.\, \vartheta(a+b+u)}{\vartheta(a+u) \,.\, \vartheta(b+u) \,.\, \vartheta(a+b-u)} + u\varkappa^2 \sin\operatorname{am} a \,.\, \sin\operatorname{am} b \,.\, \sin\operatorname{am}(a+b).$$

eine Gleichung, welche das Additionstheorem der Parameter ausdrückt.

Den auf der rechten Seite dieser Gleichung erscheinenden Logarithmanden haben wir oben Gleichung (67) durch elliptische Funktionen ausgedrückt. Diesen letzten Ausdruck hat Jacobi durch eine verwickelte Rechnung übergeführt in die von Legendre herrührende und auf anderem Wege gefundene Form:

$$\frac{1-\varkappa^2\sin\operatorname{am} u \,.\, \sin\operatorname{am} a \,.\, \sin\operatorname{am} b \,.\, \sin\operatorname{am}(a+b-u)}{1+\varkappa^2\sin\operatorname{am} u \,.\, \sin\operatorname{am} a \,.\, \sin\operatorname{am} b \,.\, \sin\operatorname{am}(a+b+u)}.$$

Durch Einführung dieses Ausdrucks nimmt die das Additionstheorem der Parameter darstellende Gleichung die Form an:

$$(71)\qquad \Pi(u,a) + \Pi(u,b) - \Pi(u,a+b)$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{1-\varkappa^2\sin\operatorname{am} u \,.\, \sin\operatorname{am} a \,.\, \sin\operatorname{am} b \,.\, \sin\operatorname{am}(a+b-u)}{1+\varkappa^2\sin\operatorname{am} u \,.\, \sin\operatorname{am} a \,.\, \sin\operatorname{am} b \,.\, \sin\operatorname{am}(a+b+u)}$$
$$+ u\varkappa^2 \sin\operatorname{am} a \,.\, \sin\operatorname{am} b \,.\, \sin\operatorname{am}(a+b).$$

Aus dieser Gleichung (71) ergiebt sich:

$$(72)\qquad \Pi(u,a+bi) = \Pi(u,a) + \Pi(u,bi)$$
$$- \frac{1}{2}\log\frac{1-\varkappa^2\sin\operatorname{am} u \,.\, \sin\operatorname{am} a \,.\, \sin\operatorname{am} bi \,.\, \sin\operatorname{am}(a+bi-u)}{1+\varkappa^2\sin\operatorname{am} u \,.\, \sin\operatorname{am} a \,.\, \sin\operatorname{am} bi \,.\, \sin\operatorname{am}(a+bi+u)}$$
$$- u\varkappa^2 \sin\operatorname{am} a \,.\, \sin\operatorname{am} bi \,.\, \sin\operatorname{am}(a+bi).$$

Wir könnten hier wieder die elliptischen Funktionen mit zusammengesetztem Argument auf solche mit einfachem Argument und diejenigen mit imaginärem Argument auf solche mit reellem zurückführen, allein diese Rechnung ist uns zu unterlassen gestattet, da wir auf einfacherem Wege unseren Zweck erreichen können.

Die obige Formel (72) lehrt uns, dafs die Funktion Π mit einem komplexen Parameter zurückgeführt werden kann auf eine Funktion Π mit reellem Parameter und eine zweite Funktion Π mit einem rein imaginären Parameter. Bei der Untersuchung von $\Pi(u,ai)$ hat sich aber gezeigt, dafs die Transcendente Π mit rein imaginärem Parameter sich auf die Transcendente

Π zurückführen läfst, in welcher der rein imaginäre Parameter um K vermehrt ist. Diese Ueberlegung lehrt also, dafs sich $\Pi(u, a+bi)$ ausdrücken läfst durch $\Pi(u, a)$ und $\Pi(u, bi+K)$.

Was die verschiedenen Werte des Jacobi'schen Parameters anbelangt, so erkennen wir aus den bisher verfolgten Untersuchungen, dafs wir nur die Fälle zu betrachten nötig haben, in denen der Parameter die Form a, beziehungsweise $a-K$ hat, wo a zwischen 0 und K liegt oder die Form $ai+K$, wo a zwischen 0 und K' liegt.

Die Form des Parameters $a-K$ rechtfertigt sich aus der Thatsache, dafs aus der Erklärung des elliptischen Integrals dritter Gattung in der Jacobi'schen Normalform:

$$\Pi(u, a) = \int_0^u \frac{\varkappa^2 \sin \operatorname{am} a \,.\, \cos \operatorname{am} a \,.\, \Delta \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u\, du}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u}$$

hervorgeht, dafs Π in Bezug auf den Parameter eine ungerade Funktion und demnach

$$\Pi(u, -a) = -\Pi(u, a)$$

ist.

Die allgemeinste Form des Integrals dritter Gattung in der Form Jacobi's ist:

$$\Pi(u+vi,\ a+bi),$$

in welcher Argument und Parameter komplex sind.

Zur Untersuchung dieses Falles gehen wir wieder von der in Gleichung (50) gegebenen Definition von Π vermittelst der ϑ-Funktion aus:

$$\Pi(u, a) = u Z(a) + \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)}.$$

Dieser Definition zufolge ist:

$$\Pi(u, a) + \Pi(v, b) = u Z(a) + v Z(b) + \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)} \cdot \frac{\vartheta(v-b)}{\vartheta(v+b)},$$

$$\begin{aligned}\Pi(u+v, a+b) + \Pi(u-v, a-b) &= (u+v) Z(a+b) + (u-v) Z(a-b) \\ &+ \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta(u+v-a-b)}{\vartheta(u+v+a+b)} \cdot \frac{\vartheta(u-v-a+b)}{\vartheta(u-v+a-b)},\end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned}&\Pi(u+v, a+b) + \Pi(u-v,\ a-b) - 2\Pi(u, a) - 2\Pi(v, b) \\ &= (u+v) Z(a+b) + (u-v) Z(a-b) - 2u Z(a) - 2v Z(b) \\ &+ \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta(u+v-a-b) \,.\, \vartheta(u-v-a+b)}{\vartheta(u+v+a+b) \,.\, \vartheta(u-v+a-b)} - \frac{1}{2} \log \left\{\frac{\vartheta(u-a) \,.\, \vartheta(v-b)}{\vartheta(u+a) \,.\, \vartheta(v+b)}\right\}^2\end{aligned}$$

oder durch Vereinigung der beiden Logarithmen:

$$\begin{aligned}(73)\qquad &\Pi(u+v,\ a+b) + \Pi(u-v,\ a-b) - 2\Pi(u, a) - 2\Pi(v, b) \\ &= (u+v) Z(a+b) + (u-v) Z(a-b) - 2u Z(a) - 2v Z(b) \\ &+ \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta(u+v-a-b) \,.\, \vartheta(u-v-a+b)}{\vartheta(u+v+a-b) \,.\, \vartheta(u-v+a-b)} \left\{\frac{\vartheta(u+a) \,.\, \vartheta(v+b)}{\vartheta(u-a) \,.\, \vartheta(v-b)}\right\}^2.\end{aligned}$$

Aus der früher hergeleiteten Gleichung:

$$\left(\frac{\vartheta(r) \,.\, \vartheta(s)}{\vartheta(0)}\right)^2 = \frac{\vartheta(r+s) \,.\, \vartheta(r-s)}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} r \,.\, \sin^2 \operatorname{am} s}$$

ergiebt sich aber, wenn man einmal:

$$\begin{array}{r}r = u - a \\ s = v - b \\ \hline r + s = u + v - a - b \\ r - s = u - v - a + b\end{array}$$

und dann:

$$\begin{array}{r}r = u + a \\ s = v + b \\ \hline r + s = u + v + a + b \\ r - s = u - v + a - b\end{array}$$

setzt:

$$\left(\frac{\vartheta(u-a)\,.\,\vartheta(v-b)}{\vartheta(0)}\right)^2 = \frac{\vartheta(u+v-a-b)\,.\,\vartheta(u-v-a+b)}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(u-a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(v-b)}$$

$$\left(\frac{\vartheta(u+a)\,.\,\vartheta(v+b)}{\vartheta(0)}\right)^2 = \frac{\vartheta(u+v+a+b)\,.\,\vartheta(u-v+a-b)}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(u+a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(v+b)},$$

folglich:

$$\frac{\vartheta(u+v-a-b)\,.\,\vartheta(u-v-a+b)}{\{\vartheta(u-a)\,.\,\vartheta(v-b)\}^2} = \frac{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(u-a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(v-b)}{\vartheta^2(0)},$$

$$\frac{\vartheta(u+v+a+b)\,.\,\vartheta(u-v+a-b)}{\{\vartheta(u+a)\,.\,\vartheta(v+b)\}^2} = \frac{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(u+a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(v+b)}{\vartheta^2(0)}$$

und endlich durch Division dieser beiden letzten Gleichungen:

$$\frac{\vartheta(u+v-a-b)\,.\,\vartheta(u-v-a+b)\,\{\vartheta(u+a)\,.\,\vartheta(v+b)\}^2}{\vartheta(u+v+a+b)\,.\,\vartheta(u-v+a-b)\,\{\vartheta(u-a)\,.\,\vartheta(v-b)\}^2}$$
$$= \frac{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(u-a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(v-b)}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(u+a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(v+b)}.$$

Ferner ergiebt sich aus der früher abgeleiteten Formel (55):

$$Z(a) + Z(u) - Z(a+u) = \varkappa^2 \sin\operatorname{am} a\,.\,\sin\operatorname{am} u\,.\,\sin\operatorname{am}(a+u)$$

für $u = b$ und $u = -b$, da Sinus und Z ungerade Funktionen sind:

$$Z(a) + Z(b) - Z(a+b) = \varkappa^2 \sin\operatorname{am} a\,.\,\sin\operatorname{am} b\,.\,\sin\operatorname{am}(a+b)$$
$$Z(a) - Z(b) - Z(a-b) = -\varkappa^2 \sin\operatorname{am} a\,.\,\sin\operatorname{am} b\,.\,\sin\operatorname{am}(a-b)$$

und mithin:

$$Z(a+b) = Z(a) + Z(b) - \varkappa^2 \sin\operatorname{am} a\,.\,\sin\operatorname{am} b\,.\,\sin\operatorname{am}(a+b)$$
$$Z(a-b) = Z(a) - Z(b) + \varkappa^2 \sin\operatorname{am} a\,.\,\sin\operatorname{am} b\,.\,\sin\operatorname{am}(a-b).$$

Setzen wir alle diese Werte in die Gleichung (73) ein, so erhalten wir:

$$\Pi(u+v, a+b) + \Pi(u-v, a-b) - 2\Pi(u,a) - 2\Pi(v,b)$$
$$= (u+v)\,Z(a) + (u+v)\,Z(b) - (u+v)\,\varkappa^2 \sin\operatorname{am} a\,.\,\sin\operatorname{am} b\,.\,\sin\operatorname{am}(a+b)$$
$$+ (u-v)\,Z(a) - (u-v)\,Z(b) + (u-v)\,\varkappa^2 \sin\operatorname{am} a\,.\,\sin\operatorname{am} b\,.\,\sin\operatorname{am}(a-b)$$
$$- 2u\,Z(a) - 2v\,Z(b) + \frac{1}{2}\log\frac{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(u-a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(v-b)}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(u+a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(v+b)}$$
$$= (u+v+u-v-2u)\,Z(a) + (u+v-u+v-2v)\,Z(b)$$
$$- \varkappa^2 \sin\operatorname{am} a\,.\,\sin\operatorname{am} b\,\{(u+v)\sin\operatorname{am}(a+b) - (u-v)\sin\operatorname{am}(a-b)\}$$
$$+ \frac{1}{2}\log\frac{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(u-a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(v-b)}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(u+a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(v+b)}$$

oder, da die Faktoren von $Z(a)$ und $Z(b)$ verschwinden:

$$\Pi(u+v, a+b) + \Pi(u-v, a-b) - 2\Pi(u, a) - 2\Pi(v, b)$$
$$= -\varkappa^2 \sin\operatorname{am} a \,.\, \sin\operatorname{am} b \{(u+v)\sin\operatorname{am}(a+b) - (u-v)\sin\operatorname{am}(a-b)\}$$
$$+\frac{1}{2}\log\frac{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(u-a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(v-b)}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(u+a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(v+b)}.$$

Vertauschen wir in dieser Gleichung u und v mit einander, so erhalten wir:

$$\Pi(u+v, a+b) - \Pi(u-v, a-b) - 2\Pi(v, a) - 2\Pi(u, b)$$
$$= -\varkappa^2 \sin\operatorname{am} a \,.\, \sin\operatorname{am} b \{(u+v)\sin\operatorname{am}(a+b) + (u-v)\sin\operatorname{am}(a-b)\}$$
$$+\frac{1}{2}\log\frac{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(v-a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(u-b)}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(v+a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(u+b)},$$

und, wenn wir diese beiden Gleichungen addieren und die Summe durch 2 dividieren:

(74)
$$\Pi(u+v, a+b) - \Pi(u,a) - \Pi(u,b) - \Pi(v, a) - \Pi(v, b)$$
$$= -\varkappa^2 (u+v)\sin\operatorname{am} a \,.\, \sin\operatorname{am} b \,.\, \sin\operatorname{am}(a+b)$$
$$+\frac{1}{4}\log\left\{\frac{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(u-a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(v-b)}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(u+a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(v+b)}\cdot\frac{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(v-a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(u-b)}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}(v+a)\,.\,\sin^2\operatorname{am}(u+b)}\right\}.$$

Diese Gleichung zeigt, daſs sich der Ausdruck $\Pi(u+v, a+b)$ auf die Ausdrücke $\Pi(u, a)$; $\Pi(u, b)$; $\Pi(v, a)$; $\Pi(v, b)$ zurückführen läſst. Das Integral $\Pi(u+vi, a+bi)$ läſst sich daher auf die folgenden vier:

$$\Pi(u, a);\ \Pi(u, bi);\ \Pi(vi, a);\ \Pi(vi, bi)$$

oder auf die vier:

$$\Pi(u, a-K);\ \Pi(u, bi+K);\ \Pi(vi, a-K);\ \Pi(vi, bi+K)$$

reduzieren.

Die je zwei mit imaginärem Argument behafteten Funktionen Π können aber auf solche mit reellem Argument zurückgeführt werden.

Um dies zu erreichen, müssen wir vorher die Werte von $\vartheta(ui+K)$ und $Z(ui+K)$ ableiten.

Setzen wir in der früher gefundenen Gleichung (60):

$$\vartheta(u+K) = \frac{\varDelta\operatorname{am} u}{\sqrt{\varkappa'}}\vartheta(u)$$

ui an die Stelle von u, so erhalten wir:

$$\vartheta(ui+K) = \frac{\varDelta\operatorname{am} ui}{\sqrt{\varkappa'}}\vartheta(ui)$$
$$= \frac{\varDelta\operatorname{am}(u, \varkappa')}{\sqrt{\varkappa'}\cos\operatorname{am}(u, \varkappa')}\vartheta(ui)$$

und setzen wir für $\vartheta(ui)$ den früher in Gleichung (62) gefundenen Wert:

$$\vartheta(ui) = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\cos\operatorname{am}(u, \varkappa')\frac{\vartheta(u, \varkappa')\,.\,\vartheta(0)}{\vartheta(0, \varkappa')},$$

so erhalten wir:

$$\frac{\vartheta(ui+K)}{\vartheta(0)} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa'}}e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\varDelta\operatorname{am}(u, \varkappa')\frac{\vartheta(u, \varkappa')}{\vartheta(0, \varkappa')},$$

oder, da infolge der eben angezogenen Gleichung (60):

$$\vartheta(u+K', \varkappa') = \frac{\varDelta\operatorname{am}(u, \varkappa')}{\sqrt{\varkappa}}\cdot\vartheta(u, \varkappa'),$$

oder, da die Faktoren von $Z(a)$ und $Z(b)$ verschwinden:

$\Pi(u +$ … $(u, a) - 2\Pi(v, b)$

$= - \varkappa^2 \sin \mathrm{am}$ … $(u - v) \sin \mathrm{am}\,(a - b)\}$

… $\frac{(v - b)}{(v + b)}$.

Vertauschen wi… …nander, so erhalten wir:

$\Pi(u +$ … $(v, a) - 2\Pi(u, b)$

$= - \varkappa^2 \sin \mathrm{am}$ … $(u - v) \sin \mathrm{am}\,(a - b)\}$

… $\frac{(u - b)}{(u + b)}$,

und, wenn wir diese be… …umme durch 2 dividieren:

(74) $\Pi(u +$ … $(v, a) - \Pi(v, b)$

$= - \varkappa^2 (u +$ …

$+ \frac{1}{4} \log \left\{ \frac{1 - \varkappa^2 \sin}{1 - \varkappa^2 \sin} \right.$ … $\left. \frac{\mathrm{am}\,(v - a) \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\,(u - b)}{\mathrm{am}\,(v + a) \,.\, \sin^2 \mathrm{am}\,(u + b)} \right\}$.

Diese Gleichun… $u + v, a + b)$ auf die Ausdrücke $\Pi(u, a)$; $\Pi(u, b)$; $\Pi(v,$ … Integral $\Pi(u + vi, a + bi)$ läfst sich daher auf die folg…

… (vi, bi)

oder auf die vier:

$\Pi(u, a$ … $)$; $\Pi(vi, bi + K)$

reduzieren.

Die je zwei … Funktionen Π können aber auf solche mit reellem Arg…

Um dies zu er… von $\vartheta(ui + K)$ und $Z(ui + K)$ ableiten.

Setzen wir in …):

ui an die Stelle von …

… $\vartheta(ui)$

und setzen wir für ϑ … …fundenen Wert:

… $\frac{\varkappa') \,.\, \vartheta(0)}{(0, \varkappa')}$,

so erhalten wir:

… $\frac{\vartheta(u, \varkappa')}{\vartheta(0, \varkappa')}$,

oder, da infolge der …

… $(u, \varkappa')$,

also:

$$\varDelta\,\mathrm{am}\,(u,\varkappa')\,\vartheta\,(u,\varkappa') = \sqrt{\varkappa}\;\vartheta\,(u+K',\varkappa')$$

$$\frac{\vartheta\,(ui+K)}{\vartheta\,(0)} = \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}}\;e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\,\frac{\vartheta\,(u+K',\varkappa')}{\vartheta\,(0,\varkappa')}.$$

Nehmen wir auf beiden Seiten die Logarithmen und differenzieren dann, so erhalten wir zunächst:

$$\log\frac{\vartheta\,(ui+K)}{\vartheta\,(0)} = \log\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}} + \frac{\pi u^2}{4KK'} + \log\frac{\vartheta\,(u+K',\varkappa')}{\vartheta\,(0,\varkappa')}$$

und dann:

$$\frac{d\log\dfrac{\vartheta\,(ui+K)}{\vartheta\,(0)}}{du} = \frac{\pi u}{2KK'} + \frac{d\log\dfrac{\vartheta\,(u+K',\varkappa')}{\vartheta\,(0,\varkappa')}}{du},$$

oder:

$$iZ\,(ui+K) = \frac{\pi u}{2KK'} + Z\,(u+K',\varkappa').$$

Nach dieser Herleitung von $\vartheta\,(ui+K)$ und $Z(ui+K)$ beachten wir, dafs infolge von Gleichung (50)

$$\begin{aligned}
\Pi\,(vi,bi+K) &= ivZ(bi+K) + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta\,(vi-bi-K)}{\vartheta\,(vi+bi+K)}\\
&= ivZ(bi+K) + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta\,(bi-vi+K)}{\vartheta\,(bi+vi+K)}\\
&= ivZ(bi+K) + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta\,\{(b-v)\,i+K\}}{\vartheta\,\{(b+v)\,i+K\}}.
\end{aligned}$$

Setzen wir für $i\;Z(bi+K)$ und für $\vartheta\{(b-v)\,i+K\}$ und $\vartheta\{(b+v)\,i+K\}$ die sich aus den obigen Herleitungen ergebenden Werte ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\Pi\,(vi,bi+K) &= \frac{\pi bv}{2KK'} + vZ(b+K',\varkappa') + \frac{1}{2}\log\frac{e^{\frac{\pi(b-v)^2}{4KK'}}\,\vartheta\,(b-v+K',\varkappa')}{e^{\frac{\pi(b+v)^2}{4KK'}}\,\vartheta\,(b+v+K',\varkappa')}\\
&= \frac{\pi bv}{2KK'} + vZ(b+K',\varkappa') + \frac{1}{2}\log\left\{e^{-\frac{\pi bv}{KK'}}\,\frac{\vartheta\,(b-v+K',\varkappa')}{\vartheta\,(b+v+K',\varkappa')}\right\}\\
&= \frac{\pi bv}{2KK'} + vZ(b+K',\varkappa') - \frac{\pi bv}{2KK'} + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta\,(b-v+K',\varkappa')}{\vartheta\,(b+v+K',\varkappa')}\\
&= vZ(b+K',\varkappa') + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta\,(b-v+K',\varkappa')}{\vartheta\,(b+v+K',\varkappa')}\\
&= vZ(b+K',\varkappa') + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta\,\{-(v-(K'+b)),\varkappa'\}}{\vartheta\,\{v+(K'+b),\varkappa'\}}\\
&= vZ(b+K',\varkappa') + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta\,(v-(K'+b),\varkappa')}{\vartheta\,(v+(K'+b),\varkappa')}\\
&= \Pi\,(v,b+K',\varkappa'),
\end{aligned}$$

infolge der allgemeinen Grundformel (50)

$$uZ(a) + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta\,(u-a)}{\vartheta\,(u+a)} = \Pi\,(u,a).$$

Die Funktion $\Pi\,(vi,\,bi+K)$ ist hiermit auf eine andere mit reellem Argument reduziert, welche die Form $\Pi\,(u,a)$ besitzt, also zu dem Falle gehört, welcher der erste genannt wurde.

Die Reduktion der Funktion $\Pi(vi, a - K)$ auf eine andere mit reellem Argument läfst sich aus der eben gewonnenen Gleichung

$$\Pi(vi, bi + K) = \Pi(v, b + K', \varkappa')$$

herleiten. Denn setzen wir in dieser $b = ai$, so erhalten wir:

$$\Pi(vi, -a + K) = \Pi(v, ai + K', \varkappa').$$

Die Funktion Π ist aber in Bezug auf den Parameter eine ungerade Funktion d. h.

$$\Pi(u, -a) = -\Pi(u, a).$$

Die obige Gleichung kann daher übergeführt werden in:

$$-\Pi(vi, a - K) = \Pi(v, ai + K', \varkappa').$$

Wir finden also, dafs sich auch die Funktion $\Pi(vi, a - K)$ auf eine andere mit reellem Argument zurückführen läfst und zwar eine solche, welche die Form $\Pi(u, ai + K)$ besitzt, also zu dem Falle gehört, welcher der zweite genannt wurde.

Fassen wir diese letzten Betrachtungen noch einmal kurz zusammen, so kommen wir zur Feststellung folgender Ergebnisse:

Die allgemeinste Form des elliptischen Integrals dritter Gattung

$$\Pi(u + vi, a + bi)$$

läfst sich zunächst auf die vier einfacheren Formen:

$$\Pi(u, a); \quad \Pi(u, bi); \quad \Pi(vi, a); \quad \Pi(vi, bi)$$

reduzieren. Für diese vier Formen können wir aber auch die folgenden vier betrachten:

$$\Pi(u, a - K); \quad \Pi(u, bi + K); \quad \Pi(vi, a - K); \quad \Pi(vi, bi + K).$$

Diese lassen sich weiter auf die Formen bringen:

$$\Pi(u, a - K); \quad \Pi(u, bi + K); \quad -\Pi(v, ai + K', \varkappa'); \quad \Pi(v, b + K', \varkappa'),$$

von denen die erste und vierte und ebenso die zweite und dritte zu je derselben Klasse gehören, nämlich die beiden zuerst genannten zu dem, erste Klasse genannten, Falle, und die beiden zuletzt angeführten zu dem als zweite Klasse bezeichneten Falle.

Bei der Untersuchung der elliptischen Integrale dritter Gattung können wir uns also, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, auf die beiden Formen:

$$\Pi(u, a) \quad \text{und} \quad \Pi(u, ai + K)$$

beschränken.